Практика
Мтем-11с
03.02.22

Метод зважених відхилень (помилок) знаходження наближеного розв'язку крайових задач для диф. р-ня II порядку.

$\Omega \subset \mathbb{R}^s$; $\Gamma = \partial\Omega$: гранична задача для диф. р-ня, відносно u:

$$\mathcal{A}[u(x)] = f(x) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u(x) = \varphi(x); & x \in \Gamma_1; \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = q(x); & x \in \Gamma_2; \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = \alpha(x)(u(x) - u_c); & x \in \Gamma_3 \end{cases} \qquad (2)$$

$\mathcal{A}$ - диференціальний оператор;

$x = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$

$f; \varphi; q; \alpha$ - задані;

n - вектор нормалі $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_2$.

Функції помилки (відхилення):

$$R_0(u(x)) \overset{def}{=} \mathcal{A}[u(x)] - f(x); \qquad (3)$$

$$R_1(u(x)) \overset{def}{=} u(x) - \varphi(x); \qquad (4)$$

$$R_2(u(x)) \overset{def}{=} \frac{\partial u(x)}{\partial n} - q(x); \qquad (5)$$

$$R_3(u(x)) \overset{def}{=} \frac{\partial u(x)}{\partial n} - \alpha(x)(u(x) - u_c) \qquad (6)$$

! $u_T(x)$ - розв'язок задачі (1) - (2) $\} \to \}$.

$$R_0(u_T(x)) \equiv 0; \; R_1(u_T(x)) \equiv 0; \; R_2(u_T(x)) \equiv 0; \; R_3(u_T(x)) \equiv 0.$$

I $u_н(x)$ - наближений розв'язок задачі (1) - (2).

$\exists\, k = 0,1,2,3: \quad R_k(u_p(x)) \not\equiv 0$:

$$u_н(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \varphi_i(x). \qquad (7)$$

p_i $(i = \overline{1,n})$ - параметри, визначені так, (7) - розв'язок (1) - (2)

$\varphi_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ - базові функції.

II

$$\int_\Omega w_i R_0(u_н)\, d\Omega + \int_{\Gamma_1} w_i^{b_1} R_1(u_н)\, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_i^{b_2} R_2(u_н)\, d\Gamma + \int_{\Gamma_3} w_i^{b_3} R_3(u_н)\, d\Gamma = 0 \qquad (8)$$

$(i = \overline{1,n})$

$\{w_i\}_{i=1}^n$, $\{w_i^{b_1}\}_{i=1}^n$, $\{w_i^{b_2}\}_{i=1}^n$, $\{w_i^{b_3}\}_{i=1}^n$ - системи лінійно-незалежних вагових ф-ій.

Метод Гальоркіна:

$$w_i(x) = c_i \varphi_i(x) \qquad (i = \overline{1,n}).$$

Приклад:

$\Omega = [0,1]$; $(\Omega \subset \mathbb{R})$, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$; $\Gamma_1 = \{0\}$; $\Gamma_2 = \{1\}$;

Знайти наближений розв'язок р-ня:

$$\mathcal{A}[u(x)] = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + x^2 \cdot u(x) + (3x-1)^3 = 0, \qquad x \in (0,1) \qquad (9)$$

за умов:

$$u(0) = 0; \quad u(1) = 0. \qquad (10)$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x\cdot(1-x) \\ \varphi_2(x) = x^2(1-x) \end{cases} \qquad (11)$$

$w_1(x) = 1;\quad w_2(x) = x.$

Наближений розв'язок задачі (9) - (10):

$$T(x) = p_1\varphi_1(x) + p_2\varphi_2(x) = p_1 x(1-x) + p_2 x^2(1-x). \qquad (12)$$

(8) Для даної задачі запишеться:

$$\int_0^1 w_i(x)\, R_0(x)\, dx = 0, \qquad (i=1,2). \qquad (13)$$

Функція відхилення:

$$R_0(x) = \frac{d^2T(x)}{dx^2} + x^2T(x) + (3x-1)^3 = -1 + 2p_1 - 2p_2 + (9+6p_2)x - 27x^2 + (27-p_1)x^3 + (p_1-p_2)x^4 + p_2x^5. \qquad (14)$$

(14) → (13): система лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно p_1, p_2:

$$\begin{cases} \int_0^1 \underbrace{1}_{w_1(x)}\cdot R_0(x)\,dx = 0 \\ \int_0^1 \underbrace{x}_{w_2(x)}\, R_0(x)\,dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_0^1 \left[-1 + 2p_1 - 2p_2 + (9+6p_2)x - 27x^2 + (27-p_1)x^3 + (p_1-p_2)x^4 + p_2x^5\right] dx = 0. \\ \int_0^1 \left[(-1 + 2p_1 - 2p_2)x + (9+6p_2)x^2 - 27x^3 + (27-p_1)x^4 + (p_1-p_2)x^5 + p_2x^6\right] dx = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Розв'язок системи (15):

$$\begin{cases} p_1 = -0.11203; \\ p_2 = -1.06711; \end{cases} \qquad (16)$$

(16) → (12): наближений розв'язок задачі (9)-(10):

$$T(x) = 0.11203\,x + 0.955081x^2 - 1.06711x^3.$$

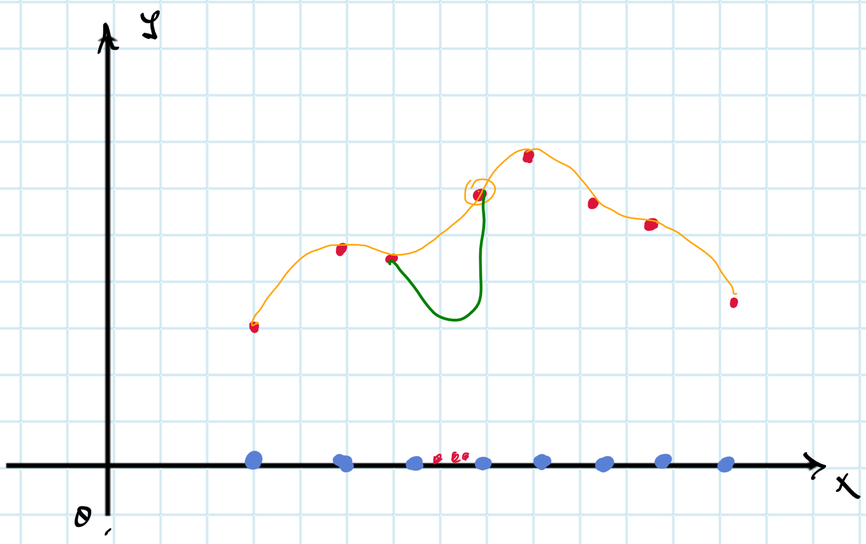
Завдання.

$$y''(x) + 6y'(x) + 8y(x) = \frac{4e^{-2x}}{2+e^{-2x}};$$

$$\begin{cases} y(0) = 0; \\ y(3/2) = 0. \end{cases}$$

Розв'язок крайової задачі:

$$y(x) = e^{-4x}\left[1.13783 - 1.96179e^{2x} + (0.25 + 0.5e^{2x})\ln(1+2e^{2x})\right].$$



$u(x) + u_r(x)$

$A[u(x) + u_r(x)] = A[u(x)] + A[u_r(x)]$

$\frac{du_r}{dx} = \varphi(x).$