Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет

Кафедра математичної
економіки, економетрії,
фінансової та страхової
математики

Магістерська робота

Принцип максимуму і достатні умови оптимальності для невипуклої задачі керування

Виконала: студентка групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 - *математика,*
спеціалізації *математична економіка та економетрика*
Дубровна Наталія Миколаївна
Науковий керівник:
проф. Кирилич В. М.

*Роботу рекомендовано до захисту
на засіданні кафедри математичної
економіки, економетрії, фінансової та
страхової математики
протокол від 04 грудня 2020 року №4*

*В. о. завідувача кафедрою
проф. Оліскевич М. О.*

Львів – 2020

Зміст

Вступ

Проблема створення систем, оптимальних в будь-якому заздалегідь заданому сенсі, а також вибір керування, при якому поведінка системи буде найкращою, є одною з найважливіших задач теорії оптимального керування. Такі задачі можуть виникати природним чином, наприклад, необхідно, щоб система перйшла з одного фіксованого стану в інший за найкоротший час, або з мінімальними затратами енергії. Ці та інші питання є надзвичайно важливими, наприклад, в теорії руху ракет, супутників, тощо.

Більшість цікавих практичних проблем ведуть до некласичних варіаційних задач, які потребують нових математичних методів розв'язування. Особливо у випадку, коли шукані керуючі впливи не належать до класу неперервних функцій.

Вивчення різноманітних динамічних процесів керування позволяє стверджувати, що майбутня поведінка багатьох процесів керування є залежною не тільки від теперішнього, а й значним чином від попереднього стану процесу. Математичний опис таких процесів керування втілюється за допомою звичайних диференціальних рівнянь з пам'яттю різних видів, які ми називаємо також рівняннями з наслідком або навантаженим диференціальним рівнянням. Навантаженими диференціальними рівняннями прийнято називати ті рівняння, які містять в коефіцієнтах або в правій частині які-небудь функціонали (функції) від розв'язку. Зокрема, значення розв'язку, в яких фазовий стан процесу в будь-якій точці і в будь-якій момент може впливати на динаміку процесу загалом.

На практиці задачі такого виду виникають, наприклад, коли при спостереженні за динамічним процесом виміряються фазові стани в деякі моменти часу і інформація неперервно передається за допомогою зворотнього звязку.

У залежності від харектеру впливу навантажуючих доданків на динаміку процесу, деякі системи навантажених диференціальних рівнянь представляються у вигляді поетапно змінних диференціальних рівнянь.

У магістерській роботі розглянуто задачу оптимальної сабілізації системи лінійних навантажених диференціальних рівнянь. На основі методу функції Ляпунова запропоновано спосіб побудови оптимального стабілізуючого керування та виведено неохідні умови його існування.

Метою даного дослідження є відшукання не тільки необхідних, але й достатніх умов оптимальності. Одна з проблем теорії достатніх умов, пов'язана з трудоємкістю їх реалізації (аналітичної і обчислювальної) в порівнянні, наприклад, з перевіркою необхідних умов. Тому доцільно виділити спеціальні класи невипуклих задач з невеликим розривом між необхідними і достатніми умовами за критерієм перевірки їхньої практичної реалізації. Тому розглядається найпростіша невипукла задача: лінійна фазова система, скалярне керування, лінійно-квадратичний відносно пари "стан-керування"функціонал. Перехід від принципу максимуму та необхідних умов оптимальності до достатніх умов виконуються на основі поняття сильно екстримального керування. Далі проводиться конструктивнне перетворення умов. Специфіка вихідної задачі допускає знаходження розв'язків допоміжних підзадач. У результаті, отримані умови оптимальності представляються у формі нерівностей і рівностей для функцій одної змінної (часової) на проміжку керування. Відмітимо, що принцип максимуму в даній задачі пов'язаний з нерівностями для функції одної змінної.

Отже, принцип максимуму Понтрягіна допомагає ознайомитись з формулюванням задачі існування оптимального керування, дає теоретичне підгрунтя для їхнього розв'язання. У розділі, присвяченому задачам оптимальної стабілізації системи лінійних навантажених диференціальних рівнянь одержано необхідні умови існування оптимального керування. Зауважимо, що в магістерській роботі основною нашою метою було дослідити не тільки необхідні , а й достатні умови оптимальності. Саме в розділі 3 на прикладі невипуклої задачі керування, показано перехід до достатніх умов, використовуючи сильно-екстримальне керування.

I Принцип максимуму Понтрягіна

1.1 Формулювання задачі

Розглянемо об'єкт автоматичного керування, який має r керуючих впливів і описується системою диференціальних рівнянь n-го порядку:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, ..., x_n; u_1, ..., u_r; t) \qquad (i = 1, ..., n), \tag{1}$$

де $x_1, ..., x_n$ - параметри об'єкта, а $u_1, ..., u_r$ - стан керуючих функцій. В кожен момент часу керуючі функції мають задовільняти нерівності,

$$\varphi_j(u_1(t), ..., u_r(t)) \leq 0 \qquad (j = 1, ..., m), \tag{2}$$

Далі будемо користуватись геометричною термінологією і введемо r-вимірний простір $R(u_1, ..., u_r)$. Будь якій заданій сукупності керуючих функцій $(u_1, ..., u_r)$, ввідповідає деяка точка (вектор) u простору R. Вектор $u(t) = (u_1(t), ..., u_r(t))$, заданий як функція часу, ми будемо називати керуванням об'єкта. Керування $u(t)$ будемо вважати кусково-неперервним, тобто кожна з функцій $u_k(t)$ може мати скінченне число розривів першого роду на скінченному відрізку часу.

Нерівності (2) виділяють у просторі R деяку замкнуту множину, межі якої задаються рівністю $\varphi_j(u_1(t), ..., u_r(t)) = 0$. Цю множину ми позначимо через U, а нерівність (2) може бути записана в короткому вигляді

$$u(t) \in U, \tag{3}$$

тобто вектор $u(t)$ в будь-який момент часу має належити замкнутій множині U простору R. Таким чином, наш вибір можливих керувань обмежений умовою (3) і вимогою кускової неперервності функцій $(u_1, ..., u_r)$. Керування $u(t)$, для яких виконуються ці умови називатимемо допустимими. Далі будемо мати на увазі допустимі керування.

Одночасно з простором $R(u_1, ..., u_r)$, в якому може змінюватись керування, також розглянемо n-вимірний фазовий простір $X(x_1, ..., x_n)$ параметрів об'єкта. Стан об'єкта описується точкою (вектором) $(x_1, ..., x_n)$ простору X. Якщо задане керування $u(t)$ і початковий стан системи $x^0 = (x_1^0, .., x_n^0)$, то поведінка системи (траекторія $x(t)$ у фазовому просторі X) однозначно визначається з рівняння (1).

Основною проблемою теорії оптимальних систем є вибір такого керування $u(t)$, при якому поведінка системи буде в якомусь наперед визначеному сенсі "найкращою". Наведемо низку прикладів задач, в яких кожного раху конкретизується поняття "оптимальне керування".

Наприклад, можна вимагати, щоб керування $u(t)$ було вибране таким чином, щоб система з одного фіксованого стану x^0 перейшла в інший фіксований стан x^1 за мінімальний час. Керування, яке задовільняє цю вимогу називається оптимальним за швидкодією. Час переходу системи з стану x^0 в стан x^1, який визначає критерій оптимальності в даній задачі, є функціоналом, заданим на керуваннях $u(t)$. Отже вимога оптимальності керування, означає мінімізацію значення функціонала.

Розглянемо іншу задачу. Нехай, необхідно вибрати керування $u(t)$ так, щоб за даний час T система з початкового стану x^0 перейшла в такий стан, щоб одна зі змінних (наприклад, x_1) прийняла би максимально можливе значення, а решта координат залишились фіксованими. Така задача виникає, наприклад, при розрахунку закону керування ракетою, яка виводить штучний супутник Землі на задану орбіту, якщо вимагається, щоб на фіксованій висоті в заданий момент часу горизонтальна швидкість польоту ракети була максимальною, при нульовій вертикальній швидкості і заданій дальності польоту. В даній ситуації функціонал, який визначає критерій оптимальності,- значення узагальненої координати $x_1(T)$ (горизонтальна швидкість польоту ракети) в момент часу $t = T$. У певних випадках, немає потреби фіксувати кінцеве значення решти координат $x_2, ..., x_n$. Якщо, наприклад, важливою є лише висота, а не дальність польоту, тоді немає необхідності накладати які-небудь обмеження на останню. Тоді виникає аналогічна задача про максимум функціоналу $x_1(T)$, яка не потребує при цьому, щоб решта координат приймали заздалегіть задані значення.

Розглянемо, ще одну задачу. Необхідно вибрати керування $u(t)$ таким чином, щоб інтеграл

$$S = \int_0^T F(x_1, ..., x_n; u_1, ..., u_r)dt \tag{4}$$

приймав за час руху T мінімальне (або максимальне) значення. Тут, знову ж таки, можливі різні варіанти. Можна вимагати, щоб початковий і кінцевий стани системи були фіксованими заздалегідь (наприклад, в задачі про політ літака з одного фіксованого місця в інше з найменшою затратою палива; функція $F(x, u)$ характеризує розхід топлива за одиницю часу, а інтеграл - повної витрати палива за весь час польоту).

В інших випадках кінцевий стан системи не має ніякого значення, важливо лише, щоб інтеграл приймав максимальне (або мінімальне) значення з всіх можливих Наприклад, якщо треба, щоб керуючий агрегат дав максимальну кількість продукції при відсутності будь-яких інших умов , та при цьому функція $F(x, u)$ має сенс миттєвого випуску, а інтеграл - повного випуску продукції. Час T, впродовж якого необхідна оптимізація системи, може бути як фіксованою заздалегідь так і не фіксованою величиною.

Можна навести багато подібних формулювань задач, які в математичному сенсі є тісно пов'язаними.

Розглянемо загальну задачу оптимізації лінійної функції кінцевих значень всіх координат системи, тобто виличину $S = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k(T)$, де c_k - деякі сталі. Величина S може трактуватись як скалярний добуток вектора $x(T) = [x_1(T), ...x_2(T)]$, який задає кінцеву траекторію $x(t)$, і заданого вектора $c = (c_1, ..., c_k)$. Іншими словами, потрібно оптимізацію проекції векора $x(T)$ на заданий напрямок $(c_1, ..., c_k)$. Отже вимога максимуму (або мінімуму) величини S, означає, що ми намагаємось перевести нашу систему якомога дальше в напрямку вектора c.

Як ми бачили раніше, на кінцевий стан системи (тобто на кінцеве положення траекторії $x(T)$ у фазовому просторі X) можуть бути накладені різноманітні обмеження. У загальному вигляді ці обмеження можуть бути сформульовані як вимоги переведення системи на деяку фіксовану множину G фазового простору X, яка описується деякою сукупністю рівностей і нерівностей.

Таким чином, розглянемо наступну задачу. З множини допустимих керувань, які переводять систему (1) з точки $x(T_0) = x^0$ на фісовану замкнуту множину G фазового простору, необхідно вибрати таке кероування $u(t)$, щоб $S = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(T)$ в заданий момент часу $t = T$ приймала мінімальне (або максимальне) значення.

Керування $u(t)$, яке забезпечує мінімум (максимум) функціоналу $S = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(T)$, будемо називати min-оптимальним (max-оптимальним) на S.

У математичному відношенні задача, яку ми розглядаємо, є узагальненням класичної проблеми Майєра у варіаційному численні. Але наявність обмежень на керуючі функції,згідно з якими керування $u(t)$ належить замкнутій множині U, не дозволяє використовувати методи класичного варіаційного числення. Тому розв'язання таких проблем потребує розробки нових математичних методів.

1.2 Принцип максимуму

Розглянемо задачу, де будемо вважати, що правий кінець траекторії $x(T)$ є вільним, тобто на кінцеве значення координат не накладено ніяких обмежень (множина G займає весь простір X). Задачі такого типу є важливими для теорії динамічної точності систем керування або при розв'язуванні проблем керування у математичній економіці.

Розглянгемо наступну задачу керування та практичний алгоритм для її розв'язання:

$$I = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt + F(x(T)) \to min; \tag{5}$$

при умовах

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \\ &x(0) = x_0 \\ &u(t) \in u \subset R_r \end{aligned}$$

Задача полягає в тому, щоб мінімізувати заданий функціонал маючи змогу вибирати лише $u(t)$.
Для цього вводимо вектор-функцію $\psi(t)$ розмірністі n,вважаючи що $x(t)$ і f також розмірності n, а u будь якої іншої розмірності.
Тепер будуємо скалярну функцію H (функція Гамільтона)

$$H(t, x, u, \psi) = \psi(t)f(t, x, u) + f^0(t, x, u),$$

визначивши $\psi(t)$ як розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -\frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t)}{\partial x}, \tag{6}$$

де $[x^*(t), u^*(t)]$ - мініmaль з початковими умовами

$$\psi(T) = -\frac{\partial F(x_*(T))}{\partial x}.$$

Необхідною умовою min-оптимальності керування $u(t)$ є виконання для $u(t)$ умови максимуму, яку можна сформулювати наступною теоремою.

Теорема 1.2.1. *Для того, щоб допустима для задачі (5) пара $(u^*(t), x^*(t))$ була її розв'язком, необхідно, щоб існували такі (які одночасно не обертаються в нуль) сталі $\psi_0^* \leq 0$ і розв'язки $\psi^* = (\psi_1^*, ..., \psi_n^*)^T$ спряженої системи (6) при $x(t) = x^*(t), u(t) = u^*(t)$, такі що при будь якому $t \in [t; T]$, функція $u = H(t, x^*, u, \psi^*)$ досягала при $u = u^*(t)$ максимуму, тобто виконується умова:*

$$\max_{u \in U} H(t, x^*, u, \psi^*) = H(t, x^*, u^*, \psi^*).$$

Продемонструємо виконання умов теореми на прикладах.

Приклад 1.2.1

Нехай треба знайти керування $u(t)$, яке забезпечує мінімум інтегралу $\frac{1}{2}\int_0^T (x^3 + u^2)dt$, якщо рівняння об'єкту має вигляд:

$$\dot{x} = -ax + u, \qquad x(0) = x^0,$$

а на керування $u(t)$ не накладено ніяких обмежень (множина U займає всю числову вісь $-\infty < u < +\infty$). Ввівши змінні

$$x_1(t) = x(t), \qquad x_2 = \frac{1}{2}\int_0^t (x_1^3 + u^2)dt,$$

далі отримаємо систему

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + u, \qquad \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}u^2.$$

Складаємо функцію Гамільтона

$$H(x, \psi, u) = -a\psi_1 x_1 + \frac{1}{2}\psi_2 x_1^2 + \psi_1 u + \frac{1}{2}\psi_2 u^2$$

і рівняння імпульсу

$$\dot{\psi}_1 = a\psi_1 - \psi_2 x_1, \qquad \dot{\psi}_2 = 0$$

з крайовими умовами

$$x_1(0) = x^0, \qquad x_2(0) = 0; \qquad \psi_1(T) = 0, \qquad \psi_2(T) = -1,$$

Функція Гамільтона буде мати вигляд:

$$H = -a\psi_1 x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + \psi_1 u - \frac{1}{2}u^2.$$

Згідно із принципом максимуму Понтрягіна функція Гамільтона має бути максимальною по u за будь-яких значень x, ψ. В даному випадку максимуму функція Гамільтона досягає при значенні $u = \psi_1(t)$. Підставляючи отримані значення u в рівняння об'єкта, отримаємо розв'язок для $x_1(t)$ і $\psi_1(t)$:

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}, \psi_1(t) = D_1 e^{\lambda t} + D_2 e^{-\lambda t},$$

де $\lambda = \sqrt{a^2 + 1}$ корінь характеристичного рівняння, а сталі C_1, C_2, D_1, D_2 залежать від x^0. Враховуючи, що $u(t) = \psi(t)$ оптимальне керування також визначене.

<u>Приклад 1.2.2.</u> Розглянемо задачу оптимального керування, де необхідно мінімізувати функціонал:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T)$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + u(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

де $x(\cdot)$- скалярна функція, $u(\cdot)$- скалярне керування, а - сталий параметр, x_0 - фіксована точка.

Застосуємо до цієї задачі принцип максимуму Понтрягіна. Функція Гамільтона має вигляд:

$$H(x, u, \psi, t) = -\frac{1}{2}u^2 + \psi(ax + u).$$

Тоді $\dfrac{\partial H(x(t), u(t), \psi(t), t)}{\partial x} = a\psi(t)$ і спряжена система записується так

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -a\psi(t), \qquad \psi(T) = -x(T),$$

а $\dfrac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial u} = -u+\psi$. Оскільки геометричні обмеження на керування відсутні, то на оптимальному керуванні

$$\frac{\partial H(x(t),u_*(t),\psi(t),t)}{\partial u} = 0.$$

Звідси $u_*(t)=\psi(t)$. Підставляємо знайдене керування в систему керування і записуємо поряд спряжену систему та умови на лівому і правому кінці

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)+\psi(t),$$
$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -a\psi(t),$$
$$x(t_0)=x_0, \qquad \psi(T)=-x(T).$$

Розв'язок спряженої системи

$$\psi(t)=\psi(T)e^{(a(T-t))}.$$

Застосовуємо формулу Коші для загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння першого порядку

$$\begin{aligned} x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)u(s)}ds = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}\psi(T)e^{a(T-s)ds} = \\ = e^{at}x_0+\psi(T)e^{eT}e^{at}\int_0^t e^{-2as}ds = \\ = e^{at}x_0+\frac{1}{2a}\psi(T)e^{aT}(e^{at}-e^{-at}). \end{aligned} \tag{7}$$

Звідси

$$x(T)=e^{aT}(x_0+\frac{1}{2a}\psi(T)(e^{aT}-e^{-aT}))$$

Оскільки $\psi(T)=-x(T)$,то

$$\psi(T) = -\frac{e^{aT}x_0}{1-\frac{e^{aT}}{2a}(e^{aT}-e^{-aT})} \tag{8}$$

Отже, оптимальне керування має вигляд

$$u_*(t)=\psi(T)e^{a(T-t)},$$

де $\psi(T)$ знаходиться за формулою (8). При цьому оптимальна траєкторія згідно (7) має вигляд

$$x_*(t)=e^{at}x_0+\frac{1}{2a}\psi(T)e^{at}(e^{at}-e^{-at}).$$

II Задача оптимальної стабілізації системи лінійних навантажених диференціальних рівнянь

Розглянемо процес керування, динаміка якого описується навантаженим лінійним диференціальним рівнянням

$$\dot{x} = A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + A_3(t)x(t_3) + B(t)u, \qquad (9)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ - фазовий вектор системи, матриці $A_k(t) - (n \times n), B(t) - (n \times r)$ неперервні на $[t_0, \infty)$, $u(t)$ - керуючий вплив з розмірністю $(r \times 1)$. Доданки $A_k(t)x(t_k), k = \overline{1,3}$, як функції впливають на систему , починаючи з моменту часу $t \geq t_k$.

Припускається, що задані моменти часу t_k, такі що $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \infty$. Функція $x(t)$ неперервна на інтервалах $[t_{k-1}, t_k)$ і в точках навантаження t_k має скінченну лівосторонню границю $\lim_{t \to t_k - 0} x(t) = x(t_k)$.

Нехай для навантаженої системи (9) маємо наступний функціонал:

$$J[\cdot] = \sum_{k=1}^{3} J_k[\cdot] + J_4[\cdot] =$$

$$\sum_{k=1}^{3} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\sum_{j,s=1}^{n} \alpha_{js}^{(k)} x_j(t) x_s(t) + \sum_{j,s=1}^{r} \beta_{js}^{(k)} u_j(t) u_s(t) \right] dt + \qquad (10)$$

$$+ \int_{t_3}^{\infty} \left[\sum_{j,s=1}^{n} \alpha_{js}^{(4)} x_j(t) x_s(t) + \sum_{j,s=1}^{r} \beta_{js}^{(4)} u_j(t) u_s(t) \right] dt$$

де $\alpha_{js}^{(k)}$ і $\beta_{js}^{(k)}$ сталі коефіцієнти додатньо-визначених квадратичних форм.

Сформулюємо задачу оптимальної стабілізації руху керуючої навантаженої сиситеми наступним чином.

Необхідно знайти оптимальне керування u^0, яке для довільних початкових умов забезпечує асимптотичну стійкість розв'язку системи (9) і мінімізує функціонлал (10).

Для побудови розв'язку задачі на інтервалі $[t_0, \infty)$ розбиваємо на частини точками навантаження $[t_0, \infty) = \bigcup_{k=1}^{3} [t_{k-1}, t_k) \bigcup [t_3, \infty)$. Враховуючи послідовність точок навантаження і характер відповідних доданків

$A_k(t)x(t_k), k = \overline{1,3}$, рівняння (9) представляються окремо на інтервалах розбиття у вигляді поетапно змінних диференціальних рівнянь.

$$\dot{x} = \begin{cases} A_0(t)x + B(t)u, t \in [t_0, t_1), \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + B(t)u, t \in [t_1, t_2), \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + B(t)u, t \in [t_2, t_3), \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + A_3(t)x(t_3) + B(t)u, t \in [t_3, \infty) \end{cases} \tag{11}$$

Задача може бути розподілена на дві частини, одна з котрих формулюється на інтервалі $[t_0, t_3)$ з мінімізуючим функціоналом

$$\overline{J}[\cdot] = \sum_{k=1}^{3} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\sum_{j,s=1}^{n} \alpha_{js}^{(k)} x_j(t) x_s(t) + \sum_{j,s=1}^{r} \beta_{js}^{(k)} u_j(t) u_s(t) \right] dt, \tag{12}$$

а друга задача сформульована на безкінечному інтервалі $[t_3, \infty)$ з мінімізуючим функціоналом

$$J_4 = \int_{t_3}^{\infty} \left[\sum_{j,s=1}^{n} \alpha_{js}^{(4)} x_j(t) x_s(t) + \sum_{j,s=1}^{r} \beta_{js}^{(4)} u_j(t) u_s(t) \right] dt \tag{13}$$

Припускаємо, що існують стало-додатні функції Ляпунова [2] $\overline{V}(x,t) = \sum_{k=1}^{3} V_k(x,t), V_k(x,t)$ при $t \in [t_{k-1}, t_k) (k = \overline{1,3})$ і $V(x,t)$ при $t \in [t_3, \infty)$, де $V_k(x,t) (k = 1, 2, 3)$ і $V(x,t)$ - стало-додатня функція Ляпунова для підсистеми (11), які допускають безкінечно малу верхню границю, повні похідні по часу, які вздовж розв'язку відповідних підсистем (11) є стало-додатніми функціями. При даних припущеннях побудову функції оптимальної стабілізації можна застосувати до системи (9) на основі наступного принципу.

Будемо шукати функції Ляпунова $V_k(x,t) (k = \overline{1,3})$ і $V(x,t)$ у вигляді:

$$V_k(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^{(k)}(t) x_i(t) x_j(t), t \in [t_{k-1}, t_k), k = \overline{1,3} \tag{14}$$

$$V(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^{(4)}(t) x_i(t) x_j(t), t \in [t_3, \infty) \tag{15}$$

Отримані системи звичайних диференціальних рівнянь типу Рікатті відносно змінних $c_{ij}^{(k)}(t)$, а також системи алгебраїчних рівнянь. Якщо з отриманих систем вдастся знайти часткові розв'язки $c_{ij}^{k}(t)(k=\overline{1,4})$, такі що квадратичні форми (14) і (15) виявляться додатньо визначеними , то згідно з основною теоремою про оптимальну стабілізацію, задача буде розв'язана. Якщо матриця системи (11) не залежать від t, то замість диференціальних рівнянь типу Рікатті отримаємо алгебричні рівняння відносно величини $c_{ij}^{(k)}$. Підставивши ці значення $c_{ij}^{(k)}$ в (14) і (15), отримаэмо явне вираження функції Ляпунова $V_k(x,t)(k=\overline{1,3})$ і $V(x,t)$. Звідси , маючи функцію Ляпунова $V_k(x,t)(k=\overline{1,3})$ і $V(x,t)$., отримаємо оптимальний керуючий вплив u^0. При цьому оптимальний керуючий вплив є лінійною функцією від координат фазового вектора $x(t)$.

Підставляючи знайдений оптимальний керуючий вплив u^0, $t\in[t_0,t_1)$, у рівняння (11) і розв'язуючи це рівняння з деякими початковими умовами $x(t_0)=x_0$ при $t\in[t_0,t_1)$, отримаємо відповідний рух $x(t)$ для проміжку часу $t\in[t_0,t_1)$. Враховуючи, що $\lim_{t\to t_k-0}x(t)=x(t_k)$ при $t=t_1$ отримаємо значення $x(t_1)$. Приймаємо кінцевий стан $x(t_1)$ попереднього етапу в якості початкового стану для наступного етапу $t\in[t_1,t_2)$. Підставляючи знайдені оптимальні керуючі впливи u^0 $t\in[t_1,t_2)$, в рівняння (11) і розв'язуючи це рівняння, отримаємо відповідний рух $x(t)$ для проміжка часу $t\in[t_1,t_2)$. Продовжуючи цю процедуру, отримаємо рух системи (11) для моментів часу $t\in[t_2,t_3)$ і $t\in[t_3,\infty)$.

Таким чином, будемо мати всі значення $x(t_1),x(t_2),x(t_3)$ фазового вектора $x(t)$ як початкове значення наступного етапу. Відповідно маємо значення фазового вектора $x(t_3)$ як початковий стан руху на інтервалі $[t_3,\infty)$. Далі, згідно із формулою (12) можна обчислити мінімальне значення функціонала $\overline{J}[\cdot]=\sum_{k=1}^{m-1}J_k[\cdot]$, а мінімальне значення функціонала (13) буде рівне $V(x_1(t_3),...,x_n(t_3))$.

III Невипукла задача керування.

3.1 Формулювання невипуклої задачі керування. Умова оптимальності.

Розглянемо задачу оптимального керування

$$\Phi(u) \to max, u \in V, \tag{16}$$

де

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1) \rangle + \int_{t_1}^{t_0} (\langle a(t), x(t) \rangle u(t) - \frac{1}{2}\gamma u^2(t))dt,$$
$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u,$$
$$x(t_0) = x^0,$$
$$V = \{u(\cdot) \in PC([t_0, t_1]) : |u(t)| \leqslant 1, t \in [t_0, t_1]\}.$$

Тут $u(t) \in \mathbb{R}$ - керування; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ - фазовий стан; $C([t_0, t_1])$ - множина кусково-неперервних функцій; $c, x^0, \gamma > 0$ - параметри задачі;

Нехай вектор-функції $a(t), b(t)$ і матрична функція $A(t)$ є неперервні на часовому проміжку $[t_0, t_1]$;

Застосуємо до задачі (16) принцип максимуму Понтрягіна. Введемо функцію Понтрягіна для задачі (16).

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A(t)x \rangle + \langle \psi, b(t) \rangle u + \langle a(t), x \rangle u - \frac{1}{2}\gamma u^2.$$

Спряжена система має вигляд:

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi - a(t)u(t),$$
$$\psi(t_1) = c.$$

Визначимо стаціонарну точку функції H за змінною u.

$$H_u' = 0,$$
$$\langle \psi, b(t) \rangle + \langle a(t), x \rangle - \frac{1}{2} 2\gamma u = 0,$$
$$u = \frac{1}{\gamma}(\langle a(t), x \rangle + \langle b(t), \psi \rangle),$$
$$\omega(\psi, x, t) = \frac{1}{\gamma}(\langle a(t), x \rangle + \langle b(t), \psi \rangle).$$

Отже $u(t), t \in [t_0, t_1]$ допустиме керування в задачі (16), $x(t, u), \psi(t, u)$ відповідні розв'язки фазової і спряженої систем.

Згідно із [1] екстримальне керування в задачі (16) визначається умовою

$$u^* = signH_u(\psi(t,u), x(t,u), t), t \in [t_0, t_1].$$

При обмеженні $|u| \leq 1$ отримаємо

$$u^*(\psi, x, t) = \begin{cases} \omega(\psi, x, t), |\omega(\psi, x, t)| \leq 1; \\ sign\omega(\psi, x, t), |\omega(\psi, x, t)| \geq 1. \end{cases}$$

Тобто

$$\begin{cases} \text{якщо } \omega \in [-1, 1] \Rightarrow u^* = \omega; \\ \text{якщо } \omega \in (-\infty; -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow u^* = \pm 1, \end{cases}$$

$u^*(t)$ - екстримальне (максимізуюче) керування.

Позначимо $\bar{u}(t) = \omega(\psi(t,u), x(t,u), t)$. Тоді для будь-якого $t \in [t_0, t_1]$ принцип максимуму керування $u(t)$ буде представлений наступними співвідношеннями:

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), \text{ якщо } |\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle b(t), \psi(t,u)\rangle| \leq \gamma; \\ sign\bar{u}(t), \text{ якщо } |\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle b(t), \psi(t,u)\rangle| \geq \gamma; \end{cases} \quad (17)$$

Перейдемо на рівень достатніх умов оптимальності, використавши певну послідовність кроків: фіксована траекторія $\Rightarrow$ будь-яка траекторія, екстримальне керування $\Rightarrow$ сильно екстримальне керування ($u(t)$ допустиме керування).
Розглянемо, що означає сильно екстримальне керування.

$$Ext(1,1) = \{u(\cdot) \in PC(T) : u(t) = arg \max_{\omega \in U} H(\omega(t,u), x(t,u), \omega, t),$$
$$t \in T, U \in \mathbb{R}^m\}$$

Означення 3.1. *Керування* $u(\cdot) \in Ext(1,1)$ *назвемо сильно х-екстримальним, якщо* $u(t) = arg \max_{\omega \in U} H(\omega(t,u), x(t,v), \omega, t)$, *для будь-якого* $t \in T, v \in V$.

Таким чином сильно х-екстримальне керування максимізує функцію H на відповідній йому спряженій траекторії $\psi(t,u)$ і множині фазових траекторій $x(t,v), v \in V$.

Означення 3.2. *Керування* $u(\cdot) \in Ext(1,1)$ *назвемо сильно* ψ*-екстримальним якщо* $u(t) = arg \max_{\omega \in U} H(\omega(t,u,v), x(t,u), \omega, t)$ *для будь-якого* $t \in T, v \in V$.

Таким чином, сильно ψ-екстримальне керування максимізує функцію H на відповідній йому фазовій траекторії $x(t,u)$ і множині спряжених траекторій $\psi(t,u,v), v \in V$.

Тому щоб перейти до сильно-екстримальних керувань, нам необхідно у формулі (17) провести заміни:

$$x(t,u) \to x(t,v), v \in V(\text{ сильно х-екстримальне})$$
$$\psi(t,u) \to \psi(t,v), v \in V(\text{ сильно } \psi\text{-екстримальне}).$$

У результаті отримуємо **достатні умови оптимальності** в початковому варіанті.

Умова 1. *Для будь-якого* $v \in V, t \in [t_0, t_1]$

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), \textit{ якщо } |\langle a(t), x(t,v)\rangle + \langle b(t), \psi(t,u)\rangle| \leq \gamma \\ sign\bar{u}(t), \textit{ якщо } |\langle a(t), x(t,v)\rangle + \langle b(t), \psi(t,u)\rangle| \geq \gamma \end{cases} \tag{18}$$

Умова 2. *Для будь-якого* $v \in V, t \in [t_0, t_1]$

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), \textit{ якщо } |\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle b(t), \psi(t,v)\rangle| \leq \gamma \\ sign\bar{u}(t), \textit{ якщо } |\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle b(t), \psi(t,v)\rangle| \geq \gamma \end{cases} \tag{19}$$

Представлені співвідношення визначені на множині базових або спряжених траекторій, що суттєво ускладнює їх верифікацію.

У рамках задачі (16) є можливість конструктивно використовувавти екстримальні варіанти отриманих нерівностей, що приводить до поточкових за часом $t \in [t_0, t_1]$ умовам оптимальності, що є характерним для принципу максимуму.

3.2 Перетворення умов

Знайдемо експерементальні значення скалярних добутків.

$$\langle a(t), x(t,v)\rangle, \langle b(t), \psi(t,v)\rangle$$

для моменту $t \in [t_0, t_1]$ на множині V.

Лема 3.2.1. *Нехай вектор-функція* $p(\tau, t), \tau \in [t_0, t], t \in [t_0, t_1]$ *є розв'язком задачі Коші.*

$$\frac{\partial p(\tau,t)}{\partial \tau} = p_\tau(\tau,t) = -A^T(\tau)p(\tau,t),$$
$$p(t,t) = a(t).$$

Тоді, скориставшись формулою Коші, справедливе співвідношення:

$$\langle a(t), x(t,v)\rangle = \int_{t_0}^{t} \langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle v(\tau)d\tau + \langle p(t_0,t), x^0\rangle \tag{20}$$

Доведення: Оскільки функція $x(t,v)$ визначається співвідношенням

$$\frac{\partial x(\tau,v)}{\partial \tau} = x_\tau(\tau,v) = A(\tau)x(\tau,v) + b(\tau)v(\tau),$$
$$x(t_0,v) = x^0,$$

то врахувавши цю систему знайдемо похідну

$$\frac{d}{d\tau}(p(\tau,t), x(\tau,v)),$$
$$\frac{d}{d\tau}\langle p(\tau,t), x(\tau,v)\rangle = -\langle A^T(\tau)p(\tau,t), x(\tau,v)\rangle + \langle p(\tau,t), A(\tau)x(\tau,v)\rangle +$$
$$+\langle p(\tau,t), b(\tau)\rangle v(\tau) = \langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle v(\tau)$$

Проінтегрувавши за $\tau \in [t_0, t]$, одержимо

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\langle p(\tau,t), x(\tau,v)\rangle = \int_{t_0}^{t} \langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle v(\tau)d\tau$$
$$\langle p(t,t), x(t,v)\rangle - \langle p(t_0,t), x(t_0,v)\rangle =$$
$$= \int_{t_0}^{t} \langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle v(\tau)d\tau;$$
$$\langle a(t), x(t,v) = \int_{t_0}^{t} \langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle v(\tau)d\tau + \langle p(t_0,t), x^0\rangle,$$

що і треба було довести.

Скориставшись оцінкою для модуля інтеграла

$$|\int_{t_0}^{t} \langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle v(\tau) d\tau| \leqslant \int_{t_0}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau,$$
$$v \in V; t \in [t_0, t],$$

рівність досягається при $v(\tau) = \pm sign\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle$. Звідси отримуємо оцінку знизу:

$$\int_{t}^{t_0} \langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle v(\tau) d\tau \geqslant -\int_{t}^{t_0} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau.$$

Застосувавши в (20) дану оцінку, отримаємо

$$\min_{v\in V}\langle a(t), x(t,v)\rangle = \langle p(t_0,t), x^0\rangle - \int_{t_o}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau.$$

Аналогічним чином отримаємо

$$\max_{v\in V}\langle a(t), x(t,v)\rangle = \langle p(t_0,t), x^0\rangle + \int_{t_o}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau.$$

Наслідок 3.1. *Екстримальні значення для* $< a(t), x(t,v) >$ *виражаютьcя за формулою:*

$$\min_{v\in V}(\max_{v\in V})\langle a(t), x(t,v)\rangle = \langle p(t_0,t), x^0\rangle - (+) \int_{t_o}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau.$$

Лема 3.2.2. *Нехай ветор-функція* $q(\tau,t), \tau \in [t, t_1], t \in [t_0, t_1]$ *є розв'язком задачі Коші*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial q(\tau,t)}{\partial \tau} = q_\tau(\tau,t) = A(\tau) q(\tau,t) \\ &q(t,t) = b(t); \end{aligned} \tag{21}$$

Тоді справедливе співвідношення

$$\langle b(t), \psi(t,v)\rangle = \int_{t}^{t_1} \langle a(\tau), q(\tau,t)\rangle v(\tau) d\tau + \langle q(t_1,t), c\rangle. \tag{22}$$

Доведення: Згадавши вигляд спряженої системи у принципі максимуму Понтрягіна отримаємо:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi(\tau,v)}{\partial \tau} = \psi_\tau(\tau,v) = -A^T(\tau)\psi(\tau,v) - a(\tau)v(\tau) \\ &\psi(t_1,v) = c \end{aligned}$$

Знайдемо похідну за τ, тобто

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}\langle q(\tau,t),\psi(\tau,v)\rangle =\\ &=\langle A(\tau)q(\tau,t),\psi(\tau,v)\rangle-\langle q(\tau,t),A^T(\tau)\psi(\tau,v)\rangle-\\ &-\langle q(\tau,t),a(\tau)\rangle v(\tau)=-\langle a(\tau),q(\tau,t)\rangle v(\tau).\end{aligned}$$

Проінтегруємо тепер за $\tau\in[t,t_1]$, тоді отримаємо

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t}\frac{d}{d\tau}\langle q(\tau,t),\psi(\tau,v)\rangle=\int_{t_1}^{t}-\langle a(\tau),p(\tau,t)\rangle v(\tau)d\tau\\ &\langle q(t,t),\psi(t,v)\rangle-\langle q(t_1,t),\psi(t_1,v)\rangle=\\ &=-\int_{t_1}^{t}\langle a(\tau),q(\tau,t)\rangle v(\tau)d\tau;\\ &\langle b(t),\psi(t,v)\rangle=\textstyle\int_t^{t_1}\langle a(\tau),q(\tau,t)\rangle v(\tau)d\tau+\langle q(t_1,t),c\rangle.\end{aligned}$$

Що й доводить лему 3.2.2.

За аналогією до попередніх міркувань та оцінок, справеливими є наступн твердження

$$\min_{v\in V}\langle b(t),\psi(t,v)\rangle=\langle q(t_1,t),c\rangle-\int_t^{t_1}|\langle a(\tau),q(\tau,t)\rangle|d\tau.$$

Аналогічним чином отримаємо

$$\max_{v\in V}\langle b(t),\psi(t,v)\rangle=\langle q(t_1,t),c\rangle+\int_t^{t_1}|\langle a(\tau),q(\tau,t)\rangle|d\tau.$$

Наслідок 3.2. *Екстримальні значення для $\langle b(t),\psi(t,v)\rangle$ виражаються за формулою*

$$\min_{v\in V}(\max_{v\in V})\langle b(t),\psi(t,v)\rangle=\langle q(t_1,t),c\rangle-(+)\int_t^{t_1}|\langle a(\tau),q(\tau,t)\rangle|d\tau.$$

Тепер перейдемо до перетворень безпосередньо достатніх умов оптимальності. Розкриємо модульну нерівність (18) для $t\in[t_0,t]$, тобто

$$-\gamma\leqslant\langle a(t),x(t,v)\rangle+\langle b(t),\psi(t,u)\rangle\leqslant\gamma;v\in V \tag{23}$$

перейдемо до еквівалентної екстримальної форми

$$\begin{aligned}&\max_{v\in V}\langle a(t),x(t,v)\rangle+\langle b(t),\psi(t,u)\rangle\leqslant\gamma\\ &\min_{v\in V}\langle a(t),x(t,v)\rangle+\langle b(t),\psi(t,u)\rangle\geqslant-\gamma\end{aligned}$$

Врахувавши наслідок 1, отримаємо:

$$\langle (t), \psi(t,u)\rangle + \langle p(t_0,t), x^0\rangle + \int_{t_0}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau \leqslant \gamma, \tag{24}$$

$$\langle b(t), \psi(t,u)\rangle + \langle p(t_0,t), x^0\rangle - \int_{t_0}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau \geqslant -\gamma. \tag{25}$$

Об'єднавши (24) і (25), одержимо

$$|\langle b(t), \psi(t,u)\rangle + \langle p(t_0,t), x^0\rangle| + \int_{t_0}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau \leqslant \gamma. \tag{26}$$

Таким чином отрмана нерівність для функції одної змінної t еквівалента співвідношенню (23).

Аналогічним чином розглянемо (19) для $t \in [t_0, t_1]$,тобто

$$-\gamma \leqslant \langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle b(t), \psi(t,v)\rangle \leqslant \gamma; v \in V; \tag{27}$$

Перейдемо до еквівалентної екстримальної форми

$$\begin{gathered} \langle a(t), x(t,u)\rangle + \max_{v\in V}\langle b(t), \psi(t,v)\rangle \leqslant \gamma, \\ \langle a(t), x(t,u)\rangle + \min_{v\in V}\langle b(t), \psi(t,v)\rangle \geqslant -\gamma. \end{gathered}$$

Врахувавши наслідок 2, отримаємо

$$\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle q(t_1,t), c\rangle + \int_{t}^{t_1} |\langle a(\tau), q(\tau,t)\rangle| d\tau \leqslant \gamma \tag{28}$$

$$\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle q(t_1,t), c\rangle - \int_{t}^{t_1} |\langle a(\tau), q(\tau,t)\rangle| d\tau \geqslant -\gamma \tag{29}$$

Об'єднавши (28) і (29) отримаємо:

$$|\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle q(t_1,t), c\rangle| + \int_{t}^{t_1} |\langle a(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau \leqslant \gamma \tag{30}$$

Таким чином отримана нерівність для функції одної змінної t еквівалента співвідношенню (27).

Сформулюємо перший результат про оптимальність керування $u(t) = \bar{u}(t), |u(t)| \leqslant 1, t \in [t_0, t_1]$, що визначається умовою стаціонарності функції Понтрягіна:

$H_u(\psi(t,u), x(t,u), u(t), t) = 0, t \in [t_0, t_1]$ тоді і тільки тоді, коли $u(t) = \dfrac{1}{\gamma}(\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle b(t), \psi(t,u)\rangle)$.

Теорема 3.2.1. *Нехай для керування $u(t) = \bar{u}(t), t \in [t_0, t_1]$ виконується нерівність (26) або (30) для всіх $t \in [t_0, t_1]$. Тоді це керування є оптимальним для задачі (16).*

Розглянемо питання оптимальності граничних умов $u = \pm 1$ на основі співвідношень (18) і (19). Для керування $u = 1$ достатні умови набудуть вигляду:

$$\min_{v \in V}\langle a(t), x(t,v)\rangle + \langle b(t), \psi(t,1)\rangle \geqslant \gamma$$
$$\langle a(t), x(t,1)\rangle + \min_{v \in V}\langle b(t), \psi(t,v)\rangle \geqslant \gamma; t \in [t_0; t_1]$$

Тоді врезультаті отримаємо:

$$\langle b(t), \psi(t,1)\rangle + \langle p(t_0,t), x^0\rangle - \int_{t_0}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau \geqslant \gamma, \tag{31}$$

$$\langle a(t), x(t,1)\rangle + \langle q(t_1,t), c\rangle - \int_{t}^{t_1} |\langle a(\tau), q(\tau,t)\rangle| d\tau \geqslant \gamma. \tag{32}$$

Теорема 3.2.2. *Нехай керування $u(t) = 1; t \in [t_0, t_1]$ виконується (31) або (32) для всіх $t \in [t_0, t_1]$. Тоді це керування є оптимальним в задачі (16).*

Встановимо зв'язок ориманих умов з принципом максимуму для $u = 1$;

Нехай

$$\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle \leqslant 0; \qquad \tau \in [t_0, t]; t \in [t_0, t_1], \tag{33}$$

тоді на основі леми 1 і наслідку 1 можемо сказати, що

$$\min_{v \in V}\langle a(t), x(t,v)\rangle = \langle a(t), x(t,1)\rangle; \qquad t \in t_0, t_1. \tag{34}$$

Тепер умова (31) буде мати вигляд

$$\langle a(t), x(t,1)\rangle + \langle b(t), \psi(t,1)\rangle \geqslant \gamma, \qquad t \in [t_0, t_1].$$

Отже, одержимо принцип максимуму як достатню умову оптимальності в (33). Аналогічно нерівність

$$\langle a(\tau), q(\tau, t)\rangle \leqslant 0; \qquad \tau \in [t, t_1]; t \in [t_0, t_1] \tag{35}$$

також гарантує принцип максимуму. Зауважимо що (35) і (33) еквівалентні.

Для встановлення еквівалентності введемо фундаментальну матрицю $F(t)$ фазової системи при $t = t_0$

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t); \qquad F(t_0) = E;$$

При цьому матриця $(F^{-1}(t))^T$ задовільняє рівняння

$$\frac{d}{dt}(F^{-1}(t))^T = -A^T(t)(F^{-1}(t))^T,$$
$$(F^{-1}(t_0))^T = E$$

і є фундаментальною для спряженої системи. Тоді для вектор-функцій $p(\tau, t), q(\tau, t)$ мають місце представлення (формула Коші):

$$p(\tau, t) = (F^{-1}(\tau))^T F^T(t) a(t),$$
$$q(\tau, t) = F(\tau)F^{-1}(t)b(t); \qquad \tau, t \in [t_0; t_1].$$

Звідси отримуємо:

$$\langle b(\tau), p(\tau, t)\rangle = \langle F(t)F^{-1}(\tau)b(\tau), a(t)\rangle;$$
$$\langle a(\tau), q(\tau, t)\rangle = \langle a(\tau), F(\tau)F^{-1}(t), b(t)\rangle;$$
$$\text{Звідси } \langle a(\tau), q(\tau, t)\rangle = \langle b(\tau), p(\tau, t)\rangle; \qquad \tau, t \in [t_0, t_1];$$

Отже, на основі цього співвідношення можемо сказати, що нерівності

$$\langle b(\tau), p(\tau, t)\rangle \leqslant 0; \qquad \tau \in [t_0, t], t \in [t_0, t_1],$$
$$\langle a(\tau), q(\tau, t)\rangle \leqslant 0; \qquad \tau \in [t, t_1], t \in [t_0, t_1]$$

забезпечують достатність принципу максимуму для керування $u = 1$ є еквівалентні, що і треба було довести.

3.3 Приклади

Приклад 3.1

$$\Phi(u) = x_1(1) + \int_0^1 [(x_1(t) + x_2(t))u(t) - \frac{1}{2}\gamma u^2(t)]dt \to \max$$
$$\dot{x}_1 = x_2;\ \dot{x}_2 = u;$$
$$x_1(0) = -2;\ x_2(0) = 1;$$
$$|u(t)| \leqslant 1;\ t \in [0,1];$$
$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + x_1 u + x_2 u - \frac{1}{2}\gamma u^2$$
$$\dot{\psi}_1 = -u(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1};\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - u = -\frac{\partial H}{\partial x_2}$$
$$\psi_1(1) = 1 = -\frac{\partial F}{\partial x_1(1)};\ \psi_2(1) = 0 = -\frac{\partial F}{\partial x_2(1)}$$
$$u = 0;$$

$$x_1'' = u = 0$$

$$\begin{cases} x_1'' = x_2' \\ x_2' = u \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{cc} x_1' = C_1 & x_2' = 0 \\ x_1 = C_1 t + C_2 & x_2 = C_3 \\ x_1' = x_2 = C_3 & x(0) = 1 = C_3 \\ C_3 = C_1 = 1 & \end{array}$$

$$x_1(0) = C_1 0 + C_2 = -2 \Rightarrow C_2 = -2;$$

Таким чином маэмо траекторії для $u = 0:$

$$x_1(t,0) = t - 2;$$
$$x_2(t,0) = 1;$$

$$\begin{cases} \psi_1' = -u \\ \psi_2' = -\psi_1 - u \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{cc} \psi_1' = 0 & \psi_1 = C_1 \\ \psi_2' = -\psi_1 & \psi_2 = -C_1 t + C_2 \end{array}$$

$$\psi_1(1) = 1 = C_1$$
$$\psi_2(1) = 0 = -1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 1$$

Отже, спряжені траекторії для $u = 0,$ мають вигляд

$$\psi_1(t,0) = 1;$$
$$\psi_2(t,0) = 1 - t;$$

Отже перевіримо умову стаціонарності : для будьякого $\gamma > 0$:

$$H_u[t,0] = 0; \qquad t \in [0,1]; \qquad u = 0;$$
$$H_u^{'}[t,0] = \psi_2 + x_1 + x_2 - \frac{1}{2}2\gamma u = 1 - t + t - 2 + 1 = 0;$$

Отже $u = 0$ задовільняє принцип максимуму. Далі перевіримо (26). Допоміжна вектор-функція:

$$p_1 = 1;$$
$$p_2 = t - \tau + 1;$$
$$\langle b, p(\tau,t)\rangle = t - \tau + 1;$$
$$\langle b, \psi(t,0)\rangle = 1 - t;$$
$$\langle p(0,t), x^0\rangle = t - 1;$$

Тоді нерівність (26) набуде вигляду:

$$\frac{t^2}{2} + t \leqslant \gamma, \qquad t \in [0,1];$$

Таким чином з $\gamma \geqslant \dfrac{3}{2}$ нерівність виконується і керування $u = 0$ є оптимальним. Аналогічно нерівність (30) набуде вигляду:

$$\frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2} \leqslant \gamma; \qquad t \in [0,1]; \qquad \gamma \geqslant \frac{3}{2};$$

Приклад 3.2.

$$\Phi(u) = \int_0^1 [(x_1(t) + x_2(t))u(t) - \frac{1}{2}\gamma u^2(t)]dt \to \max$$
$$\dot{x}_1 = x_2;\ \dot{x}_2 = u;$$
$$x_1(0) = x_1^0;\ x_2(0) = x_2^0;$$
$$|u(t)| \leqslant 1;\ t \in [0,1];$$
$$\dot{\psi}_1 = -u;\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - u;$$
$$\psi_1(1) = 0;\ \psi_2(1) = 0$$

Розглянемо керування $u = 1$;

$$\begin{cases} x_1^{'} = x_2 \\ x_2^{'} = u \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^{'} = x_2 \\ x_2^{'} = 1 \end{matrix}$$

$$x_1^{''} = x_2^{'}$$
$$x_1^{''} = 1$$
$$x_1^{'} = t + C_1$$
$$x_1 = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

$$
\begin{array}{ll}
x_2' = 1 & x_1(0) = C_2 = x_1^0 \\
x_2 = t + C_3 & x_1' = x_2 \\
x_2(0) = C_3 = x_2^0 & t + C_1 = t + x_2^0 \\
x_2 = t + x_2^0 & C_1 = x_2^0
\end{array}
$$

Тому траекторії для $u = 1$ задовольняють співвідношення :

$$
x_1(t,1) = \frac{t^2}{2} + x_2^0 t + x_1^0;
$$
$$
x_2(t,1) = t + x_2^0;
$$

$$
\begin{cases} \psi_1' = -u \\ \psi_2' = -\psi_1 - u \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} \psi_1(1) = 0 & \psi_1' = -1 \\ \psi_2(1) = 0 & \psi_2' = -\psi_1 - 1 \end{array}
$$

$$
\psi_1 = -t + C_1 = C_1 - t
$$
$$
\psi_2' = -\psi_1 - 1;
$$
$$
-C_1 + t - 1 = \psi_2.
$$

А для $u = 1$спряжені траекторії виглядають так

$$
\psi_1(t,1) = 1 - t;
$$
$$
\psi_2(t,1) = \frac{1}{2}(t-1)^2 - (t-1);
$$

Допоміжна ветор-функція $p(\tau, t)$, задовольняє умови

$$
p_1(\tau, t) = 1;
$$
$$
p_2(\tau, t) = t - \tau + 1.
$$

У результаті умова 1 набуде вигляду:

$$
x_1^0 + x_2^0(t+1) - 3t + \frac{3}{2} \geqslant \gamma, \qquad t \in [0,1],
$$

що еквівалентно нерівностям

$$
\begin{gathered}
x_1^0 + x_2^0 + \frac{3}{2} \geqslant \gamma, \\
x_1^0 + 2x_2^0 - \frac{3}{2} \geqslant \gamma.
\end{gathered} \tag{36}
$$

Друга нерівність має вигляд

$$
x_1^0 + x_2^0(t+1) + 3t - \frac{3}{2} \geqslant \gamma, \qquad t \in [0,1],
$$

що приводить до нерівностей

$$\begin{aligned} x_1^0 + x_2^0 - \frac{3}{2} \geqslant \gamma; \\ x_1^0 + 2x_2^0 + \frac{3}{2} \geqslant \gamma. \end{aligned} \tag{37}$$

Отже, якщо початковий стан системи (x_1^0, x_2^0) і параметр $\gamma > 0$ задовільняє умови (36) і (37) то керування $u = 1$ є оптимальним.

IV Висновок

Проблема одержання умов оптимальності в системах диференціальних рівнянь є одним із важливих параметрів наукових досліджень в галузі оптимального керування, зокрема, одержання необхідних, а де можливо, і достатніх умов.

Метою магістерської роботи є встановлення достатніх умов оптимальності для деякого класу задач, виходячи із принципу максимуму Понтрягіна. Оскільки в загальному формулюванні задач керування умови принципу максимуму мають необхідний характер, то ставилось завдання виділити деякі, можливо додаткові обмеження, при яких можна було б сформулювати достатні умови оптимальності певних задач.

Робота побудована таким чином, щоб отримати сам принцип максимуму, підкреслити можливості його застосування. Для цього в першому розділі побудовано деякі приклади, що ілюструють можливості цього принципу для задач оптимального керування простими диференціальними рівняннями (системами).

Далі в другому розділі продемонстровано дію принципу максимуму Понтрягіна у задачах оптимального керування навантаженими диференціальними рівняннями, використовуючи для стабілізації розв'язку відповідні функції Ляпунова. У всіх прикладах, наведених у першому та другому розділах, умови оптимальності мають необхідний характер.

У третьому розділі магістерської роботи на основі поняття сильно екстримального керування показано, що при виконанні певних додаткових нерівностей для вихідних даних невипуклої задачі керування можна отримати достатні умови оптимальності розв'язку. Для цього сформульовано відповідні теореми, допоміжні леми, наведено додаткові обмеження у вигляді нерівностей для конкретних прикладів, що демонструють теоретичні міркування використані у магістерській роботі.

Література

[1] Аксенюшкина Е. В. Достаточные условия оптимальности для одного класса невыпуклых задач управления / Е. В. Аксенюшкина, В. А. Срочко // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55. — № 10. — С. 1070–1080.

[2] Антипина Н. В. Линейные функции Ляпунова – Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума / Н. В. Антипина, В. А. Дыхта // Известия вузов. Математика. — 2002. — №12. — С. 11–22.

[3] Антоник В. Г. Условия оптимальности типа принципа максимума в билинейных задачах управления / В. Г. Антоник, В. А. Срочко // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56. — № 12. — С. 2054–2064.

[4] Батурин В. А. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения / В. А. Батурин, Д. Е. Урбанович. — Новосибирск : Наука, 1997. — 175 с.

[5] Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления —/Гурман М. : Наука, 1985. — 288 с. .

[6] Дыхта В. А. Неравенство Ляпунова – Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении / В. А. Дыхта // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. — 2006. — Т. 110. — С. 76–108.

[7] Срочко В. А. Достаточные условия оптимальности экстремальных управлений на основе формул приращения функционала / В. А. Срочко, В. Г. Антоник // Известия вузов. Математика. — 2014. — №8. — С. 96–102.

[8] Барсяген В. Р.,Симонян Т. А., Барсегян Т. В.// О задаче оптимальной стабилизации одной системы линейных нагруженных дифференциальных урванений //Известия Иркут. Сер. Математика. 2019. Т. 27.С.71-79.

[9] Л. И. Розонэр, Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем.// I, Автомат. и телемех., 1959, том 20, выпуск 10, 1320-1334.

[10] Барсегян В. Р. Задача управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с нераздельнными многоточечными промежуточными условиями // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т.21.С.19-32.