Міністерство освіти і науки України

Львівський національний університет імені Івана Франка

Механіко - математичний факультет

Кафедра алгебри, топології та основ математики

Магістерська робота

на тему: «Показникові та логарифмічні рівняння та нерівності: методика розв’язування»

Виконала: студентка VІ курсу,

групи МТОМ-21з

Спеціальності: 014 «Середня освіта». «Математика»

Синичків (Лаврів) Іванна

Керівник: Гутік О. В.

Рецензент: Позднякова І. В.

Львів-2021

Зміст

Вступ

Магістерська робота присвячена шкільному курсу показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей, а саме: їхнім методам розв'язування.

Винайдення логарифмів значною мірою прискорилось потребами удосконалення обчислень. Винайшли логарифми і майже одночасно почали їх застосовувати шотландський математик Джон Непер (1550-1617) і швейцарський математик, астроном і механік Йост Бюргі (1551-1632). Проте перший крок до спрощення обчислень зробив німецький математик Михаель Штіфель (1487-1567), у якого поняття логарифма з'явилося у результаті зіставлення геометричної і арифметичної прогресії. Ця ідея бере свій початок у працях Архімеда (бл. 287-212 до н.е.).

До початку XVII століття у математиці уникали вживання дробових та від'ємних показників степеня. Лише в кінці XVII століття у зв'язку з удосконаленням математичних задач виникла необхідність поширити область визначення показника степеня на всі дійні числа. Питання, пов'язане з показниковою функцією, розробляв Леонард Ейлер. У двох розділах своєї праці «Вступ до аналізу» він описав «показникові та логарифмічні кількості». В ній зокрема зазначено, що показникові кількості можуть бути різноманітними залежно від того, « чи буде змінною кількістю один лише показник степеня, чи, крім того, ще й кількість, яку підносять до степеня». Актуальність теми полягає в тому, що тема «Показникова та логарифмічна функція» є однією з основних тем в шкільній програмі з математики 11 класу. У процесі вивчення цього розділу учні систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про степені і корені та їх властивості, засвоюють поняття показникової та логарифмічної функцій, їх властивості та графік, навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів, розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння та нерівності та їх системи.

Розв’язуванню даних рівнянь, нерівностей та їх систем, приділяється багато уваги, особливо на вступних екзаменах.

Магістерська робота складається з вступу та двох розділів, перший з яких присвячений показниковим рівнянням, нерівностям, їхнім системам та рівнянням і нерівностям з параметрами. Другий розділ присвячений логарифмічній функції та відповідним задачам і трансцендентним рівнянням.

Розділ 1

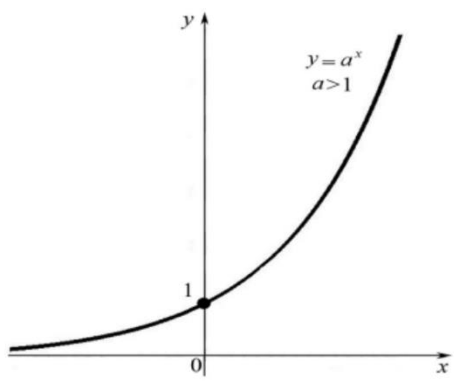
Показникова функція, її властивості та графік

На практиці часто використовують функції вигляду

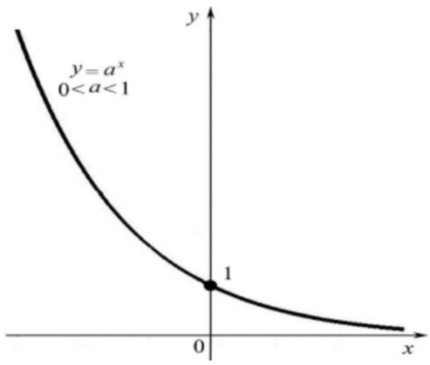
$y = 3^x,\ y = 10^x,\quad y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, де аргумент є показником степеня, а основою є задане число.

Означення 1. Функція, задана формулою $y = a^x$, де $a > 0,\ a \neq 1$ називається показниковою функцією з основою a.

1. Функція $y = a^x$ при $a > 0$ має такі властивості:
   - область визначення $$D(a^x) = (-\infty; +\infty);$$
   - область значень $$E(a^x) = (0; +\infty);$$
   - функція зростаюча;
   - якщо $x > 0$, то $a^x > 1$;
     $x = 0$, то $a^x = 1$;
     $x < 0$, то $0 < a^x < 1$;



2. Функція $y = a^x$ при $0 < a < 1$ має такі властивості:
   - область визначення $D(a^x) = (-\infty; +\infty)$;
   - область значень $E(a^x) = (0; +\infty)$;
   - функція спадна;
   - якщо $x > 0$, то $0 < a^x < 1$;
     $x = 0$, то $a^x = 1$;
     $x < 0$, то $a^x > 1$;



Випишемо основні характеристичні властивості показникової функції $(x, y \in R,\ a > 0,\ a \neq 1)$:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$;
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;
4. $(a^x)^y = a^{xy}$;
5. $a^0 = 1$;
6. $a^1 = a$;
7. $1^x = 1$;
8. $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$;
9. $(ab)^x = a^x b^x$.

Графік будь-якої показникової функції проходить $y = a^x$ проходить через точку (0; 1). Показникова функція є ні парною, ні непарною; не набуває точок максимуму та мінімуму; не набуває ні найбільшого, ні найменшого значення; обмежена знизу.

1.1. Показникові рівняння, класифікація та методика розв'язування

Означення 2. Показниковим називають рівняння, в яких невідома величина міститься в показнику степеня, при цьому основа степеня не містить невідомої величини.

Розв'язування показникових рівнянь часто зводиться до розв'язку рівнянь вигляду $a^x = a^b$, де $a > 0,\ a \neq 1, x$ - невідоме. Дане рівняння розв'язується за допомогою використання властивостей степеня.

Типи показникових рівнянь та методи їх розв'язування:

1. Розв'язування рівнянь з використанням властивостей показникової функції.

2. Розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних.
3. Розв'язування рівнянь винесенням спільного множника за дужки.
4. Розв'язування показникових рівнянь методом логарифмування обох частин.
5. Розв'язування рівнянь з використанням властивостей монотонності показникової функції.

Рівняння вигляду $a^{f(x)} = 1$

Якщо $a = 1$, то рівняння має безліч коренів, тому що $1^{f(x)} = 1$ і x – будь-яке число з області визначення функції $f(x)$.

Очевидно, що $a \neq 0$. При всіх інших значеннях a: $a^{f(x)} = a^0 \Rightarrow \ f(x) = 0$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\left(2\sqrt{2}\right)^{2\sin x - 1} = 1$.

Розв'язок: $$\left(2\sqrt{2}\right)^{2\sin x - 1} = \left(2\sqrt{2}\right)^0$$

$$2\sin x - 1 = 0,$$

$$\sin x = 0{,}5,$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \ \in Z.$$

Приклад 2 . Розв'язати рівняння $2^{x^2} \cdot 3^{x^2} = 1$.

Розв'язок: $2^{x^2} \cdot 3^{x^2} = 6^{x^2} \Leftrightarrow 6^{x^2} = 6^0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Відповідь: $x = 0$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $5^{(x-2)(4x-3-x^2)} = 1$.

Розв'язок: $$5^{(x-2)((-x)^2+4x-3)} = 5^0$$

$$(x-2)((-x)^2 + 4x - 3) = 0$$

$x-2=0$ $\qquad\qquad$ $(-x)^2+4x-3)=0$

$x_1=2.$ $\qquad\qquad$ $x^2-4x+3=0$

$$x_{2,3}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot3}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=2\pm1;$$

$$x_2=1;\quad x_3=3.$$

Відповідь: {1, 2, 3}.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(a-1)^{x^2-ax+1}=1.$

Розв'язок:

Якщо $a=1$,то рівняння коренів немає.

Якщо $a-1=1$, тобто $a=2$, то $x\ \in R$.

Якщо $a\ \in(-\infty;-2]\ \cup(2;+\infty)$, то

$$x^2-ax+1=0$$

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}.$$

Відповідь: $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$.

Рівняння вигляду $\left(q(x)\right)^{f(x)}=1$

Якщо $q(x)=1$, то коренями даного рівняння є корені, що належать області визначення функції $f(x)$.

Якщо $q(x)\neq1$, то $f(x)=0$, при цьому варто пам'ятати, що $\left(q(x)\right)^{f(x)}$- визначена функція.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $(x^2-4)^{2x+3}=1.$

Розв'язок: якщо $x^2-4=1$, то $x=\pm\sqrt{5}$ - корені даного рівняння.

Якщо $x^2-4\neq1$, то $2x+3=0$ і $x=-1{,}5$.

Знайдене значення задовольняє нерівність $x^2 - 4 \neq 1$ та вираз

$(x^2 - 4)^{2x+3}$ – визначена.

Відповідь: $\pm\sqrt{5};\ -1{,}5$.

Рівняння вигляду $a^{f(x)} = b$.

Розв'язок даного рівняння при $a > 0\ i\ b > 0, a \neq 1$ є $f(x) = \log_a b$. Якщо $a^x = b, a > 0\ i\ b > 0, a \neq 1$, то $x = \log_a b$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $2^{4x} = 5$.

Розв'язок: оскільки обидві частини рівняння додатні логарифмуємо з основою 2:

$$\log_2 2^{4x} = \log_2 5,$$

$$4x \cdot \log_2 2 = \log_2 5$$

$$4x = \log_2 5,$$

.

Відповідь: $x = \frac{\log_2 5}{4}$.

Приклад 7 . Розв'язати рівняння $7^{\frac{x}{2}} \cdot 3^x = 4$.

Розв'язок: піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$(7^{\frac{x}{2}} \cdot 3^x)^2 = 4^2,$$

$$7^x 3^{2x} = 16,$$

$$7^x 9^x = 16,$$

$$63^x = 16,$$

$$\log_{63} 63^x = \log_{63} 16,$$

$$x = \log_{63} 16.$$

Відповідь: $x = \log_{63} 16$.

Рівняння вигляду $a^{f(x)} = b^{f(x)}$

Поділивши обидві частини рівняння на $b^{f(x)}$, отримаємо:

$$\frac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \left(\frac{a}{b}\right)^{0} \Rightarrow f(x) = 0.$$

Приклад 8. Розв’язати рівняння $2^{4-5x} = 3^{4-5x}$.

Розв’язок: розділимо обидві частини рівняння на $3^{4-5x} > 0$ та отримаємо:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4-5x} = 1,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4-5x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0},$$

$$4 - 5x = 0,$$

$$x = 0{,}8.$$

Відповідь: 0,8.

Приклад 9. Розв’язати рівняння $6^{2x+1} = 3^{2x+1}2^{3x+1.}$

Розв’язок: $$6^{2x} \cdot 6 = 3^{3x} \cdot 3 \cdot 2^{x} \cdot 2,$$

$$36^{x} = 27^{x} \cdot 2^{x},$$

$$36^{x} = 54^{x},$$

$$\left(\frac{36}{54}\right)^x = 1,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

$$x = 0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 10. Розв'язати рівняння: $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$.

Розв'язок: поділимо обидві частини рівняння на 4^x;

$$(\frac{9}{4})^x + (\frac{6}{4})^x - 2 = 0, \text{ або } (\frac{3}{2})^{2x} + (\frac{3}{2})^x - 2 = 0\ .$$

Позначимо $(\frac{3}{2})^x = t, t > 0$.

Отримаємо:

$$t^2 + t - 2 = 0,$$

$$t_1 = -2\ \notin (0;+\infty)\ ,\ t_2 = 1\ \in (0;+\infty)\ .$$

$$(\frac{3}{2})^x = 1 \Rightarrow (\frac{3}{2})^x = (\frac{3}{2})^0 \Rightarrow x = 0.$$

Відповідь: $x = 0$.

Приклад 11. Розв'язати рівняння

$$4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}.$$

Розв'язок:

$4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} - 9 \cdot 2^{2\sqrt{3x^2-2x}} + 2 = 0 \Leftrightarrow 4(2^{\sqrt{3x^2-2x}})^2 - 9\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} - 2\right)\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3x^2-2x} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right.; \\ \sqrt{3x^2-2x} = -2 \Leftrightarrow \emptyset. \end{array}\right.$$

Відповідь: $1, -\frac{1}{3}$.

Показникові рівняння, що зводяться до вигляду

$$a^{f(x)} = a^{q(x)} (a \neq 1) \Leftrightarrow f(x) = q(x)$$

Приклад 12. Розв'язати рівняння $0{,}125 \cdot 4^{2x-8} = (\frac{0{,}25}{\sqrt{2}})^{-x}$.

Розв'язок: запишемо дане рівняння з основою 2 та отримаємо:

$$\frac{1}{8} \cdot 2^{2(2x-8)} = (\frac{1}{4} \cdot 2^{-1/2})^{-x},\text{ або}$$

$$2^{-3} \cdot 2^{2(2x-8)} = (2^{-2} \cdot 2^{-1/2})^{-x},$$

$$2^{-3+2(2x-8)} = 2^{(-2-0{,}5)(-x)},$$

$$2^{-3+4x-16} = 2^{2{,}5x},$$

$$-3 + 4x - 16 = 2{,}5x,$$

$$(4 - 2{,}5)x = 19,$$

$$x = \frac{19}{1{,}5} = \frac{19 \cdot 2}{3} = \frac{38}{3}.$$

Відповідь: $x = \frac{38}{3}$.

Приклад 13. Розв'язати рівняння

$$(3 - 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} + (3 + 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} - 6.$$

Розв'язок: зауважимо, що числа $3 - 2\sqrt{2}$ і $3 + 2\sqrt{2}$ обернені

$$3 - 2\sqrt{2} = \frac{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}.$$

Позначимо $(3 - 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} = t, t > 0$, підставимо в початкове рівняння та отримаємо:

$$t + \frac{1}{t} = 6,$$

$$t^2 - 6t + 1 = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{32}}{2} = 3 \pm \sqrt{\frac{32}{4}} = 3 \pm \sqrt{8} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

з рівнянь $\qquad (3 - 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} = 3 + 2\sqrt{2},$

$$(3 - 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} = 3 - 2\sqrt{2}$$

отримаємо 2 квадратні рівняння :

$x^2 - 6x + 9 = -1, \qquad x^2 - 6x + 9 = 1$

$x_1 = 4, \qquad x_2 = 2.$

Відповідь: $x_1 = 4,\ x_2 = 2.$

Рівняння вигляду: $a_0 m^{nx+c_1} + a_1 m^{nx+c_2} + \cdots + a_n m^{nx+c_n} = F$ розв'язуються методом винесення спільного множника за дужки, де $a_0, a_1, \dots, a_n, c_1, c_2, \dots, c_n$- сталі числа.

Для розв'язку такого типу рівнянь потрібно винести за дужки m^{nx}, більш зручніше винести за дужки m^{nx+c_k}, де c_k – найменше з чисел $c_i, i = 1,2, \dots n$, тоді в дужках залишеться число, яке позначимо А:

$$m^{nx+c_k} \cdot \mathrm{A} = F.$$

Якщо $\frac{F}{A} \leq 0$, то рівняння коренів немає.

Якщо $F = A$, то $nx + c_k = 0$.

Якщо $\frac{F}{A} > 0$, то $\frac{F}{A} = m^e$, то $nx + c_k = m^e$.

Якщо $\frac{F}{A} \neq m^e$, рівняння потрібно розв'язувати, логарифмуючи обидві частини даного рівняння, по будь-якій додатній основі, відмінній від 1.

Приклад 14. Розв'язати рівняння:

$$6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}.$$

Розв'язок: в лівій частині рівняння винесемо за дужки 6^x, а в правій - 2^x, отримаємо:

$$6^x(1+6) = 2^x(1+2+4),$$
$$6^x = 2^x,$$
$$(2 \cdot 3)^x = 2^x,$$
$$2^x(3^x - 1) = 0,$$
$$2^x \neq 0, \qquad 3^x = 1,$$
$$3^x = 3^0, x = 0.$$

Відповідь: $x = 0$.

Приклад 15. Розв'язати рівняння

$$3^{2x+1} - 5^{2x-1} = 2 \cdot 3^{2x} + 4 \cdot 5^{2(x-1)}.$$

Розв'язок:

$$3^{2x} \cdot 3 - 2 \cdot 3^{2x} = 5^{2x-1} + 4 \cdot 5^{2x-2},$$
$$3^{2x} = \frac{9}{25} 5^{2x}.$$

Поділимо обидві частини рівняння на 5^{2x} та отримаємо:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \frac{9}{25} \ ,$$
$$2x = 2,$$
$$x = 1.$$

Відповідь: 1.

Однорідні рівняння вигляду: $ma^{2f(x)} + \mathrm{n}a^{f(x)} + \mathrm{p} = 0$

Замінивши $y = a^{f(x)}, y > 0$, отримаємо квадратне рівняння:

$$my^2 + ny + p = 0.$$

Знаходимо корені даного рівняння та виберемо ті, що є більшими за нуль та повертаємося до заміни:

$$y_1 = a^{f(x)}, \qquad y_2 = a^{f(x)}$$

Якщо $y_1 \leq 0$ та $y_2 \leq 0$, то рівняння коренів немає.

Показникові рівняння, що зводяться до алгебраїчних шляхом введення нової змінної (метод підстановки)

Приклад 16. Розв'язати рівняння: $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250.$

Розв'язок: запишемо рівняння у вигляді :

$$5^{2x} \cdot 5^{-1} + 5^x \cdot 5 - 250 = 0.$$

Зробимо заміну $5^x = t, t > 0.$

$$\frac{1}{5}t^2 + 5t - 250 = 0,$$

$$t_1 = -50$$

$$t_2 = 25.$$

$$5^x = 25, \quad 5^x = 5^2, \ \ x = 2.$$

Відповідь: $x = 2.$

Приклад 17. $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x.$

Розв'язок: $81 \neq 0$ при будь-якому значенні змінної x, то початкове рівняння рівносильно:

$$3 \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x = 2.$$

Нехай $y = \left(\frac{4}{9}\right)^x$, отримаємо рівняння:

$$3y^2 + y = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. .$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = -1 \qquad \text{або} \qquad \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3} \ .$$

Перше рівняння коренів немає, тому що $\left(\frac{4}{9}\right)^x > 0$ при будь-якому значенні x, а друге рівняння має корінь $x = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Приклад 18. Розв'язати рівняння

$$(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62.$$

Розв'язок: зробимо заміну $y = (4 + \sqrt{15})^x$ та отримаємо рівняння:

$$y + \frac{1}{y} = 62,$$

$$y^2 - 61y + 1 = 0,$$

$$y = 31 \pm 8\sqrt{15}.$$

$$(4 + \sqrt{15})^x = 31 + 8\sqrt{15} \qquad \text{або} \qquad (4 + \sqrt{15})^x = 31 - 8\sqrt{15}$$

Коренями цих рівнянь є числа 2 та -2, оскільки $31 \pm 8\sqrt{15} = (4 \pm \sqrt{15})^2$.

Відповідь: {-2; 2}.

Приклад 18. Розв'язати рівняння $8^x - 13 \cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13 \cdot 3^{3x} = 0$.

Розв'язок:

$$8^x - 13 \cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13 \cdot 3^{3x} = 0 \Leftrightarrow 2^{3x} - 13 \cdot 2^{2x} 3^x - 2^x 3^{2x} + 13 \cdot 3^{3x}$$
$$= 0 \Leftrightarrow 2^{3x}\left(1 - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 13\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}\right) = 0.$$

Нехай $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0,$ тоді отримаємо:

$$1 - 13t - t^2 + 13t^2 = 0.$$

$$1 - 13t - t^2 + 13t^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - t^2)(1 - 13t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \pm 1;\ \frac{1}{13} \Rightarrow x = 0;\ -\log_{\frac{3}{2}} 13.$$

Відповідь: $0;\ -\log_{\frac{3}{2}} 13.$

Приклад 19. Розв'язати рівняння $500 \cdot 8^x = 8 \cdot 5^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язок:

$$500 \cdot 8^x = 8 \cdot 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 5^3 2^2 2^{3x} = 2^3 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2^{3x-1} = 5^{\frac{1}{x}-3} \Leftrightarrow (3x - 1)\log_5 2 =$$
$$= \frac{1}{x} - 3 \Leftrightarrow x = \frac{\log_5 2 - 3 \pm (\log_5 2 + 3)}{6\log_5 2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3}, \\ x = -\log_2 5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}, -\log_2 5.$

1.2. Приклади нестандартних методів розв'язування показникових рівнянь

Приклад 20. Розв'язати рівняння $3^{-x^2-x-1} = 5.$

Розв'язок: зауважимо, що $-x^2 - x - 1 < 0$ при $x \in R$, а

$$0 < 3^{-x^2-x-1} < 1,$$

Отже, дане рівняння коренів немає.

Приклад 21. Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = \sqrt{6^x}.$

Розв'язок: поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{6^x} > 0$ та отримаємо:

$$\left(\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}\right)^{x}+\left(\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}\right)^{x}=1,$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^{x}=1,$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^{2}+\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^{2}=1,$$

$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}}=\cos\varphi$; $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}}=\sin\varphi$,отримаємо

$$sin^{x}\varphi+cos^{x}\varphi=1,$$

використаємо основну тригонометричну тотожність: $sin^2\varphi+cos^2\varphi=1$,

отримаємо, що $x=2$.

Відповідь: $x=2$.

Приклад 22. Розв’язати рівняння $2^{5x+18}\cdot 3^{4x+11}\cdot 7^{3x+4}=504^{x+7}$.

Розв’язок: розкладемо число 504 на прості множники:

$$504=2^3\cdot 3^2\cdot 7,$$

Тоді запишемо дане рівняння у вигляді:

$$2^{5x+18}\cdot 3^{4x+11}\cdot 7^{3x+4}=2^{3x+21}\cdot 3^{2x+14}\cdot 7^{x+7},$$

$$2^{2x-3}\cdot 3^{2x-3}\cdot 7^{2x-3}=1,$$

$$42^{2x-3}=1,$$

$$42^{2x-3}=42^{0},$$

$$2x-3=0,$$

$$x = 1{,}5.$$

Відповідь: 1,5.

Приклад 23. Розв'язати рівняння

$$(2x+3)^x = (4x^2+9+12x)^{\frac{x^3}{(x-3)(2x+2)}}$$

Розв'язок: зауважимо, що $4x^2+9+12x = (2x+3)^2$.

Перепишемо початкове рівняння у вигляді:

$$(2x+3)^x = (2x+3)^{\frac{x^3}{(x-3)(2x+2)}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{x^3}{(x-3)(2x+2)} \\ 2x+3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+3=1, \\ x \neq 3, \\ x \neq -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Друга система коренів немає, тому початкове рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x-3)(x+1)=x^2, \end{array}\right. \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ -2x-3=0, \end{array}\right. \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{cases}, \Leftrightarrow x=0.$$

Відповідь: $\{0\}$.

Приклад 24. Скільки розв'язків має рівняння $e^x = x^2$?

Розв'язок:

Рівняння $e^x = x^2$ рівносильне рівнянню $e^x - x^2 = 0$.

Доведемо, що дане рівняння має єдиний корінь:

1. Розглянемо функцію $f(x) = e^x - x^2$.

   Знайдемо похідну даної функції:

   $f'(x) = e^x - 2x$ та позначимо її $g(x)$.

Функція $g(x)$ має єдину критичну точку $x = \ln 2$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2.$$

В точці $x = \ln 2$ функція $g(x) = e^x - 2x$ - неперервна і набуває значення $g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$.

При $x < \ln 2$ значення $g'(x) = e^x - 2$ – від'ємні, тому функція $g(x)$ спадає на проміжку $(-\infty; \ln 2)$.

При $x > \ln 2$ значення $g'(x) = e^x - 2$ – додатні, тому фунція $g(x)$ зростає на проміжку $(\ln 2; +\infty)$.

$g(\ln 2)$ - найменше значення функції $g(x)$, тому

$$g(x) \geq g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$$

$$(2 - 2\ln 2 > 0 \Leftrightarrow e > 2),$$

Отже, функція $g(x)$ набуває тільки додатних значень, тому функція $f(x)$ – зростає на всій числовій прямій.

2. Функція $f(x)$ може набувати додатні та від'ємні значення.

$$f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0,$$

$$f(0) = 1.$$

Оскільки функція $f(x)$ - неперервна, то існує хоча б одне значення x_0 таке, що $f(x_0) = 0$.

Вище ми довели, що функція $f(x)$ – зростаюча, тому кожне своє значення вона приймає один раз.

Отже, дане рівняння має єдиний корінь.

1.3. Показникові нерівності

Найпростішими показниковими нерівностями будемо називати нерівності вигляду:

$a^{f(x)} \vee a^b$ або $a^{f(x)} \vee a^{g(x)}$, де a і b – дійсні числа, $a > 0,\ a \neq 1, f(x)\ i\ g(x) -$ многочлени першого або другого степеня.

Розв’язування найпростіших показникових нерівностей ґрунтується на монотонності показникової функції:

якщо $a > 1$, то функція $y = a^t$ зростає на всій числовій прямій, тоді

$$a^{t_1} < a^{t_2} \Leftrightarrow t_1 < t_2 ,$$

$$a^{t_1} \le a^{t_2} \Leftrightarrow t_1 \le t_2;$$

якщо $0 < a < 1,$ то функція $y = a^t$ спадає на всій числовій прямій, тоді

$$a^{t_1} < a^{t_2} \Leftrightarrow t_1 > t_2 ,$$

$$a^{t_1} \le a^{t_2} \Leftrightarrow t_1 \ge t_2 .$$

З даних властивостей випливає:

якщо $a > 1$, то

$$a^{f(x)} < a^b \Leftrightarrow f(x) < b, \quad a^{f(x)} \le a^b \Leftrightarrow f(x) \le b,$$

$$a^{f(x)} > a^b \Leftrightarrow f(x) > b, \quad a^{f(x)} \ge a^b \Leftrightarrow f(x) \ge b,$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x), \quad a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \le g(x),$$

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x), \quad a^{f(x)} \ge a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \ge g(x).$$

При переході до нерівностей для показників степенів знак нерівності не змінюємо.

якщо $0 < a < 1,$ то

$$a^{f(x)} < a^b \Leftrightarrow f(x) > b, \quad a^{f(x)} \le a^b \Leftrightarrow f(x) \ge b,$$

$$a^{f(x)} > a^b \Leftrightarrow f(x) < b, \quad a^{f(x)} \ge a^b \Leftrightarrow f(x) \le b,$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x), \quad a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \ge g(x),$$

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x), \quad a^{f(x)} \ge a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \le g(x).$$

При переході до нерівностей для показників степенів знак нерівності змінюється на протилежний.

Таким чином, найпростішими нерівностями будемо вважати нерівності, в яких ліва і права частини – степені одного і того ж додатного числа, а показники степенів – многочлени степеня не більшого, ніж другий.

Приклад 25. Розв’язати нерівність $2^{x^2+2x} \leq 0{,}5$.

Розв’язок: запишемо праву частину даної нерівності у вигляді степеня числа 2 та отримаємо:

$$2^{x^2+2x} \leq 2^{-1} \Leftrightarrow x^2 + 2x \leq -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1.$$

Відповідь: $x = -1$.

Приклад 26. Розв'яжіть нерівність $3^x < 27$.

Розв'язок: запишемо дану нерівність у вигляді $3^x < 3^3$.

Оскільки $3 > 1$, то функція $y = 3^t$ є зростаючою.

Отже, при $x < 3$ виконується нерівність $3^x < 3^3$.

Відповідь: $x < 3$.

Приклад 27. Розв’язати нерівність $(0{,}2)^{x^2-5x} > 25^{x^2-3x+5}$.

Розв’язок: $0{,}2 = 5^{-1}$, а $25 = 5^2$,

Запишемо ліву і праву частину даної нерівності у вигляді степеня числа 5:

$$(0{,}2)^{x^2-5x} > 25^{x^2-3x+5} \Leftrightarrow 5^{-x^2+5x} > 5^{2x^2-6x+10} \Leftrightarrow -x^2 + 5x > 2x^2 - 6x + 10 \Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 10 < 0.$$

Коренями квадратного тричлена в лівій частині отриманої нерівності є числа $\frac{5}{2}$ і 2, коефіцієнт тричлена при x^2 додатний, тому множина розв'язків нерівності: $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$.

Відповідь: $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$.

Приклад 28. Розв'язати нерівність $3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \le 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}$.

Розв'язок:

$$3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \le 3^{x^2-2} + 27^{2x+3} \Leftrightarrow 3^{x^2+6x+9} + 3^{-2} \le 3^{x^2-2} + 3^{6x+9} \Leftrightarrow$$

$$3^{x^2}(3^{6x+9} - 3^{-2}) - (3^{6x+9} - 3^{-2}) \le 0 \Leftrightarrow \left(3^{x^2} - 3^0\right)((3^{6x+9} - 3^{-2}) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(6x + 9 + 2) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \le -\frac{11}{6} \end{array}\right..$$

Відповідь: $(-\infty; -\frac{11}{6}] \cup \{0\}$.

Перейдемо до методів розв'язування складніших показникових нерівностей. Вони є спільними для всіх нерівностей з однією змінною, але ґрунтуються на властивостях степеня з дійсним показником та властивостях показникової функції. В більшості випадків за допомогою цих методів можна звести розв'язок показникового рівняння до розв'язку одного чи декількох простіших показникових нерівностей. Рівносильні перетворення показникових нерівностей зв'язані з властивостями степеня з дійсним показником, винесенням спільного множника за дужки, розкладанням на множники.

Приклад 29. Розв'язати нерівність

$$3^{x+1} + 10^x > 10^{x-1} + 4 \cdot 3^x + 3^{x+2}.$$

Розв'язок: запишемо нерівність у вигляді:

$$3^{x+1} + 10^x - 10^{x-1} - 4 \cdot 3^x - 3^{x+2} > 0.$$

Погрупувавши доданки у лівій частині, отримаємо:

$$(3^{x+1} - 4 \cdot 3^x - 3^{x+2}) + (10^x - 10^{x-1}) > 0.$$

Винесемо за дужки спільний множник:

$$3^x(3 - 4 - 3^2) + 10^{x-1}(10 - 1) > 0,$$

$$-10 \cdot 3^x + 10^{x-1} \cdot 9 > 0,$$

$$10^{x-1} \cdot 9 > -10 \cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{10^{x-1}}{10} > \frac{3^x}{9} \Leftrightarrow 10^{x-2} > 3^{x-2} \Leftrightarrow \left(\frac{10}{3}\right)^{x-2} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Відповідь: $(2; +\infty)$.

Приклад 30. Розв’язати нерівність

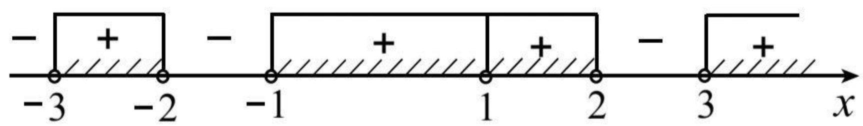
$$\frac{\left(3^{x^2} - 3\right)(2^{-x} - 2^3)\left(4^x - 4^{x^2+2x-2}\right)}{(x^2 - 5x + 6)} > 0.$$

Розв’язок:

$$\frac{\left(3^{x^2} - 3\right)(2^{-x} - 2^3)\left(4^x - 4^{x^2+2x-2}\right)}{(x^2 - 5x + 6)} > 0,$$

$$\frac{(x^2 - 1)(-x - 3)(x - x^2 - 2x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} > 0,$$

$$\frac{(x - 1)^2(x + 1)(x + 3)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} > 0.$$



Відповідь: $(-3;-2) \cup (-1;1) \cup (1;2) \cup (3;+\infty)$.

Приклад 31. Розв’язати нерівність

$$(x^2 - x + 1)^{\frac{x-11}{x-4}} \leq (x^2 - x + 1)^3.$$

Розв’язок: зауважимо, що $x^2 - x + 1 > 0$ при всіх допустимих значеннях змінної, оскільки дискримінант квадратного тричлена $x^2 - x + 1$ від’ємний, а коефіцієнт при x^2- додатний.

Розглянемо 3 випадки:

1) основа степені в лівій та правій частині більша за 1 (знак нерівності не змінимо;
2) основа дорівнює 1 (нерівність правильна для всіх $x \neq 4$);
3) основа менша за 1 (знак нерівності поміняємо на протилежний).

Таким чином, в першому випадку отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 > 1, \\ \frac{x-11}{x-4} \leq 3, \end{cases} \begin{cases} x^2 - x > 0, \\ \frac{x-11}{x-4} - 3 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) > 0, \\ \frac{-2x+1}{x-4} \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) > 0, \\ \frac{x-0,5}{x-4} \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty), \\ x \in (-\infty; 0,5] \cup (4; +\infty). \end{cases}$$

Розв’язком даної системи є об’єднання $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

В другому випадку отримаємо систему:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 = 1, \\ x \neq 4, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

В третьому випадку отримаємо систему:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 < 1, \\ \dfrac{x-11}{x-4} \geq 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) < 0, \\ \dfrac{x-0,5}{x-4} \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 1), \\ x \in [0,5,4). \end{cases}$$

Розв’язком даної системи є проміжок $[0,5, 1)$.

Об’єднаємо множини розв’язків в даних трьох випадках:

$$(-\infty; 0)\ \cup (4; +\infty)\ \cup \{0; 1\} \cup\ [0{,}5, 1) = (-\infty; 0] \cup [0{,}5; 1] \cup (4; +\infty).$$

Відповідь:

$$(-\infty; 0)\ \cup (4; +\infty)\ \cup \{0; 1\} \cup\ [0{,}5, 1) = (-\infty; 0] \cup [0{,}5; 1] \cup (4; +\infty).$$

Приклад 32. Розв’язати нерівність

$$(0{,}04)^x \cdot 2^{x^2} + 5^{x^2} \cdot 2^x \le 10^{x^2} + (0{,}08)^x.$$

Розв’язок: використовуючи властивості степеня, запишемо нерівність у вигляді:

$$(0{,}04)^x \cdot 2^{x^2} + 5^{x^2} \cdot 2^x \le 5^{x^2} \cdot 2^{x^2} + (0{,}04)^x \cdot 2^x,$$

$$\left((0{,}04)^x \cdot 2^{x^2} - (0{,}04)^x \cdot 2^x\right) + \left(5^{x^2} \cdot 2^x - 5^{x^2} \cdot 2^{x^2}\right) \le 0,$$

$$(0{,}04)^x\left(2^{x^2} - 2^x\right) + 5^{x^2}\left(2^x - 2^{x^2}\right) \le 0,$$

$$(0{,}04)^x\left(2^{x^2} - 2^x\right) - 5^{x^2}\left(2^{x^2} - 2^x\right) \le 0,$$

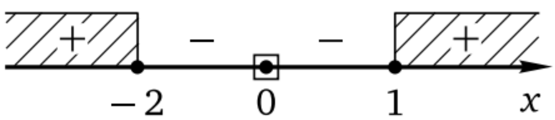
$$\left(2^{x^2} - 2^x\right)\left((0{,}04)^x - 5^{x^2}\right) \le 0,$$

$$\left(2^{x^2} - 2^x\right)\left(5^{-2x} - 5^{x^2}\right) \le 0,$$

$$(x^2 - x)(-2x - x^2) \le 0$$

$$(x^2 - x)(x^2 + 2x) \ge 0\ \Leftrightarrow x(x-1)x(x+2) \ge 0\ \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+2) \ge 0.$$

Розв’яжемо за допомогою методу інтервалів:



Відповідь: $(-\infty; -2] \cup \{0\}\ \cup [1; +\infty)$.

Метод введення нової змінної – один з тих методів,який найчастіше використовують при розв’язуванні показникових нерівностей.

Основні типи показникових нерівностей, які після введення нової змінної зводяться до алгебраїчних нерівностей

- $a \cdot l^{2f(x)} + b \cdot l^{f(x)} + c \vee 0$ (зводяться до квадратних нерівностей $at^2 + bt + c \vee 0$ заміною $t = l^{f(x)}$, де $t > 0$.
- $a \cdot l^{2f(x)} + b \cdot (lq)^{f(x)} + c \cdot q^{2f(x)} \vee 0$ (зводиться до квадратної після ділення двох частин на $q^{2f(x)}$, таке ділення є рівносильним перетворенням і не призводить до зміни знаку нерівності, тому що $q^{2f(x)} > 0$ при будь-якому допустимому значенні змінної).
  Після ділення нерівність набуває вигляду:
  $$a \cdot \left(\frac{l}{q}\right)^{2f(x)} + b \cdot \left(\frac{l}{q}\right)^{f(x)} + c \vee 0\,.$$
  Ввівши нову зміну $t = \left(\frac{l}{q}\right)^{f(x)}$, де $t > 0$ отримаємо квадратну нерівність $at^2 + bt + c \vee 0$.
- $a \cdot l^{f(x)} + b \cdot l^{-f(x)} + c \vee 0$ або $a \cdot l^{f(x)} + \frac{b}{l^{f(x)}} + c \vee 0$.

Помножимо обидві частини нерівності на $l^{f(x)}$ (для того, щоб не змінювався знак, тому що $l^{f(x)} > 0$ при будь-якому дійсному значенні змінної) та отримаємо нерівність $a \cdot l^{2f(x)} + c \cdot l^{f(x)} + b \vee 0$, що зводиться до квадратної $at^2 + \mathrm{c}t + b \vee 0$ заміною $t = l^{f(x)}$, де $t > 0$.

Приклад 33. Розв’язати нерівність $4^x - 7 \cdot 2^x + 10 \leq 0$.

Розв’язок: зробимо заміну змінної $t = 2^x, t > 0$. Отримаємо квадратну нерівність:

$$t^2 - 7t + 10 \leq 0.$$

Коренями квадратного тричлена у лівій частині отриманої нерівності є числа 2 і 5, а множиною розв'язків – відрізок $[2; 5]$.

Повернемося до заміни:

$$\begin{cases} 2^x \geq 2, \\ 2^x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq \log_2 5 \end{cases}.$$

Відповідь: $[1; \log_2 5]$.

Нерівності вигляду $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$

Розглянемо нерівність

$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$, де *a(x), g(x),f(x)* – неперервні функції.

Область допустимих значень: $a(x) > 0$.

Використаємо означення складної експоненти, взявши за число с число е.

Отримаємо нерівність

$$e^{f(x)lna(x)} > e^{g(x)lna(x)}$$

Використовуючи умову 1, отримаємо нерівність в області допустимих значень:

$(e-1)\big(f(x)lna(x) - g(x)lna(x)\big) = (e-1)\big(f(x) - g(x)\big)lna(x) > 0,$

Запишемо нерівність рівносильну даній

$$(a(x)-1)\big(f(x)-g(x)\big) > 0.$$

Ми отримали ще одну умову рівносильності:

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow (a(x)-1)\big(f(x)-g(x)\big) > 0\,.$$

Приклад 34. Розв'язати нерівність

$$(56 - x - x^2)^{x^3-2x^2} \geq (56 - x - x^2)^{2x^2+5x}.$$

Розв'язок: область допустимих значень:

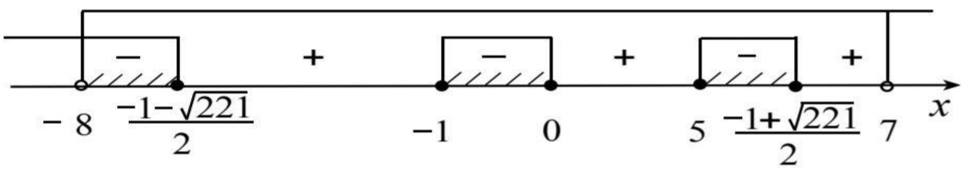
$$56 - x - x^2 > 0$$

$$x^2 + x - 56 < 0 \Leftrightarrow x \in (-8; 7),$$

$$(56 - x - x^2)^{x^3 - 2x^2} \geq (56 - x - x^2)^{2x^2 + 5x}$$

$$(55 - x - x^2)(x^3 - 2x^2 - 2x^2 - 5x) \geq 0,$$

$$\left(x - \frac{-1 - \sqrt{221}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{221}}{2}\right)(x(x + 5)(x - 1) \leq 0 \Rightarrow 0$$



Відповідь: (-8;$-\frac{-1-\sqrt{221}}{2}$) $\cup$ $[-1; 0]$ $\cup$ [5; $-\frac{-1+\sqrt{221}}{2}$].

Рівносильні перетворення при розв'язуванні показникових нерівностей:

$$f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > h(x), \\ \quad f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < h(x), \\ 0 < f(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (3)$$

$$f(x)^{g(x)} \geq f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq h(x), \\ \quad f(x) \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \leq h(x), \\ 0 < f(x) \leq 1. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (4)$$

Приклад 35. Розв'язати нерівність $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} \leq 1.$

Розв'язок: $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} \leq (4x^2 + 2x + 1)^0$.

Згідно (4), отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-x\le 0,\\4x^2+2x+1\ge 1\end{cases}\\\begin{cases}x^2-x\ge 0,\\0<4x^2+2x+1\le 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x(x-1)\le 0,\\x(2x+1)\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}x(x-1)\ge 0,\\x(2x+1)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0\le x\le 0,\\\left[\begin{array}{l}x\le -\frac{1}{2}\\x\ge 0,\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 0\\x\ge 1,\end{array}\right.\\-\frac{1}{2}\le x\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x\le 1\\-\frac{1}{2}\le x\le 0.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

1.4. Системи показникових рівнянь та нерівностей

Розв'язуючи системи показникових рівнянь, використовують такі ж методи, як при розв'язуванні систем алгебраїчних рівнянь (методи: додавання, підстановки, введення нових змінних та графічний).

Приклад 36. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases}y^{\frac{1}{x}}=3,\\y^x=81.\end{cases}$

Розв'язок: піднесемо перше рівняння до степеня числа x, отримаємо:

$y=3^x$ та підставимо у друге рівняння системи.

$$3^{x^2}=81,$$

$$x^2=4,\ \ x=\pm 2$$

при $x=2\quad y=9$,

при $x=-2\quad y=\frac{1}{9}$.

Відповідь: $(2;9)$; $\left(-2;\frac{1}{9}\right)$.

Приклад 37. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^{2y} = 3x^y - 2, \\ 3y^{2x} = 2y^x + 1. \end{cases}$

Розв'язок: нехай у першому рівнянні $x^y = a, a > 0$.

$$a^2 - 3a + 2 = 0,$$

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 2,$$

$$x^y = 1 \qquad x^y = 2\ .$$

Відповідно, з другого рівняння системи знаходимо:

$$y^x = 1 \qquad\qquad y^x = -\frac{1}{3} \text{ (рівність неможлива).}$$

Отримаємо 2 системи:

$$\begin{cases} x^y = 1, \\ y^x = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^y = 2, \\ y^x = 1. \end{cases}$$

З рівняння $x^y = 1$ першої системи отримаємо, що $x = 1$ або $y = 0$.

При $x = 1$ з другого рівняння першої системи отримаємо, що $y = 1$.

При $y = 0$ з другого рівняння першої системи отримаємо, що рівняння коренів немає.

З другого рівняння другої системи отримаємо, що $y = 1$ або $x = 0$.

Для першого рівняння другої системи нам підходить тільки значення $y = 1$, тоді $x = 2$.

Відповідь: $(1; 1); (2; 1)$.

Приклад 38. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12}, \\ y^{x+y} = x^3, \end{cases}$ якщо $x > 0, y > 0$.

Розв'язок: виразимо x з другого рівняння системи:

$$x = y^{\frac{x+y}{3}},$$

тоді перше рівняння системи набуде вигляду:

$$y^{\frac{(x+y)^2}{3}} = y^{12},$$

$$(x+y)^2 = 36,$$

$$y = 1, x = 1 \quad \text{або} \quad x + y = \pm 6.$$

Нехай $x + y = 6$, тоді:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x^3 = y^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 6 = 0, \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = -3 \end{array}\right. \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4, y = 2.$$

За умовою $x > 0, y > 0$, тому $x + y = -6$ - не є коренем даного рівняння.

Відповідь: $(1; 1); (4; 2)$.

Приклад 39. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^y = y^x, \\ 2^x = 3^y. \end{cases}$

Розв'язок: прологарифмуємо рівняння системи за основою 10:

$$\begin{cases} y \lg x = x lg\ y, \\ x lg\ 2 = y lg\ 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y lg\ \dfrac{y lg\ 3}{\lg 2} = \dfrac{y lg\ 3}{\lg 2} \lg y, \\ x = \dfrac{y lg\ 3}{\lg 2}. \end{cases}$$

$$y > 0, \text{тому } \lg y + \lg \log_2 3 = \log_2 3 \cdot \lg y,$$

$$\lg y\,(1 - \log_2 3) = -\lg \log_2 3,$$

$$\lg y = \frac{\lg \log_2 3}{\log_2 \frac{3}{2}},$$

$$y = (\log_2 3)^{\log_{\frac{3}{2}} 2},$$

$$x = (\log_2 3)^{\log_{\frac{3}{2}} 2+1}.$$

Відповідь: $\left((\log_2 3)^{\log_{\frac{3}{2}} 2+1};\ (\log_2 3)^{\log_{\frac{3}{2}} 2}\right)$.

Приклад 40. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4^{x+1} + 2^{x+y+2} - 2^{y+1} - 1 = 0, \\ 4^x = \left(\frac{1}{3}\right)^y - 2^y + \frac{1}{4}\ . \end{cases}$$

Розв'язок: розглянемо перше рівняння системи, як квадратне відносно 2^x:

$$4 \cdot 2^{2x} + 4 \cdot 2^y \cdot 2^x - 2 \cdot 2^y - 1 = 0,$$

$$0{,}25D = 4 \cdot 2^{2y} + 8 \cdot 2^y + 4 = 2^2(2^y + 1)^2,$$

$$2^x = \frac{-2 \cdot 2^y \pm 2(2^y + 1)}{2},$$

$$(2^x)_1 = 1, \qquad (2^x)_2 = 0.$$

$$2^x = 1.$$

Замінимо у другому рівнянні системи $4^x = 1$, отримаємо $y = 0, x = -1$.

Відповідь: $(-1; 0)$.

Приклад 41. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} (5{,}67)^{x^2-16} \le 1, \\ 16^x \le 2^{x^2}. \end{cases}$$

Розв'язок:

1) Розв'яжемо першу нерівність даної системи, звівши праву частину до основи числа $5{,}67$:

$$(5{,}67)^{x^2-16} \le (5{,}67)^0 \Leftrightarrow \ x^2 - 16 \le 0 \ \Leftrightarrow (x-4)(x+4) \le 0.$$

Розв’язком нерівності є відрізок [-4;4].

2) Розв’яжемо другу нерівність даної системи, звівши ліву частину до основи числа 2:

$$2^{4x} \le 2^{x^2} \ \Leftrightarrow 4x \le x^2 - 4x \ge 0 \ \Leftrightarrow x(x-4) \ge 0.$$

Розв’язком нерівності є $(-\infty; 0] \cup [4;\ +\infty)$.

3) Знайдемо множину розв’язків даної системи за допомогою перетину множин:

$$[-4; 4] \ \cap (-\infty; 0] \cup [4;\ +\infty) = [-4; 0] \ \cup \{4\}.$$

Відповідь: $[-4; 0] \ \cup \{4\}$.

1.5. Показникові рівняння та нерівності з параметром

Приклад 42. Розв’язати рівняння $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$ для всіх значень параметра a.

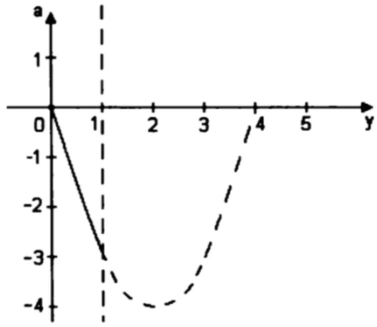
Розв’язок: введемо позначення $y = 3^{-|x-2|}$ і зауважимо, що $0 < y \le 1$,

отримаємо рівняння:

$$y^2 - 4y - a = 0,$$

$$a = y^2 - 4y.$$

У прямокутній системі координат $(y; a)$ на проміжку $(0; 4)$ побудуємо графік функції $f(y) = y^2 - 4y$.



Бачимо, що функція $f(y) = y^2 - 4y$ на даному проміжку перетинає пряму $y = m$ в одній точці, де $-3 \leq m < 0$, тому існує єдине значення y, що є меншим коренем рівняння:

$$y^2 - 4y - a = 0,$$

$$y = 2 - \sqrt{4+a}, \text{ де } -3 < a < 0.$$

$$3^{-|x-2|} = 2 - \sqrt{4+a},$$

$$|x-2| = \log_3(2 - \sqrt{4+a}),$$

$$|x-2| = -\log_3(2 - \sqrt{4+a}, \qquad -3 \leq a < 0.$$

Відповідь: при $-3 \leq a < 0 \quad x = 2 \pm \log_3(2 - \sqrt{4+a})$; при інших дійсних a рівняння коренів немає.

Приклад 43. Розв’язати нерівність $4^x - a \cdot 2^x + a \leq 0$.

Розв’язок: позначимо $2^x = t, t > 0$.

Нехай $f(t) = t^2 - at + a, D(f) = (0; +\infty)$.

1) Якщо $D = a^2 - 4a = 0$, $a = 0$ або $a = 4$, то
   $f(t) = 0$ при $t = 0$ або $t = 2$.
   $t^2 \leq 0$ (розв’язків немає, оскільки t > 0),
   $t^2 - 4t + 4 \leq 0, t = 2, 2^x = 2, x = 1 -$ корінь даної нерівності , якщо $a = 4$.
2) Якщо $D < 0$, то $a^2 - 4a < 0$, $a \in (0; 4)$, тоді
   $t^2 - at + a > 0$ при будь-якому значенні t.
   Якщо $0 < a < 4$ – коренів немає.
3) $D > 0$, нулі функції $f(t)$: $y = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4a}}{2}$

$$\begin{cases} D > 0, \\ t_0 > 0, \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 0, \\ a > 4; \end{array}\right. \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 4$$, де t_0 – абсциса вершини параболи.

При $a > 0$ отримаємо:

$$\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2} \le t \le \frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$$

$$\log_2 \frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2} \le x \le \log_2 \frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2},$$

Обидва корені тричлена $t^2 - at + a$ не можуть бути від'ємними, тому що $t_1 + t_2 = a < 0$ і $t_1 t_2 = a > 0$.

Розглянемо випадок, коли обидва корені різних знаків.

Тоді $D > 0, f(0) < 0$: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 4, \\ a < 0 \end{array}\right. \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < 0.$

Якщо $a < 0$, $t > 0$, то $0 < t < \frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$,

$$x < \log_2 \frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}.$$

Відповідь: якщо $a < 0,$ то $x < \log_2 \frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$;

якщо $0 \le a < 4$, то коренів немає;

якщо $a = 4$, то $x = 2$;

якщо $a > 4$, то $\log_2 \frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2} \le x \le \log_2 \frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$.

Приклад 44. Знайти всі значення параметра *a,* такі щоб нерівність

$4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \le 0$ мала хоча б один розв'язок.

Розв'язок: нехай $2^x = t > 0$, тоді нерівність матиме вигляд:

$$t^2 - at - a + 3 \leq 0.$$

Нерівність матиме розв'язок тоді, коли дискримінант буде невід'ємним.

$$D = a^2 + 4a - 12 = (a+6)(a-2) \geq 0 \Leftrightarrow a\epsilon(-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$$

$$t^2 - at - a + 3 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[\frac{a - \sqrt{D}}{2} = t_1; \frac{a + \sqrt{D}}{2} = t_2\right].$$

Потрібно знайти всі *t*, при яких нерівність буде правильною хоча б при одному додатному значенні *t*. Для цього достатньо, щоб більший корінь був додатнім:

$$t_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ a^2 + 4a - 12 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 2; \\ \begin{cases} a \leq 0, \\ a^2 + 4a - 12 - a^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset \end{array}\right. \Leftrightarrow a \geq 2.$$

Відповідь: [2;+ ∞).

Приклад 45. Для кожного значення параметра *a* розв'язати рівняння

$$25^x - (2a+1) \cdot 5^x + a^2 + a - 2 = 0.$$

Розв'язок: після заміни $y = 5^x$ $(y > 0)$ дане рівняння зведемо до квадратного:

$$y^2 - (2a+1) \cdot y + a^2 + a - 2 = 0$$

та

Рівносильно сукупності: $\left[\begin{array}{l} y = a - 1, \\ y = a + 2. \end{array}\right.$

Таким чином, маємо $\left[\begin{array}{l} 5^x = a - 1, \\ 5^x = a + 2. \end{array}\right.$

Перше рівняння сукупності має розв'язок при $a > 1$, його корінем є

$$x = \log_5(a - 1).$$

Друге рівняння сукупності має розв'язок при $a > -2$, його коренем є

$$x = \log_5(a + 2).$$

Відповідь: при $a \leq -2$ - коренів немає; при $-2 < a \leq 1$ - $x = \log_5(a + 2)$;

при $a > 1$ - $x = \log_5(a - 1)$ і $x = \log_5(a + 2)$.

Приклад 46. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність

$$4^{\sqrt{3x+1}} + (8a - 22) \cdot 2^{\sqrt{3x+1}} - 40a + 8 < 0 \qquad (1)$$

буде правильною для будь-якого значення x на проміжку [1; 5).

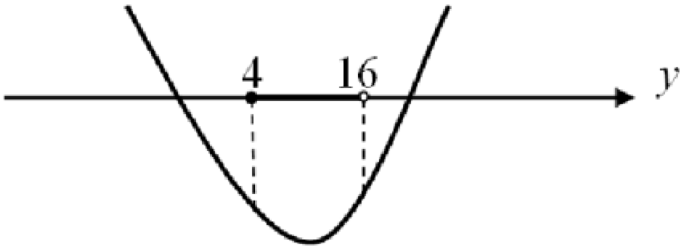
Розв'язок: нехай $y = 2^{\sqrt{3x+1}}$,тоді початкова нерівність (1) матиме вигляд:

$$y^2 + (8a - 22) \cdot y - 40a + 8 < 0 \qquad (2)$$

З умови, що $1 \leq x < 5$, отримаємо:

$$4 \leq 3x + 1 < 16,$$

$$2 \leq \sqrt{3x + 1} < 4,$$

$4 \leq$  $2^{\sqrt{3x+1}} < 16.$

Таким чином, початкова нерівність правильна, при будь-якому значенні x на проміжку [1; 5), коли для будь-якого значення y на проміжку [4; 16) виконується нерівність (2). Остання умова має місце лише в тому випадку, коли менший корінь квадратичної функції $f(y) = y^2 + (8a - 22) \cdot y - 40a + 8$ є меншим за 4, а більший корінь не менший за 16.

Шукані значення параметра знайдемо з системи:

$$\begin{cases} f(4) < 0, \\ f(16) \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 + 32a - 88 - 40a + 8 < 0, \\ 256 + 128a - 352 - 40a + 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -8, \\ a \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -8 < a \leq 1.$$

Відповідь: (-8;1].

Приклад 47. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність

$$9^{\cos x} - 2a \cdot 3^{\cos x} + a^2 - 9 \geq 0$$

є правильною для будь-якого допустимого значення x.

Розв'язок: нехай $y = 3^{\cos x}$, причому $E(y) = \left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

Нерівність (1) набуде вигляду $y^2 - 2ay + a^2 - 9 \geq 0$ (2)

Початкова нерівність виконується для будь-якого x тоді і тільки тоді, коли нерівність (2) виконується для будь-якого $y = \left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

Розв'язком квадраної нерівності (2) буде $y \in (-\infty; a - 3] \cup [a + 3; +\infty)$.

Таким чином, необхідно, щоб проміжок $\left[\frac{1}{3};3\right]$ повністю містився на множині розв'язків нерівності (2). Це можливо, якщо:

$$3 \leq a-3 \text{ або } a+3 \leq \frac{1}{3},$$

$$a \geq 6 \text{ або } a \leq -\frac{8}{3}.$$

Відповідь: $a \geq 6$ або $a \leq -\frac{8}{3}$.

Приклад 48. Знайти всі значення параметра a,при кожному з яких рівняння

$$4^x - 2^{x+1} - a \cdot 2^x = 2a - 1$$

має два різних корені.

Розв'язок: запишемо початкове рівняння у вигляді

$$4^x - 2 \cdot 2^x = a \cdot (2^x + 2) - 1 \qquad (1)$$

Нехай $2^x = t, t > 0$. Тоді рівняння матиме вигляд

$$t^2 - 2t = a \cdot (t+2) - 1 \qquad (2)$$

Рівняння (1) має два різних корені, якщо рівняння (2) матиме два різних додатніх корені. Знайдемо значення параметра a, при кожному з яких пряма $y = a(t+2) - 1$ має рівно 2 спільні точки з частиною параболи $y = t^2 - 2t$, де $t > 0$ (зафарбована область).

Розміщення прямої (1) досягається при $a = 0$. Розміщення прямої (2) визначається її проходженням через початок координат.

Тоді $$0 = a(0+2) - 1, \quad a = 0{,}5.$$

Відповідь: $0 < a < 0{,}5$.

Розділ 2

Логарифми та їх властивості

Означення 3. Логарифмом додатного числа b з основою a ($a > 0$, $a \neq 1$) називається показник степеня, до якого потрібно піднести основу a, щоб отримати b.

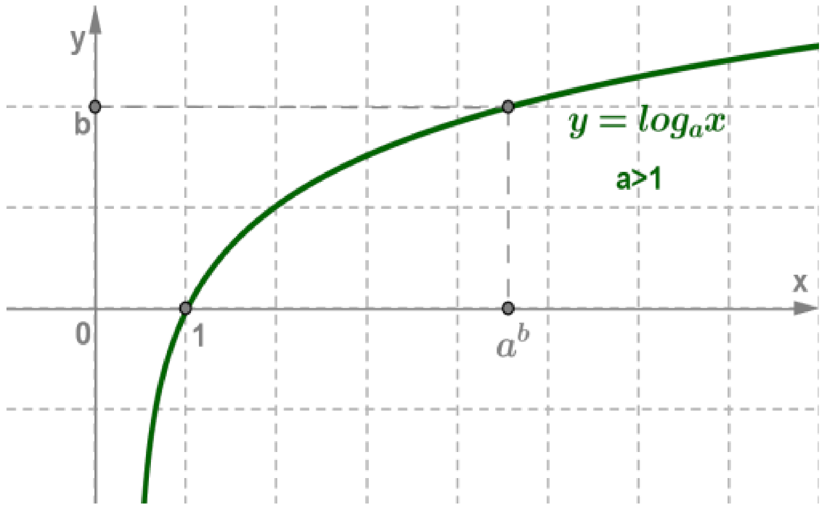
Означення 4. Десятковим логарифмом називають логарифм, основа якого дорівнює числу 10. Позначають: $\log_{10} x = lg10$.

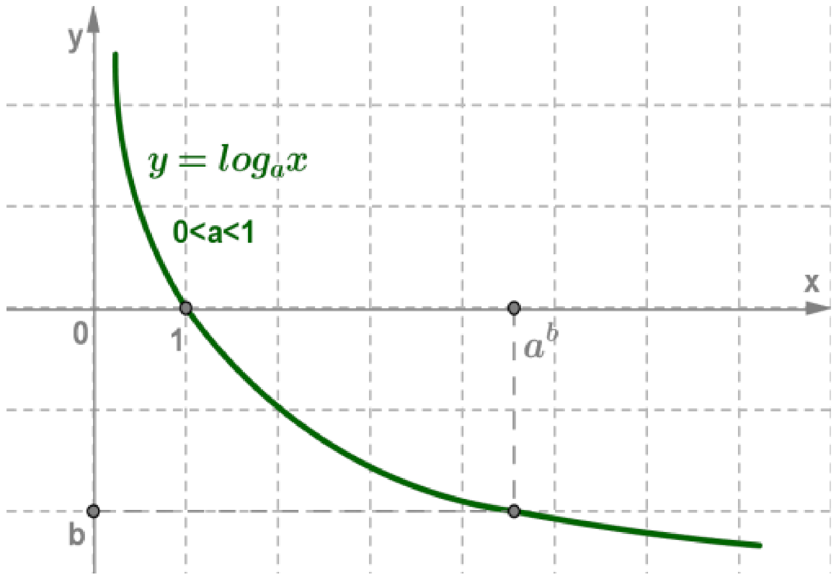
Властивості логарифмів:

1. $\log_a 1 = 0$, ($a > 0$,$a \neq 1$).
2. $\log_a a = 1$, ($a > 0$,$a \neq 1$).
3. $a^{\log_a b} = b$-основна логарифмічна тотожність.
4. $\log_a (b \cdot c) = \log_a |b| + \log_a |c|$.
5. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$.
6. $\log_a b^p = p \log_a |b|$.
7. $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$.
8. $\log_a b = \log_{a^k} b^k$, ($k \neq 1$).
9. $\log_{a^k} b^m \frac{m}{k} \log_a b$.
10. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.
11. $\log_{ab} c = \frac{\log_{|a|} c}{1+\log_{|a|} |b|}$, (ab > 0).
12. $\log_a p \cdot \log_b p + \log_b p \cdot \log_c p + \log_a p \cdot \log_c p = \frac{\log_a p \cdot \log_b p \cdot \log_c p}{\log_{abc} p}$.
13. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, $(a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1)$.
14. $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$.

2.1. Логарифмічна функція, її властивості та графік

Означення 5. Функцію, задану формулою $y = \log_a x$, де $a > 0, a \neq 1$ називають логарифмічною функцією з основою а.





Основні властивості логарифмічної функції:

1. Область визначення логарифмічної функції — множина всіх додатних чисел.

D(y) = (0;+∞);

2. Множина значень логарифмічної функції — множина R всіх дійсних чисел.

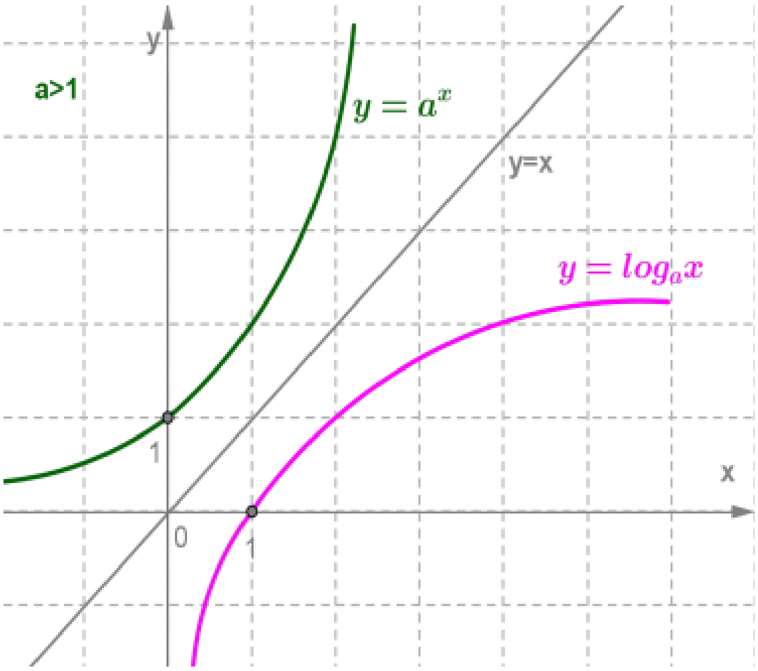
E(y) = (−∞;+∞);

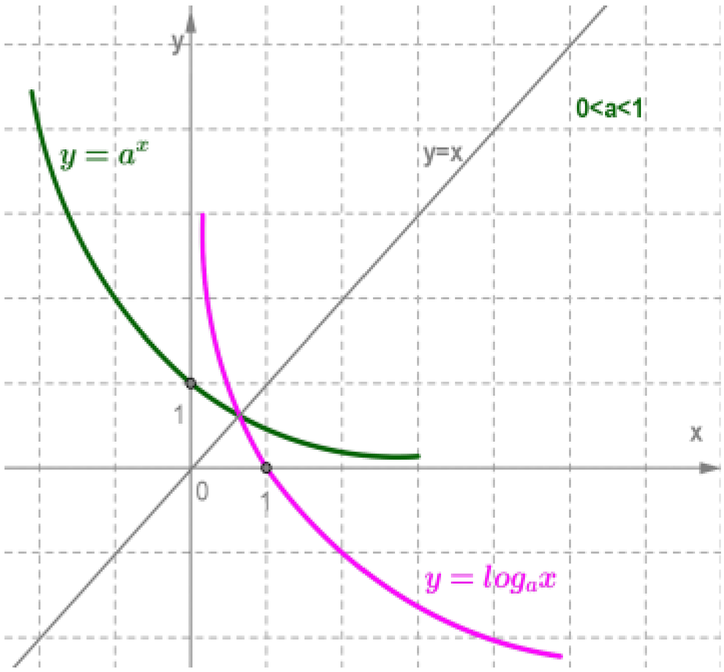
3. Логарифмічна функція на всій області визначення зростає при $a > 1$, або спадає при $0 < a < 1$.

Логарифмічна функція не є ні парною, ні непарною; не набуває ні найбільшого, ні найменшого значень; не обмежена зверху, не обмежена знизу;

Графік будь-якої логарифмічної функції $y = \log_a x$ проходить через точку (1;0).

Логарифмічна функція $y = \log_a x$ і показникова функція $y = a^x$, де $(a > 0, a \neq 1)$ взаємно обернені. Графіки цих функцій симетричні відносно прямої $y =$ x.





2.2. Логарифмічні рівняння та методика їх розв'язування

Означення 6. Рівняння вигляду

$$\log_a x = b, \text{де } a > 0, a \neq 1, x > 0, b \in \mathbb{R}$$

називають логарифмічними рівняннями. З властивостей логарифмічної функції випливає, що при будь-якому значенні b рівняння має розв'язок $x = a^b$.

Логарифмічне рівняння $\log_a f(x) = b, \text{де } a > 0, a \neq 1, f(x) > 0$ рівносильне рівнянню $f(x) = a^b$.

Розв'язуючи логарифмічні рівняння, використовують рівносильні та нерівносильні перетворення. Нагадаємо, що до рівносильних відносять перетворення, при використанні яких більшість коренів початкового рівняння не змінюються. До нерівносильних відносять перетворення, при використанні яких появляються сторонні корені чи відбувається втрата коренів.

Теорема. Нехай задано рівняння

$$f\big(g(x)\big) = f\big(h(x)\big), \qquad (1)$$

де $f(t), g(t), h(t)$ – деякі функції. Якщо функція $f(t)$ – монотонна, то рівняння (1) на області визначення рівносильне рівнянню $g(x) = h(x)$.

Розв'язування логарифмічних рівнянь методом, заснованим на означенні логарифма.

Приклад 49. Розв'язати рівняння $\log_2\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 3$.

Розв'язок: за означенням логарифма маємо:

$$1 + \frac{1}{x} = 2^3.$$

Звідси $1 + \frac{1}{x} = 8$

$$\frac{1}{x} = 7$$

$$x = \frac{1}{7}$$

Відповідь: $\frac{1}{7}$.

Приклад 50. Розв'язати рівняння $\lg(x^2 - 8) = \lg(-2x)$.

Розв'язок:

Область визначення: $\begin{cases} x^2 - 8 > 0, \\ x < 0, \end{cases} \quad x < -2\sqrt{2}.$

$$x^2 - 8 = -2x;$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Перевіримо чи належать знайдені значення x до області визначення даного рівняння.

Відповідь: $x = -4$.

Приклад 51. Розв'язати рівняння $\log_x(x+6) = 2$

Розв'язок: знайдемо область визначення даного рівняння:

$$\begin{cases} x+6>0 \\ x>0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (0;1) \cup (1;+\infty).$$

$$x^2 = x+6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 = 3,\ \ x_2 = -2\ .$$

Число $x_1 = 3$ належить області визначення даного рівняння. Підставивши його у початкове рівняння отримаємо правильну рівність $\log_3 9 = 2$, 2 = 2.

Отже, $x_1 = 3$- корінь даного рівняння.

Число , $x_2 = -2$ не належить області визначення даного рівняння, не є коренем.

Відповідь: 3.

Розв'язування логарифмічних рівнянь вигляду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, де $a > 0, a \neq 1$ рівносильне системі:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Приклад 52. Розв'язати рівняння

$$\log_3(7-2x) = \log_3(x^2 - 3x - 5).$$

Розв'язок: перейдемо до рівняння:

$$7 - 2x = x^2 - 3x - 5$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -3.$$

Перевірка: при $x_1 = 4$ отримаємо, що під знаком логарифма стоїть від'ємне число, так як $7 - 2 \cdot 4 < 0$. Таким чином, $x_1 = 4$ не є коренем рівняння.

При $x_2 = -3$ отримаємо $\log_3 13 = \log_3 13$. Таким чином $x_2 = -3$ - корінь рівняння.

Відповідь: $x_2 = -3$.

Приклад 53. Розв'язати рівняння $1 + \log_6 \frac{x+3}{x+7} = \frac{1}{2}\log_6 (x-1)^2$.

Розв'язок: запишемо дане рівняння у вигляді:

$$\log_6 6 + \log_6 \frac{x+3}{x+7} = \log_6 \sqrt{(x-1)^2},$$

$$\log_6 6 \cdot \frac{x+3}{x+7} = \log_6 |x-1|,$$

$$x_1 = -11, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 5.$$

Відповідь: -11; -1;5.

Розв'язування логарифмічних рівнянь вигляду $\log_{\mathrm{a}} \mathrm{f(x)} = \log_{\mathrm{a}} \mathrm{g(x)}$ та рівнянь, що зводяться до них.

Для того, щоб розв'язати рівняння $\log_a f(x) = \log_b g(x)$ його потрібно звести до логарифмічного рівняння з одинаковою основою.

Приклад 54. Розв'язати рівняння $\log_2(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.

Розв'язок: знайдемо область визначення даного рівняння, розв'язавши систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x - 1 > 0. \end{cases}$$

$$x > 1.$$

Використавши формулу переходу до логарифма з другою основою, отримаємо:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2(x-1)}{-1} = -\log_2(x-1).$$

Тоді початкове рівняння набуде вигляду:

$$\log_2(x^2-1) = -\log_2(x-1).$$

$$x^2 - 1 = \frac{1}{x-1}$$

Область визначення:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 1$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0, \;\; x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \;\; x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$x_1 = 0 -$ не належить області визначення, тому не є коренем.

$x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} -$ не належить області визначення, тому не є коренем.

$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} -$ належить області визначення.

Підставивши $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ в початкове рівняння, отримаємо правильну рівність.

Відповідь: $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Приклад 55. Розв’язати рівняння

$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}(4-x) - \log_4(x+6)^3.$$

Розв'язок: перейдемо до логарифма з основою $\frac{1}{4}$.

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}(4-x)=\log_{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^3}(4-x)^3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3,$$

$$\log_4(x+6)^3 = \log_{4^{-1}}(x+6)^{-3} = -\log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3.$$

Тоді початкове рівняння матиме вигляд:

$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3,$$

$$3\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 3 = 3\log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3\log_{\frac{1}{4}}(x+6),$$

$$\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6),$$

$$\log_{\frac{1}{4}}4|x+2| = \log_{\frac{1}{4}}[(4-x)\,(x+6)],$$

$$4|x+2| = (4-x)(x+6).$$

Розв'яжемо дане рівняння, звівши його до двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 4(x+2) = (4-x)(x+6) \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x+2 < 0, \\ -(x+2) = (4-x)(x+6) \end{cases}.$$

Розв'язок першої системи $x_1 = 2$, другої $x_2 = 1 - \sqrt{33}$.

Зробимо перевірку, підставивши корені системи в початкове рівняння, отримаємо що $x_1 = 2$, $x_2 = 1 - \sqrt{33}$ - корені даного рівняння.

Відповідь: $x_1 = 2$, $x_2 = 1 - \sqrt{33}$.

Розв'язок логарифмічних рівнянь вигляду $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ та рівнянь вигляду $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{g(x)} \varphi(x)$, та рівнянь, що зводяться до них.

Для того, щоб роз'язати рівняння $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ потрібно розв'язати рівняння $f(x) = g(x)$ та вибрати значення, які задовольняють умови:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1. \end{cases}$$

Для того, щоб роз'язати рівняння вигляду $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{g(x)} \varphi(x)$ потрібно розв'язати систему двох рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ \quad \varphi(x) = 1 \end{array}\right.$ та перевірити, які з коренів рівняння будуть коренями початкового рівняння.

Приклад 56. Розв'язати рівняння

$$\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x).$$

Розв'язок:

Область визначення:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1. \end{cases}$$

Знайдемо корені рівняння:

$$x^2 - 1 = 5 - x.$$

$$x_1 = 2, \;\; x_2 = -3.$$

Число $x_2 = -3$ не належить області визначення, тому не є коренем рівняння.

Число $x_1 = 2$ належить області визначення, тому є коренем рівняння.

Відповідь: $x_1 = 2$.

Приклад 57. Розв'язати рівняння $3 + 2\log_{x+1} 3 = 2\log_3(x+1)$.

Розв'язок: область визначення:

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1. \end{cases} \qquad (*)$$

В початковому рівнянні перейдемо до логарифма з основою 3, отримаємо:

$$3 + \frac{2}{\log_3(x+1)} = 2\log_3(x+1).$$

Введемо нову невідому змінну: $t = \log_3(x+1)$.

Тоді останнє рівняння має вигляд $3 + \frac{2}{t} = 2t$, що є рівносильним системі

$$\begin{cases} 2t^2 - 3t - 2 = 0, \\ \quad t \neq 0. \end{cases}$$

отримаємо два значення $t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4}$, $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

З рівняння $\log_3(x+1) = 2$ маємо, що $x = 8$.

З рівняння $\log_3(x+1) = -\frac{1}{2}$ маємо, що $x = \frac{\sqrt{3}-3}{3}$.

Обидва корені задовольняють систему (*).

Відповідь: $x = 8$, $x = \frac{\sqrt{3}-3}{3}$.

Приклад 58. Розв'язати рівняння

$$\log_x(2x+1) = \log_{2x^3+x^2}(4x^3 + 4x^2 + x).$$

Розв'язок:

Область визначення: $\begin{cases} 2x+1>0, \\ 4x^3+4x^2+x>0, \\ x>0, \\ x\neq 1, \\ 2x^3+x^2>0, \\ 2x^3+x^2\neq 1. \end{cases}$

Перейдемо в даному рівнянні до логарифма з основою 2, отримаємо

$$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x} = \frac{\log_2(4x^3+4x^2+x)}{\log_2(2x^3+x^2)} \qquad (**)$$

Оскільки $\log_2(4x^3+4x^2+x) = \log_2 x + 2\log_2(2x+1)$ *і*

$$\log_2(2x^3+x^2) = 2\log_2 x + \log_2(2x+1),$$

то рівняння (**) можна записати у вигляді:

$$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x} = \frac{1+\dfrac{2\log_2(2x+1)}{\log_2 x}}{2+\dfrac{2\log_2(2x+1)}{\log_2 x}}.$$

Введемо нову невідому змінну $t = \frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x}$, отримаємо останнє рівняння у вигляді: $t = \frac{1+2t}{2+t}$, $t_1 = 1$, $t_2 = -1$.

Отримаємо 2 рівняння:

$$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x} = 1 \text{ і } \frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x} = -1.$$

Перше рівняння на області визначення початкового рівняння не має коренів, а коренем другого рівняння є $x = \frac{1}{2}$.

Підставивши $x = \frac{1}{2}$ в початкове рівняння, отримаємо рівність,

отже, $x = \frac{1}{2}$ – розв’язок рівняння.

Відповідь: $x = \frac{1}{2}$.

Розв’язування логарифмічних рівнянь методом введення нової невідомої

Приклад 59. Розв’язати рівняння $lg^2x + lgx + 1 = \frac{7}{lg\frac{x}{10}}$.

Розв’язок: запишемо рівняння у вигляді:

$$lg^2x + lgx + 1 = \frac{7}{lgx - 1}.$$

Введемо нову невідому $t = \lg x$, отримаємо

$$t^2 + t + 1 = \frac{7}{t - 1}.$$

Нам потрібно, щоб виконувалась умова $t - 1 \neq 0$, тоді

$$(t-1)(\,t^2 + t + 1) = 7,\ t^3 = 8,\ t = 2.$$

З рівняння $\lg x = 2$ отримаємо, що $x = 100$.

Відповідь: *x=100.*

Приклад 60. Розв’язати рівняння $lg^2x^3 - \lg(0{,}1x^{10}) = 0$.

Розв’язок: використовуючи властивості логарифмів, запишемо початкове рівняння у вигляді:

$$lg^2x^3 - lgx^{10} - lg0{,}1 = 0,$$
$$9lg^2x - 10\lg|x| + 1 = 0.$$

Область визначення початкового рівняння задамо нерівністю $x > 0$, отримаємо:

$$9lg^2x - 10\lg x + 1 = 0.$$

Введемо змінну $t = lgx$, отримаємо:

$$9t^2 - 10t + 1 = 0$$

$$t_1 = 1, \;\; t_2 = \frac{1}{9}.$$

З рівняння $lgx = 1$ маємо, що $x = 10$, а з $lgx = \frac{1}{9}$ маємо, що $x = \sqrt[9]{10}$.

Обидва розв'язки перетворюють початкове рівняння в правильну рівність, отже, є його розв'язками.

Відповідь: $x = 10$, $x = \sqrt[9]{10}$.

Приклад 61. Розв'язати рівняння $\log_2(9 - 2^{x-4}) = 7 - x$.

Розв'язок: за означенням логарифма маємо:

$$9 - 2^{x-4} = 2^{7-x}$$

Введемо $t = 2^x$, отримаємо $9 - \frac{t}{16} = \frac{2^7}{t}$

$$t^2 - 2^4 \cdot 3^2 \cdot t + 2^{11} = 0$$

$$t_{1=2^4}, \quad t_{2=2^7}.$$

$$2^x = 2^4, \qquad x = 4$$

$$2^x = 2^7, \qquad x=7$$

Зробивши перевірку, отримаємо, що дані корені є розв'язками рівняння.

Відповідь: $x = 4$, $x = 7$.

Приклад 62. Довести, що рівняння $\log_2(x^2 + 8) + \log_2(\sqrt{x} + 2) = 3$ не має коренів.

Доведення: для будь-якого значення змінної x виконується нерівність:

$$x^2 + 8 \geq 8.$$

Зауважимо, що функція $f(t) = \log_2 t -$ зростаюча.

$$\log_2(x^2 + 8) \geq \log_2 8,$$

$$\log_2(x^2+8) \geq 3.$$

При будь-яких невід'ємних значеннях змінної x виконується нерівність:

$$\log_2(\sqrt{x}+2) \geq 1.$$

Ліва частина початкового рівняння не є меншою за 4, але за умовою задачі права частина рівняння дорівнює 3.

Отже, дана рівність неможлива при будь-яких допустимих значеннях x, відповідно дане рівняння розв'язків не має.

Приклад 63. Розв'язати рівняння

$$2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \log_2 \sqrt{2x} = 1.$$

Розв'язок:

$$2\log_2 \log_2 x = 1 - \log_{\frac{1}{2}} \log_2 \sqrt{2x},$$

$$\begin{cases} \log_2 (\log_2 x)^2 = \log_2 2 + \log_2 \log 2\sqrt{2x}, \\ \log_2 x > 0, \\ \log_2 \sqrt{2x} > 0\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 (\log_2 x)^2 = 2\log_2 \sqrt{2x}, \\ \log_2 x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_2 x)^2 = 2\log_2 2\sqrt{2} + \log_2 x\,, \\ \log_2 x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_2 x)^2 = 3 + \log_2 x\,, \\ \log_2 x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_2 x)^2 - 3 - \log_2 x = 0, \\ \log_2 x > 0. \end{cases}$$

Позначимо $\log_2 x = t$, отримаємо систему:

$$\begin{cases} \mathrm{t}^2 - \mathrm{t} - 3 = 0, \\ \mathrm{t} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, \\ t = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}, \end{array}\right. \\ t > 0, \end{cases} \quad t = \frac{1+\sqrt{13}}{2},$$

$$\log_2 x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, x = 2^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}.$$

Відповідь: $x = 2^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}$.

Розв'язуючи показникові та логарифмічні рівняння можна використовувати такі рівносильні переходи:

$$\begin{cases} a^p = a^q, \\ a > 0, \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = q, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases} \qquad (1)$$

$$\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v, \\ u > 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Рівносильність випливає з строгої монотонності показникової та логарифмічної функції.

Зауважимо, що замість системи (2) можна розв'язувати еквівалентну їй систему:

$$\begin{cases} u = v, \\ v > 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Вибір нерівності залежить від того, яка з них є більшою за нуль.

Рівносильний перехід, що виражає стандартне означення логарифма:

$$\begin{cases} a^p = b, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow p = \log_a b. \qquad (3)$$

Приклад 64. Розв’язати рівняння $\log_5(x-2)=1$.

Розв’язок:

$$\log_5(x-2)=1 \Leftrightarrow x-2=5 \Leftrightarrow x=7.$$

Відповідь: {7}.

Приклад 65. Розв’язати рівняння $\log_7\log_3\log_2 x=0$.

Розв’язок:

$$\log_7\log_3\log_2 x=0 \Leftrightarrow \log_3\log_2 x=1 \Leftrightarrow \log_2 x=3 \Leftrightarrow x=8.$$

Відповідь: {8}.

Приклад 66. Розв’язати рівняння $\log_x(x^2-4x+4)=1$.

Розв’язок:

$$\log_x(x^2-4x+4)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4=x, \\ x>0, \\ x\neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=1, \end{array}\right. \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Відповідь: {4}.

Прикла 67. Розв’язати рівняння

$$\log_2(x^2-3x+1)=\log_2(2x-3).$$

Розв’язок:

$$\log_2(x^2-3x+1)=\log_2(2x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} \{x^2-3x+1=2x-3, \\ 2x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Відповідь: {4}.

Приклад 68. Розв'язати рівняння

$$\log_{2x}(x^2 - 2x) = \log_{2x}(2x - 3).$$

Розв'язок:

1-й спосіб) Логарифмічна функція визначена на множині додатних чисел, тому необхідно, щоб виконувались умови:

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

Основа даної логарифмічної функції $- 2x > 0, 2x \neq 1.$

Логарифмічна функція є строго монотонною, тому:

$$x^2 - 2x = 2x - 3.$$

Врахуємо, що в даному рівнянні $2x - 3 > 0$, тому $x^2 - 2x > 0.$

Перейдемо до рівносильного переходу (2):

$$\log_{2x}(x^2 - 2x) = \log_{2x}(2x - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 2x - 3, \\ 2x - 3 > 0, \\ 2x > 0, \\ 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Відповідь: {3}.

2-й спосіб)

$$\log_{2x}(x^2-2x)=\log_{2x}(2x-3) \Leftrightarrow x^2-2x=2x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Перевірка: $x=3$ — корінь даного рівняння тому, що виконується рівність

$$\log_6 3=\log_6 3.$$

$x=1$ – не є коренем даного рівняння, тому що при перевірці отримаємо:

$2x-3=-1$, а логарифм від’ємного числа не можна визначити.

Відповідь: $\{3\}$.

Приклад 69. Розв’язати рівняння $\lg x+\lg(x+3)=1$.

Розв’язок: $\lg x+\lg(x+3)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg\big((x+3)\cdot x\big)=1, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+3)=10, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2+3x-10=0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Пояснимо рівносильність першого переходу. Ми використали формулу:

$$\log_a u+\log_a v=\log_a(uv),$$

де $u>0, v>0$ та $uv>0$.

Відповідний рівносильний перехід:

$$\log_a u+\log_a v=c \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(uv)=c, \\ u>0. \end{cases} \qquad (4)$$

Приклад 70.Розв’язати рівняння

$$\log_{125}(\sin 2x-\sin x)+\frac{1}{3}=\log_5(-2\sin x).$$

Розв’язок: запишемо ліву частину рівняння за допомогою логарифма з основою 5:

$$\frac{1}{3}\log_5(\sin 2x - \sin x) + \frac{1}{3} = \log_5(-2\sin x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5(\sin 2x - \sin x) + 1 = 3\log_5(-2\sin x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5(\sin 2x - \sin x) + \log_5 5 = \log_5(-2\sin x)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5(5(\sin 2x - \sin x)) = \log_5(-8sin^3 x\ ).$$

Перейдемо до системи:

$$\begin{cases} 5(\sin 2x - \sin x) = -8sin^3 x, \\ \sin x < 0\,. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(2\sin x\cos x - \sin x) = -8sin^3 x, \\ \sin x < 0. \end{cases}$$

$$5(2\cos x - 1) = -8sin^2 x \Leftrightarrow 10\cos x - 5 + 8(1 - cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8cos^2 x - 10\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{4}.$$

Другий корінь $\frac{3}{2}$ не є коренем рівняння, тому що $\frac{3}{2} > 1.$

Нерівність $\sin x < 0$ задовольняють тільки такі корені рівняння $\cos x = -\frac{1}{4}$

$$x = -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n, n\epsilon Z.$$

Оскільки $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$, то $\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + (2n-1)|\ n\ \epsilon\ Z.$

Відповідь: $\{\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + (2n-1)|\ n\ \epsilon\ Z\}$.

Приклад 71. Розв’язати рівняння $3^{x+1} = 5^{x-2}$.

Розв’язок: використаємо рівносильний перехід (2):

логарифмічна функція є строго монотонною, тому кожне своє значення вона приймає рівно один раз.

$$3^{x+1} = 5^{x-2} \Leftrightarrow \lg 3^{x+1} = \lg 5^{x-2} \Leftrightarrow (x+1)\lg 3 = (x-2)\lg 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(\lg 3 - \lg 5) = -\lg 3 - 2\lg 5 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 3 + 2\lg 5}{\lg 5 - \lg 3}.$$

Відповідь: $\left\{\frac{\lg 3+2\lg 5}{\lg 5-\lg 3}\right\}$, або $\left\{\frac{\lg 75}{\lg\frac{5}{3}}\right\}$, або $\left\{\frac{1+2\log_3 5}{\log_3 5-1}\right\}$.

Зауваження. Можна логарифмувати дане рівняння з будь-якою іншою основою. Компактніше можна було б записати логарифм з основою 3 або з основою 5, тому що дані числа є в умові завдання. Наприклад, виберемо основу числа 3:

$$3^{x+1} = 5^{x-2} \Leftrightarrow x + 1 = (x-2)\log_3 5 \Leftrightarrow x(\log_3 5 - 1) = 1 + 2\log_3 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + 2\log_3 5}{\log_3 5 - 1}.$$

2.3. Логарифмічні нерівності

Означення. Логарифмічними нерівностями називають нерівності, в яких невідоме знаходиться тільки під знаком логарифма або в основі логарифма (або під знаком та в основі логарифма).

Наприклад: нерівності $\log_2(x-4) \geq 4, \log_{x+2} 24 < 0, lg^2x + lgx + 5 > 0, \log_{x^2+1}(x+4) > \log_{x^2+1} x$ є логарифмічними.

Нерівності $xlgx \geq 1, \sqrt{x+1} + \log_2(x+1) \leq 0, 2^{\log_7 x} > 4x + 3$ не є логарифмічними, будемо їх називати нерівностями, що містять невідоме під знаком логарифмічної функції.

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей використовують методи розв'язування алгебраїчних нерівностей, логарифмічних рівнянь, а також властивості логарифмічної функції.

Розв'язуючи логарифмічні нерівності необхідно пам'ятати, що

1. **Функція** $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$
   - є спадною, якщо$0 < a < 1$.

- є зростаючою, якщо $a > 1$.

Тому нерівність виду $\log_a f(x) < \log_a g(x)$

1) при $0 < a < 1$ ріносильна системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

2) при $a > 1$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Розглянемо приклади розв'язування логарифмічних нерівностей:

Приклад 72. Розв'язати нерівність $\log_3 x \cdot \log_{0,3} 3 \leq \log_3 7$.

Розв'язок: поділимо обидві частини рівняння на число $\log_{0,3} 3$, враховуючи, що воно від'ємне. Отримаємо:

$$\log_3 x > \frac{\log_3 7}{\log_{0,3} 3},$$

$$\log_3 x > \log_3 7, \quad x > 7.$$

Відповідь: $(7; \infty)$.

Приклад 73. Розв'язати нерівність $\log_2 x \cdot \log_5 x \leq \log_2 5$.

Розв'язок: запишемо нерівність у вигляді:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 5} \cdot \log_5 x \geq 1.$$

$$\log_5 x \cdot \log_5 x \geq 1,$$

$$log_5^2 x - 1 \geq 0,$$

$$(\log_5 x - 1)(\log_5 x + 1) \geq 0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_5 x \geq 1, \\ \log_5 x \leq -1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{c}x \geq 5, \\ 0 < x \leq \frac{1}{5}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup [5; +\infty)$.

Приклад 74. Розв'язати нерівність $\log_{0,7}(2x-1) > \log_{0,7}(6-x)$.

Розв'язок: для того, щоб розв'язати дану нерівність, зауважимо, що функція $y = \log_{0,7} t$ є спадною, тому що основа 0,7 < 1.

Отже, більшому значенню функції буде відповідати менше значення аргумента.

Враховуючи область визначення логарифмічної фунції, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 2x-3 < 6-x, \\ 2x-3 > 0, \\ 6-x > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3, \\ x > 1{,}5 \\ x > 6 \end{cases}$$

Відповідь: (1,5; 3).

Приклад 75. Розв'язати нерівність

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_2(x^2-3) > 0.$$

Розв'язок: запишемо нерівність у вигляді:

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_2(x^2-3) > \log_{\frac{1}{3}} 1\,.$$

Оскільки $\frac{1}{3} < 1$, то нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} \log_2(x^2-3) < 1, \\ \log_2(x^2-3) > 0, \\ x^2-3 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2(x^2-3) < \log_2 2\,, \\ \log_2(x^2-3) > 0, \\ x^2-3 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-3 < 2, \\ \log_2(x^2-3) > \log_2 1\,, \\ x^2-3 > 0, \end{cases} \begin{cases} x^2-3 < 2, \\ x^2-3 > 1, \\ x^2-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})<0,\\ (x-2)(x+2)>0,\\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0.\end{cases}$$

Методом інтервалів випишемо спільні розв'язки системи нерівностей:

$$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0, x_1=\sqrt{5}, x_2=-\sqrt{5}$$

$$(x-2)(x+2)=0, x_3=2, x_4=-2,$$

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0, x_5=\sqrt{3}, x_6=-\sqrt{3}\ .$$

Відповідь: $x\,\epsilon(-\sqrt{5};2)\cup(2;\sqrt{5}).$

Приклад 76. Розв'язати нерівність

$$\log_{x-4}(2x-9)\log_{2x-9}\pi \le \log_{x-4}(x-3{,}8)\log_{x-3{,}8}3\ .$$

Розв'язок: запишемо всі логарифмічні вирази з основою $x-4$ та отримаємо:

$$\log_{x-4}(2x-9)\frac{\log_{x-4}\pi}{\log_{x-4}(2x-9)} \le \log_{x-4}(x-3{,}8)\frac{\log_{x-4}4}{\log_{x-4}(x-3{,}8)}$$

Скоротивши дану нерівність, отримаємо $\log_{x-4}\pi \le \log_{x-4}3$.

Оскільки $\pi>3$, бачимо, що дана логарифмічна функція є спадною, тому нерівність $\log_{x-4}\pi \le \log_{x-4}3$ рівносильна

$$0<x-4<1$$

$$4<x<5.$$

Область визначення: $\begin{cases}2x-9>0,\\ 2x-9\neq 1,\\ x-3{,}8>0,\\ x-3{,}8\neq 1,\end{cases}$ $\begin{cases}x>4{,}5,\\ x\neq 5,\\ x>3{,}8,\\ x\neq 4{,}8\end{cases}$ $\begin{cases}x>4{,}5,\\ x\neq 4{,}8.\end{cases}$

Відповідь: (4,5; 4,8) ∪ (4,8; 5).

Приклад 77. Розв’язати нерівність $log_2^2 x + |\log_2 x + 2| \leq 4$.

Розв‘язок: зробимо заміну $\log_2 x = t$ та підставимо у початкову нерівність, отримаємо:

$$t^2 + |t + 2| \leq 4.$$

$$t^2 - 4 + |t + 2| \leq 0,$$

$$(t - 2)(t + 2) + |t + 2| \leq 0.$$

Розкриємо модуль:

А)

$$\begin{cases} t + 2 \geq 0, \\ (t - 2)(t + 2) + (t + 2) \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} t + 2 \geq 0, \\ (t + 2)(t - 2 + 1) \leq 0; \end{cases} \begin{cases} t \geq -2, \\ (t + 2)(t - 1) \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq -2, \\ -2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Повернувшись до заміни, отримаємо $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$.

Б)

$$\begin{cases} t + 2 < 0, \\ (t - 2)(t + 2) - (t + 2) \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} t < -2, \\ (t + 2)(t - 2 - 1) \leq 0; \end{cases} \begin{cases} t < -2, \\ (t + 2)(t - 3) \leq 0; \end{cases}$$

$\begin{cases} t < -2, \\ -2 \leq t \leq 3 \end{cases}$ −дана система розв’язків немає.

Відповідь: $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$.

Приклад 78. Розв’язати нерівність $\log_{x-3}(x^2 - 4x + 3) < 0$.

Розв’язок: оскільки основа логарифма містить основу x, розглянемо 2 випадки:

1) $x - 3 > 1$.

$$\begin{cases} x-3>1, \\ x^2-4x+3>0, \\ x^2-4x+3<1. \end{cases} \begin{cases} x>4, \\ 3<x<2+\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2}<x<1 \end{cases} \text{– розв'язків немає.}$$

2) $0<x-3<1.$

$$\begin{cases} 0<x-3<1, \\ x^2-4x+3>0, \\ x^2-4x+3>1, \end{cases} \begin{cases} 3<x<4, \\ x<2-\sqrt{2}, \\ x>2+\sqrt{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $(2+\sqrt{2};4)$.

2.4. Системи логарифмічних рівнянь та нерівностей

Приклад 79. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_7 x-\log_7 4+\log_7 y-\log_7 3=0, \\ \log_2(x+y)=5-\log_2(x-y)\,. \end{cases}$$

Розв'язок: використовуючи властивості логарифмів, перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} \log_7 \dfrac{xy}{12}=0, \\ \log_2[(x+y)(x-y)]=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=12, \\ x^2-y^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=12, \\ \dfrac{x^2-y^2}{xy}=\dfrac{32}{12} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=12, \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{8}{3}\,. \end{cases}$$

Нехай $t=\frac{x}{y}$, тоді друге рівняння матиме вигляд:

$$t-\frac{1}{t}=\frac{8}{3}\,,$$

$$t^2-\frac{8}{3}t-1=0,$$

$$t_1 = 3, \quad t_2 = -\frac{1}{3}.$$

Оскільки, $x > 0$ і $y > 0$, то $\frac{x}{y} = 3$.

$$\begin{cases} xy = 12, \\ \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ 3y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $(6; 2)$.

Приклад 80. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + 2\lg 2, \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) = \lg 2. \end{cases}$$

Розв'язок:

$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg 10 + \lg 4, \\ \lg\frac{x+y}{x-y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg 40, \\ \frac{x+y}{x-y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 40, \\ \frac{x+y}{x-y} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 40, \\ 3y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 = 40, \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2, \\ x = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2, \\ x = -6. \end{cases} \end{array} \right.$$

$(\mathbf{-6}; \mathbf{-2})$ – не належить області визначення системи рівнянь.

Відповідь: $(6; 2)$.

Приклад 81. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_2(y - x) = \log_8(3y - 5x), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Розв’язок: область визначення даної системи:

$$\begin{cases} y - x > 0, \\ 3y - 5x > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_2(y-x)=\log_8(3y-5x),\\ x^2+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y-x)^3=3y-5x,\\ y=5-x^2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y(y^2-3xy+3x^2-3)=x(x^2-5),\\ y=5-x^2.\end{cases}$$

Нехай $y \neq 0$, тоді перше рівняння останньої системи можна поділити на друге:

$$\begin{cases}3x^2-2xy+y^2=5,\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$$

Віднімемо друге рівняння від першого та виразимо y через x.

$$y=\frac{x^2+1}{x},$$

$$2x^4-3x^2+1=0.$$

$$x_1=1,\quad x_2=1,\quad x_3=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad x_4=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

$$y_1=2,\quad y_2=-2,\quad y_3=\frac{3}{\sqrt{2}},\quad y_4=-\frac{3}{\sqrt{2}}\ .$$

Нехай $y=0,$ тоді $x^2=5,\ x_5=\sqrt{5},\quad x_6=-\sqrt{5}.$

Підставимо знайдені пари чисел у початкову систему:

$(1;2),(1;-2),\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{3}{\sqrt{2}}\right),(\sqrt{5};0),(-\sqrt{5};0)$ та отримаємо розв'язки: $(1;2),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right),\ \ (-\sqrt{5};0).$

Відповідь: $(1;2),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right),\ \ (-\sqrt{5};0).$

Приклад 82. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (x-y)^{\lg(x+1{,}5)} = 0{,}2\,, \\ \sqrt[\lg(x-y)]{2x+3} = 0{,}1. \end{cases}$$

Розв’язок: прологарифмуємо обидва рівняння системи

$$\begin{cases} \lg(x+1{,}5)\lg(x-y) = \lg 2 - 1, \\ \dfrac{1}{\lg(x-y)}\lg(2x+3) = -1. \end{cases}$$

Введемо позначення $u = \lg(x+1{,}5)\,, v = \lg(x-y)$, тоді

$$\lg(2x+3) = \lg[2(x+1{,}5)] = \lg 2 + \lg(x+1{,}5) = \lg 2 + u;$$

$$\begin{cases} uv = \lg 2 - 1, \\ \dfrac{\lg 2 + u}{v} = -1. \end{cases}$$

$$v = -\lg 2 - u,$$

$$u^2 + \lg 2u + \lg 2 - 1 = 0,$$

$$u_{1,2} = -\frac{1}{2}\lg 2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}lg^2 2 - \lg 2 + 1} = -\frac{1}{2}\lg 2 \pm \frac{1}{2}(2 - \lg 2),$$

$$u_1 = -\lg 2 + 1 = \lg 5, \quad u_2 = -1.$$

$$v_1 = -1, \;\; v_2 = \lg 2 + 1 = \lg 5.$$

Отримаємо 2 системи:

$$\begin{cases} \lg(x+1{,}5) = \lg 5\,, \\ \lg(x-y) = -1 \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} \lg(x+1{,}5) = -1, \\ \lg(x-y) = \lg 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3{,}5 \\ y_1 = 3{,}4 \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} x_2 = -1{,}4 \\ y_2 = -6{,}4. \end{cases}$$

Зробивши перевірку, ми переконались, що задані значення x та y є розв’язками системи.

Відповідь: $(3{,}5; 3{,}4), (-1{,}4;\ -6{,}4)$.

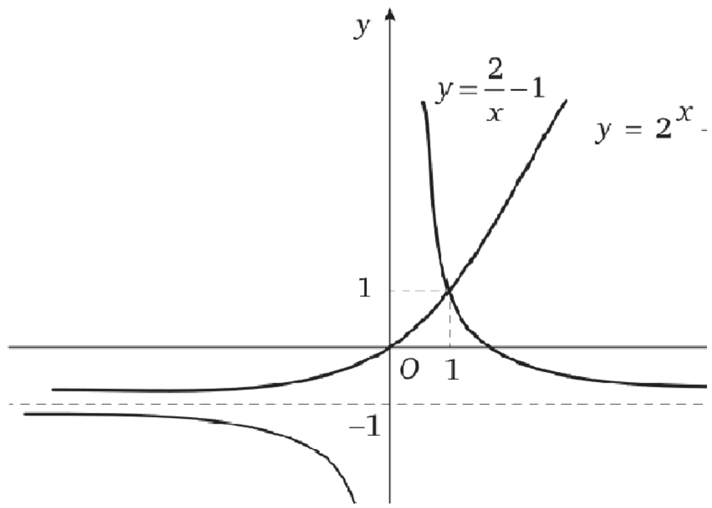
Приклад 83. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0, \\ x - \log_2(y+1) = 0. \end{cases}$$

Розв’язок:

$$\begin{cases} xy = 2 - x, \\ \log_2(y+1) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} - 1, \\ y = 2^x - 1. \end{cases}$$

Побудуємо графік функції $y = \frac{2}{x} - 1 \quad i \quad y = 2^x - 1$:



На графіку знаходимо точку $x \approx 1, y \approx 1$.

Зробимо перевірку та переконаємось, що дані значення є розв’язками системи.

Відповідь: (1; 1).

Приклад 84. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases}1+\log_3(x+y)\log_2 3 = 2\log_4 7 - \log_2 x\,,\\ \log_2(xy+1) = 2\log_4 y + \log_{\frac{1}{8}}(x-2y)^3.\end{cases}$$

Розв'язок: перетворимо перше рівняння системи:

$$1+\log_3(x+y)\log_2 3 = 2\log_4 7 - \log_2 x \Leftrightarrow \log_2 2 + \log_2 3^{\log_3(x+y)} =$$
$$= \log_2\frac{7}{x} \Leftrightarrow \log_2 2 + \log_2(x+y) = \log_2\frac{7}{x} \Leftrightarrow \log_2 2(x+y) =$$
$$= \log_2\frac{7}{x}\ .$$

Отримаємо систему:

$$\begin{cases}2(x+y) = \dfrac{7}{x}\ ,\\ x>0,\\ x+y>0.\end{cases}$$

Перетворимо друге рівняння системи:

$$\log_2(xy+1) = 2\log_4 y + \log_{\frac{1}{8}}(x-2y)^3 \Leftrightarrow \log_2(xy+1) =$$
$$= \log_2 y - 3\cdot\frac{1}{3}\log_2(x-2y) \Leftrightarrow \log_2(xy+1) = \log_2\frac{y}{x-2y}\,.$$

Отримаємо систему:

$$\begin{cases}xy+1 = \dfrac{y}{x-2y}\ ,\\ y>0,\\ x-2y>0,\\ xy+1>0.\end{cases}$$

Об'єднаємо отримані системи в одну:

$$\begin{cases} 2(x+y) = \frac{7}{x} \ , \\ xy + 1 = \frac{y}{x-2y} \ , \\ y > 0, \\ x > 0, \\ x - 2y > 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Виразимо з першого рівняння y:

$$y = \frac{7}{2x} - x$$

та підставимо його у друге рівняння:

$$\frac{7}{2} - x^2 + 1 = \frac{\frac{7}{2x} - x}{x - 2\left(\frac{7}{2x} - x\right)} \ ,$$

$$\frac{7}{2} - x^2 + 1 = \frac{\frac{7-2x^2}{2x}}{\frac{2x^2 - 14 + 4x^2}{2x}} \ ,$$

$$\frac{7}{2} - x^2 + 1 = \frac{7 - 2x^2}{6x^2 - 14}.$$

Позначимо $t = x^2$ та отримаємо:

$$\frac{9}{2} - t = \frac{7 - 2t}{6t - 14} \ ,$$

$$\left(\frac{9}{2} - t\right)(6t - 14) = 7 - 2t,$$

$$27t - 63 - 6t^2 + 14t - 7 + 2t = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{43 \pm \sqrt{1849 - 1680}}{12} = \frac{43 \pm 13}{12},$$

$$t_1 = 5, \quad t_2 = \frac{5}{2} \ .$$

Повертаємося до заміни:

$$x^2 = 5, \ \ x = \pm\sqrt{5},$$

$$x^2 = \frac{5}{2} \ \ , \ \ x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Значення $x = -\sqrt{5}$ та $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ –не задовольняють систему (*).

Знайдемо значення y при $x = \sqrt{5}$:

$y = \frac{7}{2\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \frac{7-10}{2\sqrt{5}} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} < 0$ - суперечить системі (*);

при $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$:

$$y = \frac{7}{2\sqrt{\frac{5}{2}}} - \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{7 - 2 \cdot \frac{5}{2}}{2\sqrt{\frac{5}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{5}} - \text{ задовольняю систему } (*).$$

Відповідь: $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

Приклад 85. Розв'язати систему $\begin{cases} \log_2(3x^2 - 14x + 16) \le 4, \\ \lg(2x^2 - 5x + 3) \le \lg(x^2 - 3) \, . \end{cases}$

Розв'язок: розв'яжемо першу нерівність даної системи, що рівносильна системі:

$$\begin{cases} 3x^2 - 14x + 16 \le 16, \\ 3x^2 - 14x + 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 14x \le 0, \\ 3x^2 - 14x + 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\left(x - \dfrac{14}{3}\right) \le 0, \\ 3x^2 - 14x + 16 > 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{14}{3}\ , \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \dfrac{8}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{14}{3}\,, \\ x \in (-\infty; 2) \cup \left(\dfrac{8}{3}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 2) \cup \left(\frac{8}{3}; \frac{14}{3}\right].$$

Розв'яжемо другу нерівність даної системи, що рівносильна системі:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \le x^2 - 3, \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \le 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 1 \\ 1{,}5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [\,2;\ 3\,], \\ x \in (-\infty; 1) \cup (1{,}5; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [\,2;\ 3\,].$$

Знайдемо множину розв'язків даної системи, як перетин двох множин:

$$\left([0; 2) \cup \left(\frac{8}{3}; \frac{14}{3}\right]\right) \cap [\,2;\ 3\,] = \left(\frac{8}{3}; 3\right].$$

Відповідь: $\left(\frac{8}{3}; 3\right]$.

Приклад 86. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \lg(x - 2) + \lg(27 - x) < 2, \\ \lg(x - 1) + \lg(x - 2) < \lg(x + 2)\,. \end{cases}$$

Розв'язок: знайдемо область визначення даної системи:

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ 27 - x > 0, \\ x - 1 > 0, \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 27.$$

Запишемо початкову систему у вигляді:

$$\begin{cases} \lg(x - 2) + \lg(27 - x) < \lg 100\,, \\ \lg(x - 1) + \lg(x - 2) < \lg(x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27x - 54 - x^2 < 100, \\ x^2 - x - 2x + 2 < x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 29x + 154 > 0, \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ x(x-4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ 0 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

Врахуємо область визначення нерівності: $\begin{cases} 2 < x < 27, \\ 0 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 4.$

Відповідь: $(2; 4)$.

Приклад 87. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \log_5 (x+3)(x+5) + \log_{0,2}(x+3) < 1{,}5 \log_{\sqrt{5}} 2, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \le \log_2 (2-x). \end{cases}$$

Розв'язок: знайдемо область визначення нерівностей:

$$\begin{cases} x+3 > 0, \\ x+5 > 0, \\ x+1 > 0, \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x > -5, \\ x > -1, \\ x < 2. \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

Перепишимо початкову систему у вигляді:

$$\begin{cases} \log_5 (x+3)(x+5) + \dfrac{\log_5 (x+3)}{\log_5 \frac{1}{5}} < \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\log_5 2}{\log_5 \sqrt{5}}, \\ \dfrac{\log_2 (x+1)}{\log_2 \frac{1}{2}} \le \log_2 (2-x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 (x+3)(x+5) - \log_5 (x+3) < 3 \log_5 2, \\ -\log_2 (x+1) \le \log_2 (2-x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 \dfrac{(x+3)(x+5)}{x+3} < \log_5 2^3, \\ \log_2 (x-2)(x+1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 < 8, \\ 2x - x^2 + 2 - x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Врахуємо область визначення нерівності:

$$\begin{cases} -1 < x < 2, \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Відповідь: $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

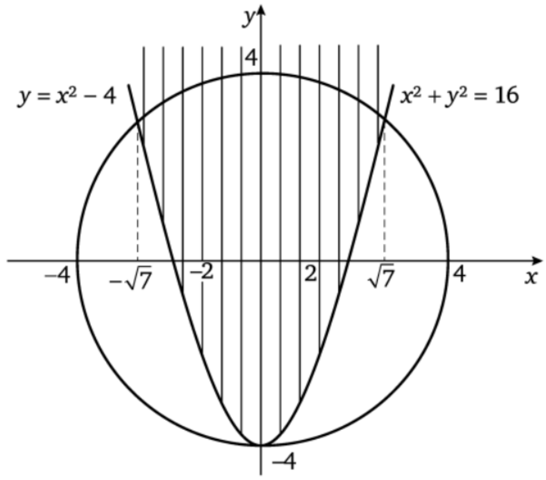
Приклад 88.Розв’язати систему нерівностей

$$\begin{cases} \log_4(x^2 + y^2) \le 2{,}5 - \log_4 2\,, \\ 0.5^{2+y} \le 4 \cdot 0{,}5^{x^2}. \end{cases}$$

Розв’язок: дана система нерівностей визначена при $x^2 + y^2 \neq 0$ або $x \neq 0, y \neq 0$ у всіх точках координатної площини, крім початку координат.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le \frac{4^{2,5}}{2}\,, \\ 0{,}5^{2+y} \le 0{,}5^{x^2-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \le 16, \\ y \ge x^2 - 4. \end{cases} \qquad (**)$$

Графіки функцій $x^2 + y^2 = 16$ та $y = x^2 - 4$ перетинаються в точках $(-\sqrt{7}; 3)$ i $(\sqrt{7}; 3)$. Побудуємо графіки даних функцій:



Бачимо на графіку, що розв'язком системи (**) буде система:

$$\begin{cases} -\sqrt{7} \le x \le \sqrt{7}, \\ x^2 - 4 \le y \le \sqrt{16 - x^2}, \\ x \ne 0, \ \ y \ne 0. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} -\sqrt{7} \le x \le \sqrt{7}, \\ x^2 - 4 \le y \le \sqrt{16 - x^2}, \\ x \ne 0, \ \ y \ne 0. \end{cases}$

2.5. Логарифмічні рівняння та нерівності з параметром

Приклад 89. При яких значеннях параметра a рівняння $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ має два кореня?

Розв'язок: запишемо рівняння рівносильне даному:

$$9^x - 3^x + 9a^3 = 0.$$

Нехай $3^x = t, t > 0$, тоді $t^2 - t + 9a^3 = 0$.

За теоремою Вієта: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 1, \\ t_1 t_2 = 9a^3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1 - 36a^3 > 0, \\ 9a^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}.$$

Відповідь: $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$.

Приклад 90. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння

$$\log_7(21a + 59 - a^2 + \sin 2x + \sqrt{sin^{\,2}\, 2x}) = \log_7(3a + 5) + 1$$

має рівно три кореня на проміжку $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{13\pi}{12}\right)$.

Розв'язок:

$$\log_7(21a + 59 - a^2 + \sin 2x + \sqrt{sin^{\,2}\, 2x}) = \log_7(3a + 5) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_7\left(21a + 59 - a^2 + \sin 2x + \sqrt{sin^{\,2}\, 2x}\right) = \log_7(21a + 35) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21a + 35 > 0, \\ 21a + 59 - a^2 + \sin 2x + \sqrt{sin^{\,2}\, 2x} = 21a + 35 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > -\dfrac{5}{3}\ , \\ \sin 2x + |\sin 2x| = a^2 - 24\,. \end{cases}$$

Визначимо за допомогою графіку, при яких значеннях параметра a пряма

$y = a^2 - 24\ \left(a > -\frac{5}{3}\right)$ має рівно три спільних точки з графіком функції

$y = \sin 2x + |\sin 2x\,|$ на проміжку $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{13\pi}{12}\right)$.

Для побудови графіка функції $y = \sin 2x + |\sin 2x\,|$ розкриємо модуль:

$$y = \begin{cases} 2\sin 2x, \text{якщо} \sin 2x \geq 0, \\ \ 0, \qquad \text{якщо} \sin 2x < 0. \end{cases}$$

Побудуємо графік даної фунції в системі координат $(2x; y)$, тоді

$$x\,\epsilon\, \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{13\pi}{6}\right).$$

Бачимо, що шукані значення параметра задовольняють систему

$$\begin{cases} a > -\frac{5}{3}\ , \\ 1 \le a^2 - 24 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{5}{3}\ , \\ a \in \left(-\sqrt{26}; -5\right] \cup [5; \sqrt{26}) \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[5;\ \sqrt{26}\right).$$

Відповідь: $a \in \left[5;\ \sqrt{26}\right)$.

Приклад 91. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{x^2}{a}} a + \log_{a^2} x = 2$.

Розв'язок: область визначення рівняння:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq \sqrt{a}. \end{cases}$$

Рівняння матиме розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконуватимуться умови:

$$a > 0, a \neq 1.$$

$$\frac{1}{\log_a \frac{x^2}{a}} + \log_a x = 2,$$

$$\frac{1}{2\log_a x - 1} + \log_a x = 2.$$

Нехай $y = \log_a x$:

$$\frac{1}{2y - 1} + y = 2,$$

$$1 + 2y^2 - y - 4y + 2 = 0,$$

$$2y^2 - 5y + 3 = 0$$

$$y = 1 \quad \text{або} \quad y = \frac{3}{2}.$$

$$\log_a x = 1,\ x = a.$$

$$\log_a x = \frac{3}{2}, \qquad x = a\sqrt{a}.$$

Відповідь: якщо $a \le 0, a = 1$ - рівняння коренів немає;

якщо $a > 0,\ a \ne 1,$ то $x = a,\ x = a\sqrt{a}.$

Приклад 92. Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння

$$\log_8(x^2 - 1) = \log_8(2ax - a^2).$$

Розв'язок: Дане рівняння рівносильне наступній системі:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 2ax - a^2, \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0, \\ x\epsilon(-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = a - 1, \\ x = a + 1, \end{array}\right. \\ x\epsilon(-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

$x = a - 1$ задовольняє умову $x\,\epsilon(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$,

якщо $a\,\epsilon\,(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$;

$x = a + 1$ задовольняє умову $x\,\epsilon(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$,

якщо $a\,\epsilon\,(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

Бачимо, що при $a < -2\ і\ a > 2$ рівняння має два корені:

$x = a - 1$ і $x = a + 1$; при $-2 \le a < 0$ рівняння має один корінь $x = a - 1$;

при $a = 0$ коренів немає; при $0 < a \le 2$ рівняння має один корінь $x = a + 1$.

Приклад 93. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь $\{\log_3(x + |x|) = \log_3 y$ має два різних корені.

Розв'язок: з умови існування логарифма випливає, що

$x + |x| > 0$, що виконується тільки при $x > 0$.

Отримаємо: $\begin{cases} x > 0, \\ \log_3 2x = \log_3 y, \\ x^2 - ay + 6y - 8 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ 2x = y, \\ x^2 - 2ax + 6y - 8 = 0. \end{cases}$

Початкова система має два корені, якщо квадратне рівняння

$x^2 - 2ax + 6y - 8 = 0$ має два різних додатних корені.

Нехай x_1 i x_2 – різні корені даного рівняння, причому $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$;

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 6a - 8; \\ x_1 + x_2 = 2a. \end{cases}$

Крім того, $D_1 = a^2 - (6a - 8)$. Умова задачі виконуватиметься,якщо

$$\begin{cases} D_1 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 6a + 8 > 0, \\ 6a - 8 > 0, \\ 2a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty), \\ a \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right), \\ a \in (0; +\infty) \end{cases}$$

Відповідь: $a \in \left(\frac{4}{3}; 2\right) \cup (4; +\infty)$.

Приклад 94. Розв'язати рівняння $\cdot \log_{sin^2 x} a - 1 = 0$.

Розв'язок: область визначення даного рівняння:

$$x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right), n \in Z.$$

Якщо $a \leq 0, a = 1$, то рівняння коренів немає.

Якщо $a > 0, a \neq 1$:

Використаємо формулу: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$,

$$\frac{\log_a 2}{\log_2 \sin x} \cdot \frac{1}{\log_2 sin^2 x} - 1 = 0,$$

$$2log\,_a^2 \sin x = 0{,}5 \cdot \log_a 2,$$

$$\log_a \sin x = \pm\sqrt{0{,}5 \cdot \log_a 2}\,,$$

$$\sin x = a^{\pm\sqrt{0{,}5\cdot\log_a 2}} = 2^{\pm\sqrt{0{,}5\cdot\log_2 a}}.$$

Якщо $0 < a < 1$ і $\log_2 a < 0$ −рівняння коренів немає.

Якщо $a > 1, 2^{\sqrt{0{,}5\cdot\log_2 a}} > 1$ і рівняння $\sin x = 2^{\sqrt{0{,}5\cdot\log_2 a}}$ −коренів немає.

Розв'яжемо рівняння $2^{-\sqrt{0{,}5\cdot\log_2 a}}$:

$$x = (-1)^k \arcsin\left(2^{-\sqrt{0{,}5\cdot\log_2 a}}\right) + \pi k, k \in Z$$

$$x \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k\right), k \in Z;$$

$$x = (-1)^k \arcsin\left(2^{-\sqrt{0{,}5\cdot\log_2 a}}\right) + \pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь: якщо $a \leq 1$ −рівняння коренів немає;

якщо $a > 1$ $\quad x \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k\right), k \in Z;$

$$x = (-1)^k \arcsin\left(2^{-\sqrt{0{,}5\cdot\log_2 a}}\right) + \pi n,\ n \in Z$$

Приклад 95. Знайти всі значення параметра a, при яких всі корені нерівності $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$ є коренями нерівності $49x^2 - 4a^4 \leq 0$.

Розв'язок: дана логарифмічна нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x > -2, \\ x \neq 0, \\ x^2 - x - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x \neq 0, \\ -1 \leq x \leq 2. \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 0; 0 < x \leq 2.$$

Розв'яжемо нерівність:

$$49x^2 - 4a^4 \leq 0,$$

$$49x^2 \leq 4a^4,$$

$$-\frac{2a^2}{7} \leq x \leq \frac{2a^2}{7}.$$

Для того, щоб знайти a запишемо систему:

$$\begin{cases} -\frac{2a^2}{7} \leq -1, \\ \frac{2a^2}{7} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a^2}{7} \geq 1, \\ \frac{2a^2}{7} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a^2}{7} \geq 1 \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7}; +\infty\right).$$

Відповідь: $\left(-\infty; -\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7}; +\infty\right)$.

Приклад 96. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність

$\lg(ax^2 + 4x + a) \geq \lg(5x^2 + 5)$ немає розв'язків.

Розв'язок: Початкова нерівність рівносильна нерівності:

$$ax^2 + 4x + a \geq 5x^2 + 5,$$

$$(a-5)x^2 + 4x + a - 5 \geq 0.$$

Якщо $a = 5$, то розв'язком нерівності буде $x \geq 0$.

Якщо $a \neq 5$, то остання нерівність не матиме розв'язків тоді і тільки тоді, коли виконуватиметься наступна система:

$$\begin{cases} a - 5 < 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

$$D_1 = 4 - (a-5)^2 = -(a-7)(a-3).$$

Таким чином, отримаємо систему

$$\begin{cases} a - 5 < 0, \\ -(a-7)(a-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 5, \\ a \in (-\infty; 3) \cup (7; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \quad a < 3.$$

Відповідь: $a < 3$.

Приклад 97. Знайти всі значення параметра с таких, що нерівність

$1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(cx^2 + 4x + c)$ правильна при всіх значеннях x.

Розв'язок: Запишемо систему рівносильну даній нерівності:

$$\begin{cases} cx^2 + 4x + c > 0, \\ (5 - c)x^2 - 4x + (5 - c) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c > 0, \\ 5 - c > 0, \\ 4 - c^2 < 0 \\ 4 - (5 - c)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c > 0, \\ 5 - c > 0, \\ (c - 2)(c + 2) > 0, \\ (c - 3)(c - 7) \geq 0. \end{cases}$$

$$2 < c \leq 3.$$

Відповідь: $(2; 3]$.

Рівносильні перетворення при розв'язуванні показникових та логарифмічних нерівностей:

$$\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1. \end{cases} \end{array} \right. \qquad (5)$$

$$\log_{f(x)} g(x) \geq \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1. \end{cases} \end{array} \right. \qquad (6)$$

Приклад 98.Розв'язати нерівність $\log_x \left(\frac{4x+5}{6-5x}\right) < 1$.

Розв'язок:

Оскільки $-1=\log_x\frac{1}{x}$, запишемо нерівність у вигляді:

$$\log_x\left(\frac{4x+5}{6-5x}\right)<\log_x\frac{1}{x}.$$

Використавши рівносильне перетворення (5), отримаємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{4x+5}{6-5x}<\dfrac{1}{x},\\ \dfrac{4x+5}{6-5x}>0,\\ x>1\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{4x+5}{6-5x}>\dfrac{1}{x},\\ \dfrac{1}{x}>0,\\ .\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x^2+10x-6<0,\\ \left[\begin{array}{l}4x+5=0,\\ 6-5x\neq 0\end{array}\right.\\ x>1\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2+10x-6>0,\\ x\neq 0,\\ 0<x<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3<x<\dfrac{1}{2},\\ -\dfrac{5}{4}<x<\dfrac{6}{5},\\ x>1\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;-3)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right),\\ x\neq 0,\\ 0<x<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\left(-\frac{5}{4};\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\frac{6}{5}\right),\\ \frac{1}{2}<x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x<1.$$

Відповідь: $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

2.6. Трансцендентні рівняння

Означення 7.Рівняння вигляду $f(x)=g(x)$ називають трансцендентними, якщо хоча б одна з функцій $f(x)$ або $g(x)$ не є алгебраїчною.

Логарифмічні та показникові рівняння є трансцендентними та при розв’язуванні їх часто зводять до алгебраїчних. Трансцендентні рівняння розв’язують, використовуючи методи математичного аналізу.

Розглянемо декілька прикладів:

Приклад 99. Розв’язати рівняння $3^x+3^{-x}=2\cos x$.

Розв'язок:

1-й спосіб) Використаємо нерівність Коші $a + b \geq 2\sqrt{ab},\ \ a \geq 0, b \geq 0$

та отримаємо

$$3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}}\,,$$

$$3^x + 3^{-x} \geq -2.$$

Рівність буде правильною, якщо $x = 0$, тоді

$$2\cos x \geq 2,$$

$$\cos x \geq 1,$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1,$$

$\cos x = 1,\ x = 0$ - корінь даного рівняння.

2-й спосіб) Нехай $3^x = t, t > 0$, тоді

$$t^2 - 2tcos\ x + 1 = 0,$$

$$t_{1,2} = \cos(xy) \pm \sqrt{cos^2(xy) - 1} = \cos(xy) \pm \sqrt{-sin^2(xy)}.$$

Ріняння має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\sin(xy) = 0, xy = \pi k, k \in Z,$

$$t = \begin{cases} 1, \text{якщо } k = 2n, n \in Z, \\ -1, \text{якщо } л = 2n + 1, n \in Z. \end{cases}$$

Якщо $t = 1$, то $2^x = 1\ \ i\ \ x = 0,$

якщо $t = -1, t < 0 -$ коренів немає.

Відповідь: $x = 0, y -$ будь-яке дійсне число.

Приклад 100. Розв'язати рівняння

$$4^x + 2^x(x-3) - 2x + 2 = 0.$$

Розв’язок: нехай $2^x = y, y > 0,$ тоді

$$y^2 + (x-3)y - 2x + 2 = 0,$$

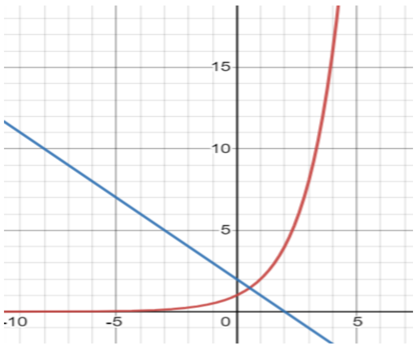
$$D = x^2 - 6x + 9 + 8x - 8 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

$$y = \frac{2 - x \pm (x-1)}{2};$$

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = 2 - x.$$

Повернемось до заміни: $2^x = 2$, $2^x = 2 - x$ (***).

Перше рівняння має корінь $x = 1$, друге рівняння не має більше, ніж один корінь, тому що функція в лівій частині (***) зростає на R, а функція в правій частинні (***) спадає на R. Корінь рівняння (***) можна визначити тільки приблизно за допомогою графіка: $x \approx 0{,}5$.



Відповідь: $x \approx 0{,}5$.

Приклад 101. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{2^{ax} - 2} = \cos\frac{\pi}{4}x - 1,$$

якщо $a \in \left[\frac{1}{8}; 16\right]$.

Розв'язок:

$$\sqrt{2^{ax}-2} \geq 0, \cos\frac{\pi}{4}x - 1 \geq 0,$$

$$\cos\frac{\pi}{4}x \geq 1, \text{ але } \cos\frac{\pi}{4}x \leq 1,$$

$$\cos\frac{\pi}{4}x = 1,\ \frac{\pi}{4}x = 2\pi n,\ x = 8n, n\ \in Z.$$

$$\text{Якщо } \cos\frac{\pi}{4}x = 1, \text{ то } 2^{ax} - 2 = 0,$$

$$ax = 1, x = \frac{1}{a}.$$

$$\text{Оскільки } \quad \frac{1}{8} \leq a \leq 16, \text{то} \frac{1}{16} \leq \frac{1}{a} \leq 8, \text{ тоді}$$

$$\frac{1}{16} \leq 8n \leq 8, \quad n = 1, \text{то}$$

$$x = 8, \text{якщо } a = \frac{1}{8}.$$

Відповідь: $x = 8,$ якщо $a = \frac{1}{8}$, при всіх інших значеннях a на проміжку $\left[\frac{1}{8}; 16\right]$ коренів немає.

Приклад 102. Розв'язати рівняння

$$\log_{\frac{4}{3}}\left(\cos(x^2 - x) - \frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}.$$

Розв'язок:

$$-1 \leq \cos(x^2 - x) \leq 1.$$

Врахуємо область визначення логарифмічної функції:

$$0 < \cos(x^2 - x) - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}.$$

Функція $f(t) = \log_{\frac{4}{3}} t$ –зростаюча, тому

$$f(t) = \log_{\frac{4}{3}}\left(\cos(x^2 - x) - \frac{1}{4}\right) \leq \log_{4/3}\frac{3}{4} = -1,$$

$$-1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} \leq 0.$$

Розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} \log_{\frac{4}{3}}\left(\cos(x^2 - x) - \frac{1}{4}\right) = -1, \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = -1. \end{cases}$

Коренем другого рівняння є $x = 0$, що також задовольняє перше рівняння системи, тому $x = 0$ - корінь даного рівняння.

Відповідь: 0.

Приклад 103. Розв'язати рівняння

$$\log_2(x^2 - 4x + 8) = 1 + \sin(x - 2).$$

Розв'язок:

$$0 \leq 1 + \sin(x - 2) \leq 2,$$

$$0 \leq \log_2(x^2 - 4x + 8) \leq 2,$$

$$1 \leq x^2 - 4x + 8 \leq 4,$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 7 \geq 0, \\ (x - 2)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Зробивши перевірку, переконаємось, що $x = 2 -$ корінь заданого рівняння.

Відповідь: $x = 2$.

Приклад 104. Розв'язати рівняння $\sqrt{\log_2 \sin x} = x - \frac{\pi}{2}$.

Розв'язок: знайдемо область визначення рівняння $\log_2 \sin x \geq 0$,

оскільки $2 > 1, \sin x \geq 1, -1 \leq \sin x \leq 1,$ тоді

$$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\ \in Z.$$

Зробивши перевірку, переконаємось що $x = \frac{\pi}{2}$ −корінь заданого рівняння.

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Висновки

В магістерській роботі викладені основні методи розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей, їх систем на стандартному та академічному рівні.

Розглянули та класифікували методи розв'язування даних рівнянь, нерівностей, їх систем та основні типові складності, що виникають під час розв'язування цих задач.

Усі методи розв'язування проілюстровано на прикладах. Розглянуто та наведено приклади рівносильних перетворень при розв'язуванні показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Використана література:

1. Д. Д. Баранникова, *Показательные и логарифмические неравенства (методические рекомендации и задачи для самостоятельного решения для учеников 11 классов),* Тюмень, издательство Тюменского государственного университета, 2018.
2. Э. С. Беляэва, А. С. Потапов, С. А. Титоренко , *Уравнения и неравенства с параметром* (учебное пособие), часть 1, часть 2, Москва, 2009. -444 с.
3. А. Ш. Блох, Т. Л. Трухан *Неравенства*, издательство «Народная Асвета», Минск, 1972.-225 с.
4. В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко, *Задачи по математике, уравнения и неравенства*, под ред. В. С. Аролович, издательская фирма «Физико-математическая література», Москва, 2007.
5. А. П. Власова, Н. И. Латанова, Н. В. Евсеева, Г. Н. Хромова, Математика. *Уравнения и неравенства. Тестовые задане базового, повышеного и высокого уровней сложности*, Москва, 2011.
6. Б. П. Гейдман, *Логарифмические и показательные уравнения и неравенства*, Москва, 2003.
7. В. А. Далингер, *Математика: логарифмические уравнения и неравенства,* 2-е издание, исправленное и дополненное, Москва, 2019.
8. С. К. Кожухов, *Уравнения и неравенства с параметрами,* (*учебно-методические пособие для учителей математики, студентов математических спеціальностей педагогических вузов, абитуриентов),*Орел – 2013. -72 с.
9. С. И. Колесникова, *Математика. Показательные и логарифмические уравнения, системы, неравенства*, г. Долгопрудный, 2007.

10. Я. Л. Крейнин, *Функции. Пределы. Уравнения и неравенства с параметрами*, Москва «Просвещение», 1995.
11. В. В.Локоть, *Задачи с параметрами. Логарифмические и показательные уравнения, неравенства, системы*, Москва, 2004.
12. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір, *Алгебра і початки аналізу*: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної освіти, ТОВ ТО «Гімназія», 2019, -352 с.
13. О. В. Нагорнов, А. В. Баскаков, С. А. Гришин, Р. Р. Резванов, О. Б. Баскакова, Н. В. Мирошин, *Иррациональние, тригонометрические, логарифмические уравнения и неравенства. Прогрессии,* (Сборник задач по алгебр), Часть 2, М. : НИЯУ МИФИ, 2009 .
14. Н. Н. Некрасова, В. В.Горяйнов, А. С. Чесноков, С. С. Сумера, *Математика: Уравнения и неравенства* (учебное пособие), Воронеж, 2019.
15. С. А. Шестаков, *ЕГЭ 2017. Математика. Неравенства и системы неравенств*, под ред. И. В. Ященко, Москва, Издательство МЦНМО, 2017.
16. П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков, *Тригонометрические показательные и логарифмические уравнения и неравенства*, Москва, 2008. -352 с.
17. Г. А. Ястребинецкий, *Уравнения и неравенства, содержащие параметры,* (пособие для учителей), Москва, 1972. -128 с.