МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра алгебри, топології та основ математики

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

на тему

Тригонометричні рівняння та нерівності: методика розв'язування

Виконала
студентка групи МТОМ-21з
спеціальності 014 «Середня освіта»
«Математика»
Саварин Зоряна Михайлівна
Керівник
доц. Гутік О. В.
Рецензент:

Львів – 2021

Зміст

Вступ

Історики говорять, що тригонометрію винайшли астрономи. Згодом її почали використовувати в архітектурі та геодезії, а з плином часу область застосування тригонометрії швидко збільшувалась. Тому в сучасному світі її використовують майже всі природні науки, техніка та багато інших галузей діяльності.

Рівняння та нерівності, які містять тригонометричні функції, називають тригонометричними рівняннями та нерівностями. Тригонометричні рівняння й нерівності займають одне з важливих місць у курсі математики середньої школи.

Задання магістерської роботи розробити методичні вказівки по темі тригонометричні рівняння та нерівності, способи їх розв'язку.

У першому розділі роботи розглядаються поняття вимірювання кутів, тригонометричних функцій та обернених тригонометричних функцій. Дано означення тригонометричних функцій довільних кутів, властивості функцій та їх графіки. Також розглядаються поняття парності та періодичності тригонометричних функцій. Подані таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів та їх знаки.

У другому розділі подані тотожні перетворення тригонометричних виразів: основні тригонометричні тотожності, теореми додавання, тригонометричні функції подвійного, потрійного і половинного аргументів, формули пониження степеня, перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток та добутку у суму. Також наведені таблиця з формулами зведення та основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями.

У третьому розділі розглядаються різні методи розв'язування тригонометричних рівнянь: розкладу рівняння на множники, зведення до алгебраїчного, заміни змінної, оцінки лівої та правої частини рівняння. Наведені способи розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь і рівнянь з оберненими тригонометричними функціями. Також розглядаються різні приклади і вправи, у яких відповіді до завдань подані у дужках.

У четвертому розділі розглядаються тригонометричні рівняння з параметрами та способи їх розв’язку. Подано приклади розв’язування таких завдань і вправи для самостійного опрацювання з відповідями у дужках.

У п’ятому розділі наведено методи та розв’язки найпростіших тригонометричних нерівностей. Подані приклади і вправи, відповіді до яких наведено у дужка.

У шостому розділі розглядаються нестандартні задачі з тригонометричними рівняннями та нерівностями. Подані розв’язані приклади та вправи для самостійного опрацювання.

1. Тригонометричні функції та їх властивості

1.1 Вимірювання кутів

У тригонометрії кут визначається як геометрична фігура, що утворилася при обертанні променя на площині навколо свого початку. Довільна точка *A* променя описує дугу кола з центром *O* і радіусом *OA*. Величина кута або дуги визначається як міра повороту кінцевого положення променя відносно початкового (рис. 1).

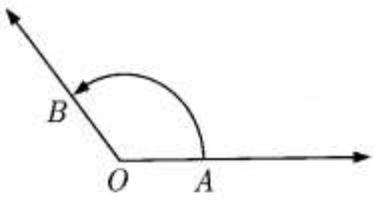

Рис. 1

Кут вважається додатним, якщо промінь обертається проти руху годинникової стрілки, і від'ємним, якщо обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

У тригонометрії використовують радіанну і градусну міри кутів та дуг.

Дугою в один градус (1°) називається дуга кола, довжина якої дорівнює $\frac{1}{360}$ частині його довжини. Кут в один градус називається центральний кут, що спирається на дугу в один градус.

Дугою в один радіан (1 рад) називається дуга кола, довжина якої дорівнює довжині радіуса цього кола. Кутом в один радіан називається центральний кут, що спирається на дугу в один радіан.

Повному оберту відповідає довжина кола, що містить 360° або $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ радіан.

Перехід від градусної міри кутів та дуг до радіанної і навпаки здійснюється за формулами:

$$\alpha^{\circ} = \frac{\alpha}{180}\pi \text{ рад};$$

$$\alpha \text{ рад} = \frac{\alpha}{\pi} 180°.$$

Зокрема,

$$1 \text{ рад} = \frac{180}{\pi} \approx 57°17'45'' \approx 57{,}29578°;$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745 \text{ рад}.$$

Подаємо таблицю градусної та радіанної міри кутів, які часто зустрічаються.

Градуси	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
Радіани	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

1.2 Означення тригонометричних функцій довільного кута

Нехай у прямокутній системі координат xOy довільна точка M, відмінна від початку координат (рис. 2), має координати *(x;y)*, її радіус вектор $\overrightarrow{OM}$ утворює з додатним напрямом осі Ox кут α і має довжину

$$|\overrightarrow{OM}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

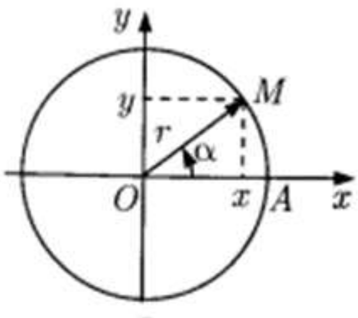

Рис. 2

Синусом довільного кута α називається відношення ординати кінця рухомого радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, що утворює кут α з віссю абсцис, до довжини цього радіуса:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}.$$

Косинусом довільного кута α називається відношення абсциси кінця рухомого радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, що утворює кут α з віссю абсцис, до довжини цього радіуса:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}.$$

Тангенсом кута $\alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, називається відношення синуса кута α до косинуса цього кута (або відношення ординати до абсциси кінця рухомого радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, що утворює кут α з віссю абсцис):

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}, x \neq 0.$$

Котангенсом кута $\alpha, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$, називається відношення косинуса кута α до синуса цього кута (або відношення абсциси до ординати кінця рухомого радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, що утворює кут α з віссю абсцис):

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{y}, y \neq 0.$$

Розглядаються також тригонометричні функції кута секанс і косеканс:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;$$
$$\mathrm{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{r}{y}, \alpha \neq \pi n, (n \in \mathbb{Z}).$$

Значення тригонометричних функцій кута α залежить лише від його величини та не залежить від довжини r рухомого радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, що утворює кут α з віссю абсцис, тому можна прийняти $r = 1$. Якщо кінець радіуса-вектора точка M лежить на одиничному колі, то значення тригонометричних функцій відповідно дорівнюють (див. рис. 3):

$$\sin\alpha = y,$$
$$\cos\alpha = x,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}\,(x \neq 0),$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}\,(y \neq 0).$$

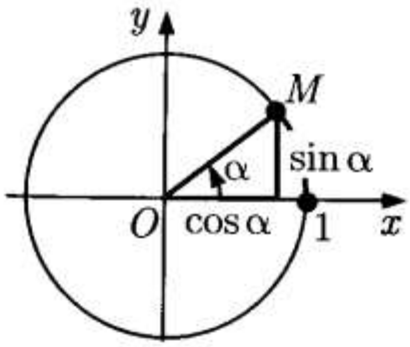

Рис. 3

Віссю тангенсів називають дотичну до кола в точці $A(1; 0)$, інакше кажучи пряму $x = 1$. Тангенс кута $\alpha, (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$ дорівнює ординаті відповідної точки C осі тангенсів (див. рис. 4).

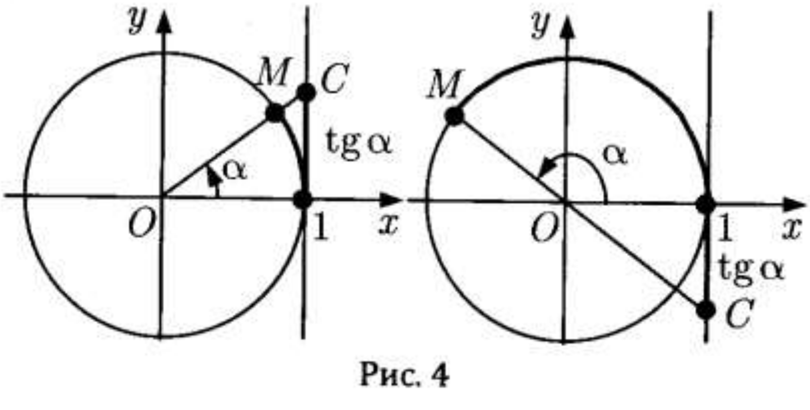

Рис. 4

Віссю котангенсів називають дотичну до одиничного кола в точці $B(0;1)$, інакше кажучи пряму $y = 1$. Котангенс кута $\alpha, (\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z})$ дорівнює абсцисі відповідної точки C осі котангенсів (див. рис. 5).

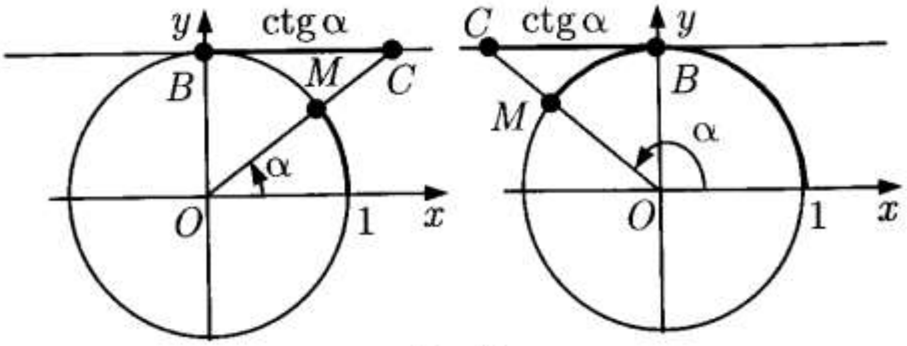

Рис. 5

1.3 Знаки значень тригонометричних функцій

Тригонометричні функції кутів у різних чвертях координатної площини, мають знаки вказані на рис.6.

Рис. 6

1.4 Значення тригонометричних функцій деяких кутів

α рад / $f(\alpha)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctg α	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0	-

1.5 Парність тригонометричних функцій

Функції $\cos\alpha$ і $\sec\alpha$ – парні, функції $\sin\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$, tgα, ctgα – непарні, тобто

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \;;$$

$$\sec(-\alpha) = \sec\alpha\,;$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,;$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha\,;$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha\,;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

1.6 Періодичність тригонометричних функцій

Функцію f називають **періодичною**, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x із області визначення функції f виконуються рівності

$$f(x-T) = f(x) = f(x+T).$$

Число T називають **періодом** функції f.

Функції $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ мають найменший додатний (основний, головний) період $T = 2\pi$, функції $\operatorname{tg}\alpha$ та $\operatorname{ctg}\alpha$ мають найменший додатний період $T = \pi$, тобто:

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha;$$

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha, (n \in \mathbb{Z}).$$

Функції $\cos(\omega\alpha + \varphi)$ і $\sin(\omega\alpha + \varphi)$ мають період

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

функції $\operatorname{tg}(\omega\alpha + \varphi)$ і $\operatorname{ctg}(\omega\alpha + \varphi)$ мають період

$$T = \frac{\pi}{\omega}.$$

Найменший додатній період суми періодичних функцій $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ дорівнює найменшому спільному кратному періодів доданків, якщо вони співмірні.

Зауваження. Значення тригонометричних функцій від кутів $\pm\alpha + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z},$ зводяться до значень тригонометричних функцій від кута α згідно з формулами зведення, парністю, та періодичністю.

1.7 Тригонометричні функції числового аргументу. Властивості та графіки тригонометричних функцій

Між множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$ і множиною всіх кутів, що вимірюються в радіанах, існує взаємно однозначна відповідність. Якщо вважати аргументом тригонометричної функції не кут, а число, що виражає його величину в радіанах, то матимемо відповідну тригонометричну функцію числового аргументу. Для тригонометричних функцій числового аргументу виконуються всі співвідношення між тригонометричними функціями кута.

Для тригонометричних функцій існують обернені функції, якщо кожну з них розглядати на певному проміжку, де вона монотонна.

Властивості та графіки тригонометричних функцій використовують для розв'язання тригонометричних рівнянь і нерівностей.

Функція $y = \sin x$

1. Область визначення $\mathbb{R}$; область значень $[-1; 1]$.
2. Непарна (графік симетричний відносно початку координат); періодична, найменший період $T = 2\pi$.
3. Функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$, а

   спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.

   Найменші значення $\sin x = -1$ набуває при $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi n$, а

   найбільші значення $\sin x = 1$ – при $x = \frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
4. Нулями функції $\sin x = 0$ є точки $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

5. Проміжки знакосталості: $\sin x > 0$, на кожному з проміжків виду $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$; $\sin x < 0$, на кожному з проміжків виду $x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.
6. Графіком є синусоїда (рис. 7).

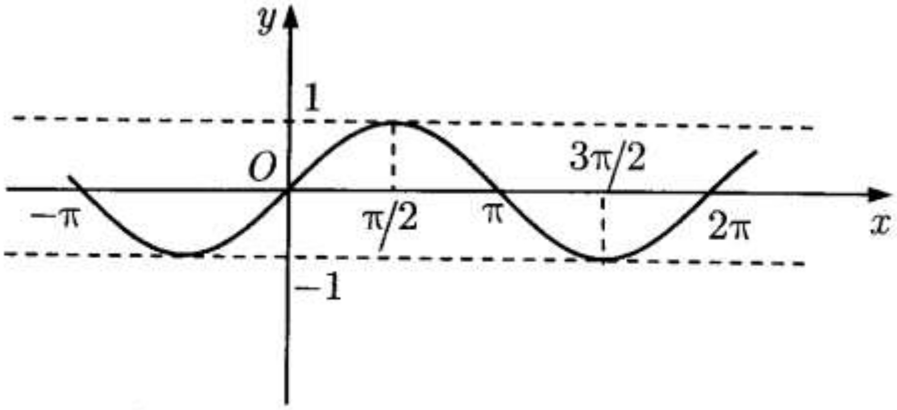

Рис. 7

Функція $y = \cos x$

1. Область визначення $\mathbb{R}$; область значень $[-1; 1]$.
2. Парна (графік функції симетричний відносно осі Oy), періодична, найменший додатний період $T = 2\pi$.
3. Функція $y = \cos x$ зростає на проміжку $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$, а спадає на проміжку $2\pi n; \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

   Найменші значення $\cos x = -1$ набуває при $x = \pi + 2\pi n$, найбільші значення $\cos x = 1$ – при $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
4. Нулями функції $\cos x = 0$ є точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
5. Проміжки знакосталості: $\cos x > 0$, на кожному з проміжків виду $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$; $\cos x < 0$, на кожному з проміжків виду $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.
6. Графік функції зображений на рис.8.

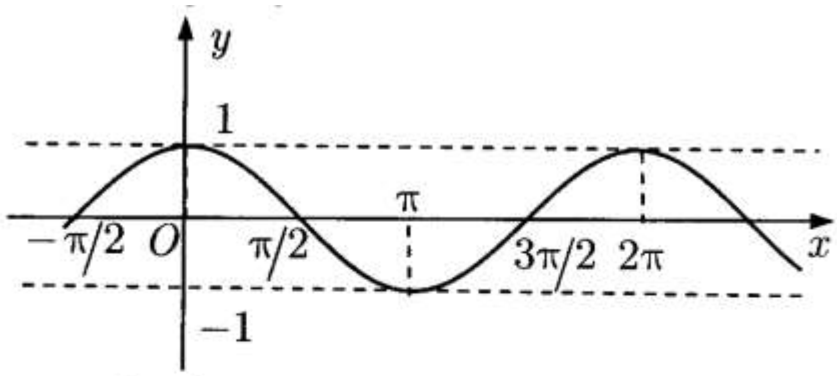

Рис. 8

Функція $y = \mathrm{tg}\, x$

1. Область визначення $\mathbb{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$, область значень $\mathbb{R}$.
2. Непарна (графік симетричний відносно початку координат), періодична, найменший додатний період $T = \pi$.
3. Зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$.
4. Нулі функції $\mathrm{tg}\, x = 0$ є точки вигляду $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
5. Проміжки знакосталості: $\mathrm{tg} x > 0$, на кожному з проміжків виду

   $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$; $\mathrm{tg} x < 0$, на кожному з проміжків виду

   $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.
6. Графік функції зображений на рис. 9.

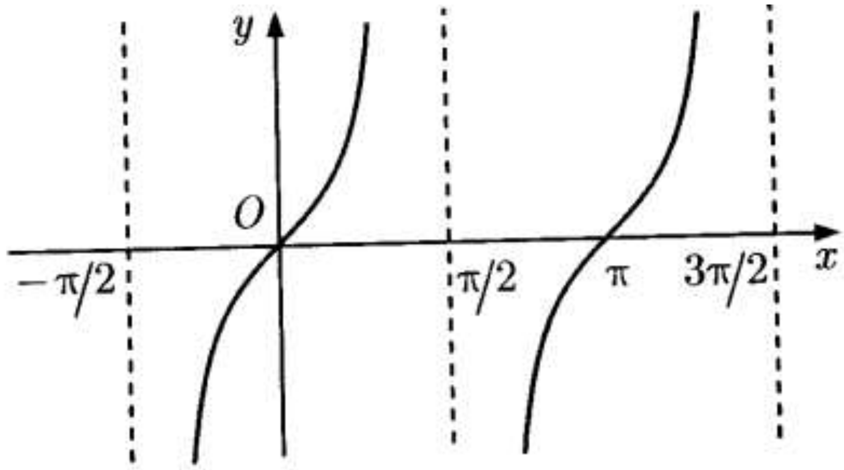

Рис. 9

Функція $y = \mathbf{ctg}\,x$

1. Область визначення $\mathbb{R} \setminus \{x = \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$, область значень $\mathbb{R}$.
2. Непарна (графік симетричний відносно початку координат), періодична, найменший додатний період $T = \pi$.
3. Спадає на кожному проміжків $(\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.
4. Нулями функції $\mathrm{ctg}\,x = 0$ є точки вигляду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
5. Проміжки знакосталості: $\mathrm{ctg}x > 0$, на кожному з проміжків виду $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$; $\mathrm{ctg}x < 0$, на кожному з проміжків виду $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.
6. Графік функції зображений на рис.10.

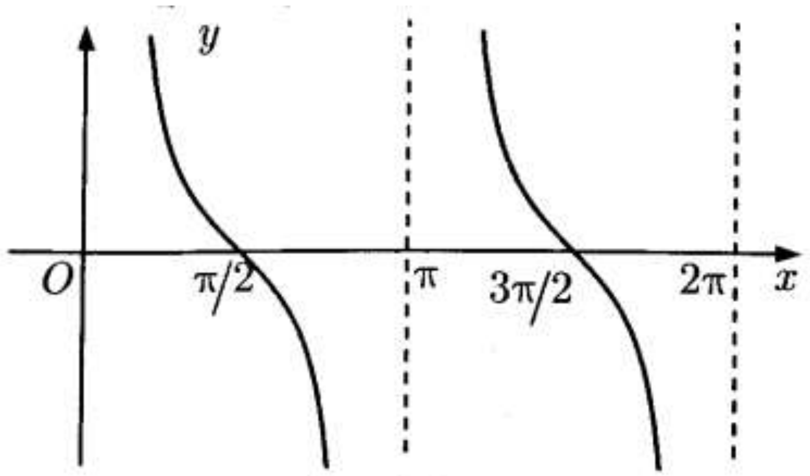

Рис. 10

1.8 Обернені тригонометричні функції

Функція $y = \mathbf{arcsin}\,x$

Арксинус – функція, обернена до синуса на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Область визначення $[-1; 1]$; область значень $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Непарна, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ (графік симетричний відносно початку координат).
3. Зростає, набуваючи найменше значення $-\frac{\pi}{2}$ при $x = -1$; та найбільше значення $\frac{\pi}{2}$ при $x = 1$.
4. Нуль функції є $x = 0$.
5. Проміжки знакостілості: $\arcsin x > 0$ при $x \in (0; 1]$, $\arcsin x < 0$ при $x \in [-1; 0)$.
6. Графік функції $y = \arcsin x$ дістаємо симетричним відображенням синусоїди, взятої на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, відносно прямої $y = x$ (рис. 11).

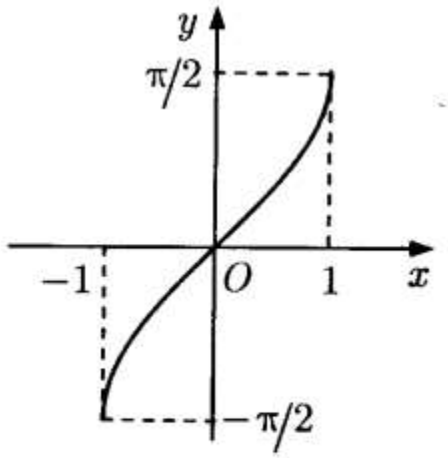

Рис. 11

Функція $y = \arccos x$

Арккосинус – функція, обернена до косинуса на проміжку $[0; \pi]$.
1. Область визначення $[-1; 1]$; область значень $[0; \pi]$.
2. Ні парна, ні непарна, причому $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

3. Спадає, набуваючи найбільше значення π при $x = -1$ та найменше значення 0 при $x = 1$.
4. Нуль функції є $x = 1$.
5. Проміжки знакосталості: $\arccos x > 0$ для всіх $x \in [-1; 1)$.
6. Графік функції $y = \arccos x$ дістаємо симетричним відображенням графіка косинуса, взятого на відрізку $[0; \pi]$, відносно прямої $y = x$ (рис. 12).

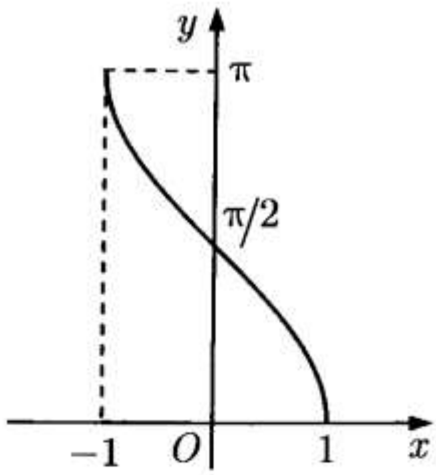

Рис. 12

Функція $y = \operatorname{arctg} x$

Арктангенс – функція, обернена до тангенса на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Область визначення $\mathbb{R}$; область значень $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
2. Непарна, $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, (графік симетричний відносно початку координат).
3. Зростає на всій області визначення.
4. Нуль функції є $x = 0$.
5. Проміжки знакосталості: $\operatorname{arctg} x > 0$ для всіх $x \in (0; +\infty)$, $\operatorname{arctg} x < 0$ для всіх $x \in (-\infty; 0)$.

6. Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ дістаємо симетричним відображенням графіка тангенса, взятого на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, відносно прямої $y = x$ (рис. 13).

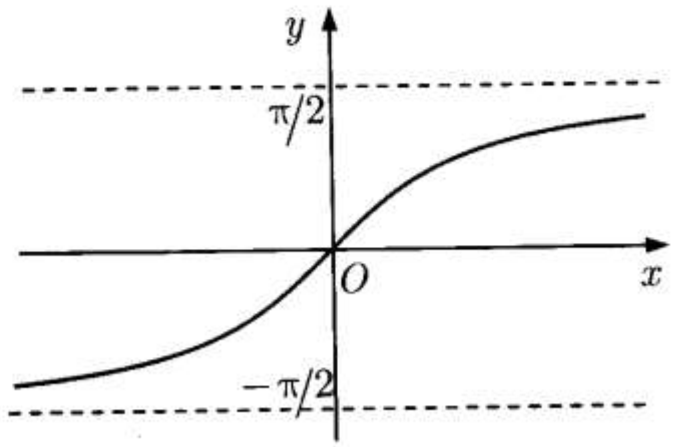

Рис. 13

Функція $y = \operatorname{arcctg} x$

Арккотангенс – функція, обернена до котангенса на проміжку $(0; \pi)$.

1. Область визначення $\mathbb{R}$; множина значень $(0; \pi)$.
2. Ні парна, ні непарна, причому $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.
3. Спадає на всій області визначення.
4. Нулів функція немає.
5. Проміжки знакосталості: $\operatorname{arcctg} x > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.
6. Графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$ дістаємо симетричним відображенням графіка котангенса, взятого на інтервалі $(0; \pi)$, відносно прямої $y = x$ (рис.14).

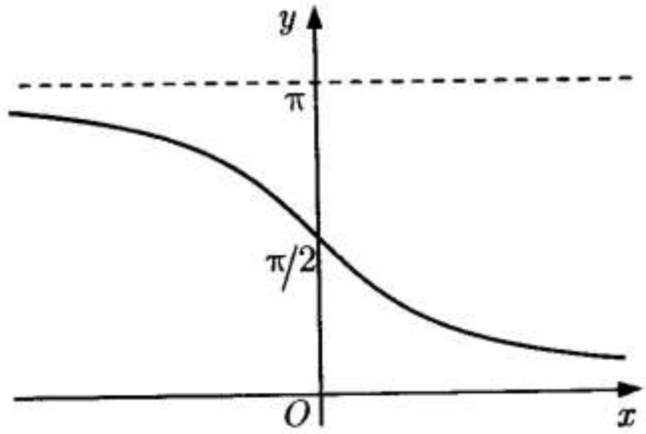

Рис. 14

2. Тотожні перетворення тригонометричних виразів

2.1 Основні формули тригонометрії

Основні тригонометричні тотожності

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1}$$

<u>Доведення</u>: Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола переходить у радіус OP_α (рис. 2.1).

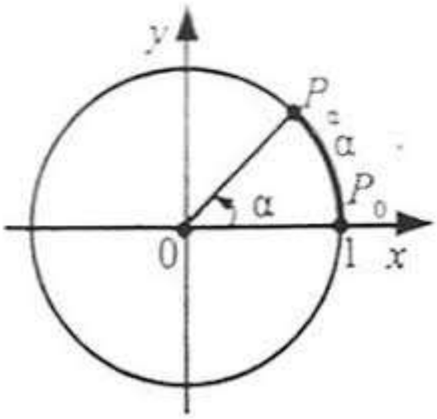

Рис. 2.1.

Точка $P_\alpha(x; y)$ належить колу, радіус якого дорівнює 1. Тому координати точки задовольняють рівняння кола $x^2 + y^2 = 1$. Але $x = \cos\alpha$; $y = \sin\alpha$, тому

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad \blacksquare$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

<u>Доведення</u>: Використаємо формули (2) – (3) і підставимо в (4), отримаємо:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1.$$

Отже,

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1. \qquad \blacksquare$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

<u>Доведення</u>: Поділимо формулу (1) на $\cos^2\alpha$ і отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

тобто

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad \blacksquare$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Доведення аналогічне попередньому.

Теореми додавання

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

<u>Доведення</u>: Для того щоб отримати формулу для $\cos(\alpha-\beta)$, спочатку розглянемо випадок, коли $\alpha > \beta, \alpha - \beta < \pi$. Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола переходить у радіус $OP_\alpha, P_\alpha(x; y)$ (рис. 2.2).

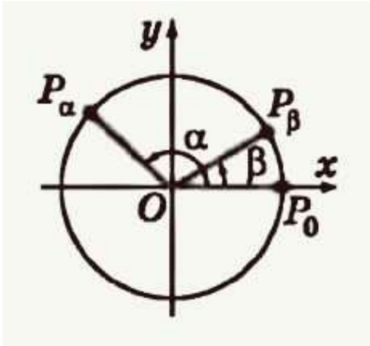

Рис.2.2

Оскільки $x = \cos\alpha$; $y = \sin\alpha$, то маємо вектор $\overline{OP_\alpha}(\cos\alpha\,; \sin\alpha)$. Аналогічно, $\overline{OP_\beta}(\cos\beta\,; \sin\beta)$. Тоді:

$$\overline{OP_\alpha} \cdot \overline{OP_\beta} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

З іншого боку:

$$\overline{OP_\alpha} \cdot \overline{OP_\beta} = |\overline{OP_\alpha}| \cdot |\overline{OP_\beta}| \cdot \cos\angle P_\alpha O P_\beta.$$

Але $|\overline{OP_\alpha}| = 1$; $|\overline{OP_\beta}| = 1$; $\angle P_\alpha O P_\beta = \alpha - \beta$. Тому

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Аналогічно розглядаються випадки коли $\alpha < \beta$, або $\alpha - \beta > \pi$.

Отримали формулу різниці косинуса:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Із цієї формули маємо:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Отримали формулу косинуса суми:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,. \qquad \blacksquare$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

Доведення: Знайдемо формулу для $\sin(\alpha - \beta)$. Маємо:

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Отримали формулу синуса різниці:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Для $\sin(\alpha + \beta)$ матимемо:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta) =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Отримали формулу синуса суми:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \qquad \blacksquare$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \alpha, \beta, \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Доведення: Виразимо $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ через $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$ за умови, що кожен з цих виразів має зміст, тобто за умови, що $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0, \cos\beta \neq 0$. Маємо:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}.$$

Поділимо чисельник і знаменник на добуток $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$. Матимемо:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Отримали формулу тангенса різниці:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Для тангенса суми матимемо:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\alpha-(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Отримали формулу тангенса суми:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad \blacksquare$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha},\alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

Аналогічне доведення як для тангенса.

Тригонометричні функції подвійного і потрійного аргументів

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

<u>Доведення</u>: Формула $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ є істиною для будь-яких значень α і β. Якщо припустити, що $\alpha=\beta$, то матимемо:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha\,,\text{тобто}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\,. \qquad \blacksquare$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.$$

Доведення аналогічне як з синусом.

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},n,k\in\mathbb{Z}.$$

Доведення аналогічне.

$$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

<u>Доведення</u>: З'ясуємо як записати $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$. Маємо:

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha =$$

$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Отже, отримаємо формулу синуса потрійного кута:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha. \qquad \blacksquare$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Доведення аналогічне.

$$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

<u>Доведення</u>: Аналогічно будемо мати:

$$\mathrm{tg}\,3\alpha = \mathrm{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\mathrm{tg}\,2\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Отже, отримали формулу тангенса потрійного кута:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad \blacksquare$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Доведення аналогічне.

Формули половинного аргументу

(для синуса і косинуса – формули пониження степеня)

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}.$$

<u>Доведення</u>: Якщо з формули

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

виразити $\sin^2\frac{\alpha}{2}$, то отримаємо

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}. \qquad \blacksquare$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}.$$

<u>Доведення</u>: Аналогічно, використовуючи формулу

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1. \qquad \blacksquare$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\alpha\neq\pi(2n+1),n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\alpha\neq\pi(2n+1),n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\alpha\neq\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},\alpha\neq 2\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},\alpha\neq\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\alpha\neq 2\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

Формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Доведення: Додамо почленно формули додавання:

$$\begin{array}{r} \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \\ +\ \underline{\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y} \\ \sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y. \end{array}$$

Нехай $x+y=\alpha; x-y=\beta$. Тоді $2x=\alpha+\beta; 2y=\alpha-\beta,$ звідки

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}; y=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Підставимо знайдені для x та y вирази у отриману вище суму. Матимемо формулу суми синусів:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad ■$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

<u>Доведення</u>: Аналогічне, тільки замінюємо β на $-\beta$.

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{ctg}\alpha\pm\mathrm{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\alpha,\beta\neq\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)).$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)).$$

Заміна тригонометричних функцій через тангенс їх половинного аргументу (універсальна заміна)

$$\sin\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\alpha\neq\pi(2n+1),n\in\mathbb{Z}.$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\alpha\neq\pi(2n+1),n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2.2 Формули зведення

α / $f(\alpha)$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Правило. Якщо кути мають вигляд $-\alpha, \pi \pm \alpha$, то функції зберігають найменування; для кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ функції змінюють найменування на споріднене (спорідненими є функції синус і косинус, тангенс і котангенс, секанс і косеканс); знак функції визначається знаком лівої частини, якщо вважати кут α гострим.

2.3 Основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями

Формули виводяться з означень тригонометричних і обернених функцій.

$$\sin(\arcsin x) = x, \cos(\arccos x) = x, \text{ для } x \in [-1;1]$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \text{ для } x \in \mathbb{R}.$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \text{ для } x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}];$$

$$\arccos(\cos x) = x, \text{ для } x \in [0; \pi];$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \text{ для } x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2});$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \text{ для } x \in (0; \pi).$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{ для } x \in [-1;1];$$

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arcc\,tg} x = \frac{\pi}{2}, \text{ для } x \in \mathbb{R}.$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x,$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \text{ для } x \in [-1;1];$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \text{ для } x \in \mathbb{R}.$$

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ для } x \in (0;1).$$

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ для } x \in (0;1).$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}, \text{ для } x \in (0;+\infty).$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{x},\ \text{для}\ \ x \in (0;+\infty).$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2},\ \text{для}\ \ x \in [-1;1];$$

$$\sin(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\sin(\operatorname{arc\,ctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{для}\ \ x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2},\ \text{для}\ \ x \in [-1;1];$$

$$\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\cos(\operatorname{arc\,ctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ \text{для}\ \ x \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{для}\ \ x \in (-1;1);$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ \text{для}\ \ x \in [-1;0) \cup (0;1];$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0.$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ \text{для}\ \ x \in [-1;0) \cup (0;1];$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{для}\ \ x \in (-1;1).$$

3. Тригонометричні рівняння

3.1 Найпростіші тригонометричні рівняння

1. $\sin x = a, |a| \le 1,$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Наведемо окремі випадки рівнянь:

$$\sin x = 0, \qquad x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1, \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1, \qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 3.1. Розв'яжіть рівняння $\sin 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Розв'яжемо найпростіше рівняння з аргументом $5x$:

$$5x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n;$$

$$5x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

Поділимо рівняння на 5 і отримаємо відповідь:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

Вправа 3.1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}$; ($x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$);

2) $\sin\frac{3}{4}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; ($x = (-1)^{n+1} \frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$);

3) $\sin 2x = \frac{\pi}{4}$; ($x = (-1)^n \frac{1}{2}\arcsin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$).

2. $\cos x = a,\ |a| \le 1,$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Наведемо окремі випадки рівнянь:

$$\cos x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1, \qquad x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1, \qquad x = \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 3.2. Розв'яжіть рівняння $\cos(\frac{\pi}{3} - 2x) = \frac{1}{3}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \cos x$ парна, то маємо:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}.$$

Знайдемо розв'язок найпростішого рівняння з аргументом $2x - \frac{\pi}{3}$:

$$2x - \frac{\pi}{3} = \pm \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n.$$

Перенесемо $\frac{\pi}{3}$ в праву сторону і поділимо рівняння на 2, отримаємо відповідь:

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Вправа 3.2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; ($x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$);

2) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$; ($x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$);

3) $\cos\frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ($x = \pm\frac{\pi}{5} + \frac{12\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$).

3. $\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbb{R}$,

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Наведемо окремі випадки рівнянь:

$$\operatorname{tg} x = 0, \qquad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 3.3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$.

Розв'язання. Розв'яжемо найпростіше рівняння з аргументом $\frac{2x}{3}$:

$$\frac{2x}{3} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n;$$

$$\frac{2x}{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi n.$$

Помножимо рівняння на $\frac{3}{2}$ і отримаємо відповідь:

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

<u>Вправа 3.3.</u> Розв’яжіть рівняння:

1) $\mathrm{tg}\,2x = \sqrt{3}$; ($x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$);

2) $\mathrm{tg}\,\frac{3}{5}x = 0$; ($x = \frac{5}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$);

3) $\mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = 1$; ($x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$);

4) $\mathrm{tg}(3 - 2x) = 2$; ($x = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,2 + \frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$).

4. $\mathrm{ctg}\,x = a, a \in \mathbb{R}$,

$$x = \mathrm{arcctg}\,a + \pi n, n \in \mathbb{R}.$$

Наведемо окремі випадки рівнянь:

$$\mathrm{ctg}\,x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

<u>Приклад 3.4.</u> Розв’яжіть рівняння $\mathrm{ctg}(\frac{2\pi}{3} - x) = -1$.

<u>Розв’язання.</u> Оскільки функція $f(x) = \mathrm{ctg}\,x$ непарна, то маємо:

$$\mathrm{ctg}(x - \frac{2\pi}{3}) = 1.$$

Розв’яжемо найпростіше рівняння з аргументом $x - \frac{2\pi}{3}$:

$$x - \frac{2\pi}{3} = \mathrm{arcctg}\,1 + \pi n.$$

Перенесемо $\frac{2\pi}{3}$ в праву частину й зведемо подібні доданки,

отримаємо відповідь:

$$x = \frac{11}{12}\pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Вправа 3.4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$; ($x=\frac{5\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$);

2) $\operatorname{ctg}\frac{3}{2}x=5$; ($x=\frac{2}{3}\operatorname{arcctg}5+\frac{2}{3}\pi n, n\in\mathbb{Z}$);

3) $\operatorname{ctg}(\frac{1}{3}x+2)=0$; ($x=\frac{3\pi}{2}-6+3\pi n, n\in\mathbb{Z}$);

4) $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$; ($x=-\frac{\pi}{4}+3\pi n, n\in\mathbb{Z}$).

3.2 Розклад рівняння на множники

1. Рівняння вигляду

$$\sin\alpha x\pm\sin\beta x=0, \cos\alpha x\pm\cos\beta x=0$$

розв'язують використанням формул суми (різниці) синусів та косинусів.

Рівняння вигляду

$$\sin\alpha x\pm\cos\beta x=0$$

Зводяться до попередніх за допомогою формул зведення.

Приклад 3.5. Розв'яжіть рівняння $\sin 3x+\sin x=0$.

Розв'язання. Використаємо формулу суми синусів

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

і отримаємо:

$$2\sin 2x\cos x=0.$$

Отримуємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \cos x = 0,\end{array}\right.$$

звідси маємо розв'язок рівняння:

$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z},\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

<u>Приклад 3.6.</u> Розв'яжіть рівняння $\sin x + \cos x = 1$.

<u>Розв'язання.</u> Використаємо формулу зведення косинуса до синуса:

$$\sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 1.$$

Застосуємо формулу суми синусів

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

і отримаємо:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1.$$

Обчислимо $\sin\frac{\pi}{4}$ і спростимо вираз:

$$\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1.$$

Поділимо рівняння на $\sqrt{2}$:

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Розв’яжемо найпростіше рівняння з аргументом $x-\frac{\pi}{4}$, і перенісши $\frac{\pi}{4}$ у праву частину отримаємо відповідь:

$$x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

<u>Вправа 3.5.</u> Розв’яжіть рівняння:

1) $\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{4})=0;$ ($x=-\frac{\pi}{8}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$);

2) $\cos 5x=\cos 4x;$ ($x=\frac{2\pi n}{9}, n\in\mathbb{Z}$).

2. Розв’язок рівнянь вигляду

$$\sin mx\pm\sin nx\pm\sin px\pm\sin kx=0;$$
$$\cos mx\pm\cos nx\pm\cos px\pm\cos kx=0;$$
$$\sin mx\pm\sin nx\pm\sin px=0;$$
$$\cos mx\pm\cos nx\pm\cos px=0;$$
$$\sin mx\pm\sin nx\pm\cos px\pm\cos kx=0,$$

де $m,n,p,k\in\mathbb{R}$, зводиться до групування, розкладення лівої частини рівняння на множники і переходу до розв’язання еквівалентної сукупності найпростіших рівнянь.

<u>Приклад 3.7.</u> Розв’яжіть рівняння $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$.

<u>Розв’язання.</u> По групуємо $\cos 9x$ з $\cos 7x$ і $\cos 3x$ з $\cos x$. Використаємо формулу різниці косинусів

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

і маємо рівняння:

$$-2\sin 8x\sin x-2\sin 2x\sin x=0.$$

Винесемо спільні множники за дужки та поділимо на -1:

$$2\sin x(\sin 8x+\sin 2x)=0.$$

Використаємо формулу суми синусів у дужках

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

і отримаємо рівняння:

$$4\sin x\sin 5x\cos 3x=0.$$

Отримаємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos 3x=0,\\ \sin 5x=0,\end{array}\right.$$

звідси маємо розв’язки рівняння:

$$\left[\begin{array}{l}x=\pi k, k\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi m}{5}, m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Якщо $m=5p, p\in\mathbb{Z}$, то розв’язки першого і третього рівняння сукупності співпадатимуть, тому отримаємо:

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}, \text{ або } x=\frac{\pi m}{5}, m\in\mathbb{Z}.$$

Вправа 3.6. Розв’яжіть рівняння:

1) $\sin x+2\sin 2x=-\sin 3x$; ($x=\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$);

2) $\cos 5x+\cos 7x=\cos(\pi+6x)$; ($x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}, n\in\mathbb{Z}$;

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$);

3) $\cos x+\cos 5x=\cos 3x+\cos 7x$; ($x=\frac{\pi n}{4}, n\in\mathbb{Z}$);

4) $\sin(x+\frac{\pi}{4})-\sin x=\sin(2x+\frac{\pi}{4})-2x$; ($x=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$;

$x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi nk}{3}, k\in\mathbb{Z}$).

3. Тригонометричні рівняння вигляду

$$\sin^2 mx \pm \sin^2 nx \pm \sin^2 px \pm \sin^2 kx = a, a \in \{0; 2\};$$

$$\cos^2 mx \pm \cos^2 nx \pm \cos^2 px \pm \cos^2 kx = a, a \in \{0; 2\};$$

$$\cos^2 mx \pm \cos^2 nx \pm \sin^2 px \pm \sin^2 kx = a, a \in \{0; 2\};$$

$$\sin^2 mx \pm \sin^2 nx \pm \sin^2 px = \frac{3}{2};$$

$$\cos^2 mx \pm \cos^2 nx \pm \cos^2 px = \frac{3}{2}.$$

Зводяться до рівнянь п.2, за допомогою формул пониження порядку.

Приклад 3.8. Розв’яжіть рівняння $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=1{,}5$.

Розв’язання. Понизимо степінь у всіх доданках лівої частини й отримаємо рівняння:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{3}{2}.$$

Помножимо рівняння на 2 і зведемо подібні доданки:

$$\cos 4x+(\cos 2x+\cos 6x)=0.$$

Згрупувавши, використаємо формулу суми косинусів:

$$\cos 4x+2\cos 4x\cos 2x=0.$$

Винесемо за дужки множник $2\cos 4x$ і отримаємо рівняння:

$$2\cos 4x(\cos 2x+\frac{1}{2})=0.$$

З рівняння отримуємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\cos 4x=0,\\ \cos 2x=-\frac{1}{2},\end{array}\right.$$

звідси маємо відповідь:

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}, k\in\mathbb{Z}, \\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

<u>Вправа 3.7.</u> Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 x+3\sin^2 x=2$; ($x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$);

2) $\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{3x}{2}=1$; ($x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$);

3) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1{,}5$; ($x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in\mathbb{Z}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$);

4) $\sin^2 x+\sin^2 2x-\sin^2 3x-\sin^2 4x=0$; ($x=\frac{\pi n}{5}, n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$).

4. Тригонометричні рівняння вигляду

$$\sin ax\sin bx\pm\sin mx\cos nx\pm\cos px\cos kx=0.$$

Зводяться до рівнянь п. 2 перетворенням добутку тригонометричних функцій на суму.

<u>Приклад 3.9.</u> Розв'яжіть рівняння $\sin 6x\cos 2x=\sin 5x\cos 3x-\sin 2x$.

<u>Розв'язання.</u> Використаємо формули перетворення добутку тригонометричних функцій на суму й отримаємо:

$$\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 4x)=\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 2x)-\sin 2x.$$

Помножимо рівняння на 2 і зведемо подібні доданки:

$$\sin 4x+\sin 2x=0.$$

Застосуємо формулу суми синусів:

$$2\sin 3x\cos x=0.$$

З рівняння отримаємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x=0, \\ \sin 3x=0; \end{array}\right.$$

звідси маємо відповідь:

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}, \\ x=\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Вправа 3.8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$; ($x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$);

2) $\sin(x + \frac{\pi}{3})\cos(x + \frac{\pi}{6}) = 0,5$; ($x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$);

3) $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$; ($x = \frac{\pi n}{10}, n \in \mathbb{Z}$);

4) $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x$; ($x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{12}, k \in \mathbb{Z}$;).

3.3 Зведення тригонометричних рівнянь до алгебраїчних

1. Тригонометричні рівняння, що зводяться до квадратних

Рівняння вигляду

$$A\sin^2 x + B\cos^2 x + C\sin x + D = 0$$
$$A\sin^2 x + B\cos^2 x + C\cos x + D = 0$$

за допомогою тотожності $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ зводиться до вигляду:

$$A\sin^2 x + B(1 - \sin^2 x) + C\sin x + D = 0$$
$$A(1 - \cos^2 x) + B\cos^2 x + C\cos x + D = 0.$$

Приклад 3.10. Розв'яжіть рівняння $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\cos x = t$. Тоді дане рівняння набуде вигляду:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0.$$

Розв'язки квадратного рівняння:

$t_1 = 2$ – не задовольняє рівняння, тому що $|\cos x| \le 1$;

$t_2 = \frac{1}{2}$.

Повернемось до заміни:

$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

Розв’язавши найпростіше тригонометричне рівняння, отримаємо розв’язок:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

<u>Вправа 3.9.</u> Розв’яжіть рівняння:

1) $\sin^2 3x - 3\sin 3x + 2 = 0$; ($x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$);

2) $\cos^2 2x + \cos 2x - 6 = 0$; (розв’язків немає);

3) $\sin x + 2\cos^2 x = 1$; ($x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$);

4) $\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg} x - 3 = 0$; ($x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = \mathrm{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$);

5) $3\mathrm{ctg}^2 2x + \mathrm{ctg} 2x - 4 = 0$; ($x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} arcctg \frac{4}{3} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;);

2. Рівняння вигляду

$$A\cos 2x + B\cos x + C = 0,$$
$$A\cos 2x + B\sin x + C = 0$$

зводяться до квадратного рівняння використанням формул подвійного аргумента:

$$A(2\cos^2 x - 1) + B\cos x + C = 0,$$
$$A(1 - 2\sin^2 x) + B\sin x + C = 0.$$

<u>Приклад 3.11.</u> Розв’яжіть рівняння $\sin 3x - 3\cos 6x = 2$.

<u>Розв’язання.</u> Використаємо формулу подвійного аргументу для $\cos 6x$:

$$\sin 3x - 3(1 - 2\sin^2 3x) - 2 = 0.$$

Відкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$6\sin^2 3x + \sin 3x - 5 = 0.$$

Введемо заміну:

$$\sin 3x = t, |t| \leq 1.$$

Запишемо квадратне рівняння:

$$6t^2 + t - 5 = 0.$$

Знайдемо корені квадратного рівняння:

$$t_1 = -1;\ t_2 = \frac{5}{6}.$$

Отримаємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \sin 3x = -1, \\ \sin 3x = \dfrac{5}{6}, \end{array}\right.$$

звідси маємо відповідь:

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{5}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

<u>Вправа 3.10.</u> Розв’яжіть рівняння:

1) $\cos 2x + 3\sin x = 2$; ($x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$);

2) $\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0,25$; ($x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$);

3) $5\sin\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{3} + 3 = 0$; ($x = (-1)^{n+1}\pi + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$);

4) $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$; ($x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{3}) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$).

3. Однорідні рівняння другого порядку мають вигляд

$$A\sin^2 x + B\sin x \cdot \cos x + C\cos^2 x = 0, A \neq 0 \text{ або } B \neq 0.$$

Якщо $A \neq 0$, то розв'язки рівняння $\cos x = 0$ не є розв'язками вихідного рівняння. Поділивши обидві частини на $\cos^2 x$, одержимо:

$$A\operatorname{tg}^2 x + B\operatorname{tg} x + C = 0.$$

Якщо $C \neq 0$, то ділимо на $\sin^2 x$ (оскільки тепер $\sin^2 x \neq 0$).

Приклад 3.12. Розв'яжіть рівняння $7\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 15\cos^2 x = 0$.

Розв'язання. Поділимо дане рівняння на $\cos^2 x$, отримаємо:

$$7\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x - 15 = 0.$$

Введемо заміну:

$$\operatorname{tg} x = t.$$

Маємо квадратне рівняння:

$$7t^2 - 8t - 15 = 0.$$

Звідси знаходимо розв'язки квадратного рівняння:

$$t_1 = -1, t_2 = \frac{15}{7}.$$

Отримуємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{15}{7}, \end{array}\right.$$

звідси відповідь:

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z},$$

$$x=arctg\frac{15}{7}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

<u>Вправа 3.11.</u> Розв’яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x-5\sin x\cos x+6\cos^2 x=0$; ($x=\mathrm{arctg}2+\pi n, n\in\mathbb{Z}$;

$x=\mathrm{arctg}3+\pi k, k\in\mathbb{Z}$);

2) $2\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$; ($x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$;

$x=-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$);

3) $\sin^2\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=0$; ($x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$;

$x=2\mathrm{arctg}2+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$);

4) $\sin^2 x+3\cos^2 x-2\sin 2x=0$; ($x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; $x=\mathrm{arctg}3+\pi k, k\in\mathbb{Z}$);

5) $\cos^2 5x+7\sin^2 5x=4\sin 10x$; ($x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}, n\in\mathbb{Z}$;

$x=\frac{1}{5}\mathrm{arctg}\frac{1}{7}+\frac{\pi k}{5}, k\in\mathbb{Z}$);

4. Рівняння вигляду

$$A\sin^2 x+B\sin x\cdot\cos x+C\cos^2 x+D=0$$

зводиться до однорідного за допомогою основної тригонометричної тотожності: $(A+D)\sin^2 x+B\sin x\cdot\cos x+(C+D)\cos^2 x=0.$

<u>Приклад 3.13.</u> Розв’яжіть рівняння $3\sin^2 x+2\sin x\cos x=2$.

<u>Розв’язання.</u> Використаємо основну тригонометричну тотожність і отримаємо:

$$3\sin^2 x+2\sin x\cos x=2(\sin^2 x+\cos^2 x).$$

Відкриємо дужки, перенесемо все в ліву частину рівняння та зведемо подібні доданки:

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0.$$

Дане рівняння поділимо на $\cos^2 x$ і введемо заміну $\operatorname{tg} x = t$, отримаємо квадратне рівняння:

$$t^2 + 2t - 2 = 0,$$

звідси корені квадратного рівняння:

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Повернемось до заміни і розв'яжемо найпростіше тригонометричне рівняння:

$$\operatorname{tg} x = -1 \pm \sqrt{3},$$

$$x = \operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

<u>Вправа 3.12.</u> Розв'яжіть рівняння:

1) $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 14\cos^2 x - 2 = 0$; ($x = \operatorname{arctg}3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \operatorname{arctg}4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$);
2) $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2$; ($x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$);
3) $22\cos^2 x + 4\sin 2x = 7$; ($x = \operatorname{arctg}\frac{15}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$);
4) $2\cos^2 x + 2\sin 2x - 2 = 0$; ($x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$);
5) $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$; ($x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$);

5. До однорідних можна звести і рівняння $a\cos t + b\sin t = c$ у випадку раціональних $a, b, c,$ за допомогою переходу до половинного аргументу:

$$a\left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)+2b\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=c\left(\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}\right);$$

$$(a-c)\cos^2\frac{t}{2}-(a+c)\sin^2\frac{t}{2}+2b\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=0.$$

Приклад 3.14. Розв'яжіть рівняння $2\sin x-3\cos x=2$.

Розв'язання. Скористаємось формулами половинного аргументу і отримаємо:

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-3(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})=2(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}).$$

Відкриємо дужки, перенесемо все в ліву частину рівняння та зведемо подібні доданки:

$$\sin^2\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-5\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

Поділимо обидві частини на $\cos^2\frac{x}{2}$ і введемо заміну $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$.

Отримаємо квадратне рівняння:

$$t^2+4t-5=0,$$

звідси корені квадратного рівняння:

$$t_1=1, t_2=-5.$$

Повернемось до заміни і розв'яжемо сукупність тригонометричних рівнянь, отримавши:

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}, \\ x=-2\mathrm{arctg}5+2\pi n, n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Вправа 3.13. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin x-3\cos x=3$; ($x=\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; $x=2\mathrm{arctg}\frac{3}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$);

2) $3\sin\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=3$; ($x=\pi+4\pi n, n\in\mathbb{Z}$; $x=4\operatorname{arctg}\frac{1}{2-\sqrt{3}}+4\pi k, k\in\mathbb{Z}$);

3) $\sin 5x=\sqrt{3}(1+\cos 5x)$; ($x=-\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}, n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}, k\in\mathbb{Z}$;

4) $\sqrt{3}\sin(x-45°)+\sin(x+45°)=\sqrt{2}$; ($x=150°+360°n, n\in\mathbb{Z}$;

$x=60°+360°k, k\in\mathbb{Z}$).

3.4 Метод заміни змінної

I. Рівняння вигляду $a\sin x+b\cos x=c, (a, b\neq 0)$.

Розглянемо кілька способів розв'язування таких рівнянь.

1. Введення допоміжного кута.

   Очевидно, що $a^2+b^2\neq 0$. Покладемо

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi.$$

Тоді рівняння подамо у вигляді

$$\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)=c \Rightarrow \sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Отже, одержали просте рівняння, що має розв'язки за умови

$$-1\leq\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq 1.$$

Приклад 3.15. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3}\sin x+\cos x-2=0$.

Розв'язання. Перенесемо 2 до правої частини і поділимо на 2 обидві частини. Маємо:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=1.$$

Замінимо $\frac{\sqrt{3}}{2}$ на $\cos\frac{\pi}{6}$ і $\frac{1}{2}$ на $\sin\frac{\pi}{6}$. Отримаємо:

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x=1.$$

Використаємо формулу синуса суми й отримаємо:

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})=1.$$

Розв'яжемо найпростіше тригонометричне рівняння з аргументом $x+\frac{\pi}{6}$:

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Перенесемо $\frac{\pi}{6}$ у праву частину і зведемо подібні доданки. Маємо відповідь:

$$x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

<u>Вправа 3.14.</u> Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 15x+\sqrt{3}\cos 15x-2=0$; ($x=\frac{\pi}{90}+\frac{2\pi n}{15}, n\in\mathbb{Z}$);

2) $\sqrt{2}\sin 2x-\sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{3}=0$; ($x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$);

3) $\sin 3x-\cos 3x=\sqrt{\frac{3}{2}}$; ($x=(-1)^n\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$);

4) $\sin 5x+\cos 5x=\sqrt{2}\cos 13x$; ($x=-\frac{\pi}{32}+\frac{\pi n}{4}, n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi}{72}+\frac{\pi k}{9}, k\in\mathbb{Z}$);

5) $\cos 3x-\sin x=-\sqrt{3}(\sin 3x-\cos x)$; ($x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi}{12}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$).

2. Застосування універсальної підстановки.

Позначимо $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ і виразимо $\sin x$ та $\cos x$ через тангенс половинного кута:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Одержимо квадратне рівняння. Зауважимо, що функція $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ невизначена при $x=\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. Якщо ця множина є розв'язком даного рівняння, що рівносильно умові $b=-c,$ то використання універсальної підстановки може призвести до втрати цієї множини. Тому обов'язково треба перевіряти, чи будуть $x=\pi+2\pi n$ задовольняти рівняння.

<u>Приклад 3.16.</u> Розв'яжіть рівняння $2\sin 2x+3\operatorname{tg}x=5$.

<u>Розв'язання.</u> Областю визначення рівняння є всі дійсні числа, крім чисел виду:

$$\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Застосуємо універсальну підстановку і отримаємо рівняння:

$$\frac{4\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+3\operatorname{tg}x-5=0.$$

Помножимо рівняння на $1+\operatorname{tg}^2 x$ і зведемо подібні доданки:

$$3\operatorname{tg}^3 x-5\operatorname{tg}^2 x+7\operatorname{tg}x-5=0.$$

Зробимо заміну $\operatorname{tg}x=t$. Отримаємо:

$$3t^3 - 5t^2 + 7t - 5 = 0.$$

Одним із коренів рівняння є $t = 1$, тому розділимо многочлен $3t^3 - 5t^2 + 7t - 5$ на $t - 1$. Маємо:

$$(3t^2 - 2t + 5)(t - 1) = 0.$$

Оскільки рівняння $(3t^2 - 2t + 5) = 0$ не має дійсних коренів, то отримуємо:

$$\mathrm{tg}x = 1.$$

Звідси розв'язуємо найпростіше тригонометричне рівняння й отримуємо відповідь:

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Зауважимо, що в даному випадку не потрібно перевіряти, чи не є числа з множини $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, коренями даного рівняння, оскільки ці числа не входять до області визначення рівняння.

<u>Вправа 3.15.</u> Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x + \mathrm{tg}x = 2$; ($x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$);

2) $2(1 - \cos 2x) = \mathrm{tg}x$; ($x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$);

3) $1 + \cos x + \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 0$; ($x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$);

4) $3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\mathrm{tg}x$; ($x = \pm\mathrm{arctg}\sqrt{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = \pi m, m \in \mathbb{Z}$);

5) $\mathrm{tg}2x + \sin 2x = \frac{16}{15}\mathrm{ctg}x$; ($x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \pm\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$).

3. Зведення рівняння до квадратного

Піднесемо обидві частини рівності $a\sin x = c - b\cos x$ до квадрату і скористаємось підстановкою $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, дістанемо $(b^2 + a^2)\cos^2 x - 2bc\cos x + c^2 - a^2 = 0$.

Приклад 3.17. Розв'яжіть рівняння $2\sin x - 3\cos x = 3$.

Розв'язання. Перенесемо $3\cos x$ у праву частину рівняння і піднесемо обидві частини до квадрату. Отримаємо:

$$4\sin^2 x = 9 + 18\cos x + 9\cos^2 x.$$

Далі скористаємось підстановкою $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, і перенесемо все в праву частину рівняння, маємо:

$$13\cos^2 x + 18\cos x + 5 = 0.$$

Введемо заміну $\cos x = t$, отримаєм квадратне рівняння:

$$13t^2 + 18t + 5 = 0.$$

Знайдемо розв'язки квадратного рівняння:

$$t_1 = -\frac{10}{26}, t_2 = -1.$$

Перейдемо до сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{10}{26}, \\ \cos x = -1, \end{array}\right.$$

Розв'яжемо найпростіші тригонометричні рівняння й отримаємо відповіді:

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm(\pi - \arccos\dfrac{10}{26}) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Вправа 3.16. Розв’яжіть рівняння:

1) $3\sin x + 4\cos x = 3$; ($x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$);

2) $3\sin x - 4\cos x = 5$; ($x = 2\operatorname{arctg}3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$);

3) $5\sin x - 12\cos x = 13$; ($x = 2\operatorname{arctg}5 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$);

4) $4\sin x + 5\cos x = 6$; ($x = 2\operatorname{arctg}\frac{4 \pm \sqrt{5}}{11} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$).

II. Якщо рівняння містить функції $\sin 2x$ та $\sin x \pm \cos x$, то доцільно ввести заміну:

$$t = \sin x \pm \cos x.$$

Тоді $t^2 = 1 \pm \sin 2x$, звідки $\pm \sin 2x = t^2 - 1$ і рівняння зводиться до алгебраїчного.

Приклад 3.18. Розв’яжіть рівняння $2\sin 2x = 3(\sin x + \cos x)$.

Розв’язання. Введемо заміну:

$$\sin x + \cos x = t .$$

Тоді $t^2 = 1 + \sin 2x$, звідси $\sin 2x = t^2 - 1$. Отримаємо алгебраїчне рівняння:

$$2t^2 - 3t - 2 = 0,$$

корені якого дорівнюють:

$$t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Маємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=2, \\ \sin x+\cos x=-\dfrac{1}{2}, \end{array}\right.$$

Помножимо два рівняння сукупності на $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ і отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} \sin(x+\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}, \\ \sin(x+\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \end{array}\right.$$

перше рівняння сукупності розв'язків немає, а розв'язавши друге, будемо мати:

$$x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

<u>Вправа 3.17.</u> Розв'яжіть рівняння:

1) $1-\sin 2x+\sin x+\cos x=0$; ($x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$);

2) $1+\sin 2x=\cos x-\sin x$; ($x=\pm\dfrac{\pi}{4}+(8n-1)\dfrac{\pi}{4}, n\in\mathbb{Z}$);

3) $\sin x+\cos x=2{,}5+5\sin x\cos x$; ($x=(4n-1)\dfrac{\pi}{4}, n\in\mathbb{Z}$;

$x=(-1)^{k}\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{5}+(4k-1)\dfrac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$);

4) $\sin x-\cos x+5\sin x\cos x=1$; ($x=(-1)^{n}\dfrac{\pi}{4}+(4n+1)\dfrac{\pi}{4}, n\in\mathbb{Z}$);

III. Якщо рівняння містить функції $\sin 2x$ і $\operatorname{tg} x$ або $\operatorname{ctg} x$, то доцільно запровадити заміну $\operatorname{tg} x=t$, тоді $\sin 2x=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

Приклад 3.19. Розв'яжіть рівняння $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\cdot\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}=3$.

Розв'язання. Введемо заміну:

$$\mathrm{tg}\,x = t,$$

тоді

$$\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Підставивши заміну в рівняння і виконавши деякі перетворення, отримаємо неповне квадратне рівняння:

$$4t^2 - 8t = 0.$$

Знайдемо розв'язки:

$$t_1 = 0, t_2 = 3.$$

Маємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x = 0,\\ \mathrm{tg}x = 2,\end{array}\right.$$

звідси, розв'язавши найпростіші тригонометричні рівняння, отримаємо відповідь:

$$\left[\begin{array}{c}x = \pi n, n \in \mathbb{Z},\\ x = \mathrm{arctg}2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Вправа 3.18. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x + \mathrm{tg}x = 2$; ($x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$);

2) $\sin 2x + 2\mathrm{ctg}x = 3$; ($x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$);

3) $(1-\mathrm{tg}x)(1+\sin 2x)=1+\mathrm{tg}x$; ($x=(4n-1)\dfrac{\pi}{4}, n\in\mathbb{Z}$; $x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$).

IV. Якщо рівняння містить $\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{ctg}\, x$ та $\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{ctg}^2\, x$, то внаслідок заміни $\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{ctg}\, x = t$ отримаємо $\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{ctg}^2\, x = t^2 \mp 2$.

Приклад 3.20. Розв'яжіть рівняння $\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x+3\mathrm{tg}x+3\mathrm{ctg}x+4=0$.

Розв'язання. Винесемо спільний множник 3 за дужки й отримаємо:

$$\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x+3(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)+4=0.$$

Введемо заміну:

$$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x = t,$$

тоді піднісши обидві частини рівності до квадрату отримаємо:

$$\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{ctg}^2\, x = t^2 - 2.$$

Підставивши заміну, маємо квадратне рівняння:

$$t^2+3t+2=0.$$

Знаходимо розв'язки:

$$t_1=-1; t_2=-2.$$

Маємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x=-1,\\ \mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x=-2.\end{array}\right.$$

Розв'язуючи сукупність знаходимо, що

$$\mathrm{tg}x=-1,$$

звідси відповідь:

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Вправа 3.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $\mathrm{tg}^4 x+\mathrm{ctg}^4 x+\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=4$; ($x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$);

2) $\mathrm{tg}^3 x+\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x+\mathrm{ctg}^3 x=4$; ($x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$).

3.5 Оцінка лівої та правої частини рівняння

1. Деякі тригонометричні рівняння вдається розв'язати, використовуючи нерівності (тобто область значень синуса і косинуса):

$$-1\le \sin x\le 1,$$
$$-1\le \cos x\le 1.$$

Приклад 3.21. Розв'яжіть рівняння $\sin x+\sin 5x=2$.

Розв'язання. Оскільки область визначення синуса є проміжок $[-1;1]$, то маємо нерівності:

$$-1\le \sin x\le 1,$$
$$-1\le \sin 5x\le 1.$$

Додавши нерівності отримаємо:

$$-2\le \sin x+\sin 5x\le 2.$$

Отже рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases}\sin x=1,\\ \sin 5x=1,\end{cases}$$

оскільки рівність буде правильною лише тоді, коли обидві функції одночасно набуватимуть свого максимального значення. Розв'язавши найпростіші тригонометричні рівняння отримуємо відповідь:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}, \\ x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi k}{5}, k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Система має розв'язки лише тоді, коли рівняння

$$\frac{\pi}{2}+2\pi n=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}$$

має розв'язки на множині цілих чисел. У цьому випадку маємо розв'язки:

$$k=1+5n, n\in\mathbb{Z}$$

Підставивши розв'язки, отримуємо відповідь:

$$x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}(1+5n),$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Вправа 3.20. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 6x+\sin\frac{5x}{2}=2;$ ($x=\pi+4\pi n, n\in\mathbb{Z}$);

2) $3\cos 3x+\cos x=4;$ ($x=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$).

2. Рівняння вигляду $\sin^k x+\cos^n x=1, k, n=3,4,\ldots$

З означення функції $\sin x$ і $\cos x$ випливає, що

$$\sin^k x\le|\sin x|^k\le\sin^2 x;$$

$$\cos^n x\le|\cos x|^n\le\cos^2 x$$

при всіх $x\ne\frac{\pi m}{2}, m\in\mathbb{Z}$.

У цьому випадку

$$\sin^k x+\cos^n x<\cos^2 x+\sin^2 x<1,$$

тому розв'язок даного рівняння потрібно шукати у вигляді

$$x=\frac{\pi m}{2}, m\in\mathbb{Z}.$$

Щоб знайти розв’язок, треба перевірити, які з $x=\frac{\pi m}{2}, m\in\mathbb{Z}$ є розв’язками рівняння.

<u>Приклад 3.21.</u> Розв’яжіть рівняння $\sin^4 x-\cos^7 x=1$.

<u>Розв’язання.</u> Оскільки $0\le\sin^4 x\le 1$, то $\cos^7 x\le 0$. Отже дане рівняння матиме вигляд:

$$\sin^4 x+|\cos^7 x|=\sin^2 x+\cos^2 x.$$

Проте

$$\sin^4 x\le\sin^2 x, |\cos^7 x|\le\cos^2 x,$$

тому ця рівність виконується лише тоді , коли справджується така сукупність рівнянь:

$$\begin{cases}\sin^4 x=\sin^2 x,\\ |\cos^7 x|=\cos^2 x.\end{cases}$$

Отже, можливі два випадки:

$$\sin^2 x=1 \text{ і } \cos^7 x=0$$

або

$$\cos^7 x=-1 \text{ і } \sin^2 x=0,$$

звідси отримуємо відповідь:

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

або

$$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Вправа 3.21. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^4 x - \cos^7 x = 1$; ($x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$);

2) $3\sin^7 x + 5\cos^{16} x = 8$; (розв'язків немає).

3.6 Найпростіші рівняння з оберненими тригонометричними функціями

1. $\arcsin x = a, |a| \le \frac{\pi}{2}, x = \sin a$.
2. $\arccos x = a, 0 \le a \le \pi, x = \cos a$.
3. $\mathrm{arctg} x = a, |a| < \frac{\pi}{2}, x = \mathrm{tg} a$.
4. $\mathrm{arcctg} x = a, 0 < a < \pi, x = \mathrm{ctg} a$.

Розв'язуючи рівняння з аркфункціями треба враховувати їх області визначення, множини значень та монотонність. Якщо рівняння містить різні аркфункції, або аркфункції мають різні аргументи, то обчислюють значення деякої тригонометричної функції від обох частин рівняння, тобто рівність кутів замінюють рівністю значень тригонометричної функції від них. При цьому можлива поява сторонніх коренів, тому необхідна їх перевірка. Тригонометричні функції вибирають в залежності від того, в яких межах змінюється значення виразу. Зокрема, якщо значення виразів обох частин рівняння належить інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то беруть синус або тангенс від обох частин; якщо вони належать інтервалу $(0;\pi)$, то беруть косинус або котангенс.

Приклад 3.22. Розв'яжіть рівняння $\arcsin(2x-3)=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

$$2x-3=\sin\frac{\pi}{2}.$$

Обчислимо значення $\sin\frac{\pi}{2}$:

$$2x-3=1;$$

$$x=2.$$

Приклад 3.23. Розв'яжіть рівняння $\arccos(x^2-2)=\pi$

Розв'язання.

$$x^2-2=\cos\pi.$$

Обчислимо значення $\cos\pi$:

$$x^2-2=-1;$$

$$x^2-2+1=0.$$

Розв'яжемо квадратне рівняння, дискримінант дорівнює нулю, отже рівняння має один корінь:

$$x=1.$$

Приклад 3.24. Розв'яжіть рівняння $4\mathrm{arctg}(4x^2-12x+10)=\pi$.

Розв'язання. Поділимо рівняння на 4 й отримаємо:

$$\mathrm{arctg}(4x^2-12x+10)=\frac{\pi}{4};$$

$$4x^2-12x+10=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Обчислимо значення $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$ і зведемо подібні доданки:

$$4x^2-12x+10=1;$$

$$4x^2-12x+9=0.$$

Розв'яжемо квадратне рівняння і знайдемо відповідь:

$$x=1,5.$$

Приклад 3.25. Розв'яжіть рівняння $6\mathrm{arcctg}(x^2-8x+15+\sqrt{3})=\pi$.

Розв'язання. Поділимо рівняння на 6 й отримаємо:

$$\operatorname{arcctg}(x^2-8x+15+\sqrt{3})=\frac{\pi}{6};$$

$$x^2-8x+15+\sqrt{3}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}.$$

Обчислимо значення $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$:

$$x^2-8x+15+\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$

Зведемо подібні доданки й знайдемо корені квадратного рівняння:

$$x^2-8x+15=0;$$

$$x_1=5; x_2=3.$$

Вправа 3.22. Розв’яжіть рівняння:

1) $4\operatorname{arctg}(x^2-3x-3)-\pi=0$; ($x=1$; $x=4$);

2) $6\arcsin(x^2-6x+8,5)=\pi$; ($x=2$; $x=4$);

3) $\arcsin(x+1)=\frac{\pi}{6}$; ($x=-\frac{1}{2}$);

4) $\arccos(x^2-5x+7)=0$; ($x=2$; $x=3$);

5) $\operatorname{arctg}(x^2-4x+3+\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$; ($x=1$; $x=3$);

6) $4\operatorname{arcctg}(x^2-9x+15)-\pi=0$; ($x=2$; $x=7$).

4. Тригонометричні рівняння з параметрами

Розв’язати задачу чи рівняння з параметрами – означає знайти при яких значеннях параметрів завдання має розв’язки і знайти ці розв’язки, які здебільшого залежать від самих параметрів.

Приклад 4.1. Розв’язати рівняння $a(\sin x+\cos x)=b(\cos x-\sin x)$.

Розв’язання. Перенесемо все в ліву частину рівняння, відкриємо дужки та зведемо спільні доданки:

$$(a+b)\sin x+(a-b)\cos x=0.$$

Одержимо однорідне рівняння, якщо $a \neq \pm b$. Поділимо дане рівняння на $\cos x$ й отримаємо:

$$(a+b)\mathrm{tg}x+a-b=0;$$

$$(a+b)\mathrm{tg}x=b-a.$$

Звідси, якщо $a+b \neq 0, a \neq -b$, маємо найпростіше тригонометричне рівняння:

$$\mathrm{tg}x=\frac{b-a}{(a+b)};$$

$$x=\mathrm{arctg}\frac{b-a}{a+b}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Якщо ж $a+b=0, a=-b$, то дане рівняння також найпростіше:

$$(a-b)\cos x=0,$$

поділимо на $(a-b)$ й отримаємо:

$$\cos x=0;$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Якщо $a=b=0$, то $x\in(-\infty;+\infty)$.

Відповідь: Якщо $a\neq -b$, то $x=\operatorname{arctg}\frac{b-a}{a+b}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$;

якщо $a=-b$, то $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$;

якщо $a=b=0$, то $x\in(-\infty;+\infty)$.

Приклад 4.2. Розв'язати рівняння $\sin x=a\sin 3x$.

Розв'язання. Використаємо формулу для синуса потрійного кута:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,$$

і перенесемо $a\sin 3x$ у ліву частину рівняння, маємо:

$$\sin x-a(3\sin x-4\sin^3 x)=0.$$

Відкриємо дужки і винесемо $\sin x$ за дужки:

$$\sin x(1-3a+4a\sin^2 x)=0,$$

звідки отримуємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ 1-3a+4a\sin^2 x=0.\end{array}\right.$$

Перше рівняння має розв'язок, який є розв'язком даного рівняння при будь якому a:

$$x=\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Друге рівняння перепишемо у вигляді:

$$4a\sin^2 x = 3a - 1.$$

Якщо $a = 0$, то рівняння немає розв'язків.

Якщо $a \neq 0$, то поділимо дане рівняння на $4a$:

$$\sin^2 x = \frac{3a-1}{4a}.$$

Використаємо формулу пониження степеня й отримаємо:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{3a-1}{4a}.$$

Знайдемо з рівняння $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \frac{1-a}{2a}.$$

Ране рівняння має розв'язки, якщо

$$\left|\frac{1-a}{2a}\right| \leq 1,$$

звідси отримуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{1-a}{2a} \leq 1, \\ \dfrac{1-a}{2a} \geq -1. \end{cases}$$

Отримуємо: $a \geq \dfrac{1}{3}$ і $a \leq -1$.

Таким чином, при $a \geq \dfrac{1}{3}$ і $a \leq -1$, рівняння має розв'язок:

$$\cos 2x = \frac{1-a}{2a};$$

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos(\frac{1-a}{2a}) + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: Якщо $a \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$, то

$x = \pm\frac{1}{2}\arccos(\frac{1-a}{2a}) + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Якщо $a \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)$, то $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

<u>Приклад 4.3.</u> Розв'язати рівняння $\frac{\sin x}{2-\cos x} = a\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

<u>Розв'язання.</u> Очевидно, що $x = \pi + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$ і $a-$ будь-яке дійсне число. Знаменник даного рівняння $2-\cos x$ не перетворюється у 0 ні при якому значенні x, тому помножимо рівняння на $2-\cos x$ й отримаємо:

$$\sin x = a\operatorname{tg}\frac{x}{2}(2-\cos x).$$

Використаємо універсальну підстановку:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

та виразимо $\sin x$ і $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = a\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(2-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right).$$

Відкриємо дужки і перенесемо все в ліву частину рівняння й будемо мати:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+a\operatorname{tg}\frac{x}{2}\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=0.$$

Оскільки знаменник дробів $1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ даного рівняння не дорівнює нулю ні при будь-яких значеннях x, то помножимо наше рівняння на $1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ й отримаємо:

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2})+a\operatorname{tg}\frac{x}{2}(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2})=0.$$

Відкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$(2-a)\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3a\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=0.$$

Винесемо $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ за дужки й отримаємо:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(2-a-3a\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)=0,$$

звідси отримаємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{x}{2}&=0,\\ 3a\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}&=2-a.\end{aligned}\right.$$

Розв'язком першого рівняння є:

$$x=2\pi n, n\in\mathbb{Z},$$

при довільному значенні параметра a.

Друге рівняння, якщо $a\neq 0$, можна записати у вигляді:

$$\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{2-a}{3a}.$$

Це рівняння має розв’язок, якщо $\frac{2-a}{3a}\geq 0$. Розв’язавши нерівність отримуємо, що $0\leq a\leq 2$. Таким чином, при $0<a\leq 2$ рівняння має розв’язок:

$$x=\pm\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2-a}{3a}}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

При $a=0$ рівняння не має розв’язків.

Відповідь: Якщо $a\in(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$, то $x=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Якщо $a\in(0;2]$, то $x=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$, $x=\pm\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2-a}{3a}}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Приклад 4.4. Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\cos^2 x+(2a+6)\cos x+(2a-7)(1-4a)=0$ має розв’язки.

Розв’язання. Розглянемо це рівняння як квадратне, де зробимо заміну $t=\cos x$ й отримаємо:

$$t^2+(2a+6)t+(2a-7)(1-4a)=0,$$

Розв’язками цього рівняння будуть $t_1=2a-7$ і $t_2=1-4a$, тому повернемось до заміни й отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=2a-7,\\ \cos x=1-4a.\end{array}\right.$$

Тоді шукані значення параметра a будуть розв’язки сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}|2a-7|\leq 1,\\ |1-4a|\leq 1.\end{array}\right.$$

Звідси отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} 3 \le a \le 4, \\ 0 \le a \le \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $3 \le a \le 4$ або $0 \le a \le \dfrac{1}{2}$.

<u>Вправа 4.1.</u> Розв'яжіть рівняння:

1) $(a^2+2)\sin^2 x + 4a\sin x\cos x = a^2+3$; (Якщо $|a| \ge 1$, то $x = \operatorname{arctg}(2a \pm \sqrt{3a^2-3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; якщо $|a| \le 1$, то рівняння розв'язків немає.);

2) $\cos^4 x - (a+2)\cos^2 x - (a+3) = 0$; (Якщо $a \in [-3;-2]$, то $x = \pm\arccos\sqrt{a+3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; якщо $a \in (-\infty;-3) \cup (-2;+\infty)$, то рівняння немає розв'язків);

3) $\sin^6 x + \cos^6 x = a$; (Якщо $a \in \left[\dfrac{1}{4};1\right]$, то $x = \pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{8a-5}{3} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; якщо $a \in \left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right) \cup (1;+\infty)$, то рівняння немає розв'язків);

4) $\dfrac{a\sin x + b}{b\cos x + a} = \dfrac{a\cos x + b}{b\sin x + a}$; (Якщо $b \ne a\sqrt{2}$, то $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; якщо $b = a\sqrt{2} \ne 0$, то $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; якщо $b = -a\sqrt{2} \ne 0$, то $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.);

5) $\sin x + \cos(a+x) + \cos(a-x) = 2$; (Якщо $a \in \left[-\dfrac{\pi}{6} + \pi n; \dfrac{\pi}{6} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$, то $x = \arccos\dfrac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}} \pm \arccos\dfrac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; при інших значення рівняння розв'язків немає).

5. Тригонометричні нерівності

5.1 Найпростіші тригонометричні нерівності

Розв'язуючи тригонометричні нерівності, зручно користуватися одиничним колом або графіком відповідної функції. Нагадаємо, що на колі зростання кута відбувається проти годинникової стрілки. Розв'язки нерівності знаходимо на проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції, а тоді їх періодично продовжуємо.

1. $\sin x \geq a$ (рис. 15):
   якщо $a < -1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$;
   якщо $-1 \leq a \leq 1$, то $\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
   якщо $a > 1$, то нерівність розв'язків не має.

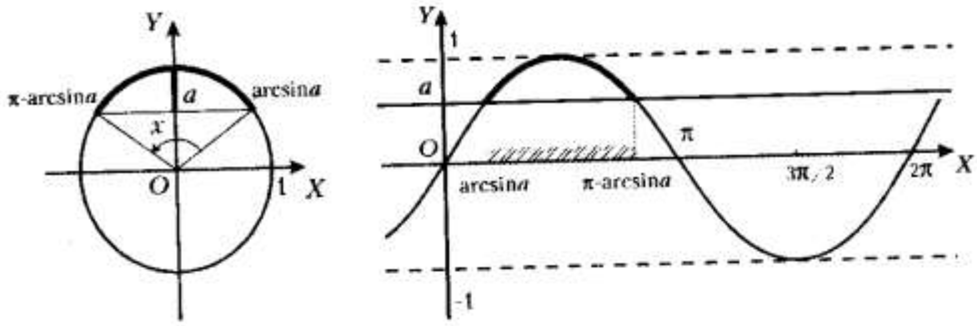

Рис. 15

2. $\sin x \leq a$ (рис. 16):
   якщо $a < -1$, то нерівність немає розв'язків;
   якщо $-1 \leq a \leq 1$, то $\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi + \arcsin a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
   якщо $a > 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

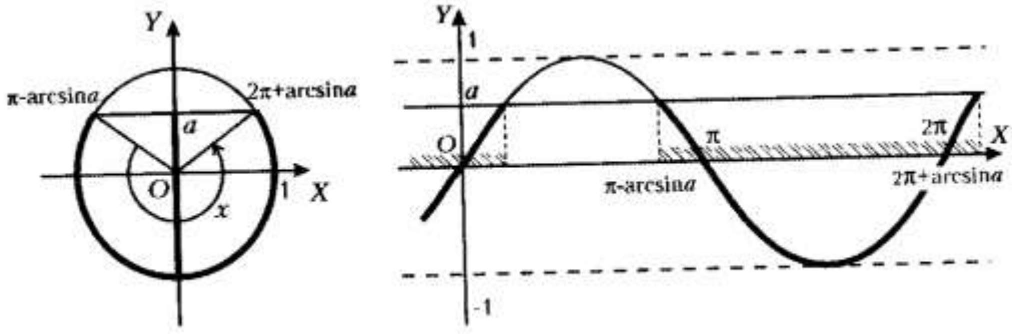

Рис. 16

Приклад 5.1. Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Скористаємося означенням синуса. Виділимо на одиничному кола множину точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ (рис. 5.1).

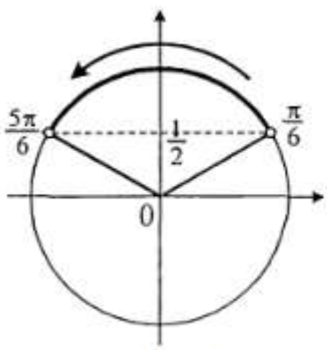

Рис. 5.1

Використовуючи періодичність функції $f(x) = \sin x$, запишемо:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Цей запис треба розуміти як об'єднання:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n) = \ldots \cup (\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi) \cup (\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi) \cup \ldots$$

Приклад 5.2. Розв'яжіть нерівність $\sin 2x \le -\frac{2}{3}$.

Розв'язання. Замінимо $2x$ на t. Отримаємо:

$$\sin t \le -\frac{2}{3}.$$

Виділимо на одиничному колі точки, ординати яких менші за $-\frac{2}{3}$ (рис. 5.2).

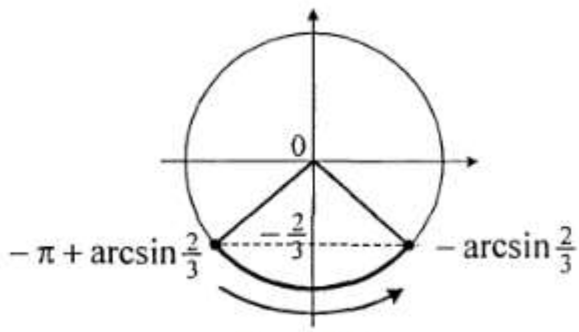

Рис. 5.2.

Використовуючи періодичність функції $f(t) = \sin t$, отримаємо:

$$-\pi + \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n \le t \le -\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Повернемось назад до заміни та поділимо нерівності на 2, отримаємо:

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + \pi n \le x \le -\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x \in (-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + \pi n; -\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + \pi n), n \in \mathbb{Z}.$

3. $\cos x \ge a$ (рис. 17):
   якщо $a \le -1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$;
   якщо $-1 \le a \le 1$, то $-\arccos a + 2\pi n \le x \le \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

якщо $a > 1$, то нерівність розв'язків не має.

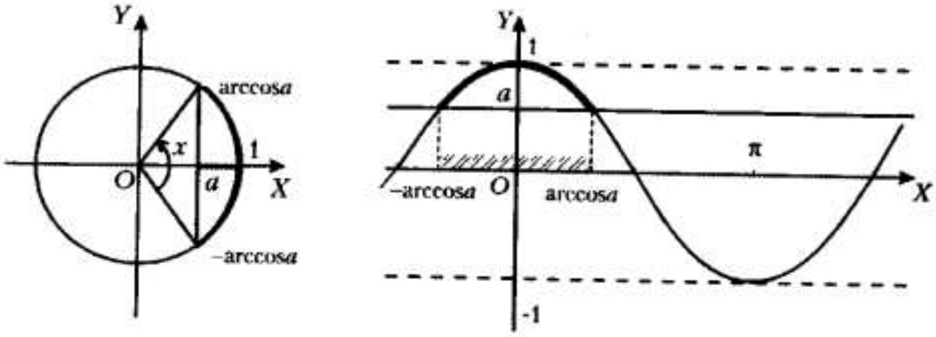

Рис. 17

4. $\cos x \leq a$ (рис. 18):

якщо $a < -1$, то нерівність розв'язків не має;

якщо $-1 \leq a \leq 1$, то $\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

якщо $a > 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

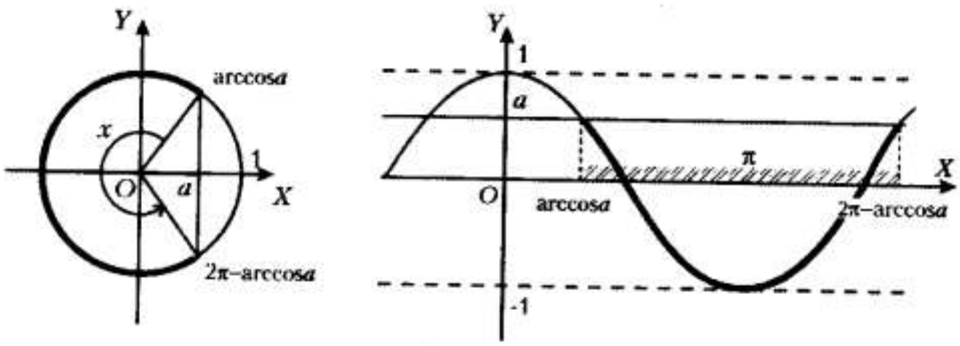

Рис. 18

<u>Приклад 5.3.</u> Розв'яжіть нерівність $\cos(3x+1) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>Розв'язання.</u> Замінимо $3x+1$ на t. Отримаємо:

$$\cos t \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких менші або дорівнюють $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 5.3).

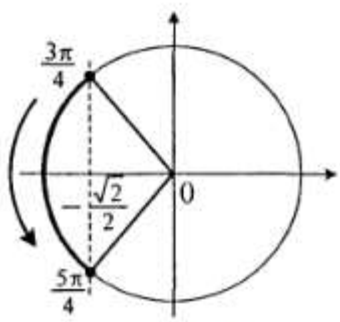

Рис. 5.3.

Отримаємо:

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le t \le \frac{5\pi}{4}+2\pi n.$$

Повернемось до заміни і виконаємо елементарні перетворення:

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le 3x+1 \le \frac{5\pi}{4}+2\pi n;$$

$$\frac{3\pi}{4}-1+2\pi n \le 3x \le \frac{5\pi}{4}-1+2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi n \le x \le \frac{5\pi}{12}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi n; \frac{5\pi}{12}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$

<u>Приклад 5.4.</u> Розв'яжіть нерівність $\cos(\frac{\pi}{3}-4x) > \frac{4}{7}$.

<u>Розв'язання.</u> Так як функція $f(x) = \cos x$ парна, то маємо:

$$\cos(4x-\frac{\pi}{3}) > \frac{4}{7}.$$

Замінимо $4x-\frac{\pi}{3}$ на t, отримаємо:

$$\cos(t) > \frac{4}{7}.$$

Виділимо на одиничному колі точки, абсциси яких більші за $\frac{4}{7}$ (рис. 5.4).

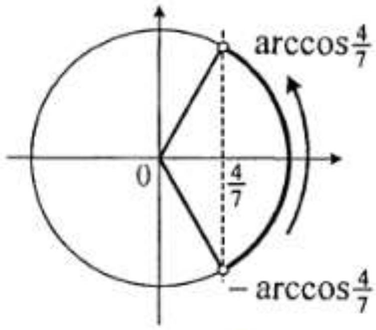

Рис. 5.4.

Маємо:

$$-\arccos\frac{4}{7}+2\pi n<t<\arccos\frac{4}{7}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Повернемось назад до заміни та виконаємо елементарні перетворення з нерівностями:

$$-\arccos\frac{4}{7}+2\pi n<4x-\frac{\pi}{3}<\arccos\frac{4}{7}+2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{4}{7}+2\pi n<4x<\frac{\pi}{3}+\arccos\frac{4}{7}+2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{7}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{7}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x\in\left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{7}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{7}+\frac{\pi n}{2}\right), n\in\mathbb{Z}.$

5. $\operatorname{tg} x \geq a$ (рис. 19):

при

$$a \in \mathbb{R}\text{: } \operatorname{arctg} a+\pi n \leq x<\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

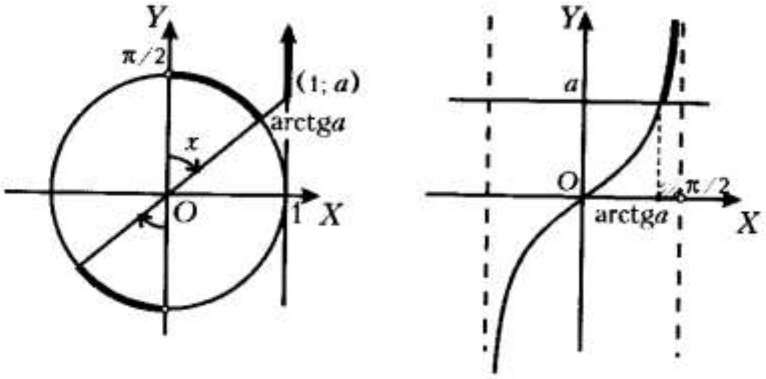

Рис. 19

6. $\operatorname{tg} x \leq a$ (рис. 20):

при

$$a \in \mathbb{R}: -\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

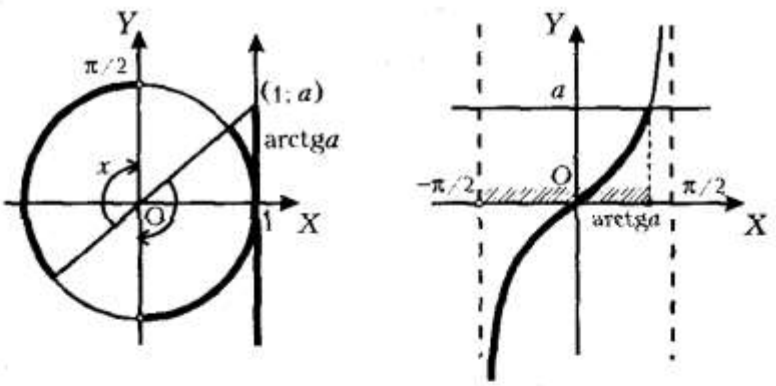

Рис. 20

Приклад 5.5. Розв’яжіть нерівність $\operatorname{tg} x \geq 1$.

Розв’язання. Побудуємо графік функції

$$f(x) = \operatorname{tg} x,$$

обмежившись проміжком довжиною в період – $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Проведемо пряму $y = 1$, (рис. 5.5).

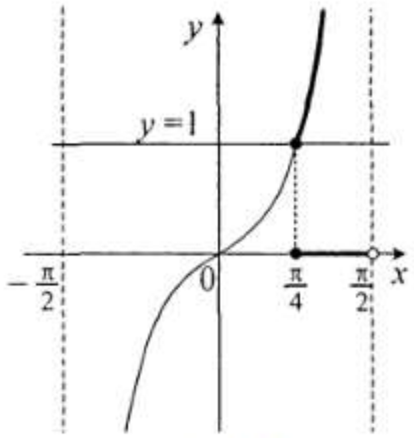

Рис. 5.5.

Знайдемо проміжок осі абсцис, на якому графік проходить не нижче від побудованої прямої. Цей проміжок і буде розв'язком нерівності, що побудований на заданому інтервалі. З урахуванням періодичності функції $f(x) = \operatorname{tg} x$, отримаємо:

$$\frac{\pi}{4}+\pi n \le x \le \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

7. $\operatorname{ctg} x \ge a$ (рис.21):

   при

$$a \in \mathbb{R}: \pi n < x \le \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

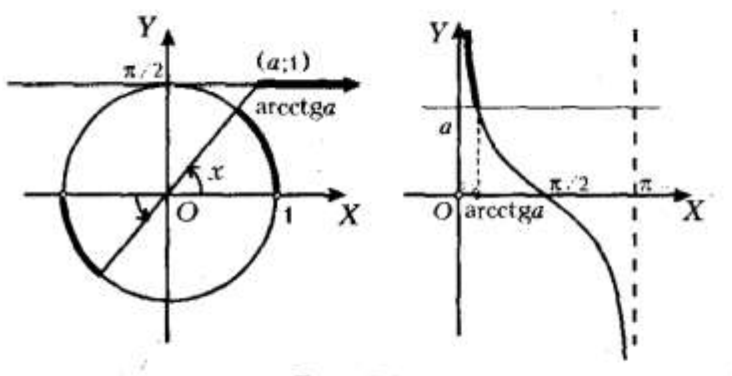

Рис. 21

8. $\operatorname{ctg} x \leq a$ (рис. 22):

при

$$a \in \mathbb{R}\colon \operatorname{arcctg} a + \pi n \leq x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

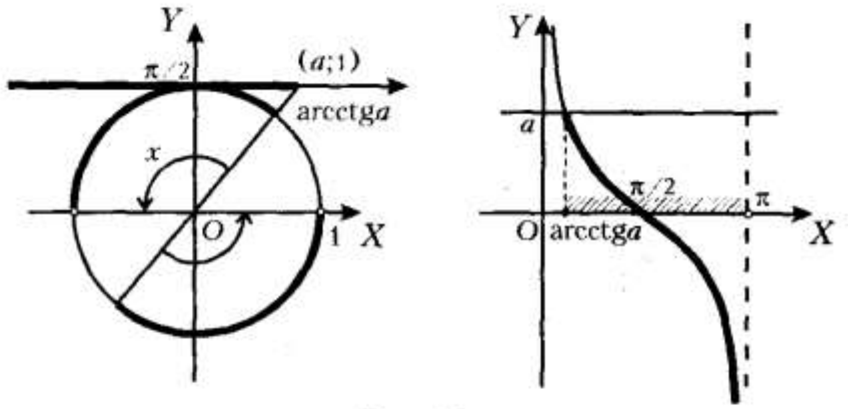

Рис. 22

Приклад 5.6. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x > -\frac{1}{3}$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції

$$f(x) = \operatorname{ctg} x,$$

обмежившись проміжком довжиною в період – $(0;\pi)$. Проведемо пряму $y = -\frac{1}{3}$, (рис. 5.6).

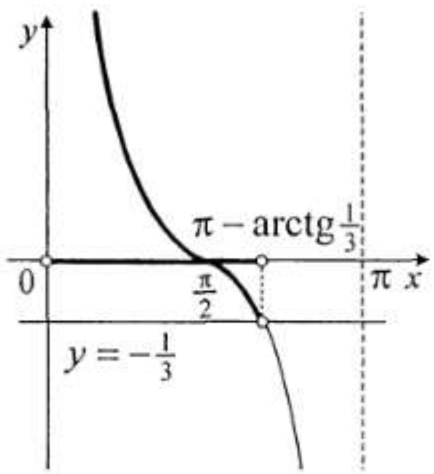

Рис. 5.6.

На осі абсцис знайдемо проміжок, на якому графік проходить вище побудованої прямої. З урахуванням періодичності функції $f(x) = \operatorname{ctg} x$ отримаємо:

$$\pi n < x < \pi - \operatorname{arcctg}\frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x \in \left(\pi n; \pi - \operatorname{arcctg}\frac{1}{3} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

<u>Вправа 5.1.</u> Розв'яжіть нерівності:

1) $\sin x > -\frac{1}{2}$; ($x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$);

2) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; ($x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$);

3) $\sin 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; ($x \in \left(-\frac{3\pi}{8} + \pi n; -\frac{\pi}{8} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$);

4) $\sin 3x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; ($x \in \left[\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{7\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}\right], n \in \mathbb{Z}$);

5) $\sin x \le -1$; ($x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$);

6) $\sin(1 - 2x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; ($x \in \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} + \pi n; \frac{5\pi}{8} + \frac{1}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$);

7) $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; ($x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$);

8) $\cos 2x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; ($x \in \left(-\frac{5\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$);

9) $\cos 2x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$; ($x \in \left(\frac{3\pi}{8} + \pi n; \frac{5\pi}{8} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$);

10) $\cos(2x - 2) > \frac{1}{2}$; ($x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 1 + \pi n; \frac{\pi}{6} + 1 + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$);

11) $2\cos 4x + \sqrt{3} \le 0$; ($x \in \left[\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}; \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}\right], n \in \mathbb{Z}$);

12) $\cos x \ge 1$; ($x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$);

13) $\operatorname{tg} x \ge -1$; ($x \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$);

14) $\operatorname{tg} x \le 2$; ($x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} 2 + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$);

15) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{4} < 6$; ($x \in \left(-2\pi + 4\pi n; 4\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$);

16) $\operatorname{tg}(2-3x) > \sqrt{3}$; ($x \in \left(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{\pi n}{3}; -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{\pi n}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$);

17) $\operatorname{tg}(x - \dfrac{\pi}{3}) < -\sqrt{3}$; ($x \in \left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$);

18) $\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}$; ($x \in \left(\pi n; \dfrac{\pi}{6} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$);

19) $\operatorname{ctg} 2x < -1$; ($x \in \left(\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}; \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$);

20) $\operatorname{ctg} x < 0$; ($x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$);

21) $\operatorname{ctg}(x - \dfrac{\pi}{4}) \geq 1$; ($x \in \left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$);

22) $\operatorname{ctg}(2x-3) < -4$; ($x \in \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{\pi n}{3}; \dfrac{2}{3} + \operatorname{arcctg} 4 + \dfrac{\pi n}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$).

6. Нестандартні тригонометричні рівняння та нерівності

При розв'язуванні нестандартних тригонометричних завдань виявляється ступінь опанування логіки математичних суджень.

У цьому розділі розглядаються тригонометричні рівняння, в яких оцінка правої та лівої частини дає змогу зробити відповідні висновки для подальшого розв'язування завдань.

<u>Приклад 6.1.</u> Розв'яжіть рівняння $\lg\sin x = \lg\cos x$.

<u>Розв'язання.</u> Дане рівняння еквівалентне системі:

$$\begin{cases} \sin x = \cos x, \\ \sin x > 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

Перше рівняння є однорідним, поділимо його на $\cos x$ й отримаємо:

$$\operatorname{tg} x = 1.$$

Потрібно вибрати ті розв'язки даного рівняння, які задовольняють умови $\sin x > 0$ і $\cos x > 0$. Геометрично – це кути кулі І чверті $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

<u>Приклад 6.2.</u> Розв'яжіть рівняння $\cos(\pi\lg x) + \sin(\pi\lg x) = 1$.

<u>Розв'язання.</u> Ведемо допоміжний кут, тобто поділимо дане рівняння на $\sqrt{2}$ й отримаємо:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\pi\lg x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\pi\lg x)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Замінимо $\frac{\sqrt{2}}{2}$ на $\sin\frac{\pi}{4}$ і $\cos\frac{\pi}{4}$, будемо мати:

$$\sin\frac{\pi}{4}\cos(\pi\lg x)+\cos\frac{\pi}{4}\sin(\pi\lg x)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Застосуємо формулу синуса суми й отримаємо:

$$\sin(\pi\lg x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

звідки знаходимо розв'язки найпростішого тригонометричного рівняння:

$$\pi\lg x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Перенесемо $\frac{\pi}{4}$ в праву частину рівняння і поділимо на π:

$$\lg x=-\frac{1}{4}(-1)^n\frac{1}{4}+n, n\in\mathbb{Z}.$$

Отримали логарифмічне рівняння, розв'язками якого є:

$$x=10^{-\frac{1}{4}+(-1)^n\frac{1}{4}+n}, n\in\mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x=10^{-\frac{1}{4}+(-1)^n\frac{1}{4}+n}, n\in\mathbb{Z}$.

<u>Приклад 6.3.</u> Розв'яжіть рівняння $\lg(10^x+\sin x-\frac{1}{2})=x,$ якщо $x\in(0;\pi)$.

<u>Розв'язання:</u> За означенням логарифма рівняння набуде вигляду:

$$10^x+\sin x-\frac{1}{2}=10^x,$$

звідки отримаємо найпростіше тригонометричне рівняння та його розв’язок:

$$\sin x = \frac{1}{2},$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки за умовою задачі $x \in (0;\pi)$, то маємо, що $n = 0{,}1$, тобто $x_1 = \frac{\pi}{6}; x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Відповідь: $x_1 = \frac{\pi}{6}; x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

<u>Приклад 6.4.</u> Розв’яжіть нерівність $4^{2\sin(\pi + x)} - 2 < 4^{\cos(\frac{\pi}{2}+x)}$.

<u>Розв’язання.</u> Використаємо формули зведення та спростимо дану нерівність:

$$4^{-2\sin x} - 4^{-\sin x} - 2 < 0.$$

Введемо заміну $4^{-\sin x} = t$. Оскільки $-1 \le -\sin x \le 1$, то $\frac{1}{4} \le 4^{-\sin x} \le 4$ або ж $t \in \left[\frac{1}{4};4\right]$. Тоді нерівність буде мати вигляд:

$$t^2 - t - 2 < 0.$$

Розв’язавши дану нерівність отримуємо, що:

$$-1 < t < 2.$$

Порівнявши знайдену подвійну нерівність з ОДЗ t, знаходимо:

$$\frac{1}{4} \le t < 2, \text{ або } \frac{1}{4} \le 4^{-\sin x} < 2.$$

Останню нерівність можна подати у вигляді:

$$4^{-1} \le 4^{-\sin x} < 4^{\frac{1}{2}},$$

звідки

$$-1 \le -\sin x < \frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2} < \sin x \le 1.$$

Нерівність $\sin x \le 1$ виконується при будь-яких значеннях x, тому розв’язуємо

$$\sin x > \frac{1}{2},$$

звідки

$$x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

<u>Приклад 6.5.</u> Розв’яжіть рівняння $2\cos\frac{x}{10} = 2^x + 2^{-x}$.

<u>Розв’язання.</u> У правій частині дано рівняння є додатні взаємообернені величини. Використаємо нерівність Коші (середнє арифметичне n додатних чисел більше (або дорівнює) їх середнього геометричного), то отримаємо, що $2^x + 2^{-x} \ge 2$. Так само маємо:

$$\left|\cos\frac{x}{10}\right| \le 1.$$

Тому дане рівняння є еквівалентним системі рівнянь:

$$\begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 2, \\ \cos\dfrac{x}{10} = 1. \end{cases}$$

Звідки отримуємо, що

$$x = 0.$$

Відповідь: $x = 0.$

Вправа 6.1. Розв’яжіть рівняння:

1) $5 \cdot 4^{1-\cos^2 x} - 7 \cdot 2^{\sin^2 x} = 6$; ($x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$);

2) $\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = 2$; ($x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$);

3) $\mathrm{tg}(\pi \sin x) = 1$; ($x = (-1)^n \arcsin(\dfrac{1}{4} + k) + \pi n, n \in \mathbb{Z}, k = -1, 0$);

4) $4 \cdot \left(\dfrac{1}{16}\right)^{\sin^2 x} + 3 \cdot 4^{\cos 2x} - 16^{\frac{\sin 2x}{2}} = 0$; ($x = \dfrac{\pi}{8} + (-1)^n \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$).

Висновки

У даній магістерській роботі розглянуто методику розв'язання тригонометричних рівнянь і нерівностей.

У першому розділі подано означення тригонометричних і обернених тригонометричних функцій, їх властивості та графіки. Розглянуто поняття парності, періодичності та знаків тригонометричних функцій. Наведено таблицю значень тригонометричних функцій деяких кутів.

У другому розділі подано основні тригонометричні тотожності, формули зведення, формули подвійного, потрійного та половинного аргументів, основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями. Доведено деякі з формул.

У третьому розділі розглянуто різні методи розв'язування тригонометричних рівнянь. Зокрема, метод заміни змінної, метод розкладання рівняння на множники, зведення тригонометричного рівняння до алгебраїчного, оцінки лівої та правої частини рівняння. Подано загальні розв'язки найпростіших тригонометричних рівнянь та найпростіших рівнянь з оберненими тригонометричними функціями. Наведено приклади з розв'язанням тригонометричними рівняннями та вправи для самостійного опрацювання з відповідями.

У четвертому розділі розглянуто тригонометричні рівняння з параметрами.

У п'ятому розділі подано найпростіші тригонометричні нерівності. Дано загальні розв'язки найпростіших тригонометричних нерівностей. Наведено приклади розв'язання тригонометричних нерівностей та вправи.

У шостому розділі розглянуто нестандартні тригонометричні рівняння та нерівності.

Список літератури

1. Ясінський В. В. Тригонометрія: навчальний посібник / В. В. Ясінський. – К.: НТУУ «КПІ», 2008. – 90с.
2. Мерзляк А. Г. Тригонометрія: Вчимося розв’язувати задачі / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. – К.: Генеза, 2008. – 352 с.
3. Ломонос Л. М. Тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи: навчальний посібник / Л. М. Ломонос, Н. П. Муранова, С. І. Гадалін. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2006. – 148 с.
4. Бородуля И. Т. Тригонометрические уравнения и неравенства: кн. Для учителя / И. Т. Бородуля. – М.: Просвещение, 1989. – 239 с.
5. Фалин Г. И. Обраные тригонометричиские функции. 10 – 11 классы / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. – М.: Издательство «Экзамен», 2012. – 221 с.
6. Лурье М. В. Тригонометрия. Техника решения задач: учеб. Пособие / М. В. Лурье. – М.: Издательство УНЦ ДО, 2004. – 160 с.
7. Панчишкин А. А. Тригонометрические функции в задачах / А. А. Панчишкин, Е. Т. Шавгулидзе. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 160 с.
8. Новиков А. И. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства / А. И. Новиков. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 260 с.
9. Азаров А.И. Тригонометрические уравнения: Учеб. пособие / А.И.Азаров, О.М.Гладун, В.С.Федосенко. — М.: 000«Тривиум », 1994. — 160 с.
10. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл., закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. В. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 400 с.

11. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – К.: Генеза, 2018. – 448 с.
12. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К.: Видавничий дім « Освіта», 2018. – 336 с.
13. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підру. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 512 с.
14. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. В. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 352 с.
15. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. Рівень / Є. П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.
16. Крамор В. С. Тригонометрические функции: (Система упражнений для самостоят. изучения). Пособие для учащихся / В. С. Крамор, П. А. Михайлов. – М.: Просвещение, 1983. – 159 с.
17. Цыпкин А. Г. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы / А. Г. Цыпкин, А. И. Пинский. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 576 с.
18. Новиков А. И. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства: Пособие для поступающих / А. И. Новиков. – Р.: Рязан. гос. радиотехн. акад., 2005. – 288с.