МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики

Магістерська робота

Арбітражні процедури зі степеневою функцією виграшу

Виконала: студентка групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 – *математика*
спеціалізації *математична економіка та економетрія*
Федан Вікторія Богданівна
Науковий керівник:
кан. фіз.-мат. н., доц. Куриляк А.О.

*Роботу рекомендовано до захисту
на засіданні кафедри математичної
економіки, економетрії, фінансової та
страхової математики
протокол від 04 грудня 2020 року №4*

*В.о. завідувача кафедрою
проф. Оліскевич М. О.*

Львів 2020

Зміст

1 Вступ

Переговори є важливою складовою нашого життя. Ми постійно про щось домовляємося, чи то зі своїм босом, чи то з випадковим перехожим, або коли хочемо придбати автомобіль, будинок чи обговорюємо з друзями, який фільм переглянути. Переговори – це метод досягнення угоди шляхом ділового спілкування, коли обидві сторони мають як спільні, так і протилежні інтереси.

У сучасному суспільстві більшу частину життя професіоналів всіх рівнів займає ділове спілкування. Суперницьким відносинам протиставляється взаємодія. Як наслідок стають затребуваними навички ведення ділових переговорів, вміння знаходити компроміс з партнерами, конкурентами. Вміле ведення переговорів допомагає відстоювати свої інтереси корпорації, випереджати конкурентів, успішно вирішувати будь-яку спірну проблему.

У даній роботі ми розглянемо такий тип переговорів, при якому пропозиції вносяться учасниками переговорів. Зокрема, працюватимемо із задачею розподілу деякого ресурсу серед кількох учасників. Такі ситуації виникають в бізнесі, в моделях ринку, страхових моделях та інших. Для вирішення питання вводиться нова незацікавлена сторона — арбітр або арбітражний комітет (журі), який слідкує за дотриманням правил і приймає кінцеве рішення шляхом жеребкування, голосування або за допомогою інших механізмів. Арбітраж — це контрактна форма зобов'язального вирішення спору. Іншими словами, право сторони направити спір на арбітраж залежить від наявності угоди («арбітражної угоди») між ними та іншими сторонами спору про те, що спір може бути переданий на арбітраж. Схеми переговорів з арбітром будемо називати арбітражними процедурами.

У переговорах беруть участь дві і більше сторони, тому ці проблеми є предметом теорії ігор — розділу математики, в якому досліджуються моделі прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту.

2 Арбітражні процедури

Розглянемо тип переговорів, коли в якості розв'язку буде рівновага Неша даної гри. Шукатимемо рівновагу гри в термінах задачі про зарплату, проте такий підхід можна застосовувати і для інших задач розподілу ресурсів за участі арбітра.

Розглянемо задачу про зарплату, де є двоє учасників гри: гравець I — L (labour) та II —M (manager). Учасники повинні домовитися про розмір заробітної плати. Гравець I робить пропозицію x, а гравець II — пропозицію y, де x і y можуть приймати довільні дійсні значення. Для зручності обчислень розглядаються пропозиції без обмеження на знак. Якщо $x \leq y$, то конфлікт не виникає і сторони домовляються про зарплату між x і y. Будемо вважати, що вона дорівнює $\frac{x+y}{2}$. Якщо ж $x > y$, сторони апелюють до арбітра A, який має власну думку про справедливість (відповідно до моделі арбітражної поцедури). Вибір арбітра позначатимемо через z.

Так як цілі гравців I та II прямо протилежні, то маємо справу з антагоністичною грою виду $\Gamma = \langle I, II, R^1, R^1, H \rangle$, де $H = H_z(x, y)$ — функція виграшу в арбітражній процедурі.

2.1 Арбітраж за останньою пропозицією

У даній процедурі, якщо $x > y$, арбітр приймає ту пропозицію, яка є ближчою до його рішення z, в цьому випадку функція виграшу має вигляд

$$H_z(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & \text{якщо } x \leq y; \\ x, & \text{якщо } x > y, |x-z| < |y-z|; \\ y, & \text{якщо } x > y, |x-z| > |y-z|; \\ z, & \text{якщо } x > y, |x-z| = |y-z|. \end{cases} \tag{1}$$

Якщо z фіксована, то рівновагою буде пара стратегій (z, z). Розглянемо випадок, коли думка арбітра є випадковою, тоді z є випадковою величиною з деяким неперервним розподілом $F(a), a \in R^1$. Припустимо, що гравцям відомий вид $F(a)$ і існує щільність $f(a)$.

Якщо $x > y$, то відповідно до виду функції виграшу арбітр приймає пропозицію y, якщо $z < (x+y)/2$, у протилежному випадку — пропозицію x.

Виграш гравця L є випадковим з математичним сподіванням

$$H(x,y) = EH_z(x,y) \colon H(x,y) = F\Big(\frac{x+y}{2}\Big)y + \Big(1 - F\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\Big)x. \quad (2)$$

Щоб знайти мінімаксні стратегії, продиференціюємо (2)

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 1 - F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + \frac{y-x}{2} f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + \frac{y-x}{2} f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = 0.$$

Різниця двох вище наведених рівнянь дає

$$F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{1}{2},$$

а точка $(x+y)/2$ співпадає з медіаною розподілу F, звідси $(x+y)/2 = m_F$.

Додавши дані рівняння отримаємо

$$(x-y)f(m_F) = 1.$$

Якщо рівновага в чистих стратегіях існує, то набуває вигляду

$$x = m_F + \frac{1}{2f(m_F)}, y = m_F - \frac{1}{2f(m_F)}, \quad (3)$$

і значення гри дорівнює m_F.

Достатньою умовою для того, щоб $(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta})$ було рівновагою в грі, є

$$H\Big(x, m_F - \frac{1}{2f(m_F)}\Big) \le m_F, \forall x \ge m_F; \quad (4)$$

$$H\Big(m_F + \frac{1}{2f(m_F)}, y\Big) \ge m_F, \forall y \le m_F. \quad (5)$$

Так як m_F медіана розподілу F, умову (4) можна подати у вигляді

$$\int_{m_F}^{U(x)} f(a)da \ge \frac{x - m_F - 1/(2f(m_F))}{2(x - m_F + 1/(2f(m_F)))}, \forall x > m_F. \quad (6)$$

де $U(x) = (x + m_F - \frac{1}{2f(m_F)})/2$.

Аналогічно, умову (5) можна подати у вигляді

$$\int_{m_F}^{V(x)} f(a)da \ge \frac{y - m_F + 1/(2f(m_F))}{2(y - m_F - 1/(2f(m_F)))}, \forall y < m_F. \quad (7)$$

де $V(x) = (y + m_F + \frac{1}{2f(m_F)})/2$.

Теорема 1. *Якщо в арбітражній процедурі за останньою пропозицією розподілу* $F(a)$ *задовольняє умови (6)–(7), то рівновага Неша досягається в чистих стратегіях і набуває вигляду* $x = m_F + \frac{1}{2f(m_F)}, y = m_F - \frac{1}{2f(m_F)}$.

2.2 Погоджувальний арбітраж

Якщо в арбітражній процедурі за останньою пропозицією арбітр вибирає одну з двох пропозицій, то в погоджувальному арбітражі результатом суперечки є саме рішення арбітра. Дане рішення залежить від пропозицій учасників. Розглянемо тут комбіновану арбітражну процедуру, запропоновану Брамсом і Меріллом.

У даній процедурі думка арбітра z є випадковою величиною з відомою функцією розподілу $F(a)$ і щільністю розподілу $f(a)$. Гравці L та M вносять свої пропозиції x та y. Якщо z належить інтервалу пропозицій, то здійснюється арбітраж за останньою пропозицією, якщо ж ні, то приймається рішення арбітра.

Таким чином, функція виграшу $H(x, y) = EH_z(x, y)$ набуває вигляду

$$H_z(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & \text{якщо } x \leq y; \\ x, & \text{якщо } x > z > y, x - z < z - y; \\ y, & \text{якщо } x > z > y, x - z > z - y; \\ z, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{8}$$

Припустимо, що щільність розподілу $f(a)$ є симетричною унімодальною функцією (має один максимум). Покажемо, що в такому випадку рівновага досягається в чистих стратегіях і оптимальною стратегією є значення m_F — медіана розподілу $F(a)$.

Нехай гравець M використовує стратегію $y = m_F$. Тоді виграш $H(x, m_F)$ першого гравця відповідно до правил арбітражу дорівнює $(x+y)/2$, якщо $x < m_F$, що є менше, ніж коли б він застосував стратегію $= m_F$. Якщо ж $x \geq m_F$, то згідно з (8) виграш набуває вигляду

$$H(x, m_F) = \int_{-\infty}^{m_F} a dF(a) + \int_{x}^{+\infty} a dF(a) + \int_{m_F}^{\frac{x+m_F}{2}} m_F dF(a) + \int_{\frac{x+m_F}{2}}^{x} x dF(a) =$$

$$= m_F - \int_{m_F}^{\frac{x+m_F}{2}} (a - m_F) dF(a) + \int_{\frac{x+m_F}{2}}^{x} (x - a) dF(a).$$

Останній вираз є не більшим, ніж m_F. Це випливає з того, що функція

$$g(x) = -\int\limits_{m_F}^{\frac{x+m_F}{2}} (a - m_F)dF(a) + \int\limits_{\frac{x+m_F}{2}}^{x} (x-a)dF(a)$$

є незростаючою. Її похідна

$$g'(x) = -\frac{x-m_F}{2} f(\frac{x+m_F}{2}) + \int\limits_{\frac{x+m_F}{2}}^{x} f(a)da \leq 0,$$

так як значення функції $f(a)$ в точці $(x+m_F)/2$ не менше за умовою значень в точках $z \in [((x+m_F)/2), x]$.

Тому $H(x, m_F) \leq m_F$ для всіх $x \in R^1$. Це значить, що найкраща відповідь першого гравця також є m_F. Аналогічно і для поведінки другого гравця. Отже, рівновага досягається в чистих стратегіях і співпадає з медіаною розподілу $F(a)$.

Теорема 2. *Якщо в погоджувальній арбітражній процедурі щільність розподілу $f(a)$ є симетричною і унімодальною, то рівновага Неша в грі складається з однакових чистих стратегій m_F.*

2.3 Арбітраж з покаранням

В розглянутих арбітражних процедурах кожен гравець може внести довільні пропозиції, включно з сильно дискримінуючими суперника. Щоб такого не відбувалося, арбітр може використовувати процедуру з покаранням. Розглянемо одну з таких схем, запропоновану Зенгом.

У даній процедурі думка арбітра z є випадковою величиною з відомою функцією розподілу $F(a)$ і щільністю розподілу $f(a)$. Позначимо математичне сподівання $E_z = \int\limits_{R^1} adF(a)$ через E. Гравці L та M вносять свої пропозиції x та y. Арбітр використовує погоджувальний арбітраж, але додає до свого рішення деяку величину, яка залежить від пропозицій сторін. Будемо розуміти це як деяке покарання гравця.
Нехай z — рішення арбітра. Якщо $|x-z| < |y-z|$, то арбітр приймає сторону першого гравця і "карає" другого гравця на величину $z-y$, і розв'язком буде $z+(z-y) = 2z-y$. Тут покарання буде тим більше, чим більша різниця між думкою арбітра і пропозицією другого гравця. Якщо $|x-y| > |y-x|$, то арбітр "карає" першого гравця, і розв'язком

стає $z-(x-z)=2z-x$.

Як наслідок, в даній арбітражній грі функція виграшу набуває вигляду $H(x,y)=EH_z(x,y)$, де

$$H_z(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{2}, & \text{якщо } x\le y;\\ x, & \text{якщо } x>y, |x-z|<|z-y|;\\ y, & \text{якщо } x>y, |x-z|>|z-y|;\\ z, & \text{якщо } x>y, |x-z|=|z-y|\,.\end{cases} \tag{9}$$

Теорема 3. *В арбітражній процедурі з покаранням з функцією виграшу (9) існує і єдина рівновага Неша в чистих стратегіях, яка складається з однакових чистих стратегій* E.

У розглянутих схемах арбітражу рівновага досягалася в чистих стратегіях. Це випливало з ряду припущень відносно виду розподілу $F(a)$ арбітра. У широкому класі розподілів рівноваги в чистих стратегіях не існує. Далі ми розглянемо схеми, де рівновага досягатиметься в змішаних стратегіях, а пропозиції сторін матимуть випадковий характер і це має багато переваг при застосуванні їх на практиці.

3 Дискретні арбітражні процедури

3.1 Дискретні арбітражні процедури в двох точках

Для спрощення виразів припустимо, що z —випадкова величина, яка приймає значення -1 і 1 з рівними ймовірностями $p=\frac{1}{2}$. Функція виграшу даної гри набуває вигляду (1).

Розглянемо випадок $x\in[0,+\infty), y\in(-\infty,0]$. У даній постановці гра не має розв'язку в чистих стратегіях, шукатимемо рівновагу гри серед змішаних стратегій. Позначимо $f(x)$ і $g(y)$ змішані стратегії гравців L і M відповідно. Маємо

$$f(x)\ge 0, \quad \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx; \qquad g(y)\ge 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{0} g(y)dy=1.$$

Завдяки симетрії ціна гри рівна нулю, а оптимальні стратегії симетричні відносно осі ординат, тобто $g(y)=f(-y)$. Відповідно, буде достатньо побудувати оптимальну стратегію лише для одного з гравців, наприклад L. $H(f(x),y)$ — функція виграшу гравця M при вибраній стратегії $f(x)$ гравцем L.

Теорема 4. *Для гравця L оптимальною буде стратегія*

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } 0\le x<c,\\ \frac{\sqrt{c+1}}{2\sqrt{(x+1)^3}}, & \text{якщо } c<x<c+2,\\ \frac{\sqrt{c+3}}{2\sqrt{(x-1)^3}}, & \text{якщо } c+2<x<c+4,\\ 0, & \text{якщо } c+4<x<+\infty,\end{cases} \tag{10}$$

де $c=\sqrt{5}-2$.

Розглянемо гру, де $x\in[0,a], y\in[-a,0]$, де a —довільне додатне число.

Нехай $a\in(0,2]$.

Теорема 5. *Для гравця L оптимальною є стратегія $x=a$.*

Насправді, якщо $a\in(0,2)$, то функція виграшу гравця M дорівнює

$$H(a,y)=\frac{1}{2}(y+a), \quad -a\le y\le 0, \tag{11}$$

а якщо $a=2$, то

$$H(2,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(y+2), & \text{якщо } -a\le y<0,\\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } y=0.\end{cases} \tag{12}$$

З формул (11)-(12) випливає, що $H(a,-a)=0$ і $H(a,y)>0$ для $y\in(-a,0]$, що доводить оптимальність стратегії $x=a$.

У випадку $a\in(2,+\infty)$ задача не має розв'язків у чистих стратегіях. Як і раніше, позначимо $f(x)$ і $g(y)$ змішані стратегії гравців L і M відповідно. Маємо

$$f(x)\ge 0, \quad \int\limits_0^a f(x)dx; \qquad\qquad g(y)\ge 0, \quad \int\limits_{-a}^0 g(y)dy=1.$$

Нехай $a\in[\sqrt{5}+2,+\infty)$.

Теорема 6. *Для гравця L оптимальною є стратегія*

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } 0\le x<c,\\ \frac{\sqrt{c+1}}{2\sqrt{(x+1)^3}}, & \text{якщо } c<x<c+2,\\ \frac{\sqrt{c+3}}{2\sqrt{(x-1)^3}}, & \text{якщо } c+2<x<c+4,\\ 0, & \text{якщо } c+4<x<a,\end{cases} \tag{13}$$

де $c=\sqrt{5}-2$.

Найбільш складним є випадок, коли $a \in (2, \sqrt{5}+2)$. Припустимо, що оптимальна стратегія $f(x)$ гравця L є комбінацією чистої і змішаної стратегій.

Теорема 7. *([1]) Для гравця L оптимальна стратегія полягає у наступному: він або приймає стратегію*

$$f_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \le x < c, \\ \frac{\sqrt{c+1}}{2\sqrt{(x+1)^3}}, & \text{якщо } c < x < a-2, \\ 0, & \text{якщо } a-2 < x < c+2, \\ \frac{(2-p)\sqrt{a-1}}{2\sqrt{(x-1)^3}}, & \text{якщо } c+2 < x < a. \end{cases} \tag{14}$$

де $\int_c^a f_a(x)dx = p, p \in (0,1)$ *; або з ймовірністю* $1-p$ *застосовуємо стратегію* $x = a; p = \frac{\sqrt{2a^2-2}-2}{a-1}, c = 3a - 2\sqrt{2a^2-2a} - 2$.

3.2 Дискретні арбітражні процедури в трьох точках

Розглянемо арбітражну процедуру за останньою пропозицією.

Нехай z приймає значення $-1, 0$ і 1 з рівними ймовірностями $p = \frac{1}{3}$. Як і у випадку двох точок, функція виграшу в даній грі набуває вигляду (1). Рівновагу гри будемо шукати серед змішаних стратегій. Розглянемо випадок $x \in [0, +\infty), y \in (-\infty, 0]$.

Теорема 8. *Для гравця L оптимальною буде стратегія*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \le x < c, \\ \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{x^3}}, & \text{якщо } c < x < c+2, \\ 0, & \text{якщо } c+2 \le x < +\infty. \end{cases} \tag{15}$$

де $c = \frac{2}{3}$.

4 Арбітражні процедури зі степеневою функцією виграшу

Розглянемо арбітражну процедуру зі квадратичною функцією виграшу.

Нехай z приймає значення $-1, 0$ і 1 з рівними ймовірностями $p = \frac{1}{3}$.

Функція виграшу в даній грі набуває вигляду

$$H_z(x,y) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x > y, |x-z| < |y-z|; \\ -y^2, & \text{якщо } x > y, |x-z| > |y-z|; \\ z, & \text{якщо } x > y, |x-z| = |y-z|. \end{cases}$$

Рівновагу гри будемо шукати серед змішаних стратегій. Розглянемо випадок $x \in [0,+\infty), y \in (-\infty, 0]$.

Теорема 9. *Для гравця L оптимальною буде стратегія*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } 0 \le x < 2, \\ \frac{4}{x^2}, & \textit{якщо } 2 < x < 4, \\ 0, & \textit{якщо } 4 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Функція виграшу в даній грі набуває вигляду

$$H_z(x,y) = \begin{cases} x^\beta, & \text{якщо } x > y, |x-z| < |y-z|; \\ -(-y)^\beta, & \text{якщо } x > y, |x-z| > |y-z|; \\ z, & \text{якщо } x > y, |x-z| = |y-z|, \end{cases}$$

де $\beta \in (0;2]$.

Теорема 10. *Для гравця L оптимальною буде стратегія*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } 0 \le x < c, \\ \frac{\beta c^{\beta/2}}{x^{\beta/2+1}}, & \textit{якщо } c < x < c+2, \\ 0, & \textit{якщо } c+2 \le x < +\infty, \end{cases}$$

де $c = \frac{2}{4^{1/\beta}-1}$.

Розглядаємо гру з нульовою сумою, в якій гравці L і M, виступають, відповідно, як працівник та роботодавець, ведуть переговори про встановлення заробітної плати. Гравець L робить пропозицію x, а гравець M — пропозицію y; x, y — довільні дійсні числа. Якщо $x \le y$, то конфлікту немає і гравці погоджуються на виплату зарплати, яка рівна $\frac{x+y}{2}$. Якщо ж $x > y$, то гравці апелюють до арбітра A. Рішення арбітра позначаємо через z. Для досягнення згоди між гравцями використовується схема арбітражу за останньою пропозицією, в якій із пропозицій x і y вибирають ту, яка ближче до рішення арбітра z. В такій грі функція виграшу визначається як математичне сподівання випадкової величини

$H_z(x,y) : H(x,y) = EH_z(x,y)$ де

$$H_z(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & \text{якщо } x \le y; \\ x, & \text{якщо } x > y, |x-z| < |y-z|; \\ y, & \text{якщо } x > y, |x-z| > |y-z|; \\ z, & \text{якщо } x > y, |x-z| = |y-z|. \end{cases} \tag{16}$$

У даній магістерській роботі ми, в припущенні, що $-\infty < y \le 0 \le x < +\infty$, а z — дискретна випадкова величина, яка приймає значення $-1, 0, 1$ з рівними ймовірностями $p = \frac{1}{3}$ зі степеневою функцією виграшу

$$H_z(x,y) = \begin{cases} x^\beta, & \text{якщо } x > y, |x-z| < |y-z|; \\ -(-y)^\beta, & \text{якщо } x > y, |x-z| > |y-z|; \\ z, & \text{якщо } x > y, |x-z| = |y-z|, \end{cases} \tag{17}$$

де $\beta > 2$. Зауважимо, що відповідна задача для $\beta \le 2$ розглянута в [1].

Рівновагу будемо шукати в змішаних стратегіях. Позначимо через $f(x)$ та $g(y)$ змішані стратегії гравців L і M, відповідно. Зауважимо, що

$$f(x) \ge 0, \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1; \qquad g(y) \ge 0, \quad \int_{-\infty}^{0} g(y)dy = 1.$$

Згідно симетрії, ціна гри рівна нулю, а оптимальні стратегії симетричні відносно осі ординат. Тобто: $g(y) = f(-y)$. Тому достатньо побудувати оптимальну стратегію тільки для одного з гравців, наприклад L. Функція виграшу гравця M при вибраній стратегії $f(x)$ гравця L позначимо через $H(f(x), y)$.

Теорема 11. *Для гравця L оптимальною буде стратегія*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } 0 \le x < c; \\ \frac{\beta c^{\beta/2}}{x^{\beta/2+1}}, & \textit{якщо } c < x < c+d; \\ 0, & \textit{якщо } c+d < x < +\infty. \end{cases} \tag{18}$$

де $c \in (0;2]$, $d = c(\sqrt[\beta]{4} - 1)$.

Доведення

Оптимальну стратегію гравця L будемо шукати у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \le x < c; \\ \phi(x), & \text{якщо } c < x < c+d; \\ 0, & \text{якщо } c+d < x < +\infty. \end{cases} \tag{19}$$

де функція $\phi(x)$ — додатна неперервно диференційовна на інтервалі $(c, c+d)$.

Функція $H(f(x), y)$ неперервна на проміжку $(-\infty; 0]$. Стратегія (19) буде оптимальною, якщо $H(f(x), y) = 0$ для $y \in [-(c+d), -c]$, і $H(f(x), y) \geq 0$ для $y \in (-\infty, -(c+d)) \cap (-c, 0]$.

Нехай $y \in [-(c+d), -c]$. Тоді

$$H(f(x), y) = \frac{1}{3}\left[\int\limits_{c}^{c+d}(-(-y)^{\beta})f(x)dx + \int\limits_{c}^{-y}x^{\beta}f(x)dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-y}^{c+d}(-(-y)^{\beta})f(x)dx + \int\limits_{c}^{c+d}x^{\beta}f(x)dx\right]. \tag{20}$$

Якщо $f(x)$ — оптимальна стратегія, то

$$0 = H(f(x), -c-0) = \frac{1}{3}\left[\int\limits_{c}^{c+d}(-c-0)^{\beta}f(x)dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{c}^{c+0}x^{\beta}f(x)dx + + \int\limits_{c+0}^{c+d}(-c-0)^{\beta}f(x)dx + \int\limits_{c}^{c+d}x^{\beta}f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-c^{\beta}\int\limits_{c}^{c+d}f(x)dx - c^{\beta}\int\limits_{c}^{c+d}f(x)dx + \int\limits_{c}^{c+d}x^{\beta}f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-2c^{\beta} + \int\limits_{c}^{c+d}x^{\beta}f(x)dx\right] = 0;$$

$$0 = H(f(x), -(c+d)+0) = \frac{1}{3}\left[\int\limits_{c}^{c+d}(-(c+d-0)^{\beta}f(x))dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{c}^{c+d-0}x^{\beta}f(x)dx + \int\limits_{c+d-0}^{c+d}(-(c+d-0)^{\beta}f(x))dx + \int\limits_{c}^{c+d}x^{\beta}f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-(c+d)^{\beta}\int\limits_{c}^{c+d}f(x)dx + 2\int\limits_{c}^{c+d}x^{\beta}f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-(c+1)^{\beta} + 2\int\limits_{c}^{c+d} x^{\beta} f(x)dx\right]. \qquad (21)$$

З (20) і (21) отримаємо $\int\limits_{c}^{c+d} x^{\beta} f(x)dx = 2c^{\beta} = \frac{1}{2}(c+d)^{\beta}$; $4c^{\beta} = (c+d)^{\beta}$.
$\sqrt[\beta]{4}c = c+d$; $(\sqrt[\beta]{4}-1)c = d$; $0 < c \leq 2$.
Зауважимо, що

$$\int\limits_{c}^{c+d} x^{\beta} f(x)dx = 2c^{\beta}. \qquad (22)$$

Тоді для оптимальності стратегії $f(x)$, необхідно, щоб $H'(f(x),y) = H''(f(x),y)$ на $(-(c+d),-c)$. Отже, з (20) випливає, що

$$H'(f(x),y) = \frac{1}{3}\left[\int\limits_{c}^{c+d} \beta(-y)^{\beta-1} f(x)dx + (-y)^{\beta} f(-y) \int\limits_{-y}^{c+d} \beta(-y)^{\beta-1} f(x)dx - \right.$$

$$\left. -(-(-y)^{\beta})f(-y)\right] = \frac{1}{3}\left[\beta(-y)^{\beta-1} \int\limits_{c}^{c+d} f(x)dx + \right.$$

$$\left. +2(-y)^{\beta} f(-y) + \beta(-y)^{\beta-1} \int\limits_{-y}^{c+d} f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\beta(-y)^{\beta-1} - 2(-y)^{\beta} f(-y) + \beta(-y)^{\beta-1} \int\limits_{-y}^{c+d} f(x)dx\right]. \qquad (23)$$

$$H''(f(x),y) = \frac{1}{3}\left[-\beta(\beta-1)(-y)^{\beta-2} + 2\beta(-y)^{-\beta-1} f(-y) + \right.$$

$$\left. +2(-y)^{\beta} f'(-y) + \beta(\beta-1)y^{\beta-2}(-1) \int\limits_{-y}^{c+d} f(x)dx + \beta(-y)^{\beta-1} f(-y)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\beta(\beta-1)(-y)^{\beta-2} + 3\beta(-y)^{-\beta-1} f(-y) + 2(-y)^{\beta} f'(-y) - \right.$$

$$\left. -\beta(\beta-1)(-y)^{\beta-2} \int\limits_{-y}^{c+d} f(x)dx\right]. \qquad (24)$$

Тоді на проміжку $(-(c+d), -c)$, то з (23) і (24) отримаємо

$$(\beta-1)(-y)^{-1}H'(f(x),y)+H''(f(x),y)=0$$

$$\frac{1}{3}\Big[(\beta-1)\beta(-y)^{\beta-2}-2(\beta-1)(-y)^{\beta-1}f(-y)+$$

$$+\beta(\beta-1)(-y)^{\beta-2}\int\limits_{-y}^{c+d}f(x)dx+(-\beta)(\beta-1)y^{\beta-2}+3\beta(-y)^{\beta-1}f(-y)+$$

$$+2(-y)^{\beta}f'(-y)-\beta(\beta-1)(-y)^{\beta-2}\int\limits_{-y}^{c+d}f(x)dx]=0.$$

$$(\beta+2)f(-y)(-y)^{\beta-1}+2(-y)^{\beta}f'(-y)=0$$

$$(\beta+2)f(-y)-2yf'(-y)=0. \qquad (25)$$

Замінимо $y=-x$, тоді $x\in(c,c+d)$ маємо

$$2x\phi'(x)+(\beta+2)\phi(x)=0 \qquad (26)$$

$$2x\phi'(x)=-(\beta+2)\phi(x)$$

$$\int\frac{d\phi}{\phi}=-\frac{\beta+2}{2}\int\frac{dx}{x}\Longrightarrow\phi(x)=\gamma x^{-(\frac{\beta}{2}+1)}. \qquad (27)$$

Знайдемо сталу γ. З (23) отримаємо

$$0=H'(f(x),-c-0)=\frac{1}{3}\Big[\beta(c+0)^{\beta-1}-2(c+0)^{\beta}f(c+0)+$$

$$+\beta(c+0)^{\beta-1}\int\limits_{c+0}^{c+d}f(x)dx]=\frac{1}{3}\left[2\beta c^{\beta-1}-2c^{\beta}\gamma c^{-(\frac{\beta}{2}+1)}\right]=0;$$

$2\beta c^{\beta-1}=2c^{\frac{\beta}{2}-1}\gamma;\ \longrightarrow\ \gamma=\beta c^{\frac{\beta}{2}}$ і $\phi(x)=\frac{\beta c^{\frac{\beta}{2}}}{x^{\frac{\beta}{2}+1}}$.

Перевіримо виконання умов оптимальності

$$\int\limits_{c}^{c+d}x^{\beta}f(x)dx=\int\limits_{c}^{c+d}\frac{\beta c^{\frac{\beta}{2}}}{x^{\frac{\beta}{2}+1}}x^{\beta}dx=\int\limits_{c}^{c+d}\beta c^{\frac{\beta}{2}}x^{\frac{\beta}{2}-1}dx=\beta c^{\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{x^{\frac{\beta}{2}}}{\frac{\beta}{2}}\Big|_{c}^{c+d}=$$

$$=2c^{\frac{\beta}{2}}((c+d)^{\frac{\beta}{2}}-c^{\frac{\beta}{2}})=2(c^2+cd)^{\frac{\beta}{2}}-2c^{\beta}=2c^{\beta}$$

$$(c^2+cd)^{\frac{\beta}{2}} = 2c^\beta,\ \ c^2+cd = 2^{\frac{\beta}{2}}c^\beta\,,\ \ c+d = 2^{\frac{2}{\beta}}c\,,\ \ d = (4^{\frac{1}{2}}-1)c.$$

$$\int\limits_c^{c+d} f(x)dx = \int\limits_c^{c+d} \beta c^{\frac{\beta}{2}} x^{-\frac{\beta}{2}-1}dx = \beta c^{\frac{\beta}{2}} \frac{x^{-\frac{\beta}{2}}}{-\frac{\beta}{2}}\Big|_c^{c+d} =$$

$$= -2c^{\frac{\beta}{2}}((c+d)^{-\frac{\beta}{2}} - c^{-\frac{\beta}{2}}) = -2\left(\left(\frac{c}{c+d}\right)^{\frac{\beta}{2}}-1\right) = 1,$$

$$\left(\frac{c}{c+d}\right)^{\frac{\beta}{2}}-1 = -\frac{1}{2};\ \left(\frac{c}{c+d}\right)^{\frac{\beta}{2}} = \frac{1}{2};\ \left(\frac{c}{c+d}\right)^{\beta} = \frac{1}{4};\ 4c^\beta = (c+d)^\beta;$$

$$\sqrt[\beta]{4}c = c+d \longrightarrow d = (\sqrt[\beta]{4}-1).$$

Нехай $y \in [-(c+d), -c]$. Тоді

$$H(f(x),y) = \frac{1}{3}\left[-(-y)^\beta + \int\limits_c^{-y} x^\beta \frac{\beta c^{\frac{\beta}{2}}}{x^{\frac{\beta}{2}-1}}dx + \int\limits_{-y}^{c+d} (-(-y)^\beta)\frac{\beta c^{\frac{\beta}{2}}}{x^{\frac{\beta}{2}-1}}dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_c^{c+d} x^\beta \frac{\beta c^{\frac{\beta}{2}}}{x^{\frac{\beta}{2}-1}}dx\right] = \frac{1}{3}[-(-y)^\beta + \int\limits_c^{y} \beta c^{\frac{\beta}{2}} x^{\frac{\beta}{2}-1}dx -$$

$$-(-y)^\beta \int\limits_{-y}^{c+d} \beta c^{\frac{\beta}{2}} x^{-\frac{\beta}{2}-1}dx + 2c^\beta] = \frac{1}{3}\left[-(-y)^\beta + \beta c^{\frac{\beta}{2}} \frac{x^{\frac{\beta}{2}}}{\frac{\beta}{2}}\Big|_c^{-y} - \right.$$

$$-(-y)^\beta \beta c^{\frac{\beta}{2}} \frac{x^{-\frac{\beta}{2}}}{-\frac{\beta}{2}}\Big|_{-y}^{c+d} + 2c^\beta] = \frac{1}{3}[-(-y)^\beta + 2c^{\frac{\beta}{2}}(-y)^{\frac{\beta}{2}} - 2c^{\frac{\beta}{2}}c^{\frac{\beta}{2}} -$$

$$-(-y)^\beta 2c^{\frac{\beta}{2}}((c+d)^{-\frac{\beta}{2}} - (-y^{-\frac{\beta}{2}})) + 2c^{-\frac{\beta}{2}}] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-(-y)^\beta + 2c^{\frac{\beta}{2}}(-y)^{\frac{\beta}{2}} - 2c^{\frac{\beta}{2}} + 2c^{\frac{\beta}{2}}(c+d)^{-\frac{\beta}{2}}(-y)^\beta - 2c^{\frac{\beta}{2}}(-y)^{\frac{\beta}{2}} + 2c^\beta\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-(-y)^\beta - 2c^\beta + 2c^{\frac{\beta}{2}}\frac{1}{2}c^{-\frac{\beta}{2}}(-y)^\beta + 2c^\beta\right] = 0.$$

Нехай $y \in (-\infty; -(c+2d)]$, тоді

$$H(f(x),y) = \int\limits_c^{c+d} x^\beta f(x)dx = 2c^\beta.$$

Нехай $y \in [-(c+2d), -(c+d)]$, тоді $-y \in [c+d, c+2d]$, $-d-y \in [c, c+d]$ і

$$H(f(x), y) = \frac{1}{3}\left[\int\limits_{c}^{-d-y} x^\beta f(x)dx(-y)^\beta \int\limits_{-d-y}^{d+c} f(x)dx + 2\int\limits_{c}^{c+d} x^\beta f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{2}{3}c^{\frac{\beta}{2}}\left[(-d-y)^{\frac{\beta}{2}} + c^{\frac{\beta}{2}} + \frac{(-y)^\beta}{(c+d)^{\frac{\beta}{2}}} - \frac{(-y)^\beta}{(-c-y)^{\frac{\beta}{2}}}\right]. \qquad (28)$$

Тоді

$$H(f(x), -(c+d)-0) = \frac{2}{3}c^{\frac{\beta}{2}}\left[c^{\frac{\beta}{2}} + c^{\frac{\beta}{2}} + (c+d)^\beta - 2(c+d)^{\frac{\beta}{2}}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}c^{\frac{\beta}{2}}[2c^{\frac{\beta}{2}} - (c+d)^{\frac{\beta}{2}}\Big] = 0.$$

Тоді в (28) робимо заміну $-d-y = t$, $t \in [c, c+d]$ і розглянемо функцію

$$L(t) = \frac{2}{3}\left[t^{\frac{\beta}{2}} + c^{\frac{\beta}{2}} + \frac{(t+d)^\beta}{(c+d)^{\frac{\beta}{2}}} - \frac{(t-d)^\beta}{t^{\frac{\beta}{2}}}\right].$$

Функції $g(t) = \frac{(t+d)^\beta}{(c+d)^{\frac{\beta}{2}}}$ і $h(t) = t^{\frac{\beta}{2}} + \frac{(t+d)^\beta}{t^{\frac{\beta}{2}}} = t^{\frac{\beta}{2}}(1-(1+\frac{d}{t})^\beta)$ строго зростають на $[c, c+d]$. Тоді $H(f(x), y)$, як композиція строго спадної і строго зростаючої функції строго спадає на відрізку $(-(c+2d), -(c+d))$ від $2c^\beta$ до 0. Отже, ця функція додатна на проміжку $(-(c+2d), -(c+d))$.

Нехай $y \in [-c, 0]$, тоді $-y \in [0, c]$, $d-y \in [d, c+d]$ і

$$H(f(x), y) = \frac{1}{3}\left[-2(-y)^\beta + \int\limits_{c}^{d-y} x^\beta f(x)dx - \int\limits_{d-y}^{c+d} (-y)^\beta f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-2(-y)^\beta + \beta c^{\frac{\beta}{2}} \frac{x^{\frac{\beta}{2}}}{\frac{\beta}{2}}\Big|_{c}^{d-y} - (-y)^\beta \beta c^{\frac{\beta}{2}} \frac{x^{-\frac{\beta}{2}}}{-\frac{\beta}{2}}\Big|_{d-y}^{c+d}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-2(-y)^\beta + 2c^{\frac{\beta}{2}}((d-y)^{\frac{\beta}{2}} - c^{\frac{\beta}{2}}) + 2(-y)^\beta c^{\frac{\beta}{2}}((c+d)^{-\frac{\beta}{2}} - (d-y)^{-\frac{\beta}{2}})\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[-2(-y)^\beta - 2c^\beta + 2(d-y)^{\frac{\beta}{2}}c^{\frac{\beta}{2}} + 2(-y)^\beta c^{\frac{\beta}{2}}(c+d)^{-\frac{\beta}{2}} -$$

$$-2(-y)^\beta c^{\frac{\beta}{2}}(d-y)^{-\frac{\beta}{2}}\Bigg] = \frac{1}{3}\Bigg[-2(-y)^\beta - 2c^\beta + 2(-y)^\beta c^{\frac{\beta}{2}}\frac{1}{2}c^{-\frac{\beta}{2}} +$$

$$+2(d-y)^{\frac{\beta}{2}}c^{\frac{\beta}{2}} - 2(-y)^\beta c^{\frac{\beta}{2}}(d-y)^{-\frac{\beta}{2}}\Bigg] = \frac{1}{3}\Bigg[-(-y)^\beta - 2c^\beta + 2c^{\frac{\beta}{2}}(d-y)^{\frac{\beta}{2}} -$$

$$-2(-y)^\beta \frac{c^{\frac{\beta}{2}}}{(d-y)^{\frac{\beta}{2}}}\Bigg], \qquad d+c = 4^{\frac{1}{\beta}}c.$$

Тоді

$$H(f(x), -c+0) = \frac{1}{3}\left[-c^\beta - 2c^\beta + 2c^{\frac{\beta}{2}}(d+c)^{\frac{\beta}{2}} - 2c^\beta \frac{c^{\frac{\beta}{2}}}{(d+c)^{\frac{\beta}{2}}}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-c^\beta - 2c^\beta + 2c^{\frac{\beta}{2}}2c^{\frac{\beta}{2}} - 2c^\beta \frac{c^{\frac{\beta}{2}}}{2c^{\frac{\beta}{2}}}\right] = 0.$$

$$H(f(x), -0) = -\frac{1}{3}\left[-2c^\beta + 2c^{\frac{\beta}{2}}d^{\frac{\beta}{2}}\right] = \frac{2}{3}c^{\frac{\beta}{2}}(d^{\frac{\beta}{2}} - c^{\frac{\beta}{2}}) \geq 0. \tag{29}$$

Далі

$$H'(f(x), y) = \frac{1}{3}\Bigg[\beta(-y)^{\beta-1} - 2c^\beta \frac{\beta}{2}(d-y)^{\frac{\beta}{2}-1} -$$

$$-2c^{\frac{\beta}{2}}\frac{-\beta(-y)^{\beta-1}(d-y)^\beta + (-y)^\beta \frac{\beta}{2}(d-y)^{\frac{\beta}{2}-1}}{(d-y)^\beta}\Bigg] =$$

$$= \frac{\beta}{3}\left[(-y)^{\beta-1} + c^{\frac{\beta}{2}}\frac{-(d-y)^{\frac{\beta}{2}-1}}{1} + c^{\frac{\beta}{2}}\frac{2(-y)^{\beta-1} - (-y)^\beta}{(d-y)^{\frac{\beta}{2}+1}} =\right.$$

$$= \frac{\beta}{3}\left[(-y)^{\beta-1} + c^{\frac{\beta}{2}}\frac{-(d-y)^\beta + 2(-y)^{\beta-1} - (-y)^\beta}{(d-y)^{\frac{\beta}{2}+1}}\right]. \tag{30}$$

Тоді для $\beta > 2$

$$H'(f(x), -c+0) = \frac{\beta}{3}\left[c^{\beta-1} + c^{\frac{\beta}{2}}\frac{-(d+c)^\beta + 2c^{\beta-1} - c^\beta}{(d+c)^{\frac{\beta}{2}+1}}\right] =$$

$$= \frac{\beta}{3}\left[c^{\beta-1} + c^{\frac{\beta}{2}}\frac{-4c^\beta + 2c^{\beta-1} - c^\beta}{4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}}c^{\frac{\beta}{2}+1}}\right] == \frac{\beta}{3}\left[c^{\beta-1} + \frac{1}{c}\frac{1}{2^{\frac{\beta}{2}+1}}(-c^\beta + 2c^{\beta-1})\right] =$$

$$= \frac{\beta}{3}\left[c^{\beta-1} + \frac{1}{2^{\frac{\beta}{2}+1}}(-5c^{\beta-1} + 2c^{\beta-2})\right] = \frac{\beta}{3}\left[(1 - \frac{5}{2^{\frac{\beta}{2}+1}})c^{\beta-1} + \frac{1}{2^{\frac{2}{\beta}}}c^{\beta-2}\right] =$$

$$= \frac{\beta c^{\beta-2}}{3}\left[(1-\frac{5}{2^{\frac{\beta}{2}+1}})c+\frac{1}{2^{\frac{\beta}{2}}}\right] \geq \frac{\beta c^{\beta-2}}{3}\left[-\frac{1}{4}c+\frac{1}{2^{\frac{2}{\beta}}}\right] =$$

$= \frac{\beta c^{\beta-2}}{3}[-\frac{c}{4}+\frac{1}{2}] = \frac{\beta c^{\beta-2}(4-2c)}{12} \geq 0$, бо $c < 2$.

$$H'(f(x),-0) = \frac{\beta}{3}\left[c^{\frac{\beta}{2}}\frac{-d^{\beta}}{\beta^{\frac{d}{2}+1}}\right] = -\frac{\beta}{2}c^{\frac{\beta}{2}}d^{\frac{\beta}{2}-1} < 0.$$

Тоді на проміжку $(-c,0)$ існує єдина точка y_0 така, що

$$H'(f(x),y_0) = 0,$$

y_0 — точка максимуму. Отже за (20) $H(f(x),y)$ додатна на $(-c,0)$.

5 Висновок

У цій магістерській роботі розглянуто арбітражну процедуру, де $-\infty < y \le 0 \le x < +\infty$, а z — дискретна випадкова величина, яка приймає значення $-1, 0, 1$ з рівними ймовірностями $p = \frac{1}{3}$ зі степеневою функцією виграшу

$$H_z(x,y) = \begin{cases} x^\beta, & \text{якщо } x > y, |x-z| < |y-z|; \\ -(-y)^\beta, & \text{якщо } x > y, |x-z| > |y-z|; \\ z, & \text{якщо } x > y, |x-z| = |y-z|, \end{cases}$$

де $\beta > 2$. Рівновагу процедури знайдено у змішаних стратегіях. Згідно симетрії, оптимальні стратегії симетричні відносно осі ординат, тобто: $g(y) = f(-y)$, $f(x)$ та $g(y)$ змішані стратегії гравців L і M, відповідно. Тому достатньо побудувати оптимальну стратегію тільки для одного з гравців, наприклад L. Основним завданням дипломної роботи було доведення теореми, що для гравця L оптимальною буде стратегія

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \le x < c; \\ \frac{\beta c^{\beta/2}}{x^{\beta/2+1}}, & \text{якщо } c < x < c+d; \\ 0, & \text{якщо } c+d < x < +\infty. \end{cases}$$

де $c \in (0; 2]$, $d = c(\sqrt[\beta]{4} - 1)$.

6 Література

1. Мазалов В.В., Менчер А.Е., Токарева Ю.С. Переговори. Математична теорія. – Санкт-Петербург-Москва-Краснодар, 2012. — 303с.

2. Менчер А.Е. *Арбитражная процедура в трёх точках со степенной функциейфы выигрыша* // Физика, математика, техника, технология. Ученые записки ЗабГГПУ – 2012. – С. 82-87.

3. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения. – СПб.: Лань, 2010. — 448 с.

3. Мазалов В. В., Менчер А. Э., Токарева Ю. С. О равновесии в модели переговоров с арбитром // Известия РАН. Теория и системы Управления. – 2009. – No5. — С. 69–75.

4. Dresner Z. Competitive location strategies for two facilities // Regional Science and Urban Economics. – 1982. – Vol.12. – P. 485–493.

5. Bester H., De Palma A., Leininger W., Thomas J., Von Tad- den E. L. A non-cooperative analysis of Hotelling's location ga- me // Games and Economics Behavior. 1996. Vol. 12. P. 165–186.

6. Aumann R. J., Maschler M. Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud // Journal of Economic Theory. 1985. Vol. 36. P. 195—213.

7. Gerchak Y., Greenstein E., Weissman I. Estimating arbitrator's hidden judgement in final offer arbitration // Group Decision and Negotiation. 2004. 13(no 3). P. 291–298.

8. Hurley W. J. Effects of multiple arbitrators on final-offer arbi- tration settlements // European Journal of Operational Research. 2003. No 145. P. 660–664.