

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Механіко-математичний факультет**  
**Кафедра математичної економіки, економетрії,**  
**фінансової та страхової математики**

**Затверджено**


на засіданні кафедри математичної  
економіки, економетрії, фінансової та  
страхової математики

механіко-математичного факультету

Львівського національного університету  
імені Івана Франка

(протокол № 12 від 30 серпня 2022 р.)

Завідувач кафедри

 проф. Кирилич В. М.

**Силабус з навчальної дисципліни**  
**"Стохастичний аналіз у фінансах",**  
що викладається в межах ОПП  
"Актuarна та фінансова математика",  
другого (магістерського) рівня вищої освіти  
за спеціальністю 111 Математика

Львів-2022

<b>Назва дисципліни</b>	Стохастичний аналіз у фінансах
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Механіко-математичний факультет, кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	Галузь знань 11 Математика і статистика, спеціальність 111 Математика
<b>Викладачі дисципліни</b>	Підкуйко Сергій Іванович, канд. фіз.- мат. наук, доцент, доцент кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики
<b>Контактна інформація викладачів</b>	<a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/pidkujko-s-i-serhiy.pidkuyko@lnu.edu.ua">https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/pidkujko-s-i-serhiy.pidkuyko@lnu.edu.ua</a> <a href="mailto:pidkuyko@gmail.com">pidkuyko@gmail.com</a>  Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 376, м. Львів, вул. Університетська, 1
<b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b>	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю).
<b>Сторінка дисципліни</b>	<a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/stohastychnyj-analiz-u-finansah-dlya-mahistriv">https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/stohastychnyj-analiz-u-finansah-dlya-mahistriv</a>
<b>Інформація про дисципліну</b>	Дисципліна “Стохастичний аналіз у фінансах” є нормативною дисципліною із спеціальності 111 Математика для освітньої програми другого (магістерського) рівня вищої освіти “Актуарна та фінансова математика”, яка викладається у 2 семестрі в обсязі 4,5 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS)
<b>Коротка анотація дисципліни</b>	У курсі розглянуто такі розділи: однопериодна, двопериодна та N-періодна біноміальна цінові моделі, ймовірнісний простір біноміальної цінової моделі, умовне математичне сподівання, опуклі функції, мартингали, потік виплат, марківський процес.
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	Опанування і засвоєння основних означень і теорем, вміння застосування теоретичного матеріалу.

<p><b>Література для вивчення дисципліни</b></p>	<p><b>Основна література:</b>  1. Лекції С.І.Підкуйка  <b>Додаткова література:</b>  2. Steven E. Shreve. Stochastic Calculus for Finance I, The Binomial Asset Pricing Model, - Springer-Verlag, 2004, 187 p.  3. Підкуйко С. І. Математичний аналіз, - Львів, Галицька Видавнича Спілка, Т.1, 2004, 544 с.  4. Billingsley P. Probability and Measure, New York: John Wiley &amp; Sons, 1986, 622 p.  5. Сергій Підкуйко, Микола Баб'як. Оптимальні інвестиції та споживання в біноміальній безарбітражній ціновій моделі. //Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020, Випуск 89, с.89-105.  6. Сергій Підкуйко, Микола Баб'як. Про вартість деривативу у триноміальній ціновій моделі. //Математичний Вісник НТШ. 2015, Т.12, с.109-129.  7. Сергій Підкуйко, Микола Баб'як. Про безарбітражну ціну деривативу в одноперіодній триноміальній моделі. //Математичний Вісник НТШ. 2014, Т.11, с.88-95.</p>
<p><b>Обсяг курсу</b></p>	<p>48 годин аудиторних занять. З них 32 години лекцій, 16 годин практичних занять та 59 годин самостійної роботи.</p>

<p><b>Очікувані результати навчання</b></p>	<p><i>По завершенні курсу студент повинен знати:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- одноперіодну біноміальну цінову модель (означення, теорему про умову безарбітражності, означення арбітражу, означення похідного цінного паперу, теорему про метод реплікацій, її наслідки про захист короткої і довгої позицій, теорему про безарбітражку вартість деривативу)</li> <li>- двоперіодну біноміальну цінову модель (означення, теорему про умову безарбітражності, означення арбітражу, означення похідного цінного паперу, теорему про метод реплікацій, її наслідки про захист короткої і довгої позицій, теорему про безарбітражку вартість деривативу)</li> <li>- N-періодну біноміальну цінову модель (означення, теорему про умову безарбітражності, означення арбітражу, означення похідного цінного паперу, теорему про метод реплікацій, її наслідки про захист короткої і довгої позицій, теорему про безарбітражку вартість деривативу)</li> <li>- означення ймовірнісного простору біноміально цінової моделі</li> <li>- умовне математичне сподівання (означення, властивості)</li> <li>- опуклість функції (означення, основні теореми, нерівність Йенсена)</li> <li>- мартингал (означення і основні теореми)</li> <li>- потік виплат (теорему про метод реплікацій, її наслідки про захист короткої і довгої позицій, теорему про безарбітражку вартість потоку виплат)</li> <li>- марківський процес (одновимірний і багатовимірний, приклади, основні теореми, лема про незалежність)</li> </ul> <p><i>По завершенні курсу студент повинен вміти:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- обчислювати вартості європейського call-опціону і європейського put-опціону</li> <li>- захищати коротку і довгу позиції щодо європейського call-опціону і європейського put-опціону</li> <li>- захищати коротку і довгу позиції щодо опціону з передісторією</li> <li>- обчислювати безарбітражні вартості й портфельний процес потоку виплат</li> <li>- захищати коротку і довгу позиції щодо потоку виплат</li> </ul> <p>Курс забезпечує набуття таких фахових компетентностей: ЗК 1, ЗК 5, ФК 1, ФК 3, ФК 8; та програмних результатів навчання: ПРН 1, ПРН 3, ПРН 4, ПРН 9, ПРН 13, ПРН 14, ПРН 16, ПРН 18.</p>
<p><b>Ключові слова</b></p>	<p>біноміальна цінова модель, арбітраж, ймовірнісний простір, умовне математичне сподівання, потік виплат, мартингал, марківський процес, опуклість функції, опціон, похідний цінний папір, дериватив, коротка позиція, довга позиція, безризикові ймовірності, безарбітражна вартість</p>

<b>Формат курсу</b>	Очний, дистанційний. Проведення лекцій, практичних занять і консультацій.
<b>Теми</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Одноперіодна біноміальна цінова модель</li> <li>2. Двоперіодна біноміальна цінова модель</li> <li>3. N-періодна біноміальна цінова модель</li> <li>4. Ймовірнісний простір біноміальної цінової моделі</li> <li>5. Умовне математичне сподівання</li> <li>6. Опуклі функції</li> <li>7. Мартингал</li> <li>8. Потік виплат</li> <li>9. Марківський процес</li> </ol>
<b>Підсумковий контроль, форма</b>	Іспит
<b>Пререквізити</b>	Для вивчення курсу потрібні базові знання з математичного аналізу та теорії ймовірностей.
<b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b>	Презентації, лекції, індивідуальні завдання.
<b>Необхідне обладнання</b>	Комп'ютер з доступом до мережі Internet.
<b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b>	<p><b>Оцінювання:</b> проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за таким співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• засвоєння теоретичного матеріалу: 50% семестрової оцінки, максимальна кількість балів – 50;</li> <li>• іспит: 50% семестрової оцінки, максимальна кількість балів – 50.</li> </ul> <p><b>Академічна доброчесність:</b> робота студентів повинна бути виключно самостійною. Списування, втручання в роботу інших студентів кваліфікуються як прояви академічної недоброчесності.</p> <p><b>Відвідування занять:</b> важлива складова навчання. Усі студенти зобов'язані відвідувати усі лекції, практичні та лабораторні заняття курсу, дотримуватися термінів виконання усіх видів робіт та індивідуальних завдань.</p> <p><b>Література:</b> всю необхідну для вивчення літературу (лекції) буде надано викладачем; додаткова література використовується виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до пошуку та використання довільних літературних джерел, яких немає серед рекомендованих.</p>

<b>Питання до екзамену (чи питання до контрольної роботи)</b>	Питання до іспиту збігаються з означеннями понять і назвами теорем курсу.
<b>Опитування</b>	Анкет-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенні курсу.

### Схема курсу

Тижні	Лекції		Практичні заняття		Самостійна робота
	Тема заняття	К-ть годин	Тема заняття	К-ть годин	К-ть годин
1	Одноперіодна біноміальна цінова модель. Означення. Портфельний процес. Рівняння поточного капіталу. Арбітраж. Умова безарбітражності.	2			3
2	Одноперіодна біноміальна цінова модель. Похідний цінний папір (дериватив). Європейські call і put опціони. Коротка й довга позиції. Захист короткої і довгої позицій. Теорема про метод реплікацій та її наслідки (про захист короткої і довгої позицій, про дзеркально протилежний портфельний процес).	3	Одноперіодна біноміальна цінова модель. Обчислення вартості європейського call-опціону і європейського put-опціону. Захист короткої і довгої позицій щодо європейського call-опціону і європейського put-опціону. Захист короткої позиції щодо деривативу з функцією виплат --- різницею функцій виплат call-опціону і put-опціону. Захист короткої і довгої позицій щодо опціону з передісторією.	3	7
3	Двоперіодна біноміальна цінова модель. Означення. Портфельний процес. Рівняння поточного капіталу. Арбітраж. Умова безарбітражності.	2			3

4	Двоперіодна біноміальна цінова модель. Похідний цінний папір (дериватив). Європейські call і put опціони. Коротка й довга позиції. Захист короткої і довгої позицій. Теорема про метод реплікацій та її наслідки (про захист короткої і довгої позицій, про дзеркально протилежний портфельний процес).	3	Двоперіодна біноміальна цінова модель. Обчислення безарбітражної вартості і портфельного процесу опціону з передісторією. Захист короткої позиції щодо опціону з передісторією. Обчислення безарбітражної вартості і портфельного процесу європейського put-опціону. Захист довгої позиції щодо європейського put-опціону. Обчислення безарбітражної вартості і портфельного процесу спеціального деривативу. Одночасний захист двох коротких позицій щодо put-опціону і спеціального деривативу.	3	7
5	N-періодна біноміальна цінова модель. Означення. Портфельний процес. Рівняння поточного капіталу. Арбітраж. Умова безарбітражності.	2			3
6	N-періодна біноміальна цінова модель. Похідний цінний папір (дериватив). Європейські call і put опціони. Коротка й довга позиції. Захист короткої і довгої позицій. Теорема про метод реплікацій та її наслідки (про захист короткої і довгої позицій, про дзеркально протилежний портфельний процес).	3	N-періодна біноміальна цінова модель. Обчислення безарбітражної вартості і портфельного процесу опціону з передісторією. Захист короткої і довгої позицій щодо опціону з передісторією. Обчислення безарбітражної вартості і портфельного процесу європейського call-опціону і європейського put-опціону. Захист короткої і довгої позицій щодо європейського call-опціону і європейського put-опціону.	3	7
7	Скінченний ймовірнісний простір. Означення. Випадкова величина. Математичне сподівання. Ймовірнісний простір біноміальної цінової моделі. Ймовірнісний простір біноміальної цінової моделі з безризиковою мірою. Теорема про коректність означення ймовірнісних просторів біноміальної цінової моделі та її наслідок про математичне сподівання ціни акції.	3			4
8	Умове математичне сподівання. Означення. Лема про формули для умовного математичного сподівання. Теорема про основні властивості умовного математичного сподівання в біноміальній ціновій моделі та її наслідок про умове математичне сподівання ціни акції.	4	Означення опуклої функції. Теорема про еквівалентність чотирьох означень опуклої функції. Нерівність Йенсена. Теорема про існування односторонніх похідних опуклої функції та її наслідок про існування лінійно функції. Нерівність Йенсена для математичних сподівань.	2	7

9	Мартингал, субмартингал, супермартингал. Теорема про еквівалентність означень мартингалу, субмартингалу, супермартингалу та її наслідки (про математичне сподівання мартингалу та про рівність мартингалів). Теорема про дискontовану ціну акції як мартингал. Теорема про дискontований процес поточного капіталу як мартингал та її наслідки. Формула безарбітражної вартості похідного цінного паперу.	4		5
10	Похідний цінний папір (дериватив) потоку виплат. Європейські call і put опціони. Коротка й довга позиції. Захист короткої і довгої позицій. Теорема про метод реплікацій для потоку виплат та її наслідки (про захист короткої і довгої позицій, про дзеркально протилежний портфельний процес). Теорема про безарбітражну вартість потоку виплат.	2	Приклад потоку виплат. Обчислення безарбітражних вартостей і портфельного процесу потоку виплат. Захист короткої позиції щодо потоку виплат.	5
11	Марківський процес. Теорема про еквівалентність означень марківського процесу. Теорема про достатню умову марковості та її наслідок про марковість процесу ціни акції. Приклад немарківського процесу. Теорема узагальнення прикладу немарківського процесу. Теорема про похідний цінний папір з функцією виплат, залежною лише від ціни акції. Теорема про вартість похідного цінного паперу з функцією виплат, залежною від марківського процесу.	4	Лема про незалежність. Теорема про еквівалентність означень багатовимірного марківського процесу. Приклад двовимірного марківського процесу. Достатня умова марковості для багатовимірного процесу. Теорема про вартість похідного цінного паперу з функцією виплат, залежною від багатовимірного марківського процесу. Теорема про похідний цінний папір з функцією виплат, залежною лише від ціни акції і максимальної ціни акції.	8
<b>Разом</b>		<b>32</b>		<b>16</b>
				<b>59</b>

Автор

С. І. Підкуйко