**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА**
**МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

Кафедра математичної економіки, економетрії фінансової та страхової математики

# Магістерська робота

## Задача керування зосередженими параметрами у правих частинах гіперболічних систем

Виконав: студент групи МТЕМ-21с спеціальності 111 - *математика,* спеціалізації *математична економіка та економетрика*

**Гнатюк Олександр Ярославович**

Науковий керівник:
проф. Кирилич В. М.

*Роботу рекомендовано до захисту на засіданні кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики протокол від 04 грудня 2020 року №4*

*В. о. завідувача кафедрою*
*проф. Оліскевич М. О.*

**Львів – 2020**

# Зміст

# Вступ

**Актуалність теми.**Для математичного описання багатьох явищ і процесів різноманітного походження дуже часто використовують нелінійні системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку гіперболічного типу. Такі системи широко застосовуються в теорії переносу і випромінювання, гідро-газодинаміці, при моделюванні процесів популяційної генетики, хімічної кінетики, математичної економіки і соціології тощо.

У багатьох прикладних задачах потрібно здійснюватиціленаправлену дію на об'єкти, що описані системами нелінійних рівнянь гіперолічного типу, тобто виникає питання щодо пошуку найкращого впливу на досліджувану систему, а з точки зору математики приводить до задач оптимального керування.

Сучасна теорія оптимального керування є обширною дисципліною, в основі якої об'єкти керування описувалися звичайними диференціальними рівняннями чи їх системами. При вивчені математичних моделей, що обгрунтовані рівняннями з частинними похідними, інтегральними рівняннями тощо зазвичай, використовують методи абстрактної теорії оптимізації засновані на функціональному аналізі.

Початком теорії оптимального керування закладено в 60-их роках минулого століття Л. С. Понтрягіним, В. Г. Болтянським, Р. В. Чемкрелідзе та Є. Ф. Міщенком, в роботах яких було запропонованопринципи максимуму. Завдяки принципу максимуму Понтрягіна розв'язано багато нових оптимізаційних задач.

Пізніше теорію оптимального керування розвивали, зокрема, В. М. Александров, К. А. Лурье, А. А. Мілютіним, Н. Н. Мойєсеєвим, Б. Н. Пшеничний, В. М. Тіхоміровим, Г. Л. Харатішвілі, Ф. Р. Чорноусько, Р. Белман, Р. Кальман, И. С. Лейтмон, Е. Лі, Л. Маркус, Ж.-Л. Ліонс, Е. Полак, А. Маєр, А. Халанай, Л. Чезарі, Л. Янг та ін.

Абстрактна теорія оптимізації запропонована в роботах В. Г. Болтянського, Дж. Варги, А. Иоффе, А. С. Матвеєва, Л. Неймтадата, Х. Халкіна, В. А. Якубовича, та ін. Підходи зв'язані із розвитком абстрактної теорії полягають у використанні єдиноподібної процедури виводу умов оптимальності для зосереджених і розподілених систем, з можливістю викласти основні ідеї найбільш доступно, не обтяжуючись технічними деталями.

Різноманітні задачі оптимального керування гіперболічними системами, зокрема, і першого порядку, досліджувалися в роботах М. А. Красносельського, Р. А. Полуектова, Д.-Р. Аубіна, М. Бенхора, С. Бенвенуті, А. Дугліса, Д. Конга, Е. Кернера, Т. Лі, З. Луо, Ж. Ву, А. В. Агручинцева, А. І. Єгорова, Т. К. Сірадзезетдінова, О. В. Васільєва, В. А. Срочко, В. А. Терлецького, В. А. Ільїна, М. А. Куржанського ті ін.

Актуальною є проблема побудови методів розв'язування гіперболічних задач оптимального керування в класі гладких керуючих впливів з врахуванням обмежень на керування в некласичних сформульованих задач (задачі з виродженими характеристиками, нелокальними інтегральними умовами, навантаженими системами, системи рівнянь Слуцького, задачі із нескінченним горизонтом планування)

# 1 Оптимальне керування виродженою гіперболічною системою напівлінійних рівнянь першого порядку

У цьому розділі проведено дослідження глобальної керованості процесу, що описаний напівлінійної гіперболічною системою рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними. Існування та єдиність розв'язків вихідної та спряженої гіперболічних задач проводяться за допомогою методу стискуючих відображень.

## 1.1 Формулювання задачі

В області $(x,t) \in \Pi = (0,l) \times (0,+\infty)$ розглянемо деякий процес $y = y(x,t)$, еволюцію якого в часу та просторі описуємо напівлінійною системою гіперболічних рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = f(y(x,t),x,t), \tag{1.1}$$

де $y : \Pi \to \mathbb{R}^n$ вектор-функцію розв'язку, $\lambda$ відображення з $\overline{\Pi}$ на простір $n \times n$ діагональних дійснозначних матриць

$$\lambda(x,t) = diag(\lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t), \ldots, \lambda_n(x,t))$$

і $f : \mathbb{R}^n \times \Pi \to \mathbb{R}^n$ - задана нелінійна вектор-функція.

Зауважимо, що в однорідному випадку довільну напівлінійну гіперболічну систему першого порядку з недіагональною характеристичною матрицею можна завжди звести до напівлінійної гіперболічної системи з діагональною характеристичною матрицею.

Розглянемо множини

$$\begin{gathered} I = 1, 2, \ldots, n, \\ I_0 = i \in I | \lambda_i(x,t) > 0, (x,t) \in \overline{\Pi}, \\ I_l = i \in I | \lambda_i(x,t) < 0, (x,t) \in \overline{\Pi}, \end{gathered}$$

для яких $m_1 = card(I_0), m_2 = card(I \setminus I_l)$. Тобто, без обмеження загальності будемо вважати, що перші $m_1$ власних значень є додатніми, далі $m_2 - m_1)$ - нульові, а решта $n - m_2$ - від'ємні.

Для системи (1.1) задамо початкові та крайові умови:

$$y(x,0) = y^0(u^{(0)}(x),x), x \in [0,l], \tag{1.2}$$

$$y_+(0,t) = \gamma^0(y_-(0,t), u^{(1)}(t), t), \in \mathbb{R}_+, \tag{1.3}$$

$$y_-(l,t) = \gamma^l(y_+(l,t), u^{(2)}(t), t), \in \mathbb{R}_+. \tag{1.4}$$

Тут $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}$ керуючі впливи такі, що для компактів $U^0, U^1, U^2$, $u^{(0)} : [0,l] \to U^0$, $U^0 \subset \mathbb{R}^r (r \in \mathbb{N})$, $u^{(1)} : \mathbb{R}_+ \to U^1, U^1 \subset \mathbb{R}^{r_1} (r_1 \in \mathbb{N})$; $u^{(2)} : \mathbb{R}_+ \to U^2, U^2 \subset \mathbb{R}^{r_2} (r_2 \in \mathbb{N})$; $y^0 : U^0 \times [0,l] \to \mathbb{R}^n$; $y_+ : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^{m_1}$, $y_- : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^{n-m_2}$ підвектори вектора $y$, що відповідають відповідним додатнім та від'ємним власним значенням характеристичної матриці системи (1.1) (аналогічні позначення використовуватимемо далі для інших функцій); $\gamma^0 : \mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{m_1}$, $\gamma^l : \mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n-m_2}$.

Нехай цільовий функціонал має вигляд

$$J(u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}) = \int\limits_0^{+\infty} G_0(y_-(0,t), y_+(l,t)dt + \iint\limits_{\Pi} G(y(x,t),x,t)dxdt, \tag{1.5}$$

де $G_0 : \mathbb{R}^{m_1+n-m_2} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, G : \mathbb{R}^n \times \overline{\Pi} \to \overline{\Pi}$, причому ці функції є вимірними на $[0,+\infty)$ для довільної функції $y$ з простору $\mathcal{Q}$, який введемо нижче.

*Зауваження* 1.1. Підінтегральні функції $G, G_0$ в цільовому функціоналі (1.5), зазвичай, в прикладних задачах, наприклад для $G$, мають один із виглядів:

I $G(y,x,t) = \frac{1}{2}e^{-\rho G t}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_i)^2$, де $\overline{y} : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^n$ - задана функція, $\rho G$ - норма дисконтування;

II $G(y,x,t) = e^{-\rho G t}g(y,x,t)$, де $g : \mathbb{R}^n \times \overline{\Pi} \to \overline{\Pi}$ - задана обмежена функція.

Перелічені класи функцій не вичерпують усі можливі варіанти підінтегральних функцій цільового функціоналу (1.5). Однак, підінтегральні функції цільового функціоналу повинні бути представлені у вигляді добутку інтегрованої функції, на відповідній області, яка не залежить від розв'язку задачі (1.1) – (1.4) та нелінійної функції від розв'язку тієї ж задачі, ріст якого не перевищує ріст інтегрованої функції для всіх допустимих наборів керувань та відповідних розв'язків задачі (1.1) – (1.4) при $t \to \infty$.

Отже, потрібно дослідити задачу

$$\min_{u^{(0)},u^{(1)},u^{(2)}} = J(u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}), \tag{1.6}$$

де мінімум береться по тих $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}$, для яких існує єдиний розв'язок задачі (1.1) – (1.4) в сенсі означення 1.1.

## 1.2 Коректна розв'язність задачі

Розглянемо простір $\mathcal{U}_{ad}$, елементами якого є набори керувань $(u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)})$, що задовільняють умови:

$$\begin{gathered} u^{(0)} \in (C[0,l])^r, u^{(1)} \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_1}, u^{(2)} \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_2}; \\ y_+^0(0, u^{(0)}(0)) = \gamma^0(y_-^0(0), u^{(1)}(0), 0), y_-^0(l, u^{(0)}(l)) = \gamma^l(y_+^0(l), u^{(2)}(0), 0); \\ \forall x \in [0,l] : u^{(0)} \in U^0, \forall t \in \mathbb{R}_+ : u^{(1)}(t) \in U^1, u^{(2)} \in U^2. \end{gathered}$$

Для довільного елемента $(u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}) \in \mathcal{U}_{ad}$, керування $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}$ неперервні, тому можна позначити:

$$\begin{gathered} y^0(u^{(0)}(x), x) = \tilde{y}^0(x); \\ \gamma^0(y_-(0,t), u^{(1)}(t), t) = \tilde{\gamma}^0(y_-(0,t), t); \\ \gamma^l(y_+(l,t), u^{(2)}(t), t) = \tilde{\gamma}^l(y_+(l,t), t). \end{gathered}$$

Нехай $L$ спільна стала Ліпшица для функцій $y$, тобто

$$|f_i(y^1, x, t) - f_i(y^2, x, t)| \leq L \max_{j \in I} |y_j^1 - y_j^2|,$$

а $\Lambda$ стала, що обмежує власні значення характеристичної матриці системи (1.1) за абсолютною величиною

$$\Lambda = \sup_{i \in I, (x,t) \in \overline{\Pi}} |\lambda_i(x,t)|.$$

На множині $\overline{\Pi}$ для $i \in I$ визначимо функції

$$\alpha_i(x,t;a,p) = \begin{cases} e^{px(l-x)-at}, & i \in I_0, i \in I_l; \\ e^{px-at}, & i \in I_0, i \notin I_l; \\ e^{p(l-x)-at}, & i \notin I_0, i \in I_l; \\ e^{pl-at}, & i \notin I_0, i \notin I_l. \end{cases}$$

з вибраними параметрами $a$ та $p$:

$$p = \max\{ln(4L)/l, 0\} + p_0;$$
$$a = \max\left\{p\Lambda, pl\Lambda, 4L\max\{e^{pl}, e^{pl^2/4}\}\right\} + a_0,$$

у яких $a_0, p_0 > 0$ довільно фіксовані величини.

Позначимо через $\xi = \varphi_i(\tau; x, t), i \in I$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau), \xi|_{\tau=t} = x,$$

який називатимемо характеристикою системи (1.2). Для всіх $(x,t) \in \overline{\Pi}$ та для довільного $i \in I$ існує єдина пара точок $(\varphi_i(\chi_i(x,t); x,t), \chi_i(x,t))$, $(\varphi_i((\nu_i(x,t); x,t), \nu_i(x,t)) \in \partial\Pi$, причому $(\varphi_i(\chi_i(x,t); x,t), \chi_i(x,t))$ точка перетину характеристики в напрямку спадання аргумента $\tau$, а $(\varphi_i((\nu_i(x,t); x,t), \nu_i(x,t))$ - в напрямку його зростання. Зауважимо, що для нульових власних значень, $\nu_i$ може приймати значення $+\infty$.

Уведемо області:

$$\Pi^i = \{(x,t) \in \overline{\Pi}|_{\chi_i(x,t)=0}\},\ i \in I;$$
$$\Pi_0^i = \{(x,t) \in \overline{\Pi}|_{\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t)=0}\},\ i \in I_0;$$
$$\Pi_l^i = \{(x,t) \in \overline{\Pi}|_{\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t)=l}\},\ i \in I_l;$$

Проінтегрувавши (1.2) вздовж характеристик, одержимо для всіх $i \in I$ систему інтегро-операторних рівнянь

$$y_i(x,t) = \mathcal{R}_i[y](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(y(\varphi_i(\tau; x,t), \tau), \varphi_i(\tau; x,t), \tau)d\tau, \tag{1.7}$$

$$\text{де } \mathcal{R}_i[y](x,t) = \begin{cases} \tilde{y}_i^0(\varphi_i(0; x,t)), & (x,t) \in \Pi^i, \\ \tilde{\gamma}_i^0(y_-(0, \chi_i(x,t)), \chi_i(x,t)), & (x,t) \in \Pi_0^i, \\ \tilde{\gamma}_i^l(y_+(l, \chi_i(x,t)), \chi_i(x,t)), & (x,t) \in \Pi_l^i. \end{cases}$$

Розглянемо метричний простір

$$\mathcal{Q} = \{y \in (C(\overline{\Pi}))^n \cap (B(\overline{\Pi}))^n : \\ y_i(\varphi_i(\cdot; x,t), \cdot) \in AC[\chi_i(x,t), \nu_i(x,t)],\ i \in I,\ (x,t) \in \overline{\Pi}\},$$

де $B(\overline{\Pi})$ - простір обмежених функцій на множині $\overline{\Pi}$, а $AC[\chi_i(x,t), \nu_i(x,t)]$ - простір абсолютно неперервних функцій на множині $[\chi_i(x,t), \nu_i(x,t)\rangle$ (тут під $\rangle$ розумітимемо ) або ] відповідно до того, приймає чи не приймає $\nu_i$ значення $+\infty$).

**Означення 1.1.** Під загальним розв'язком задачі (1.1) – (1.4), що відповідає набору керувань $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}$, будемо розуміти вектор-функцію $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{Q}$, компоненти якої задовільняють систему інтегро-операторних рівнянь (1.7) в $\overline{\Pi}$.

**Теорема 1.1.** *Якщо виконуються умови:*

1. $\lambda \in (C(\overline{\Pi}) \cup Lip_x(\overline{\Pi}))^n$, $\sup\limits_{\substack{i \in I, \\ (x,t) \in \overline{\Pi}}} \pm |\lambda_i(x,t)| < +\infty;$

2. $f \in (C(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}) \cup Lip_y(\overline{\Pi}))^n$, $\sup\limits_{\substack{i \in I, \\ (y,x,t) \in \mathbb{R}^n \times \Pi}} |f_i(y,x,t)| e^{-at} < +\infty;$

*3.* $y^0 \in (C(U^0 \times [0,l]))^n$*;*

*4.*

$$\gamma^0 \in (C(\mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+) \cup Lip_y(\mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+))^{m_1},$$
$$\sup_{\substack{i \in I_0, \\ (y_-, u^{(1)}, t) \in \mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+}} |\gamma_i^0(y_-, u^{(1)}, t)| e^{-at} < +\infty,$$

$$\gamma^l \in (C(\mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+) \cup Lip_y(\mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+))^{n-m_2},$$
$$\sup_{\substack{i \in I_l, \\ (y_+, u^{(2)}, t) \in \mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+}} |\gamma_i^l(y_+, u^{(2)}, t)| e^{-at} < +\infty;$$

*5.* $u^{(0)} \in (C[0,l])^r, u^{(1)} \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_1}, u^{(2)} \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_2}$*;*

*6.* $y_+^0(0, u^{(0)}(0)) = \gamma^0(y_-^0(0), u^{(1)}(0), 0)$,
$y_-^0(0, u^{(0)}(0)) = \gamma^l(y_+^0(l), u^{(2)}(0), 0)$ *(умови погодження нульового порядку).*

*Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (1.1) – (1.4).

*Доведення.* На елементах простору $\mathcal{Q}$ визначимо метрику

$$\rho_\alpha(y^1, y^2) = \| (y^1 - y^2) \|_\alpha, \tag{1.8}$$

породжену нормою

$$\| y \|_\alpha = \sup_{\substack{i \in I, \\ (x,t) \in \overline{\Pi}}} |y_i(x,t)| \alpha_i(x,t;a,p)$$

та вектор-оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n)$ такий, що

$$\mathcal{A}_i[y](x,t) = \mathcal{R}_i[y](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), \varphi_i(\tau;x,t),\tau) d\tau, \ i \in I.$$

Зазначимо, що введений простір $\mathcal{Q}$ є повний, доведення повноти якого з незначними змінами повторює доведення повноти неперервних і обмежених функцій на необмеженій множині з рівномірною метрикою [5]. З припущень 2) та 4) отримаємо обмеженість оператора $\mathcal{A}$, тому відшукання узагальненого розв'язку задачі (1.1) – (1.4) зводиться до відшукання нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$.

Візьмемо довільні два різні елементи $y^1, y^2$ з простору $\mathcal{Q}$. Тоді в цьому просторі, для всіх допустимих $i, x, t$ справджується

$$|y_i^1(x,t) - y_i^2(x,t)| \leq \rho_\alpha(y^1, y^2) \alpha_i^{-1}(x,t;a,p).$$

З визначення $\chi_i(x,t)$, легко отримати оцінки:

$$\chi_i(x,t) \leq t - x/\Lambda, \qquad i \in I_0;$$
$$\chi_i(x,t) \leq t - (l-x)/\Lambda, \qquad i \in I_l.$$

Справедливі також оцінки:

$$|\mathcal{R}_i[y^1](x,t) - \mathcal{R}_i[y^2](x,t)| \alpha_i(x,t;a,p) \leq$$
$$\leq L \max\Big\{ \max_{\substack{i \in I_0, \\ j \notin I_0}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(0,\chi_i(x,t);a,p)}, \max_{\substack{i \in I_l, \\ j \notin I_l}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(l,\chi_i(x,t);a,p)} \Big\} \rho_\alpha(y^1, y^2);$$

аналогічно,

$$\mathcal{A}_i[y^1](x,t) - \mathcal{A}_i[y^2](x,t)|\alpha_i(x,t;a,p) =$$
$$\Delta\mathcal{R}_i[y^1](x,t) - \Delta\mathcal{R}_i[y^2](x,t)|\alpha_i(x,t;a,p)+$$
$$+\left\| \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} \Delta_k f_i(y^k(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)d\tau \right\| \leq$$
$$\leq \Big( L \max\Big\{ \max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(0,\chi_i(x,t);a,p)}, \max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(l,\chi_i(x,t);a,p)} \Big\}+$$
$$+ L\int\limits_0^t \max_{\substack{i,j\in I,\\ s,x\in[0,l]}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(s,\sigma;a,p)} d\sigma \Big) \rho_\alpha(y^1,y^2).$$

Дослідимо на максимум функції в коефіцієнті стиску оператора $\mathcal{A}$. З вибору параметрів $a$ та $p$ справедлива нерівність

$$p\Lambda \max\{1,l\} < a,$$

з якої

$$\sup_{(x,t)\in\overline{\Pi}} \max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(0,\chi_i(x,t);a,p)} = \sup_{(x,t)\in\overline{\Pi}} \max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(l,\chi_i(x,t);a,p)} = e^{-pl} < \frac{1}{4L}$$

та

$$\int\limits_0^t \max_{\substack{i,j\in I,\\ s,x\in[0,l]}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(s,\sigma;a,p)} d\sigma \leq \frac{1}{a} \max\left\{e^{pl}, e^{pl^2/4}\right\} < \frac{1}{4L}.$$

Звідси, отримаємо

$$\rho(\mathcal{A}[y^1],\mathcal{A}[y^2]) \leq \frac{1}{2}\rho_\alpha(y^1,y^2).$$

Отже оператор $\mathcal{A}$ є стискуючим на елементах повного метричного простору $\mathcal{Q}$ з вибраними функціями $\alpha_i = \alpha_i(x,t;a,p)$ та параметрами $a,p$.

Тому, за теоремою Банаха, існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в метричному просторі $\mathcal{Q}$. Ця нерухома точка і є узагальненим розв'язком задачі (1.1) – (1.4) при довільних $u, u^{(1)}, u^{(2)} \in \mathcal{U}_{ad}$. □

*Зауваження* 1.2. Справедливе зауваження

$$z^T(x,t)\lambda(x,t)y(x,t) = z_+^T(x,t)\lambda_+(x,t)y_+(x,t) + z_-^T(x,t)\lambda_-(x,t)y_-(x,t),$$

де $y,z \in \mathcal{Q}, \lambda$ - характеристична матриця системи (1.2), $\lambda_+, \lambda_-$ діагональні матриці, що складаються з додатних та від'ємних власних значень матриці $\lambda$, а відповідно $T$ - символ транспонування.

## 1.3 Задача лінеаризації

Додатково вимагатимемо виконання наступних умов:

**A1**) $\lambda \in \left(C^{0,1}_{x,t}(\overline{\Pi})\right)^n$;

**A2**) $f \in \left(C^{1,0,0}_{y,x,t}(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi})\right)^n$;

**A3**) $y^0 \in \left(C^{1,0}_{u,x}(U \times [0,l])\right)^n$;

**A4)** $\gamma^0 \in \left(C^{1,1,0}_{y,u^{(1)},t}(\mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+)\right)^m_1$;

**A5)** $\gamma^l \in \left(C^{1,1,0}_{y,u^{(2)},t}(\mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+)\right)^{n-m_2}$;

**A6)** $G \in C^{1,0,0}_{y,x,t}(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi})$;

**A7)** $G_0 \in C_{y_-,y_+,t}(\mathbb{R}^{n-m_2} \times \mathbb{R}^m_1 \times \mathbb{R}_+)$.

Розглянемо випадок коли керування системою (1.1) здійснюємо тільки за допомогою керуючого впливу в початкових умовах.

Нехай маємо два допустимі процеси $\{y, u^{(0)}\}$ та $\{\tilde{y}, \tilde{u}^{(0)}\}$, де $\tilde{y} = y + \Delta y$, $\tilde{u}^{(0)} = u^{(0)} + \Delta u^{(0)}$. Тоді $\Delta y = \tilde{y} - y$ та $\Delta u^{(0)} = \tilde{u}^{(0)} - u^{(0)}$ задовільняють таку крайову задачу для гіперболічної системи

$$\frac{\partial \Delta y(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial \Delta y(x,t)}{\partial x} = \Delta_y f(y(x,t),x,t), \tag{1.9}$$

$$\begin{gathered}
\Delta y(x,0) = \Delta_u y^0(u^{(0)}(x),x), x \in [0,l],\\
\Delta_+(0,t) = \Delta_y \tilde{\gamma}^0(y_-(0,t),t), t \in \mathbb{R}_+,\\
\Delta_-(l,t) = \Delta_y \tilde{\gamma}^l(y_+(l,t),t), t \in \mathbb{R}_+,
\end{gathered}$$

де, наприклад, $\Delta_y f(y(x,y),x,t) = f(\tilde{y}(x,t),x,t) - f(y(x,t),x,t)$.

Приріст цільового функціоналу (1.5) має вигляд

$$\Delta J(u^{(0)}) = J(\tilde{u}^{(0)}) - J(u^{(0)}) = \\ = \int\limits_0^{+\infty} \Delta_y G_0(y_-(0,t), y_+(l,t),t)dt + \iint\limits_\Pi \Delta G(y(x,t),x,t)dxdt,$$

який можна представити як

$$\Delta J(u^{(0)}) = \int\limits_0^{+\infty} \Delta_y G_0(y_-(0,t), y_+(l,t),t)dt + \iint\limits_\Pi \Delta G(y(x,t),x,t)dxdt + \\ + \iint\limits_\Pi \psi^T(x,t)\Big(\frac{\partial \Delta y(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial \Delta y(x,t)}{\partial x} - \Delta_y f(y(x,t),x,t)\Big)dxdt, \tag{1.10}$$

де $\psi = \psi(x,t)$ - вектор-функція з простору $\mathcal{Q}$.

Уведемо функції

$$\begin{gathered}
H(\psi,y,x,t) = \psi^T(x,t)f(y,x,t) - G(y,x,t),\\
h(\psi(x,0),u^{(0)},x) = \psi^T(x,0)y^0(u^{(0)}(x),x),\\
h^1(\psi_+(0,t),y_-(0,t),u^{(1)}(t),t) = \psi^T_+(0,t)\lambda_+(0,t)\gamma^0(y_-(0,t),u^{(1)}(t),t),\\
h^2(\psi_-(l,t),y_+(l,t),u^{(2)}(t),t) = \psi^T_-(l,t)\lambda_-(l,t)\gamma^l(y_+(l,t),u^{(2)}(t),t).
\end{gathered}$$

Використавши формулу Тейлора [6] для функцій $G_0, G$ та $f$, із застосуванням зауваження 1.2 та нижче наведеної леми 1.1, лінеаризувавши крайові умови, одержимо

$$\Delta J(u) = \int\limits_0^{+\infty} \Big(\frac{\partial G_0(y_-(0,t), y_+(l,t), t)}{\partial y_-}\Big)^T \Delta y_-(0,t)dt+$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial G_0(y_-(0,t), y_+(l,t), t)}{\partial y_+}\Big)^T \Delta y_+(l,t)dt+$$

$$+ \iint\limits_{\Pi} \Big(\frac{\partial G(y(x,t),x,t)}{\partial y}\Big)^T \Delta y(x,t) + \int\limits_0^{+\infty} o_{G_0}(\parallel \Delta y_-(0,t) \parallel)dt+$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} o_{G_l}(\parallel \Delta y_+(l,t) \parallel)dt + \iint\limits_{\Pi} o_G(\parallel \Delta y(x,t) \parallel)dxdt+$$

$$+ \int\limits_0^{l} \lim_{t\to+\infty} \psi^T(x,t)\Delta y(x,t)dx - \int\limits_0^{l} \Delta_{u^{(0)}} h(\psi(x,0)), u^{(0)}(x), x)dx+$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \Big(\psi_+^T(l,t)\lambda_+(l,t) + \psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)\Big(\frac{\partial \tilde{\gamma}^l(y_+(l,t),t)}{\partial y_+}\Big)^T\Big)\Delta y_+(l,t)dt-$$

$$- \int\limits_0^{+\infty} \Big(\psi_-^T(0,t)\lambda_-(0,t) + \psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)\Big(\frac{\partial \tilde{\gamma}^l(y_-(0,t),t)}{\partial y_-}\Big)^T\Big)\Delta y_-(0,t)dt+$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)o_{\gamma^l}(\parallel \Delta y_+(l,t) \parallel)dt - \int\limits_0^{+\infty} \psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(\parallel \Delta y_-(0,t) \parallel)dt-$$

$$- \iint\limits_{\Pi} \Big(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} + \psi(x,t)\frac{\partial \lambda(x,t)}{\partial x}\Big)^T \Delta y(x,t)dxdt-$$

$$\iint\limits_{\Pi} \psi^T(x,t)\Big(\frac{\partial f(y(x,t),x,t)}{\partial y}\Big)^T \Delta y(x,t)dxdt - \iint\limits_{\Pi} \psi^T(x,t)o_f(\parallel \Delta y(x,t) \parallel)dxdt,$$

де, наприклад $\parallel \Delta y(x,t) \parallel = \max\limits_{i\in I} |y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p)$.

Зроблені перетворення дозволяють сформулювати спряжену задачу для задачі оптимального керування (1.1) − (1.2):

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} + \psi(x,t)\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x} = -H_y(\psi, y, x, t), (x,t) \in \Pi, \tag{1.11}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \psi(x,t)e^{at} = 0,\ x \in [0,l], \tag{1.12}$$

і для всіх $t \in \mathbb{R}_+$

$$\psi_+(l,t) = -\lambda_+(l,t))^{-1}\big(\frac{\partial\tilde{\gamma}^l(y_+(l,t),t)}{\partial y_+}\lambda_-(l,t)\psi_-(l,t) + \frac{\partial G_0(y_-(0,t),y_+(l,t),t)}{\partial y_+}\big),$$
$$\psi_-(0,t) = -\lambda_-(0,t))^{-1}\big(\frac{\partial\tilde{\gamma}^0(y_-(0,t),t)}{\partial y_-}\lambda_+(0,t)\psi_+(0,t) + \frac{\partial G_0(y_-(0,t),y_+(l,t),t)}{\partial y_-}\big), \tag{1.13}$$

для якої повинен існувати узагальнений розв'язок, означення якого буде наведено нижче.

Для нашої задачі приріст цільового функціоналу набуде вигляду

$$\Delta J(u^{(0)}) = -\int\limits_0^l \Delta_{u^{(0)}}h(\psi(x,0),u^{(0)}(x),x)dx + \int\limits_0^{+\infty} o_{G_0}(\| \Delta y_-(0,t) \|)dt+$$
$$+\int\limits_0^{+\infty} o_{G_0}(\| \Delta y_+(l,t) \|)dt + \iint\limits_{\Pi} o_G(\| \Delta y(x,t) \|)dxdt-$$
$$-\iint\limits_{\Pi} \psi^T(x,t)o_f(\| \Delta y(x,t) \|)dxdt + \int\limits_0^{+\infty} \psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)o_{\gamma^l}(\| \Delta y_+(l,t) \|)dt-$$
$$-\int\limits_0^{+\infty} \psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(\| \Delta y_-(0,t) \|)dt. \tag{1.14}$$

Перейдемо тепер до випадку, коли керований вплив на систему здійснюється тільки в крайових умовах. Оскільки керуючі впливи в сформульованій задачі не взаємопов'язані, то умови оптимальності для них можна виводити незалежно один від одного, а результуючі умови оптимальності будуть враховувати умови оптимальності кожного окремого керування. Однотипність крайових умов дозволяє розглядати лише випадок наявності керуючого впливу в крайовій умові (1.13).

Задача лінеаризації в такому випадку, з незначними змінами, повторює описаний вище процес. Основні його відмінності полягають в таких моментах:

1. початково-крайові умови, для задачі на приріст $\Delta y$, набудуть вигляду

$$\Delta y(x,0) = 0, x \in [0,l],$$
$$\Delta y_+(0,t) = \Delta_{y,u^{(1)}}\gamma^0(y^-(0,t),u^{(1)}(t),t), t \in \mathbb{R}_+,$$
$$\Delta y_-(l,t) = \Delta_y\gamma^l(y^+(l,t),t), t \in \mathbb{R}_+;$$

2. Замість доданка $-\int\limits_0^l \psi^T(x,0)\Delta y(x,0)dx$, з'явиться доданок

$$-\int\limits_0^{+\infty} \psi_+^T(0,t)\lambda+(0,t)\frac{\partial\gamma^0(y_-(0,t),u^{(1)}(t),t)}{\partial u^{(1)}}\Delta u^{(1)}(t)dt-$$
$$-\int\limits_0^{+\infty} \psi_+^T(0,t)\lambda+(0,t)o_{\gamma^0}(\| \Delta u^{(1)}(t) \|)dt;$$

3. зміниться крайова умова для спряженої системи

$$\psi_(0,t) = -(\lambda_-(0,t))^{-1}\big(\frac{\partial\gamma^0(y_-(0,t),u^{(1)}(t),t)}{\partial y_-}\lambda_+(0,t)\psi_+(0,t)dt- \\ \frac{\partial G_0(y_-(0,t),y_+(l,t),t)}{\partial y_-}\big),\ t\in[0,+\infty).$$

Припустимо тепер, що $\psi(x,t)$ розв'язок спряженої задачі, тоді приріст цільового функціоналу набуде вигляду

$$\Delta J(u^{(1)}) = -\int\limits_0^{+\infty}\Delta_{u^{(1)}}h^1(\psi_+(0,t),y_-(0,t),u^{(1)}(t),t)dt+ \\ \int\limits_0^{+\infty}o_{G_0}(\|\ \Delta y_-(0,t)\ \|)dt+\int\limits_0^{+\infty}o_{G_0}(\|\ \Delta y_+(l,t)\ \|)dt+ \\ +\iint\limits_{\Pi}o_G(\|\ \Delta y(x,t)\ \|)dxdt-\iint\limits_{\Pi}\psi^T(x,t)o_f(\|\ \Delta y(x,t)\ \|)dxdt+ \\ +\int\limits_0^{+\infty}\psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)o_{\gamma^l}(\|\ \Delta y_+(l,t)\ \|)dt\int\limits_0^{+\infty}\psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(\|\ \Delta y_-(0,t)\ \|)dt- \\ \int\limits_0^{+\infty}\psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(\|\ \Delta u^{(1)}(t)\ \|)dt. \quad (1.15)$$

Для керуючого впливу на правій межі одержимо відповідний приріст функціоналу

$$\Delta J(u^{(2)}) = -\int\limits_0^{+\infty}\Delta_{u^{(2)}}h^2(\psi_-(l,t),y_+(l,t),u^{(2)}(t),t)dt+ \\ \int\limits_0^{+\infty}o_{G_0}(\|\ \Delta y_-(0,t)\ \|)dt+\int\limits_0^{+\infty}o_{G_0}(\|\ \Delta y_+(l,t)\ \|)dt+ \\ +\iint\limits_{\Pi}o_G(\|\ \Delta y(x,t)\ \|)dxdt-\iint\limits_{\Pi}\psi^T(x,t)o_f(\|\ \Delta y(x,t)\ \|)dxdt+ \\ +\int\limits_0^{+\infty}\psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)o_{\gamma^l}(\|\ \Delta y_+(l,t)\ \|)dt- \\ \int\limits_0^{+\infty}\psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(\|\ \Delta y_-(0,t)\ \|)dt- \\ \int\limits_0^{+\infty}\psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)o_{\gamma^l}(\|\ \Delta u^{(2)}(t)\ \|)dt.$$

**Наслідок 1.1.** *При виконанні припущень цього пункту, справджується оцінка*

$$\exists\overline{K}>0,\textit{ таке, що }\sup_{\substack{i\in I_l,\\(x,t)\in\overline{\Pi}}}|\Delta y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p)\le\overline{K}\max_{x\in[0,l]}\|\ \Delta u^{(0)}(x)\ \|, \quad (1.16)$$

*де* $\| \Delta u^{(0)}(x) \|= \max\limits_{i\in\{1,2,\ldots,r\}} |\Delta u_i^{(0)}(x)|$.

*Доведення.* Використаємо інтегральне представлення розв'язку задачі (1.1)−(1.4), тобто для всіх $i \in I$ маємо

$$\Delta y_i(x,t) = \Delta_y \tilde{\mathcal{R}}_i[y](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} \Delta_y f_i(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), \varphi_i(\tau;x,t),\tau)d\tau,$$

де $\Delta_y \tilde{\mathcal{R}}_i[y](x,t) = \begin{cases} \Delta_u y_i^0(u^{(0)}(\varphi_i(0;x,t)), \varphi_i(0;x,t)), & (x,t)\in \Pi^i, \\ \Delta_y \tilde{\gamma}_i^0(y_-(0,\chi_i(x,t)),\chi_i(x,t)), & (x,t)\in \Pi_0^i, \\ \Delta_y \tilde{\gamma}_l^i(y_+(l,\chi_i(x,t)),\chi_i(x,t)), & (x,t)\in \Pi_l^i. \end{cases}$

Справджується така оцінка

$$|\Delta y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p) \le |\Delta_y \tilde{\mathcal{R}}_i[y](x,t)|\alpha_i(x,t;a,p)+$$
$$+ \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} |\Delta_y f_i(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)|\alpha_i(x,t;a,p)d\tau \le K \| \Delta u^{(0)}(x) \| +$$
$$+ L \| \Delta y \|_\alpha \Big( \sup_{(x,t)\in\overline{\Pi}} \max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(0,\chi_i(x,t);a,p)} + \sup_{(x,t)\in\overline{\Pi}} \max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(l,\chi_i(x,t);a,p)} \Big)+$$
$$+ L \| \Delta y \|_\alpha \int\limits_0^t \max_{\substack{i,j\in I,\\ s,x\in[0,l]}} \frac{\alpha_i(x,\tau;a,p)}{\alpha_j(s,t;a,p)} d\tau, \quad (1.17)$$

де $K$ стала Ліпшица для усіх керуючих впливів.

Враховуючи вибір параметрів $a$ та $p$, одержимо

$$\| \Delta y \|_\alpha = \sup_{\substack{i\in I,\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\Delta y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p) \le K \max_{x\in[0,l]} \| \Delta u^{(0)}(x) \| + (2Le^{-pl} +$$
$$\frac{L \max\{e^{pl}, e^{pl^2/4}\}}{a} \Big) \| \Delta y \|_\alpha \le K \max_{x\in[0,l]} \| \Delta u^{(0)}(x) \| + \frac{3}{4} \| \Delta y \|_\alpha, \quad (1.18)$$

звідки й отримаємо, що

$$\sup_{\substack{i\in I,\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\Delta y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p) \le \overline{K} \max_{x\in[0,l]} \| \Delta u^{(0)}(x) \|, \quad (1.19)$$

де $\overline{K} = 4K$. □

*Зауваження* 1.3. Аналогічні оцінки можна одержати для крайових керуючих впливів:

$$\exists \overline{K}^j > 0 : \sup_{\substack{i\in I,\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\Delta y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p) \le \overline{K}^j \max_{t\in[0,+\infty)} \| \Delta u^{(j)}(t) \|, \quad (1.20)$$

для всіх $j \in \{1,2\}$.

## 1.4 Розв'язність спряженої задачі

Для справедливості процесу лінеаризації приросту цільового функціоналу потрібно вимагати існування розв'язку спряженої задачі (1.11) – (1.13).

Уведемо області

$$\pi^i = \{(x,t) \in \overline{\Pi} | \nu_i(x,t) = +\infty\},\ i \in I;$$
$$\pi^i_l = \{(x,t) \in \overline{\Pi} | \varphi_i(\nu_i(x,t),x,t) = l\},\ i \in I_l;$$
$$\pi^i_0 = \{(x,t) \in \overline{\Pi} | \varphi_i(\nu_i(x,t),x,t) = 0\},\ i \in I_0.$$

На множині $\overline{\Pi}$ для всіх $i \in I$ визначимо функції

$$\beta_i(x,t;b,q) = \begin{cases} e^{qx(l-x)-bt}, & i \in I_0, i \in I_l; \\ e^{q(l-x)+bt}, & i \in I_0, i \notin I_l; \\ e^{qx+bt}, & i \notin I_0, i \in I_l; \\ e^{ql+bt}, & i \notin I_0, i \notin I_l. \end{cases}$$

для яких вибираємо параметрами

$$b = \max\left\{a, q\Lambda, ql\Lambda, 2(n+1)\max\{e^{ql}, e^{ql^2/4}\right\} + b_0,$$
$$q = \max\{ln(2\max\{n-m_2, m_1\}C)/l, 0\} + q_0,$$

з довільно фіксованими додатними величинами $b_0, q_0$, а стала $C$ обмежує за абсолютною величиною функції:

$$\frac{\partial \lambda_i(x,t)}{\partial x}, i \in I; \quad \frac{\partial f_i(y,x,t)}{\partial y_i}, i,j \in I;$$
$$(det\lambda_+(l,t))^{-1}\lambda_i(l,t)\frac{\partial \gamma^l_j}{\partial y_i}(y_+(l,t),u^{(2)}(t),t)\lambda_j(l,t), i \in I_l, j \in I_0;$$
$$(det\lambda_-(0,t))^{-1}\lambda_i(0,t)\frac{\partial \gamma^0_j}{\partial y_i}(y_+(0,t),u^{(1)}(t),t)\lambda_j(l,t), i \in I_l, j \in I_0,$$

на відповідних множинах визначення.

Проінтегрувавши вздовж характеристик та використавши крайові умови (1.13), для всіх $i \in I$, отримаємо систему інтегро-операторних рівнянь

$$\psi_i(x,t) = \mathcal{D}_i[\psi](x,t) + \int\limits_t^{\nu_i(x,t)} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\psi_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) - $$
$$- \sum_{j \in I} \frac{\partial f_i}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\psi_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) +$$
$$+ \frac{\partial G}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)d\tau, \quad (1.21)$$

де оператор $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i[\psi](x,t)$ визначається в залежності від точки $(x,t)$, а сама: 0, якщо точка $(x,t)$ належить $\pi^i$; $-(det\lambda_+(l,\nu_i(x,t)))^{-1}\lambda_i(l,\nu_i(x,t)) \sum\limits_{j \in I_l} \frac{\partial \gamma^l_j}{\partial y_i}(y_+(l,\nu_i(x,t)),u^{(2)}(\nu_i(x,t)),$ $\nu_i(x,t))\lambda_j(l,\nu_i(x,t))\psi_j(l,\nu_i(x,t)) - \frac{\partial G_0}{\partial y_i}(y_-(0,\nu_i(x,t)),y_+(l,\nu_i(x,t)),\nu_i(x,t))$, якщо $(x,t) \in \pi^i_l$; $-(det\lambda_-(0,\nu_i(x,t)))^{-1}\lambda_i(0,\nu_i(x,t)) \sum\limits_{j \in I_0} \frac{\partial \gamma^0_j}{\partial y_i}(y_-(0,\nu_i(x,t)),u^{(1)}(\nu_i(x,t)),\nu_i(x,t))\lambda_j(l,\nu_i(x,t))$ $\psi_j(0,\nu_i(x,t)) - \frac{\partial G_0}{\partial y_i}(y_-(0,\nu_i(x,t)),y_+(l,\nu_i(x,t)),\nu_i(x,t))$, якщо $(x,t) \in \pi^i_0$.

З простору $\mathcal{Q}$ виберемо підпростір $\mathcal{W}$, елементи якого володіють властивістю

$$\lim_{t \to +\infty} \psi(x,t)e^{at} = 0, \text{ для будь-якого } x \in [0,l],\ \psi \in \mathcal{W}.$$

**Означення 1.2.** Узагальненим розв'язком спряженої задачі (1.11)−(1.13), що відповідає набору керувань $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}$, будемо називати набір неперервних функцій $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) \in \mathcal{W}$, які задовольняють систему інтегро-операторних рівнянь (1.21) в $\overline{\Pi}$.

**Теорема 1.2.** *Якщо виконуються умови:*

1. $\lambda \in (C^1_x(\overline{\Pi}))^n$, $\sup\limits_{i\in I,(x,t)\in\overline{\Pi}} \Big\{ \pm|\lambda_i(x,t)|, \Big|\frac{\partial \lambda_i(x,t)}{\partial x}\Big|\Big\} < +\infty$;

2. $y \in \mathcal{Q}$ - *розв'язок задачі* (1.1) − (1.4);

3. $f \in (C^1_y(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}))^n$, *має обмежену на* $\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}$ *та інтегровану похідну за* $t$;

4. $G_0 \in C^{1,1}_{y_-.y_+}(\mathbb{R}^{n-m_2} \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}_+)$,
   $\forall i \in I_0 \cup I_l : \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\partial G_0(y_-(0,t), y_+(l,t), t)}{\partial y_i} e^{at} = 0$;

5. $G \in C^1_y(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}), \forall i \in I : \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\partial G(y(x,t),x,t)}{\partial y_i} e^{at} = 0$;

6. $\gamma^0 \in (C^1_y(\mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+))^{m_1}$, $\sup\limits_{\substack{i\in I_l, j\in I_0\\ (y_-,u^{(1)},t)\in\mathbb{R}^{n-m_2}\times U^1\times\mathbb{R}_+}} \Big|\frac{\partial \gamma^0_j(y_-,u^{(1)},t)}{\partial y_i}\Big| < +\infty$,
   $\gamma^l \in (C^1_y(\mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+))^{n-m_2}$, $\sup\limits_{\substack{i\in I_l, j\in I_0\\ (y_+,u^{(2)},t)\in\mathbb{R}^{m_1}\times U^2\times\mathbb{R}_+}} \Big|\frac{\partial \gamma^l_j(y_+,u^{(2)},t)}{\partial y_i}\Big| < +\infty$.

*Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (1.11) − (1.13)

*Доведення.* Для знаходження розв'язку задачі (1.11)−(1.13), також використаємо метод стискуючих відображень. Розглянемо простір $\mathcal{W}$ з метрикою

$$\rho_\beta(\psi^1, \psi^2) = \max_{\substack{i\in I,\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\psi^1(x,t) - \psi^2(x,t)|\beta_i(x,t;b,q).$$

Нехай оператор $\mathcal{B}$ визначений правою частиною (1.21), тобто для $i \in I$ маємо

$$\mathcal{B}_i[\psi](x,t) = \mathcal{D}_i[\psi](x,t) + \int\limits_t^{\nu_i(x,t)} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\psi_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) -$$
$$- \sum_{j\in I} \frac{\partial f_i}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), \varphi_i(\tau;x,t),\tau)\psi_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) +$$
$$+ \frac{\partial G}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)d\tau.$$

Для всіх $i \in I_0 \cup I_l$, справедливі оцінки:

$$\nu_i(x,t) \ge t + (l-x)/\Lambda,\ \ i \in I_0;$$
$$\nu_i(x,t) \ge t + x/\Lambda,\qquad i \in I_l.$$

Враховуючи оцінку

$$|\Delta_k \mathcal{D}_i[\psi^k](x,t)|\beta_i(x,t;b,q) \le C \max\Big\{(n-m_2) \max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}} \frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(l,\nu_i(x,t);b,q)},$$
$$m_1 \max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}} \frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(0,\nu_i(x,t);b,q)}\Big\}\rho_\beta(\psi^1,\psi^2),$$

для оператора $\mathcal{B}$ одержимо

$$|\Delta_k \mathcal{B}_i[\psi^k](x,t)|\beta_i(x,t;b,q) \le C\max\Big\{(n-m_2)\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}}\frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(l,\nu_i(x,t);b,q)},$$

$$m_1\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}}\frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(0,\nu_i(x,t);b,q)}\Big\}\rho_\beta(\psi^1,\psi^2)+$$

$$(n+1)C\int\limits_t^{\nu_i(x,t)}\max_{\substack{i,j\in I,\\ s,x\in[0,l]}}\frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(s,\sigma;b,q)}d\sigma\rho_\beta(\psi^1,\psi^2).$$

Вибір параметрів $b,q$ у функціях $\beta_i=\beta_i(x,t;b,q)$ дозволяє отримати оцінки

$$\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}}\frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(l,\nu_i(x,t);b,q)}=\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}}\frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(0,\nu_i(x,t);b,q)}=e^{-ql}<\frac{1}{2nC}$$

і

$$\int\limits_t^{\nu_i(x,t)}\max_{i,j,s}\frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(s,\sigma;b,q)}d\sigma<\frac{\max\{e^{ql},e^{ql^2/4}\}}{4}<\frac{1}{2(n+1)C}.$$

Звідки отримаємо

$$\rho_\beta(\mathcal{B}[\psi^1],\mathcal{B}[\psi^2])<\rho_\beta(\psi^1,\psi^2).$$

Отже оператор $\mathcal{B}$ є стискуючим на елементах простору $\mathcal{W}$. Тому, за теоремою Банаха, існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{B}$ в просторі $\mathcal{W}$. Ця нерухома точка і є узагальненим розв'язком задачі (1.11) – (1.13). □

**Лемма 1.1.** *Для довільних вектор-функцій $y\in\mathcal{Q},\psi\in\mathcal{W}$ справедливе співвідношення*

$$\int\limits_\Pi \psi^T(x,t)\Big(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+\lambda(x,t)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Big)dxdt=$$

$$\int\limits_0^t\sum_{i=0}^n\psi^T(x,t)y(x,t)\Big|_{t=0}^{+\infty}dx-\int\limits_0^{+\infty}\psi^T(x,t)\lambda(x,t)y(x,t)\Big|_{x=0}^{l}dt-$$

$$-\iint\limits_\Pi\Big(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+\lambda(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial x}\psi(x,t)\Big)^T y(x,t)dxdt. \quad (1.22)$$

Доведення цієї леми випливає із подібного факту в [7].

## 1.5 Необхідні умови оптимальності

Варіаційний аналіз досліджуваної задачі заснований на використанні варіацій, які забезпечують гладкість допустимих керувань. Варіація керування будується за правилом

$$u^{(0)}_{\epsilon,\delta}(x)=u^{(0)}(x+\epsilon\delta^{(0)}(x)),x\in[0,l], \quad (1.23)$$

де $\epsilon\in[0,1]$ - параметр, який характеризує малість варіації, $\delta(x)$ - неперервно-диференційовна функція, яка задовольняє умову

$$0\le x+\delta(x)\le l,x\in[0,l],\delta(0)=\delta(l)=0. \quad (1.24)$$

Відзначимо деякі властивості варіації (1.23). Насамперед, що керування є гладким, а область значень функції $u^{(0)}_{\epsilon,\delta^{(0)}}(x)$ визначена областю значень початкового керування $u^{(0)}(x)$. Тому, керування $u^{(0)}_{\epsilon,\delta^{(0)}}(x)$ - допустиме. Крім того, має місце поточкова (і рівномірна) збіжність: $u^{(0)}_{\epsilon,\delta}(x) \to u^{(0)}(x)$ при $\epsilon \to 0$ в кожній точці відрізку $[0, l]$ для будь-якого $\delta^{(0)}(x)$, що задовольняє нерівність (1.24). Остання нерівність характеризує відповідну варіацію керування $\Delta u^{(0)}_{\epsilon,\delta}(x) = u^{(0)}_{\epsilon,\delta^{(0)}}(x) - u^{(0)}(x)$, як варіацію гладкої функції $u^{(0)}(x)$, при якій рівномірно мала деформація відрізка $[0, l]$ "перемішує"значення початкового керування, зберігаючи рівномірну близькість до нуля функції $u^{(0)}_{\epsilon,\delta^{(0)}}(x)$ та її похідної $\frac{d}{dx}u^{(0)}_{\epsilon,\delta^{(0)}}(x)$.

Вибираючи варіацію керування за правилом (1.23) і використовуючи представлення

$$\Delta u^{(0)}(x) = \dot{u}^{(0)}(x)\epsilon\delta^{(0)}(x) + o(\epsilon),$$

перепишемо формулу приросту цільового функціоналу (1.15) так

$$\begin{aligned}
\Delta J(u^{(0)}) = &-\int\limits_0^l h_{u^{(0)}}(\psi(x,0), u^{(0)}(x), x)\dot{u}^{(0)}(x)\epsilon\delta^{(0)}dx - \\
&-\int\limits_0^l o(\epsilon)dx + \int\limits_0^{+\infty} o_{G_0}(\| \Delta y_-(0,t) \|)dt - \int\limits_0^{+\infty} o_{G_0}(\| \Delta y_+(l,t) \|)dt + \\
&+\iint\limits_{\Pi} o_G(\| \Delta y(x,t) \|)dxdt - \iint\limits_{\Pi} \psi^T(x,t)o_f(\| \Delta y(x,t) \|)dxdt + \\
&+\int\limits_0^{+\infty} \psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)o_{\gamma^l}(\| \Delta y_+(l,t) \|)dt - \int\limits_0^{+\infty} \psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(\| \Delta y_-(0,t) \|)dt. \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

Врахувавши справедливість оцінки (1.16) для рівності (1.25) матимемо

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \frac{J(u^{(0)} + \epsilon\delta^{(0)}) - J(u^{(0)})}{\epsilon} = -\int\limits_0^l h_{u^{(0)}}(\psi(x,0), u^{(0)}(x), x)\dot{u}^{(0)}(x)\delta^{(0)}(x)dx, \qquad (1.26)$$

оскільки всі доданки в (1.25) представлені у вигляді інтегралу по відповідній області від підінтегральної функкії, яка є добутком величини порядку $o(\epsilon)$ та інтегрованої функції на цій області.

Аналогічно до (1.23), (1.24), побудуємо приріст крайових керувань за правилом

$$\Delta u^{(k)}(t) = \dot{u}^{(k)}(t)\epsilon\delta^{(k)}(t) + o(\epsilon), k \in \{1, 2\}.$$

Для функціонала $J$, одержимо значення похідної за напрямком, коли крайові умови допускають існування неперервної похідної за відповідним параметром керування, тобто

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0_+} \frac{J(u^{(1)} + \epsilon\delta^{(1)}) - J(u^{(1)})}{\epsilon} &= \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}_+} h^1_{u^{(1)}}(\psi_+(0,t), y_-(0,t), u^{(1)}(t), t)\dot{u}^{(1)}(t)\delta^{(1)}(t)dt,
\end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0_+} \frac{J(u^{(2)}+\epsilon\delta^{(2)})-J(u^{(2)})}{\epsilon} =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}_+} h^2_{u^{(2)}}(\psi_-(l,t), y_+(l,t), u^{(2)}(t), t)\dot{u}^{(2)}(t)\delta^{(2)}(t)dt.$$

Оскільки $\delta^{(0)} = \delta^{(0)}(x), \delta^{(1)} = \delta^{(1)}(t), \delta^{(2)} = \delta^{(2)}(t)$ довільні функції то використовуючи теорему Ферма [8], можна сформулювати таку теорему

**Теорема 1.3.** *Якщо процес $\{y, u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}\}$ є оптимальним в даній задачі, то виконуються умови*

$$\begin{gathered} h_{u^{(0)}}(\psi(x,0), u^{(0)}(x), x)u^{(0)}_x(x) = 0, x \in [0,l], \\ h_{u^{(1)}}(\psi_+(0,t), y_-(0,t), u^{(1)}(t), t)u^{(1)}_t(t) = 0, t \in \mathbb{R}_+, \\ h_{u^{(2)}}(\psi_-(l,t), y_+(l,t), u^{(2)}(t), t)u^{(2)}_t(t) = 0, t \in \mathbb{R}_+, \end{gathered} \tag{1.27}$$

*де $y = y(x,t)$ узагальнений розв'язок задачі* (1.1) − (1.4)*, $\psi = \psi(x,t)$ - узагальнений розв'язок спряженої задачі при $y = y(x,t), u = u^{(0)}(x)$, $u^{(1)} = u^{(1)}(t), u^{(2)} = u^{(2)}(t)$.*

## 1.6 Висновки до першого розділу

У першому розділі встановлено достатні умови для існування узагальненого розв'язку напівлінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними з ортогональними до осей координат характеристиками в напівсмузі. Виведено необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування напівлінійною гіперболічною системою з ортогональними до осей координат характеристиками з нескінченним горизонтом планування.

# 2 Задача керування зосередженими параметрами в правих частинах напівлінійних гіперболічних систем

В даному розділі розглядається випадок, коли функція, яка входить в праву частину системи, визначається із керуючої системи звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язок початково-крайової задачі розуміється в узагальненому сенсі як розв'язок інтегральної системи рівнянь, побудованих на характеристиках вихідної гіперболічної системи. Керуючі впливи стиснені поточковими (амплітудними) обмеженнями.

Для такого роду задач неможливо застосувати методи оптимального керування, основані на використанні принципу максиму Понтрягіна, його наслідків та модифікацій. Такі методи орієнтовані на класи розривних керувань. Запропонований підхід базується на використанні спеціальних варіацій. Про-варіювання керування володіє наступними властивостями:

- воно являється гладким;
- область його значень визначається областю значень вихідного керування.

Таким чином, забезпечується гладкість варіювальних керувань і виконання обмежень.

Також запропонована схема методу покращення допустимого керування, яка основана на необхідній умові.

## 2.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимізації системи напівлінійних гіперболічних рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x(s,t), y(t), s, t), \tag{2.1}$$
$$(s,t) \in \Pi, \quad \Pi = S \times T, S = [s_0, s_1], T = [t_0, t_1].$$

Тут $x = x(s,t) - n$-вимірна вектор-функція, $A = A(s,t)$ - матриця $n \times n$, $y(t) - m$-вимірна вектор-функція.

Припускаємо, що система (2.1) записана в інваріантному вигляді, тобто матриця $A(s,t)$ - діагональна. Додатково введемо припущення, що діагональні елементи $a_i = a_i(s,t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матриці коефіцієнтів є одного знаку в $\Pi$:

$$a_i(s,t) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1;$$
$$a_i(s,t) = 0, \quad i = m_1 + 1, \ldots, m_2;$$
$$a_i(s,t) < 0, \quad i = m_2 + 1, \ldots, n.$$

Складемо дві діагональні під-матриці: $A^+(s,t)$ розмірності $m_1 \times m_1$ та $A^-(s,t)$ розмірності $(n - m_2) \times (n - m_2)$ із додатних та від'ємних елементів матриці $A$ відповідно. Із вектора стану $x = x(s,t)$ виділимо два під-вектори, відповідних додатнім та від'ємним діагональним елементам матриці $A$.

$$x^+ = (x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}), \quad x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \ldots, x_n).$$

Початкова-крайові умови для системи (2.1) задана в наступному вигляді

$$x(s, t_0) = x^0(s), \quad s \in S; \quad x^+(s_0, t) = \eta(t), \quad x^-(s_1, t) = \mu(t), t \in T. \tag{2.2}$$

Функція $y(t)$ визначається із керуючої системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = g(y, u, t), \quad t \in T,$$
$$y(t_0) = y^0. \tag{2.3}$$

Задача розглядається в класі гладких керуючих впливів: керування $u(t)$ неперервно диференційовне на відрізку $T$ і задовільняє поточкові обмеження наступного виду:

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \tag{2.4}$$

де $U$ - компакт із $E^r$.

Метою задачі оптимального керування є мінімізація функціоналу

$$J(u) = \int\limits_S \varphi(x(s, t_1), s) ds + \iint\limits_\Pi F(x, s, t) ds dt, \tag{2.5}$$

визначеного на розв'язках задачі (2.1)−(2.3) при допустимих керуваннях, задовільняючих умову (2.4).

Задача оптимального керування (2.1)−(2.5) розглядається при наступних припущеннях:

1. Діагональні елементи $a_i(s, t),\ i = 1, 2, \ldots, n$ матриці $A$ неперервно диференційовні в прямокутнику $\Pi$;

2. Вектор-функції $g = g(y, u, t)$ неперервна по сукупності своїх аргументів і має неперервну і обмежену часткову похідну по $y \in E^m$ і $u \in U$;

3. Вектор-функція $f(x, y, s, t)$ неперервна по сукупності своїх аргументів і має неперервну і обмежену часткову похідну по $x \in E^n$ і $y \in E^m$;

4. Скалярні функції $\varphi = \varphi(x, s),\ F = F(x, s, t)$, неперервна по сукупності своїх аргументів і має неперервну і обмежену часткову похідну по $x \in E^n$;

Розв'язок початково-краєвої задачі (2.1) − (2.2) розуміється в узагальненому сенсі як розв'язок інтегральної системи рівнянь, побудовано на характеристиках вихідної гіперболічної системи [4].

## 2.2 Формули перетворення

Розглянемо два допустимих процеси: базовий $u, y = y(t, u), x = x(s, t, u)$ та варіювальний $\tilde{u} = u + \Delta u, \tilde{y} = y + \Delta y = y(t, \tilde{u}), \tilde{x} = x + \Delta x = x(s, t, \tilde{u})$.

Позначимо

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u} - J(u).$$

Очевидно, що

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \Delta\varphi(x(s, t_1), s) ds + \iint\limits_\Pi \Delta F(x, s, t) ds dt. \tag{2.6}$$

Система перетвореннями має вигляд:

$$\left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)_A = \Delta f(x, y, s, t), \tag{2.7}$$
$$\Delta x(s, t_0) = \Delta x^+(s_0, t) = \Delta x^-(s_1, t) = 0.$$
$$\frac{d\Delta y}{dt} = \Delta g(y, u, t), \quad \Delta y(t_0) = 0. \tag{2.8}$$

Тут

$$\Delta f(x,s,t) = f(\tilde{x},\tilde{y},s,t) - f(x,y,s,t),$$
$$\Delta g(y,u,t) = g(\tilde{y}(t),\tilde{u}(t),t) - g(y(t),u(t),t).$$

Зробимо декілька достатньо простих операцій, зазвичай використовуваних при виведення необхідних умов оптимальності першого порядку.

Введемо скалярні функції

$$H(\psi,x,y,s,t) =< \psi, f(x,y,s,t) > -F(x,s,t),$$
$$h(p,y,u,t) =< p, g(y,u,t) > .$$

Вимагатимемо щоб вектор-функції $\psi(s,t)$ та $p(t)$ були розв'язком наступної спряженої задачі:

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_A + A_s\psi = -H_x(\psi,x,y,s,t), \quad \psi(s,t_1) = \frac{\partial\varphi(x(s,t_1),s)}{\partial x},$$
$$\psi^-(s_0,t) = 0,\ \psi^+(s_1,t) = 0, \tag{2.9}$$

$$\dot{p} = -h_y(p,y,u,t) - \int_{s_0}^{s_1} H_y ds, \quad p(t_1) = 0. \tag{2.10}$$

Тоді формула перетворення набуде вигляду:

$$\Delta J(u) = -\int_T \Delta_{\tilde{u}} h(p(t),y(t),u(t),t)dt + \eta. \tag{2.11}$$

Тут

$$\eta = \int_S o_\varphi(||\Delta x(s,t_1)||)ds = \iint_\Pi o_H(||\Delta x(s,t)||)dsdt-$$
$$-\iint_\Pi o_H(||\Delta y(t)||)dsdt - \iint_\Pi \langle\Delta_{\tilde{x}} H_y, \Delta y\rangle dsdt-$$
$$-\int_T [o_h(||\Delta y(t)||)+ < \Delta_{\tilde{u}} h_y(p(t),y(t),u(t),t), \Delta y(t) >]dt.$$

Справедливі наступні оцінки перетворень:

$$||\Delta y(t)|| \le K_1 \int_{t_0}^{t} ||\Delta u||d\tau, \tag{2.12}$$

де $K_1 = L_2 e^{L_1(t_1-t_0)}$.

$$||\Delta y(t)|| \le K_1 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} ||\Delta u||d\tau, d\tau, \tag{2.13}$$

де $K_2 = K_1 e^{M_1(t_1-t_0)}$. Тут $M_1$ - константа Ліпшица для функції $f$.

## 2.3 Необхідні умови оптимальності

Подальший варіаційний аналіз задачі ґрунтується на використання некласичних варіацій, забезпечуючи гладкість допустимих керувань. Про-варіювання керування будується за правилом [1]

$$u_{\epsilon,\delta}(t) = u(t + \epsilon\delta(t)), \quad t \in T, \tag{2.14}$$

$\epsilon \in [0, 1]$ - параметр, характеризуючий малість варіації, $\delta(t)$ - неперервно-диференційовна функція, яка задовільняє умови

$$t_0 \leq t + \delta(t) \leq t_1, \quad t \in T. \tag{2.15}$$

Відмітимо властивості про-варійованого керування (2.14).

По-перше, воно є гладким. По-друге, область значення функції $u_{\epsilon,\delta}(t)$ визначається областю вихідного керування $u(t)$. Таким чином, керування $u_{\epsilon,\delta}(t)$ допустиме. Має місце поточкова збіжність: $u_{\epsilon,\delta}(t) \to u(t)$ при $\epsilon \to 0$ в кожній точці відрізка $T$ для будь якого $\delta(t)$, яке задовільняє нерівність (2.15).

Остання властивість дозволяє характеризувати відповідну варіацію керування $\Delta u_{\epsilon,\delta}(t) = u_{\epsilon,\delta}(t) - u(t)$ як нестандартну слабку варіацію гладкої функції $u(t)$: рівномірно мала деформація відрізка $T$ "перемішує"значення вихідного керування, зберігаючи рівномірну блискість до нуля функції $\Delta u_{\epsilon,\delta}(t)$ та її похідної

$$\frac{d}{dt}\Delta u_{\epsilon,\delta}(t).$$

Вибираючи керування за правилом (2.14) і використовуючи розклад

$$\Delta u = \dot{u}(t)\epsilon\delta(t) + o(\epsilon),$$

формула перетворення цільового функціоналу з врахуванням оцінок (2.12), (2.13) набуде наступного вигляду:

$$\Delta J(u) = -\epsilon \int\limits_T \langle h_u, \dot{u}(t)\rangle \delta(t) dt + o(\epsilon).$$

Звідси, в силу довільності $\delta(t)$ випливає

**Теорема 2.1.** *Нехай процес $u, y, x$ є оптимальним в даній задачі. Тоді виконується умова*

$$\langle h_u(p(t), y(t), u(t), t), \dot{u}\rangle = 0, \ t \in T, \tag{2.16}$$

*де, $p(t)$ є розв'язком спряженої задачі* (2.9) − (2.10) *при* $u = u(t)$.

## 2.4 Схема методу

Зупинимось детальніше на алгоритмі, який використовує необхідну умову оптимальності у вигляді (2.16).

Введемо в розгляд скалярну функцію

$$\omega(p(t), u(t), \dot{u}(t), t) = \langle h_u(p(t), u(t), t), \dot{u}\rangle.$$

Нехай задано початкове наближення із класу допустимих функцій $u^0 = u^0(t)$. Опишемо $k$-ту ітерацію методу, тобто перехід від $u^k(t)$ до $u^{k+1}(t), k = 0, 1, 2, \ldots$. Для керування $u^k(t)$ вираховуються $p^k = p^k(t)$, $\psi^k = \psi^k(s, t)$ розв'язки спряженої системи гіперболічних рівнянь, будується $\omega_k(t) = \omega(p^k(t), u^k(t), \dot{u}^k(t), t)$. Якщо $\omega_k(t) = 0, t \in T$, то керування

$u^k$ задовільняє необхідну умову оптимальності, і алгоритм закінчує свою роботу. В протилежному випадку визначаємо гладку функцію $\delta_k(t)$ за правилом:

$$\delta_k(t) = \frac{(t-t_0)(t_1-t)\omega_k}{(t_1-t_0)\max\limits_{t\in T}|\omega_k|}. \tag{2.17}$$

Побудуємо однопараметричну сім'ю керувань $u_\epsilon^k(t) = u^k(t+\epsilon\delta_k(t))$ і розв'яжемо задачу одновимірної мінімізації

$$\epsilon_k : \quad J(u_\epsilon^k) \to min, \quad \epsilon \in [0,1].$$

Наступне наближення знаходиться за формулою

$$u^{k+1} = u_{\epsilon_k}^k, k = 0, 1, 2, \dots$$

Твердження про збіжність методу сформоване в [1].

## 2.5 Висновки до другого розділу

В другому розділі було сформовано припущення для задачі оптимального керування зосередженими параметрами в правих частинах напівлінійних гіперболічних систем. Виведено необхідні умови оптимальності для даної задачі. Також було складено схему алгоритму для розв'язку даної задачі, на основі необхідних умов оптимальності.

# Висновок

Магістерська робота присвячена вивченню необхідних умов оптимальності для мішаних задач для гіперболічних систем рівнянь з частинними похідними першого порядку з ортогональними до осей координат характеристиками та задач оптимального керування зосередженими параметрами в правих частинах напівлінійних гіперболічних систем. Задачі для таких систем гіперболічних рівнянь описують різноманітні математичні моделі природознавства, техніки, економіки, теорії біопопуляцій, теорії споживання в яких часто виникає потреба управління процесами.

У роботі одержано такі основні результати:

- встановлено достатні умови узагальненої глобальної розв'язності мішаних задач з ортогональними до осей координат характеристиками, без початкових умов для одновимірної гіперболічної системи рівнянь першого порядку в напівсмузі;
- виведено необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування напівлінійними гіперболічними системами рівнянь першого порядку з ортогональними до осей координат характеристиками;
- виведено необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування зосередженими параметрами в правих частинах напівлінійних гіперболічних систем.

Ці результати мають теоретичний характер і їх можна використати в теорії крайових задач для рівнянь з частинними похідними, задачах оптимального керування системами гіперболічних рівнянь, а також при дослідженні практичних проблем, які моделюються гіперболічними системами напівлінійних, квазілінійних рівнянь першого порядку.

# Список використаної літератури


[1] Аргучинцев А. В. Оптимальное управлениє гиперболическими системамы. - Москва.:Физматлит, 2007. - 165 с.

[2] Аргучинцев А. В. Оптимизация одного класса гиперболичиских систем с гладкими управлениями / А. В. Аргучинцев, В. П. Попленко / Изв. вузов. Математика. - 2009. - № 7. С. 71-76.

[3] Демиденко Н. Д. Моделирование и оптимизация систем с распределенними параметрами / Н. Д. Демиденко, В. И. Потапов, Ю. И. Шокин. - Новосибирск: Наука, 1983. - 271 с.

[4] Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 592 с.

[5] Натасон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 552 с.

[6] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1969. – Т. II. – 800 с.

[7] Матвеев А. С. Оптимальные системы управления: обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи: Учебное пособие / А. С. Матвеев, В. А. Якубович. – СПб. : Изд. С.-Петербург. у-та, 2003. – 540 с.

[8] Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – К:. ТВІМС, 2004. – 384 с.