Практика
Мтем-11с
02.02.22

Різницеві схеми розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння II порядку.

$$\begin{cases} y'' = f(x, y(x), y'(x)) & (1) \\ y(x_0) = \bar{y}_0 \\ y'(x_0) = \bar{y}_1 \end{cases} \qquad (2)$$

$[a, b]$; $a = x_0$; n;

$\{x_i\}_{i=0}^{n}$: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$; $h = \frac{b-a}{n}$; $x_i = a + h \cdot i$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$\frac{dy(x)}{dx} \approx \frac{y(x) - y(x-h)}{h}; \quad \frac{dy(x)}{dx} \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}; \quad \frac{dy(x)}{dx} \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \approx \frac{d}{dx}\left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h}\right) \approx \frac{\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h}}{h} =$$

$$= \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}.$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}.$$

$\{x_i\}_{i=0}^{n}$: (1) $\rightarrow$ $\begin{cases} x = x_i: \quad x + h = x_i + h = x_{i+1}; \quad x - h = x_i - h = x_{i-1}; \quad y(x_i) = y_i \end{cases}$

$\forall i = 1, 3, \dots, n-1$: $\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i; y_i; \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right)$. $\rightarrow$

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h^2 f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right).$$

$$y_{i+1} = \varphi(x_i, y_i, y_{i-1}, h); \quad i = 1, 3, \dots n-1.$$

$\forall i = 1, 3, \dots, n-1$: $\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i; y_i; \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)$. $\rightarrow$

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h^2 f\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right).$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$.

$y_2, y_3, \dots, y_n$ $\quad y_0, y_1$ – ?

$y_0 = y(x_0) = \bar{y}_0$

$\frac{dy(x_0)}{dx} \approx \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} = \bar{y}_1 \rightarrow \frac{y_1 - y_0}{h} = \bar{y}_1 \Rightarrow$

$y_1 = y_0 + h \cdot \bar{y}_1 = \bar{y}_0 + h \cdot \bar{y}_1$

$y_0 = \bar{y}_0$

$y_1 = \bar{y}_0 + h \cdot \bar{y}_1$

$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h^2 f\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)$. $\quad i = 1, 2, \dots, n-1$.

Застосовуючи явну різницеву схему, знайти чисельний розв'язок початкової задачі:

$$\begin{cases} y''(x) + 2\sin(y(x)) \cdot \cos^3(y(x)) = 0. \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Побудувати графік одержаного розв'язку та порівняти його із графіком розв'язку задачі:

$$y(x) = \operatorname{arctg} x$$

на проміжку $[0, 2]$.