ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ,ТОПОЛОГІЇ ТА ОСНООВ МАТЕМАТИКИ

# Пояснювальна записка

до магістерської (кваліфікаційної) роботи

магістр

(освітній рівень)

на тему

# Підтвердження нерівностей

Виконав: студент групи МТОм-21
напряму підготовки (спеціальності)
014 – «Середня освіта (Математика)»
Ригус С.Я.

Керівник кандидат фіз.мат. наук,
Доцент, Гуран І. Й.
(прізвище та ініціали)

Рецензент____________________
(прізвище та ініціали)

Львів – 2021

# ЗМІСТ

# ВСТУП

На додаток до традиційних завдань, пов'язаних з основними математичними проблемами, такими як пошук витоків різних типів рівнянь та їх систем, Розв’язок нерівностей, деякі значення необхідно аналізувати та порівнювати. Це можуть бути як числові рівнянняи, так і змінні рівнянняи. деяких випадках було показано, що такі рівнянняи пов'язані відношеннями ">", "≥", "<", "≤" для всіх таких наборів, а не для окремих допустимих змінних значень. Прикладами таких співвідношень можуть бути нерівності $a^2+b^2 \geq 2ab$, $a^2+\frac{1}{a^2} \geq 2$, $\sin x < x < tgx, \ \left(x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$, $\lg\left(1+\sin^2 x\right) \geq 0$ та ін. У таких випадках говорять не про розв’язування, а про підтвердження нерівностей.

Перш ніж перейти безпосередньо до змісту, зробимо невеликий екскурс в історію математики.

Поняття «більше» і «менше», поряд з концепціями рівності, виникли через необхідність порівняння різних вимірів. Стародавні греки використовували поняття нерівності. Зокрема, Архімед (ІІІ століття до нашої ери) також обчислював довжину кола, встановив, що «периметр будь-якого кола втричі більше однієї сьомої його діаметра, але більше, ніж десяти сімдесят перших». Інакше кажучи, Архімед вказав границі числа π: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Перші геометричні нерівності також добре відомі: «нахил до цієї прямої з тієї ж точки менше, ніж перпендикуляр до кривої», «сторона трикутника менша за суму двох сторін», «велика сторона протилежна більшому куту трикутника»). Вони, як і раніше, належать давньогрецькій математиці і містяться у знаменитих «Принципах» Евкліда.

Знаменита книга Евкліда "Початок" ілюструє ряд нерівностей Наприклад, він довів, що середнє геометричне двох позитивних чисел не більше їх середнього арифметичного, тобто, що вірна нерівність $\sqrt{\grave{a}b} \le \frac{a+b}{2}$.

У «Математичному збірнику» Паппа Олександрійського в III ст., доводиться: «Якщо $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ($a,\ b,\ c,\ d$ – додатні числа), то $ad > bc$«. Однак усі ці аргументи здебільшого ґрунтувалися на усній геометричній термінології.

Тепер, мовою нерівностей, постановки завдань часто генеруються у багатьох додатках математики. Наприклад, багато економічних проблем зведено до вивчення систем лінійних нерівностей із великою кількістю змінних. Часто та чи інша нерівність служить важливим допоміжним інструментом, основною лемою, яка дозволяє Доказати чи спростувати існування будь-яких об'єктів (скажімо, рішень рівняння), оцінити їх кількість та провести класифікацію. Наприклад, щоб вирішити рівняння

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 2^{1-|y|},$$

потрібно побачити, що його ліва частина більша або рівна 2, а права – не більша 2, тобто скористатися нерівностями $a+\frac{1}{a} \ge 2,\ a>0$ та $2^{-|a|} \le 1$. Рівність у цьому прикладі можлива лише тоді, як у обох частинах рівняння взято значення 2. А це буде виконуватися лише при $x = y = 0$.

В даний час системи нерівності та нерівності широко використовуються в теоретичних дослідженнях та при вирішенні важливих практичних завдань. Нерівності – це не просто допоміжний інструмент. У кожній області математики - алгебри та теорії чисел, геометрії та топології, теорії ймовірностей та теорії функцій, математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь, теорії інформації та дискретної математики - основні результати можуть бути представлені у вигляді нерівностей. Без них не можуть обійтися фізика, астрономія чи хімія.

Багато розділах математики, особливо у математичному аналізі, прикладної математики, нерівності зустрічаються частіше, ніж рівняння. Наприклад, рішення практично важливих рівнянь зустрічаються лише у дуже рідкісних випадках - як числа чи формули, а наближеного рішення в математиці завжди необхідно вказувати оцінку похибки, тобто доказ деяких нерівностей.

Проблеми, завдання, які можуть бути дуже складними без використання наукової нерівності, – часті гості на математичних олімпіадах школярів. Вирішення таких проблем традиційно є серією дуже простих спостережень. Але логіка та ідеї всього цього ланцюжка базових ланок-міркувань виходять за рамки методів та прийомів шкільного курсу. Крім того, процес отримання та вивчення нерівностей та їх застосування є неформальним та складним для алгоритмізації.

Дуже важливим питанням методики навчання є запровадження теми «Підтвердження нерівностей». Відповідні завдання вирішуються насамперед методом алгебри, що є одним з кращих способів розвитку незалежного творчого мислення. За допомогою спеціально підібраних завдань, які цікавлять учням своєю простотою і вирішення їх не відразу здається, можна показати учням красу, простоту і гармонійність логічних міркувань. Проблеми, що доводять нерівність, часто вирішуються у різний спосіб. Це дозволяє учням привернути увагу не тільки до найбільш раціонального та простого способу вирішення даної проблеми, але і до методів, що використовуються для вирішення інших завдань, і в деяких випадках змінюються таким самим чином.

# РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ТРАДИЦІЙНІ МЕТОДИ ДОВЕДЕНЬ НЕРІВНОСТЕЙ

## 1.1. Підтвердження нерівностей за допомогою означення

За означенням вважається, що $a > b$ ($a < b$), якщо різниця $a - b$ є плюсовим (мінусовим) числом. Відповідно,щоб Доказати нерівності $f(a,\ b, \dots, k) > g(a,\ b, \dots, k)$ на заданій множині значень змінних $a,\ b, \dots, k$ достатньо визначити різницю $f(a,\ b, \dots, k) - g(a,\ b, \dots, k)$ і показати, що вона є позитивною для даних значень змінних. $a,\ b, \dots, k$. Аналогічну логіку можна використовуватиме докази нерівностей форми. $f < g,\ f \geq g,\ f \leq g$.

Ось кілька прикладів таких доказів.

Завдання 1.1. Доказати, що для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконуємо нерівність

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$ (нерівність Коші).

Підтвердження. Розберемо наступне рівняння $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ і покажемо, що вона не може бути від'ємною. Отже

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Відповідно, що рівняння $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ не може бути мінусовим при довільних невід'ємних значеннях $a$ та $b$. Тому різниця $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ невід'ємна. Це означає, що $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Зазначимо, що знак рівності можливий у разі, якщо $a = b$.

Завдання 1.2. Доказати, що $a^2+4b^2+3c^2+10+\pi>2a+12b+6c$.

Підтвердження. Утворимо різницю

$a^2+4b^2+3c^2+10+\pi-(2a+12b+6c)$

і покажемо, що вона додатна. Перегрупувавши доданки, отримуємо

$$(a^2-2a+1)+(4b^2-12b+9)+(3c^2-6c+3)+\pi-3=(a-1)^2+(2b-3)^2+3(c-1)^2+\pi-3$$

Відповідно, що одержаний рівняння додатний при довільних значеннях $a$, $b$ та $\tilde{n}$. Нерівність доведено.

Завдання 1.3. Доказати, що якщо $a+b+c\geq 0$, то $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$.

Підтвердження. Перетворимо різницю $a^3+b^3+c^3-3abc$ наступним чином:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=(a+b+c)((a+b)^2-ac-bc+c^2-3ab)=$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right).$$

Рівняння, що за умовою вийшов $a+b+c\geq 0$, не може бути мінусовим. Це завершує підтвердження нерівності. Знак рівності можливий у випадках $a+b+c=0$ та $a=b=c$.

Завдання 1.4. Доказати, що якщо $ab>0$, то $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

Підтвердження. Маємо

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0.$$

Завдання 1.5. Доказати, що для довільного $a$ виконуємо нерівність

$$\frac{a^2}{1+a^4}\leq\frac{1}{2}.$$

Підтвердження. Маємо

$$\frac{a^2}{1+a^4}-\frac{1}{2}=\frac{2a^2-1-a^4}{2(1+a^4)}=-\frac{(a^2-1)^2}{2(1+a^4)}\leq 0.$$

Цим самим нерівність доведено.

Завдання 1.6. Доказати, що якщо $a+b\geq 0$, $a\neq 0,\ b\neq 0$, то

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Підтвердження. Знаходимо

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{a^3+b^3-ab^2-a^2b}{a^2b^2}=\frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{a^2b^2}=\frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2}\geq 0.$$

Відповідно,якщо $a+b\geq 0$, $a\neq 0,\ b\neq 0$, то $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Завдання 1.7. Доказати нерівність $\frac{x^3}{y^2}\geq 3x-2y$ ($x,\ y$ – додатні числа).

Підтвердження. Маємо

$$\frac{x^3}{y^2}-3x+2y=\frac{x^3-3xy^2+2y^3}{y^2}=\frac{(x-y)(x^2+xy-2y^2)}{y^2}=\frac{(x-y)^2(x+2y)}{y^2}\geq 0.$$

Звернемо увагу, що використаний метод посилення нерівностей може бути використаний для доказу інших нерівностей. (див., наприклад, задачу 1. 5. 12).

Завдання 1.8. Доказати, що якщо $x>y>z$, то $x^2y+y^2z+z^2x>x^2z+y^2x+z^2y$.

Підтвердження. Маємо

$$x^2y+y^2z+z^2x-x^2z-y^2x-z^2y=xy(x-y)-(xz+yz)(x-y)+z^2(x-y)=$$
$$=(x-y)(xy-xz-yz+z^2=(x-y)(z-y)(z-x).$$

Згідно з умовою задачі перший множник одержаного рівнянняу додатний, а два інші – від'ємні, тобто весь рівняння додатний.

Завдання 1.9. Доказати нерівність $1+2a^4\geq a^2+2a^3$.

Підтвердження. Підтвердження випливає з наступних перетворень:

$$1+2a^4-a^2-2a^3=2a^3(a-1)-(a^2-1)=(a-1)(2a^3-a-1)=(a-1)^2\left(2a^2+1\right)\geq 0.$$

Знак рівності можливий лише у випадку, коли $a=1$.

Завдання 1.10. Доказати, що якщо $a\neq 2$, то

$$\frac{1}{a^2-4a+4}>\frac{2}{a^3-8}.$$

Підтвердження. Підтвердження випливає із наступних співвідношень:

$$\frac{1}{a^2-4a+4}-\frac{2}{a^3-8}=\frac{a^2+2a+4-2(a-2)}{(a-2)^2(a^2+2a+4)}=\frac{a^2+8}{(a-2)^2((a+1)^2+3)}>0.$$

Завдання 1.11. Доказати нерівність $a^4 + b^4 \ge ab^3 + a^3 b$.

Підтвердження. Зробимо такі операції з рівнянням:

$$a^4 + b^4 - ab^3 - a^3 b = a^3(a-b) - b^3(a-b) = (a-b)^2(a^2 + ab + b^2).$$

Оскільки $(a-b)^2 \ge 0$, а рівняння $a^2 + ab + b^2$ набуває лише позитивних значень (дискримінація даного квадратного тричлена по довільній змінній негативна), то нерівність доведено. І можливо лише за наявності знака рівності коли $a = b$.

## 1.2. Синтетичний метод Підтвердження нерівностей

Суть цього методу в тому, що за допомогою певних перетворень нерівність, яку необхідно Доказати, виникає з відомих(очевидних, або їх ще називають опорних) нерівностей. Тому часто використовуються нерівності:

а) $(a-b)^2 \ge 0$, б) $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ при $a \ge 0,\ b \ge 0$, в) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$ при $ab > 0$,

г) $ax^2 + bx + c > 0$ при $a > 0,\ b^2 - 4ac < 0$.

Логічна схема такого Підтвердження виглядає у вигляді імплікацій

$$A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots \to A_n \to B,$$

де $A_1$ – деяка початкова вірна нерівність, $A_i\ (i = 2,\ 3, \ldots,\ n)$ – отримані з неї вірні нерівності, $B$ – нерівність, яку потрібно Доказати. Цей метод дуже ефективний, але не завжди зрозуміло, які очевидні невідповідності будуть використані для початку доказів. Відповідь це питання іноді дає аналітичний метод, який ми Розберемо у наступному пункті.

Ось кілька прикладів те, що використовувався синтетичний метод.

Завдання 1.12. Доказати, що для довільних $a \ge 0,\ b \ge 0$, $ñ \ge 0,\ d \ge 0$ виконуємо нерівність

$$\frac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}.$$

Підтвердження. Нам відомо, що при заданих обмеженнях на змінні виконуються нерівності $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, $\frac{ñ+d}{2} \ge \sqrt{cd}$. Застосувавши нерівність Коші до лівих частин записаних нерівностей та використавши записані вище співвідношення, отримуємо

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \ge \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \ge \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd},$$

або $\frac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}$. Рівність можлива у разі, якщоодночасно виконуються умови $a=b,\ c=d$ та $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$, тобто, коли $a=b=c=d$.

Завдання 1.13. Доказати, що $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$ для $n=2,\ 3,\ 4,\dots$.

Підтвердження. Використаємо у ролі опорних наступні нерівності Коші:

$$\frac{n+1}{2} \ge \sqrt{n\cdot 1},\quad \frac{(n-1)+2}{2} \ge \sqrt{(n-1)\cdot 2},\quad \frac{(n-2)+3}{2} \ge \sqrt{(n-2)\cdot 3},\ \dots,$$

$$\frac{2+(n-1)}{2} \ge \sqrt{2\cdot(n-1)},\quad \frac{1+n}{2} \ge \sqrt{1\cdot n}.$$

Перемноживши їх, отримуємо

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ge \sqrt{n\cdot 1\cdot(n-1)\cdot 2\cdot(n-2)\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2\cdot(n-1)\cdot 1\cdot n} = n!.$$

Оскільки у першій опорній нерівності при $n>1$ рівність неможлива, то остаточно отримуємо строгу нерівність, тобто, що $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$.

Завдання 1.14. Доказати, що при $a>0,\ b>0$, $ñ>0$ виконуємо нерівність

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9.$$

Підтвердження. Перший спосіб. Використаємо очевидні нерівності $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \ge 2$ та $\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \ge 2$. Додавши їх, отримуємо $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \ge 6$.

Запишемо одержане співвідношення у виді

$$\left(1+\frac{a}{b}+\frac{ñ}{b}\right)+\left(1+\frac{b}{a}+\frac{ñ}{a}\right)+\left(1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\geq 9,$$

або

$$\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{c}\geq 9.$$

Винісши у лівій частині нерівності за дужки рівняння $a+b+c$, отримуємо нерівність, яку потрібно було Доказати. Знак рівності виконуємо при $a=b=c$.

Другий спосіб. Використаємо визначитий вище спосіб Підтвердження нерівностей за допомогою означення. Зробимо такі операції з рівнянням:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1-9=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)-6=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-2\right)=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)^2}{ac}+\frac{(b-c)^2}{bc}\geq 0.$$

Відповідно,задана нерівність вірна.

Завдання 1.14. Доказати нерівність (нерівність Коші – Буняковського)

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n\right)^2.$$

Підтвердження. Розберемо очевидні нерівності

$(a_1-\lambda b_1)^2\geq 0$, $(a_2-\lambda b_2)^2\geq 0$,, $(a_n-\lambda b_n)^2\geq 0$.

Додавши їх, отримаємо нерівність $\lambda^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2-2\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geq 0$, яка виконуємо при довільному дійсному числі $\lambda$. Оскільки старший коефіцієнт $\sum_{i=1}^{n}b_i^2$ одержаного квадратного відносно $\lambda$ тричлена додатний, то його дискримінант не може бути плюсовим. Тому

$$D=4\left(a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n\right)^2-4\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\leq 0.$$

Звідси отримуємо потрібну нерівність.

Завдання 1.15. Доказати, що для довільних додатних чисел $a$, $b$

виконуємо нерівність $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b$.

Підтвердження. Використаємо, як опорні, дві очевидні нерівності $\frac{a^2}{b}\geq 2a-b$ та $\frac{b^2}{a}\geq 2b-a$. Додаючи їх, отримуємо нерівність, яку потрібно було Доказати. Знак рівності виконуємо тільки у випадку, коли $a=b$.

Завдання 1.16. Доказати, що для довільних дійсних чисел $a,\ b,\ c$ виконуємо нерівність $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

Підтвердження. Додавши очевидні нерівності $(a-b)^2\geq 0,\ (b-c)^2\geq 0,\ (a-c)^2\geq 0$, отримуємо

$$2(a^2+b^2+c^2)-2ab-2bc-2ac\geq 0.$$

З одержаного співвідношення випливає нерівність, яку ми доводимо. Рівність виконуємо тільки у випадку $a=b=c$.

Завдання 1.17. Доказати, що при $a_i>0,\ i=2,\ 3,\dots,n$ виконуємо нерівність

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2.$$

Підтвердження. Розберемо очевидні нерівності

$$\left(\sqrt{a_1}-\frac{\lambda}{\sqrt{a_1}}\right)^2\geq 0,\ \left(\sqrt{a_2}-\frac{\lambda}{\sqrt{a_2}}\right)^2\geq 0,,\ \left(\sqrt{a_n}-\frac{\lambda}{\sqrt{a_n}}\right)^2\geq 0.$$

Додавши їх, отримаємо нерівність

$$\lambda^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}-2n\lambda+\sum_{i=1}^{n}a_i\ \geq 0,$$

яка виконуємо при довільному дійсному числі $\lambda$. Тому на дискримінант $D$ одержаного відносно $\lambda$ квадратного тричлена накладаємо умову

$$\frac{1}{4}D=n^2-(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\leq 0.$$

Звідси отримуємо необхідну нерівність. Трохи згодом ми Розберемо інші засоби доказу таких нерівностей, у тому числі за допомогою скалярного добутку та його функцій.

Завдання 1.18. Доказати, що для довільних додатних чисел $a,\ b,\ c$ виконуємо нерівність

$$\frac{a+b+c}{3+a+b+c} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Розв’язок. Додавши три очевидні нерівності

$$\frac{a}{3+a+b+c} < \frac{a}{1+a},\ \frac{b}{3+a+b+c} < \frac{b}{1+b},\ \frac{c}{3+a+b+c} < \frac{c}{1+c},$$

отримуємо потрібну нерівність.

## 1.3. Аналітичний метод доведення нерівностей

Іноді може бути виявлено, що застосування вищевказаних методів не призводить до очікуваного результату, тому що доказ нерівності через плутанину та складність переходів може бути не визначено, а синтетичний метод не застосовується. Оскільки незрозуміло, які нерівності підтримуються, то краще продовжити доказ. Один із можливих варіантів у цьому випадку – використання аналітичного методу.

Його суть полягає в тому, що після серії переходів нерівності, які необхідно Доказати, виходить деяка істинна нерівність. Мовою логіки реалізуємо наступну схему наступного пошуку:

$$B \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots \to A_n,$$

де $B$ – нерівність, яку потрібно Доказати, $A_i\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ – отримані з неї нерівності, $A_n$ – кінцева вірна нерівність. Реалізація такої схеми носить назву аналізу Евкліда. Природно, що відшукання нерівності $A_n$ не може завершити Підтвердження, оскільки імплікація $B \to A_n$ може бути вірною і у випадку, коли твердження $B$ – хибне. Тому наступним етапом Підтвердження повинно бути обґрунтування можливості здійснення зворотних міркувань, тобто істинності імплікацій

$$A_n \to A_{n-1} \to \ldots \to A_2 \to A_1 \to B.$$

Фактично, ми зараз реалізуємо схему синтетичного методу та вихідну опорну нерівність цього методу (у нашому випадку – це твердження $A_n$) відома.

Наведемо приклади подібних доведень.

Завдання 1.19. Доказати, що для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконуємо нерівність

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(Завдання 1.1, Розв’язок якого тут реалізується іншим методом).

Підтвердження. Зробимо такі операції  з рівнянням:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \geq 0,$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0.$$

Одержана нерівність вірна для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$. Тепер Відповідно, що з неї можна одержати попередню нерівність, з якої в свою чергу – нерівність, що потрібно було Доказати.

Завдання 1.20. Доказати, що для довільних чисел $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконуємо нерівність

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Підтвердження. Відповідно, що якщо $a+b=0$, то виконуємо рівність і твердження вірне. При $a+b \neq 0$ Завдання зводиться до Підтвердження нерівності $a^2 - ab + b^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ або нерівності $3a^2 - 6ab + 3b^2 \geq 0$, яка очевидна.

Інший спосіб Підтвердження цієї нерівності, що використовує ідеї опуклості функції, буде наведено у розділі 2. 5 (Завдання 2. 5.).

Завдання 1.21. Доказати, що для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконуємо нерівність $\sqrt{a^2+b^2} \le a+b$.

Підтвердження. Після піднесення до квадрату обох частин нерівності, маємо

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 \le (a+b)^2 \Rightarrow a^2+b^2 \le a^2+2ab+b^2.$$

Отримуємо вірну нерівність $2ab \ge 0$. Відповідно, що крім неї, вірними будуть і кожна з попередніх нерівностей.

Завдання 1.22. Доказати, що для довільних $a>0,\ b>0$ виконуємо нерівність

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Підтвердження. Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 \ge \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2.$$

Звідси отримуємо

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \ge a+b \Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \ge 0.$$

Одержана нерівність відповідно до умови задачі вірна, і з неї тепер можна отримати всі попередні нерівності у зворотному порядку, а серед них – і задану.

Завдання 1.23. Доказати, що якщо $a+b \ge 0$, то $ab(a+b) \le a^3+b^3$.

Підтвердження. Знайдемо різницю правої та лівої частин:

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2 = a^2(a-b)-b^2(a-b)=(a-b)^2(a+b) \ge 0.$$

Тепер, використовуючи отриману нерівність як вихідну і рухаючись у зворотному порядку, ми отримуємо нерівність, яку необхідно Доказати.

Завдання 1.24. При яких значеннях параметра $k$ нерівність

$$a^2+2ab+2b^2+b+k>0$$

виконуємо при довільних $a,\ b$?

Розв’язок. Маємо

$$a^2+2ab+2b^2+b+k=(a+b)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{4}.$$

Одержаний рівняння буде плюсовим при довільних $a,\ b$, якщо $k>\frac{1}{4}$.

Завдання 1. 3. 7. Доказати, що при $n\ge 1$ виконуємо нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}.$$

Підтвердження. Перетворимо нерівність до виду $1+\sqrt{n(n-1)}<\sqrt{n(n+1)}$, звідки, після піднесення до квадрату, отримуємо

$$2\sqrt{n(n-1)}<2n-1 \Leftrightarrow 4n^2-4n<(2n-1)^2.$$

Природно, що отримана нерівність правильна, оскільки можна підтримувати переходи у зворотному порядку. Це доводить заявлену нерівність.

Завдання 1.25. Знайдемо найменше значення рівнянняу $2x^2+5y^2-4xy-4x-2y+7$.

Розв'язок. Перетворимо заданий рівняння наступним чином:

$$2x^2+5y^2-4xy-4x-2y+7=(x-2y)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+2.$$

Тепер видно, що найменше значення рівнянняу дорівнює 2 і досягається воно при $x=2,\ y=1$. Фактично ми довели нерівність $2x^2+5y^2-4xy-4x-2y+7\ge 2$.

Завдання 1.26. Доказати нерівність $x^{10}+x^2+1\ge 3x^4$.

Підтвердження. Зробимо такі операції з рівнянням:

$$x^{10}+x^2+1-3x^4=(x^2-1)x^8+(x^2-1)x^6+(x^2-1)x^4-(x^2-1)\cdot 2x^2-(x^2-1)=$$

$$=(x^2-1)(x^8+x^6+x^4-2x^2-1)=$$

$$=(x^2-1)\cdot\left((x^2-1)x^6+(x^2-1)\cdot 2x^4+(x^2-1)\cdot 3x^2+(x^2-1)\right)=$$

$$=(x^2-1)^2\cdot(x^6+2x^4+3x^2+1).$$

Одержаний рівняння не може бути мінусовим, що доводить задану нерівність. Відповідно, що знак рівності буде тільки у випадку, коли $x=\pm 1$.

Завдання 1.27. Знайдемо найменше значення функції

$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

Розв'язок. Перетворимо рівняння, перемножуючи два крайні та два середні множники:

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = (x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1) = (x^2+5x+5)^2 - 1.$$

Відповідно, що значення функції буде найменшим, коли найменшим є перший доданок, тобто при тих значеннях $x$, які є коренями рівняння $x^2+5x+5=0$. Знаходимо $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$. При знайдених значеннях

$$f_{\min} = f\left(\frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = -1.$$

## 1.4. Підтвердження нерівностей методом від супротивного

Підтвердження нерівностей цим способом полягає в тому, що заперечується початкове твердження, тобто знак > ($\geq$, <, $\leq$) у нерівності замінюється на $\leq$ (відповідно <, $\geq$, >). Після цього обґрунтовують, що таке співвідношення неможливе.

Наведемо приклади.

Завдання 1.28. Доказати, що для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$, $\tilde{n} \geq 0,\ d \geq 0$ виконуємо нерівність

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Підтвердження. Припустімо,при деяких значеннях параметрів $a,\ b,\ c$ та $d$ виконуємо нерівність $\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$. Після піднесення до квадрату обох невід'ємних частин нерівності та очевидних спрощень, одержуємо

$$ad + bc < 2\sqrt{abcd} \Leftrightarrow \frac{ad+bc}{2} < \sqrt{(ad)\cdot(bc)},$$

що суперечить нерівності Коші. Відповідно,наше припущення невірне. А це доводить початкову нерівність. Рівність можлива, якщо для заданих чисел виконуємо умова $ad = bc$.

Завдання 1.29. Доказати, що для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0$ та $ñ \geq 0,$ виконуємо нерівність

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Підтвердження. Припустімо,існує набір невід'ємних чисел $a,\ b$ та $c$, для яких виконуємо нерівність

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Піднесемо до квадрату невід'ємні частини нерівності. Одержуємо $(a+b+c)^2 > 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, звідки отримуємо $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc<0$ або

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(c-b)^2<0,$$

що неможливо. Тому початкова нерівність вірна. Рівність можлива, якщо для заданих чисел виконуємо умова $a = b = c$.

Завдання 1.30. Доказати, що при $a \neq b$ і $ab > 0$ число $\sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-1\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-1\right)$ додатне.

Підтвердження. Перепишемо задане число у виді $\frac{a}{\sqrt{b}}-\sqrt{a}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{b}$ і Припустімо,воно не є плюсовим. Тоді виконуємо нерівність

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 \leq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \leq a+b.$$

Звідси отримуємо $a^3+b^3-a^2b-ab^2 \leq 0$ або

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2 = a^2(a-b)-b^2(a-b) = (a-b)^2(a+b) \leq 0.$$

Результуючий зв'язок не задовольняється жодним із значень змінних, що задовольняють стан проблеми. Відповідно,початкове припущення неправильне. Відповідно,це число позитивне.

Завдання 1.31. Доказати, що для всіх дійсних значень $x$ виконуємо нерівність

$$(x-6)(x-9)(x^2-5x+4)+x^2+73 \geq 10x.$$

Підтвердження. Нехай $(x-6)(x-9)(x^2-5x+4)+x^2+73 < 10x$. Перетворимо різницю рівнянняів у лівій та правій частині нерівності наступним чином:

$$(x-6)(x-9)(x^2-5x+4)+x^2+73-10x=(x-6)(x-9)(x-1)(x-4)+x^2+73-10x=$$
$$=(x^2-10x+9)(x^2-10x+24)+x^2-10x+73=t(t+15)+t+64=(t+8)^2<0,$$

де $t=x^2-10x+9$. Відповідно, що одержане співвідношення неможливе, а це говорить про невірність припущення і доводить задану нерівність.

Завдання 1.32. Якщо $a+b \geq 0$, то $ab(a+b) \leq a^3+b^3$. Доказати.

Підтвердження. Припустімо,виконуємо нерівність $ab(a+b) > a^3+b^3$, тобто, що рівняння $a^3+b^3-ab(a+b)$ від'ємний. Перетворимо одержаний рівняння. Маємо

$$a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2.$$

Оскільки, відповідно до умови задачі, одержаний рівняння не може бути мінусовим, то припущення невірне.

## 1.5. Метод підсилення при доведенні нерівностей

Припустимо, нам потрібно Доказати нерівність, $A > B$, де $A, B$ – деякі числові рівняння або рівняння із змінними. Ми вважаємо, що це Відповідно, інакше нерівність легко доводиться. $A_1 > B_1$. Якщо нам вдасться Доказати нерівності $A > A_1$ та $B_1 > B$, то, Відповідно, що Завдання буде розв'язаною. Це випливає з ланцюжка нерівностей $A > A_1 > B_1 > B$. Іноді такий ланцюжок може бути довшим, а іноді навіть коротшим, якщо $A_1 = B_1$. Наприклад, щоб Доказати числову нерівність $\log_6 7 > \log_{2013} 2012$, достатньо зауважити, що

$\log_6 7 > 1$, а $\log_{2013} 2012 < 1$. На підтвердження нерівності цей прийом називається методом посилення.

При застосуванні цього методу часто використовується співвідношення $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq 0,\ b \geq 0$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ при $ab > 0$, $\frac{a^2}{b} \geq 2a - b$ при $b > 0$, $\frac{a}{b} > \frac{a}{b+1}$ при $a > 0,\ b > 0$.

Наведемо приклади подібних доведень.

Завдання 1. 5. 1. Доказати нерівність

$$\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^3}\right) \cdot \ldots \left(1 - \frac{1}{2013^3}\right) > \frac{1}{2}.$$

Підтвердження. Маємо

$$\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2013^3}\right) > \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right) =$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\ldots(2013-1)(2013+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 2013^2} = = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2012 \cdot 2014}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 2013^2} = \frac{2014}{2 \cdot 2013} > \frac{1}{2}.$$

Завдання 1.33. Доказати, що при $n = 2,\ 3,\ 4, \ldots$ виконуємо нерівність

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Підтвердження. Маємо

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Додаючи дані нерівності, отримуємо

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Відповідно, $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1$.

Завдання 1.34. Доказати нерівність

$$43 < \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2012} + \sqrt{2013}} < 44.$$

Підтвердження. Позбудемося ірраціональності у знаменниках дробів.

Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1,\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2},...,\ \frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}=\sqrt{2013}-\sqrt{2012},$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}=$$
$$=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+...+\left(\sqrt{2013}-\sqrt{2012}\right)=\sqrt{2013}-1.$$

Для Підтвердження нерівності залишається зауважити, що

$$\sqrt{2013}-1<\sqrt{45^2}-1=44;\quad \sqrt{2013}-1>\sqrt{44^2}-1=43.$$

Завдання 1. 35. Доказати нерівність $513^{18}>624^{17}$.

Розв’язок.

$$513^{18}>512^{18}=2^{162}>2^{161}=128^{23}>125^{23}=5^{69}>5^{68}=625^{17}>624^{17}.$$

Завдання 1.36. Доказати нерівність

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}<5,$$

якщо у кожному з доданків використано 2013 радикалів.

Підтвердження.

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}<$$
$$<\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{8}}}}=3+2=5.$$

Завдання 1.37. Для додатних чисел $a,\ b$ Доказати нерівність $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}\geq a+b$.

Підтвердження. Використовуючи двічі нерівність $\frac{x^2}{y}\geq 2x-y$, де $x>0,\ y>0$, отримуємо

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}\geq\frac{a}{b}(2a-b)+\frac{b}{a}(2b-a)=2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)-(a+b)\geq$$
$$\geq 2\left(2a-b+2b-a\right)-(a+b)=a+b,$$

що і потрібно було Доказати.

Завдання 1.38. Доказати нерівність $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2013}>5$.

Підтвердження. Очевидні нерівності

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$, …,

$\frac{1}{513}+\frac{1}{514}+\ldots+\frac{1}{1024}>512\cdot\frac{1}{1024}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1025}+\frac{1}{1026}+\ldots+\frac{1}{2013}>0$.

Додавши їх та перший доданок суми, тобто число $\frac{1}{2}$, отримуємо потрібну нерівність.

Завдання 1.39. Порівняти числа $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ та $2\sqrt{n}$ при $n\geq 1$.

Розв’язок. Порівняємо квадрати цих додатних чисел, тобто рівнянняи $2n+2\sqrt{n^2-1}$ та $4n$ або числа $\sqrt{n^2-1}$ та $n$. Відповідно, що $\sqrt{n^2-1}<\sqrt{n^2}=n$, тому перше із заданих чисел менше.

Завдання 1.40. Доказати, що $100!<50^{100}$.

Підтвердження. Відповідно, що $1\cdot 50\cdot 99\cdot 100<50^4$, $2\cdot 98<50^2$, $3\cdot 97<50^2$, …, $49\cdot 51<50^2$. Перемноживши ці нерівності, отримаємо, що $100!<50^{100}$.

Завдання 1.41. Доказати, що $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

Підтвердження. Відповідно, що $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, …, $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$. Тому

$a^2<\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}\right)=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$.

Відповідно, $a<\frac{1}{10}$.

Завдання 1.42. Доказати, що для всіх додатних чисел $a,\ b,\ c$, для яких $abc=1$, виконуємо нерівність

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Підтвердження. При $y>0$ із Відповідної нерівності $(x-y)^2\geq 0$

випливає, що $\frac{x^2}{y} \ge 2x - y$. Використаємо одержане співвідношення для перетворення доданків заданої нерівності. Отримуємо:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{a^{-2}}{ab+ac} + \frac{b^{-2}}{ab+bc} + \frac{c^{-2}}{ac+bc} =$$

$$= \frac{1}{4}\left( \frac{\left(\frac{2}{a}\right)^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \frac{\left(\frac{2}{b}\right)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} + \frac{\left(\frac{2}{c}\right)^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}} \right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{4}\left( \left(\frac{4}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{4}{b} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{4}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = \frac{3}{2}.$$

При виконанні перетворень для чисел $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ у кінці Підтвердження використано нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним, яке ми Розберемо докладніше у розділі 1.7. Рівність можна досягти рівності у заданому співвідношенні $a = b = c = 1$.

Завдання 1.43. Доказати, що для довільних додатних чисел $x, y$ виконуємо нерівність $\frac{x^4}{y^3} \ge 4x - 3y$.

Підтвердження. Використовуючи нерівність $\frac{x^2}{y} \ge 2x - y$, отримуємо

$$\frac{x^4}{y^3} = \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \ge \frac{1}{y} \cdot (2x - y)^2 = \frac{4x^2}{y} - 4x + y \ge 4(2x - y) - 4x + y = 4x - 3y.$$

Зауважимо, що нерівності, одну з яких ми доводимо, та друга, яку використовуємо при доведенні, є частинним випадком нерівності $\frac{x^n}{y^{n-1}} \ge nx - (n-1)y$, яка випливає з тотожності

$$x^n - nxy^{n-1} + (n-1)y^n = (x-y)^2 (x^{n-2} + 2x^{n-3}y + 3x^{n-4}y^2 + \ldots + (n-2)xy^{n-3} + (n-1)y^{n-2}).$$

Завдання 1.44. Для чисел $a, b, c$, кожне з яких не менше 1, Доказати нерівність $\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c} \ge 1$.

Підтвердження. Відповідно до умови маємо $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{2};\ \frac{1}{b+c}\le\frac{1}{2}$. Тому

$$\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}=\frac{1}{\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}}=\frac{1}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}}\ge\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1.$$

Рівність досягається тільки при $a=b=c=1$.

Завдання 1.45. Для чисел $a,\ b,\ c$, кожне з яких не менше 2, Доказати нерівність $\left(a^3+b\right)\left(b^3+c\right)\left(c^3+a\right)\ge 125\,abc$.

Підтвердження. Відповідно, що при $a\ge 2$ виконуємо нерівність $a^3\ge 4a$. Аналогічно при $b\ge 2$ маємо $b^3\ge 4b$ і при $c\ge 2$ $c^3\ge 4c$. Тому

$$\left(a^3+b\right)\left(b^3+c\right)\left(c^3+a\right)\ge(4a+b)(4b+c)(4c+a)=$$
$$=(a+a+a+a+b)(b+b+b+b+c)(c+c+c+c+a)\ge 5\sqrt[5]{a^4b}\cdot 5\sqrt[5]{b^4c}\cdot 5\sqrt[5]{c^4a}=125abc.$$

Рівність досягається при $a=b=c=2$.

Завдання 1.46. Доказати, що $2^{m+n-2}\ge mn$ для всіх натуральних чисел $m$ та $n$.

Підтвердження. Відповідно, що Завдання зводиться до Підтвердження нерівності $2^k\ge 2k,\ k\in N$, оскільки після підстановки в неї значень $k=m$ та $k=n$ і перемноження одержаних нерівностей отримуємо співвідношення, що доводиться. Тепер маємо, що при $k=1$ виконуємо знак рівності, а при $k>1$, використовуючи біном Ньютона, отримуємо

$$2^k=(1+1)^k=1^k+k\cdot 1^{k-1}\cdot 1+\ldots+k\cdot 1\cdot 1^{k-1}+1^k\ge 2k.$$

Завдання 1.47. Знайдемо найбільше та найменше значення рівнянняу $\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}$, якщо числа $a,\ b,\ c$ належать відрізку $[2,\ 3]$.

Підтвердження. Зробимо такі операції з рівнянням:

$$\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}=\frac{1}{\frac{a+b+b+c}{(a+b)(b+c)}}=\frac{1}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}}.$$

Згідно з умовою задачі маємо

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{3+3}\le\frac{1}{b+c}\le\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4},\ \frac{1}{6}=\frac{1}{3+3}\le\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

Таким чином, величина знаменника $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}$ змінюється у межах від $\frac{1}{3}$ до $\frac{1}{2}$, а величина заданого рівнянняу – від 2 до 3. Найбільше та найменше значення досягаються при $a=b=c=2$ та $a=b=c=3$.

Завдання 1.48. Сума двох додатних чисел $a,\ b$ дорівнює 2013. Доказати, що ці числа задовольняють нерівність $a^5+b^5\ge 2013a^2b^2$.

Підтвердження. Запишемо задане в умові співвідношення у виді $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}\ge 2013$ та, використовуючи двічі нерівність $\frac{x^2}{y}\ge 2x-y$, перетворимо його ліву частину. Отримуємо

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}\ge\frac{a}{b}(2a-b)+\frac{b}{a}(2b-a)=2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)-(a+b)\ge$$

$$\ge 2\left(2a-b+2b-a\right)-(a+b)=a+b=2013,$$

що і потрібно було Доказати.

Завдання 1.49. Доказати, що для всіх $a\in\left(0,\ 1\right)$ виконуємо нерівність $a^5+(1-a)^5\ge(a^2-a)^2$.

Підтвердження. Запишемо нерівність у виді $\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{(1-a)^3}{a^2}\ge 1$. Тепер, міркуючи, як і у попередній задачі, отримуємо

$$\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{(1-a)^3}{a^2}\ge\frac{a}{1-a}(2a-1+a)+\frac{1-a}{a}(2-2a-a)=2\left(\frac{a^2}{1-a}+\frac{(1-a)^2}{a}\right)-1-1\ge$$

$$\ge 2\left(2a-1+a+2-2a-a\right)-2=0,$$

що і потрібно було Доказати.

Завдання 1.50. Якщо $m,\ n,\ k$ – натуральні числа, то $mn+nk+mk\le 3mnk$. Доказати.

Підтвердження. Підтвердження випливає із співвідношення

$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\le 3$, оскільки кожен з трьох доданків у лівій частині не перевищує 1. Рівність можлива тільки у випадку $m=n=k=1$.

## 1.6. Підтвердження нерівностей методом математичної індукції

Метод математичної індукції ґрунтується на принципі математичної індукції, що формулюється так: деяке твердження $A(n)$ істинне для будь-якого натурального $n$, якщо:

1) воно істинне для $n=1$;

2) з того, що $A(n)$ істинне для довільного натурального $k=n$ випливає, що воно істинне для наступного натурального числа $n=k+1$.

Сформульований принцип належить до аксіом натуральних чисел.

Кожне Підтвердження методом математичної індукції передбачає реалізацію трьох етапів: на першому показуємо, що істинним є твердження $A(1)$; на другому припускаємо, що істинним є твердження $A(k)$ і, виходячи з цього, доводимо, що істинним є твердження $A(k+1)$. Виконані міркування дозволяють стверджувати, що твердження $A(n)$ істинне для будь-якого натурального $n$. Відповідний висновок є третім етапом і завершує Підтвердження.

Іноді використовують узагальнений принцип математичної індукції: твердження $A(n)$ істинне для будь-якого натурального $n\ge m$, якщо воно вірне для натурального числа $n=m$ і з того, що $A(n)$ істинне для довільного натурального $n=k\ge m$ випливає, що воно істинне для наступного натурального числа $n=k+1$.

Описаний метод широко використовується за доказом різних математичних тверджень, зокрема нерівностей. Давайте подивимося на кілька прикладів.

Завдання 1.51. Доказати, що для довільних $a \ge 0,\ b \ge 0$ та натурального числа $n$ виконуємо нерівність

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2}.$$

Підтвердження. Відповідно, що при $n=1$ виконуємо рівність, тому дане твердження вірне. Нехай воно істинне при деякому натуральному числі $k=n$, тобто вірно, що $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \le \frac{a^k+b^k}{2}$. Користуючись цим припущенням, покажемо, що вірною є також нерівність $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$. Оскільки ліва частина, згідно з припущенням, обмежена рівнянняом

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{a^k+b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2},$$

то для Підтвердження достатньо показати, що $\frac{a^k+b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$. Для цього Розберемо різницю

$$(a^k+b^k)(a+b)-2(a^{k+1}+b^{k+1}) = ab^k+ba^k-a^{k+1}-b^{k+1} = (a^k-b^k)(b-a).$$

Одержаний рівняння при $a \ge 0,\ b \ge 0$ завжди від'ємний або дорівнює 0 (при $a=b$), тому $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$. Згідно з принципом математичної індукції вірною є також початкова нерівність $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2}$.

Завдання 1. 6. 2. Доказати, що для довільного натурального числа $n \ge 10$ виконуємо нерівність

$$2^n - n^3 > 23.$$

Підтвердження. При $n=10$ отримуємо нерівність $2^{10}-10^3 > 23$, яка вірна. Нехай вона вірна при деякому натуральному числі $k=n \ge 10$, тобто виконуємо нерівність $2^k - k^3 > 23$. Користуючись цим припущенням, покажемо, що вірною є також нерівність $2^{k+1}-(k+1)^3 > 23$. Отримуємо

$$2^{k+1}-(k+1)^3-23=2\left(2^k-k^3-23\right)+k^3-3k^2-3k-1+23=$$
$$=2\left(2^k-k^3-23\right)+k^3-3k^2-3k+22.$$

Перший доданок одержаного рівнянняу додатний за індуктивним припущенням. Оцінимо суму інших доданків, тобто рівняння $f(k)=k^3-3k^2-3k+22$. Функція $f(x)=x^3-3x^2-3x+22$ має похідну $f'(x)=3x^2-6x-3$ та екстремуми у точках $x=1\pm\sqrt{2}$, і, Відповідно, зростає на проміжку $\left[1+\sqrt{2},\ +\infty\right)$. Переконавшись, що $f(10)>0$, можемо стверджувати, що при $k\geq 10$ виконуємо нерівність $f(k)=k^3-3k^2-3k+22>0$. Посилання на принцип математичної індукції завершує Підтвердження.

Завдання 1.52. Доказати, що $2^n>n^2$ для всіх натуральних $n\geq 5$.

Розв'язок. При $n=5$ отримуємо нерівність $2^5>25$, яка вірна. Нехай вона вірна при деякому натуральному числі $k=n\geq 5$, тобто виконуємо нерівність $2^k>k^2$. Користуючись цим припущенням, покажемо, що вірною є також нерівність $2^{k+1}>(k+1)^2$. Маємо

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k^2>(k+1)^2,$$

оскільки $2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1>0$ при $k\geq 5$. На основі принципу математичної індукції стверджуємо, що задана в умові нерівність вірна.

Завдання 1. 6. 4. Доказати, що для довільного натурального числа $n$ виконуємо нерівність

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}.$$

Підтвердження. При $n=1$ отримуємо вірну нерівність $1>\frac{1}{2}$. Нехай вона вірна при деякому натуральному числі $k=n$, тобто нехай виконуємо нерівність

$$S(k)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2}.$$

Використовуючи це припущення, покажемо, що вірною є також нерівність

$$S(k+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k+1}{2}.$$

Відповідно, що $S(k+1)=S(k)+P(k)$, де $P(k)=\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$. Рівняння $P(k)$ являє собою суму $2^k$ дробів, кожний з яких більший, ніж $\frac{1}{2^{k+1}}$. Отже,

$$P(k)=\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{1}{2^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $S(k)>\frac{k}{2}$ (за припущенням) і $P(k)>\frac{1}{2}$. Тому $S(k+1)=S(k)+P(k)>\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}$, тобто $S(k+1)>\frac{k+1}{2}$. Ґрунтуючись на принципі математичної індукції, наголосимо, що зазначена в умові нерівність має довільне натуральне число. $n$ .

Завдання 1. 6. 5. Доказати, що для довільного натурального числа $n\geq 2$ та для довільних дійсних чисел $a_i$ $(i=2,\ 3,\ldots,\ n)$ виконуємо нерівність

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

Підтвердження. При $n=2$ нерівність $|a_1+a_2|\leq|a_1|+|a_2|$ вірна. Справді, вона вірна у випадку, коли одне з чисел (або обидва) рівні 0. Фактично, це особливо правильно, коли одне (або обидва) числа дорівнюють 0. Коли два числа позитивні або обидва негативні, майте знак рівності. Якщо числа мають протилежні знаки, ми маємо строгий коефіцієнт. Можливі інші докази цього факту, наприклад, аналітичним методом або методом парадоксального доказу.

Нехай нерівність вірна при деякому натуральному $n=k$, тобто виконуємо співвідношення $|a_1+a_2+\ldots+a_k|\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_k|$. Тоді

$$|a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}|=|(a_1+a_2+\ldots+a_k)+a_{k+1}|\leq|a_1+a_2+\ldots+a_k|+|a_{k+1}|\leq$$
$$\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_k|+|a_{k+1}|,$$

що, згідно з принципом математичної індукції, завершує Підтвердження.

Завдання 1.53. Доказати, що для $x > -1$ при всіх натуральних $n$ виконуємо нерівність $(1+x)^n \ge 1+nx$ (нерівність Бернуллі).

Підтвердження. При $n=1$ виконуємо знак рівності, тому твердження вірне. Нехай виконуємо нерівність $(1+x)^k \ge 1+kx$. Тоді

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x) \ge (1+kx)(1+x) = kx^2 + (k+1)x + 1) \ge 1 + (k+1)x$$

і, відповідно до принципу математичної індукції, нерівність вірна.

Завдання 1.54. Доказати методом математичної індукції, що при $n \ge 2$

$$\sqrt{n} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n-2}.$$

Підтвердження. При $n=2$ отримуємо вірну числову нерівність $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$. Припустімо,вірна нерівність $\sqrt{k} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k-2}$ і покажемо, що

$$\sqrt{k+1} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k-2} \cdot \frac{2k+1}{2k}.$$

Із припущення маємо $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k-2} \cdot \frac{2k+1}{2k} > \sqrt{k} \cdot \frac{2k+1}{2k}$. Покажемо, що $\sqrt{k} \cdot \frac{2k+1}{2k} > \sqrt{k+1}$. Аналізуючи різницю квадратів лівої та правої частин, отримуємо $\frac{k(2k+1)^2}{4k^2} - (k+1) = \frac{(2k+1)^2 - 4k(k+1)}{4k} = \frac{1}{4k} > 0$, що доводить потрібне твердження. Відповідно,відповідно до принципу математичної індукції, нерівність доведено.

Завдання 1.55 Доказати, що $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$ для всіх натуральних $n \ge 2$.

Підтвердження. При $n=2$ отримуємо вірну числову нерівність $4 > 1 + 2\sqrt{2}$. Нехай виконуємо нерівність $2^k > 1 + k\sqrt{2^{k-1}}$. Покажемо, що звідси випливає вірність співвідношення $2^{k+1} > 1 + (k+1)\sqrt{2^k}$. Маємо

$$2^{k+1} - 1 - (k+1)\sqrt{2^k} > 2 \cdot \left(1 + k\sqrt{2^{k-1}}\right) - 1 - (k+1)\sqrt{2^k} = 1 + \sqrt{2^k}\left(k(\sqrt{2}-1) - 1\right).$$

Одержаний рівняння додатний при $k \ge 3$. Таким чином із припущення, що нерівність вірна при $n=k$ випливає, що вона вірна при $n=k+1$. Згідно з принципом математичної індукції нерівність виконуємо при довільному натуральному $n \geq 2$.

## 1.7. Класичні нерівності між середніми та їх Підтвердження

Середнім для дійсних чисел $x_1,\ x_2,...,\ x_n$ назвемо довільне дійсне число $x$, яке не перевищує найбільшого із заданих чисел та не менше від найменшого. Тобто

$$\min x_i \leq x \leq \max x_i,\ i = 1,\ 2,...,\ n.$$

Якщо $\min x_i < \max x_i$, то середніх є безліч. Середні значення часто зустрічаються у статистиці, фізиці та техніці. Їх використання пов'язане з необхідністю оцінки кількох результатів вимірювань одних і тих же значень, а також з багаторазовим експериментальним визначенням одних і тих самих параметрів.

Можна обґрунтувати, що середнім для дробів $\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},...,\ \frac{a_n}{b_n}$ з плюсовими знаменниками є число $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$, для додатних чисел $x_1,\ x_2,...,\ x_n$ середніми є величини $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$, $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$.

З усього набору середніх, зазвичай, виділяються середні, отримані результаті конкретних цільових розрахунків. У математиці це середнє арифметичне, середнє геометричне, середньоквадратичне та гармонійне середнє. Усі вони пов'язані між собою певними залежностями, які ми називаємо традиційною нерівністю між шляхами.

Розберемо детальніше класичні нерівності між середніми. Як уже було зауважено, для $n$ додатних чисел $x_i$ такими є:

середнє арифметичне $A_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$;

середнє геометричне $G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$;

середнє квадратичне $K_n = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$;

середнє гармонічне $H_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$.

Ці середні величини знаходяться у співвідношеннях

$K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$.

Є багато способів, щоб Доказати їх. У цьому посібнику ми Розберемо три з них, і незабаром буде представлено два докази відповідно до методів доказу. А тепер зупинимося на першому. Спочатку доведемо таке твердження.

Лема. Якщо добуток $n$ додатних чисел $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ дорівнює 1, то їхня сума не менша від $n$, тобто $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$. Причому рівність має місце лише тоді, коли $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Підтвердження виконаємо, користуючись методом математичної індукції. При $n = 2$ нам потрібно показати, що для двох додатних чисел $x_1,\ x_2$ таких, що $x_1 x_2 = 1$, виконуємо нерівність $x_1 + x_2 \geq 2$. Справді,

$$x_1 + x_2 - 2 = x_1 + \frac{1}{x_1} - 2 = \frac{(x_1 - 1)^2}{x_1} \geq 0.$$

Відповідно, що знак рівності виконуємо при $x_1 = 1$. Але тоді і $x_2 = 1$, тобто $x_1 = x_2$.

Нехай для $k$ додатних чисел таких, що $x_1 x_2 \ldots x_k = 1$, виконуємо нерівність $x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k$. Причому рівність має місце лише тоді, коли $x_1 = x_2 = ... = x_k$. Покажемо, що $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} \geq k+1$, якщо тільки $x_i > 0$ і $x_1 x_2 ... x_k x_{k+1} = 1$.

Можливі два випадки:

1) всі числа $x_i$ рівні між собою, тобто $x_1 = x_2 = ... = x_k = x_{k+1} = 1$. Тоді $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = k+1$;

2) не всі числа $x_i$ рівні. У цьому випадку серед них знайдуться числа як більші, так і менші 1. Для зручності міркувань вважатимемо $x_1 > 1,\ x_{k+1} < 1$. Поклавши $y_1 = x_1 x_{k+1}$, отримуємо, що $x_1 x_2 ... x_k x_{k+1} = y_1 x_2 ... x_k = 1$. Тому, згідно з припущенням, для чисел $y_1,\ x_2, ...,\ x_k$ виконуємо нерівність $y_1 + x_2 + ... + x_k \geq k$. Звідси

$$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = (y_1 + x_2 + ... + x_k) + x_1 + x_{k+1} - y_1 > (k+1) + x_1 + x_{k+1} - y_1 - 1 =$$
$$= (k+1) + x_1 + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} - 1 = (k+1) + (x_1 - 1)(1 - x_{k+1}) \geq k+1.$$

Згідно з принципом математичної індукції лема доведено.

Дану лему застосуємо при доведенні нерівностей $K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$. Їх можна виконувати різними способами. Ми використаємо метод математичної індукції. При цьому базою (початковим етапом Підтвердження) для її використання служитимуть нерівності $K_2 \geq A_2 \geq G_2 \geq H_2$, тобто нерівності

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

Розберемо їх Підтвердження.

Серед різних можливих способів Підтвердження нерівності $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2}$ виберемо, наприклад, методом від супротивного. Нехай $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} < \frac{x_1 + x_2}{2}$. Після піднесення до квадрату невід'ємних рівнянняів в обох частинах нерівності отримуємо $2x_1^2 + 2x_1^2 < (x_1 + x_2)^2$ або $(x_1 - x_2)^2 < 0$, що невірно. Зроблене нами припущення невірне, Відповідно,нерівність доведено.

Нерівність Коші $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$ ми доводили раніше.

Нерівність між середнім геометричним та середнім гармонічним можна Доказати, підставивши у нерівність Коші $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ значення $a=\frac{1}{x_1},\ b=\frac{1}{x_2}$.

Отримуємо $\sqrt{\frac{1}{x_1 x_2}} \leq \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}$, звідки знаходимо, що $\sqrt{x_1 \cdot x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$. Зауважимо, що середнє геометричне двох чисел $\sqrt{ab}$ іноді називають середнім пропорційним, оскільки у цьому випадку це число є розв’язком рівняння $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$.

Підтвердження нерівностей $K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$ при $n>2$ розіб’ємо на Підтвердження співвідношень $A_n \geq G_n$, $K_n \geq A_n$ та $G_n \geq H_n$.

Розпочнемо з Підтвердження нерівності $A_n \geq G_n$ або $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

Візьмемо $n$ додатних чисел $\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p},\ldots, \frac{x_n}{p}$, де $p=\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$. Відповідно, що їх добуток дорівнює 1. В силу доведеної нами леми, $\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{p}+\ldots+\frac{x_n}{p} \geq n$, причому рівність має місце лише тоді, коли $\frac{x_1}{p}=\frac{x_2}{p}=\ldots=\frac{x_n}{p}$.

Звідси $p \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, тобто

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Рівність має місце лише при умові, що $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Для Підтвердження співвідношення $K_n \geq A_n$ або

$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$ Припустімо,воно вірне при $n = k$, тобто, що виконуємо нерівність $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2}{k}}$, або $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^2 \le k(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2)$. Покажемо, що з цього припущення випливає вірність нерівності

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}}{k+1} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 + x_{k+1}^2}{k+1}},$$

або

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1})^2 \le (k+1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 + x_{k+1}^2).$$

Маємо

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1})^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^2 + 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)x_{k+1} + x_{k+1}^2 \le$$

$$\le k(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2) + 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)x_{k+1} + x_{k+1}^2 =$$

$$(k+1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 + x_{k+1}^2) - (x_1 - x_{k+1})^2 - (x_2 - x_{k+1})^2 - \ldots - (x_k - x_{k+1})^2 \le$$

$$\le (k+1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 + x_{k+1}^2).$$

Таким чином, згідно з принципом математичної індукції, нерівність $K_n \ge A_n$ доведено.

Підтвердження співвідношення $G_n \ge H_n$ або $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \ge \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$ випливає з нерівності $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ з використанням замін $a_1 = \frac{1}{x_1},\ a_2 = \frac{1}{x_2}, \ldots,\ a_n = \frac{1}{x_n}$.

Таким чином, нерівності $K_n \ge A_n \ge G_n \ge H_n$ доведено. Зауважимо, що знак рівності у них виконуємо лише у випадку, коли $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Співвідношення між середніми часто використовують при доведенні інших нерівностей. Наведемо приклади.

Завдання 1.56. Доказати, що для довільних додатних чисел $x,\ y,\ z$ виконуємо нерівність

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{z}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{y}\right)\geq 8.$$

Підтвердження. Використавши нерівність Коші, запишемо три вірні нерівності:

$$1+\frac{y}{x}\geq 2\cdot\sqrt{1\cdot\frac{y}{x}}=2\sqrt{\frac{y}{x}},\ 1+\frac{x}{z}\geq 2\cdot\sqrt{1\cdot\frac{x}{z}}=2\sqrt{\frac{x}{z}},\ 1+\frac{z}{y}\geq 2\cdot\sqrt{1\cdot\frac{z}{y}}=2\sqrt{\frac{z}{y}}.$$

Перемноживши їх, отримаємо

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{z}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{y}\right)\geq 8\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{y}}=8.$$

Завдання 1. 7. 2. Доказати, що для довільних чисел $a\geq 0,\ b\geq 0$ виконуємо нерівність

$$\frac{a^4+b^4}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^4.$$

Підтвердження. Насамперед зауважимо, що ця нерівність є частинним випадком нерівності

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leq\frac{a^n+b^n}{2},$$

яка була доведено нами раніше за допомогою методу математичної індукції. Виберемо інший спосіб Підтвердження.

Із вірної нерівності $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$, що пов'язує середні квадратичне та арифметичне, отримуємо $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$. Покажемо, що $\frac{a^4+b^4}{2}\geq\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$, чим самим доведемо і початкову нерівність. Справді, після простих перетворень отримуємо $2\left(a^4+b^4\right)-\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2\geq 0$.

Завдання 1.57. Доказати, що для довільних чисел $a_i>0,\ i=1,\ 2,...,\ n$ виконуємо нерівність

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}>n.$$

Підтвердження. Для чисел $\frac{a_1}{a_2},\frac{a_2}{a_3},\ldots,\frac{a_n}{a_1}$ використаємо нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним. Отримаємо нерівність

$$\frac{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_1}}=1,$$

звідки випливає необхідне твердження.

Завдання 1.58. Доказати, що для довільних чисел $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$ виконуємо нерівність

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 9abc.$$

Підтвердження. Для кожного з двох коефіцієнтів зліва ми застосовуємо нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним.. Отримаємо

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc},\qquad \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Помножуючи отримані співвідношення, отримуємо нерівність, яку необхідно Доказати.

Завдання 1.59. Доказати, що для довільних додатних чисел $a,\ b,\ c$ виконуємо нерівність

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Підтвердження.. Реалізуємо наступні переходи цієї нерівності:

$$\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{a+c}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{3}{2}+3,$$

$$\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)\geq\frac{9}{2}.$$

Застосуємо нерівність між середнім арифметичним і гармонічним середнім до рівнянняів у результуючому співвідношенні. Ми знайшли:

$$\frac{\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)}{3} \geq$$

$$\geq \frac{3}{\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}} = \frac{3}{2},$$

звідки отримуємо шукану нерівність.

Завдання 1.60. Доказати, що при $a_i > 0,\ i = 2,\ 3,\dots, n$ виконуємо нерівність

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Підтвердження.. Використаємо нерівність $A_n \geq G_n$ для доданків першого та другого множника. Отримуємо дві нерівності

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}}.$$

Помноживши отримані коефіцієнти та отримуємо очікуваний результат.

Завдання 1.61. Доказати, що при $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконуємо нерівність

$$\frac{a^3 + b^6}{2} \geq 3ab^2 - 4.$$

Підтвердження. Перепишемо нерівність у виді $\frac{a^3 + b^6 + 8}{3} \geq 2ab^2$ і для перетворення її лівої частини для чисел $a^3,\ b^6,\ 8$ використаємо нерівність $A_3 \geq G_3$. Отримуємо нерівність $\frac{a^3 + b^6 + 8}{3} \geq \sqrt[3]{8a^3b^6} = 2ab^2$, що і потрібно було Доказати.

Завдання 1.62. Доказати, що при $a \geq 0,\ b \geq 0$ виконуємо нерівність

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

Розв’язок. Перепишемо нерівність у виді $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}}{5} \geq \sqrt[5]{ab}$ і для перетворення її лівої частини використаємо нерівність $A_5 \geq G_5$. Отримуємо співвідношення $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}}{5} \geq \sqrt[5]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}} = \sqrt[5]{ab}$, яке доводить задану нерівність.

Завдання 1.63. Для додатних чисел $a,\ b,\ c$ Доказати нерівність

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c.$$

Підтвердження. Для перетворення чисельників у кожному доданку лівої частини використаємо нерівність між середнім квадратичним та середнім арифметичним. Отримуємо:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \geq \frac{(a+b)^2}{2(a+b)}+\frac{(b+c)^2}{2(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{2(c+a)} = a+b+c.$$

Завдання 1.64. При додатних $a,\ b,\ c$ Знайдемо найменше значення рівнянняу

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}.$$

Розв’язок. Насамперед покажемо, що для перших трьох доданків виконуємо нерівність

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Зробимо такі операції з рівнянням:

$$\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{a+c}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{3}{2}+3,$$

$$\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Тепер, якщо ми застосуємо нерівність між середнім арифметичним та гармонічним середнім, ми отримаємо:

$$\frac{\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)}{3} \geq \frac{3}{\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}} = \frac{3}{2}.$$

Групу з інших трьох доданків перетворимо так:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b} = \left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \geq 2+2+2=6.$$

Таким чином, найменше значення рівняння дорівнює $\frac{15}{2}$. Досягається воно при $a=b=c$.

Завдання 1.65. При додатних $a,\ b,\ c$ Доказати нерівність

$$\frac{a^4+b^4+c^4+16}{a^2b+b^2c+c^2a} \geq \frac{8}{3}.$$

Підтвердження. Користуючись двічі нерівністю Коші, отримуємо

$$2a^4+b^4+16 \geq 2a^4+8b^2 \geq 8a^2b.$$

Аналогічно отримуємо ще дві нерівності

$$2b^4+c^4+16 \geq 8b^2c,\quad 2c^4+a^4+16 \geq 8c^2a.$$

Додаючи одержані три нерівності, отримуємо

$$3(a^4+b^4+c^4+16) \geq 8(a^2b+b^2c+c^2a),$$

звідки випливає нерівність, яку ми доводимо.

## 1.8. Наслідки з нерівності Коші та задачі на відшукання найбільших та найменших значень

Повернемося до нерівності $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, де $x_i \geq 0$. Як було зауважено вище, знак рівності тут виконуємо у разі, якщовсі значення $x_i$ рівні. Звідси можна отримати два цікавих факти, які мають ряд застосувань.

1. Якщо добуток $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ є сталою величиною, то сума $x_1+x_2+\ldots+x_n$ приймає найменше значення. При $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \tilde{n}$ це значення дорівнює $n\sqrt[n]{c}$.

2. Якщо сума $x_1+x_2+\ldots+x_n$ є сталою величиною, то добуток $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$

приймає найбільше значення. При $x_1 + x_2 + ... + x_n = \tilde{n}$ воно дорівнює $\left(\frac{\tilde{n}}{n}\right)^n$.

Наведені міркування дозволяють доводити окремі нерівності з новими постановками задач.

Завдання 1.66. Знайдемо найбільше і найменше значення функції $\arcsin^3 x + \arccos^3 x$.

Розв'язок. Нехай $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta$. Оскільки $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta = y.$$

Значення функції буде найменшим, коли найбільшим буде значення добутку $\alpha\beta$.

Оскільки $\beta \geq 0$, то найбільше значення $\alpha\beta$ потрібно шукати при $\alpha > 0$.

Із нерівності Коші маємо $\alpha \cdot \beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$. Але $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$, тому $\alpha \cdot \beta \leq \frac{\pi^2}{16}$.

Найбільше значення $\alpha \cdot \beta$ прийматиме при $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$. Тоді: $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

і найменше значення функції буде $y_{\min} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{32}$.

Найменше значення $\alpha\beta$ Відповідно буде при $\alpha < 0$. При $x = -1$ маємо $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \pi$. Враховуючи ці значення, бачимо, що добуток буде мінімальним, оскільки $\alpha$ приймає мінімальне значення, а $\beta$ – максимальне. Відповідно,при $x = -1$ функція приймає найбільше значення

$$y_{\max} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2} \cdot \pi \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7\pi^3}{8}.$$

Таким чином, найбільшим значенням буде $\frac{7\pi^3}{8}$, а найменшим $\frac{\pi^3}{32}$.

Завдання 1.67. Знайдемо найбільше значення рівняння у $a^2 \cdot b^4$, якщо $4a^2 + b^2 = 16$.

Розв’язок. Згідно з умовою рівняння $4a^2 b^4$ (а, Відповідно,і $a^2 b^4$) прийматиме найбільше значення при $4a^2 = b^2$, тобто при $a^2 = 2$. При цьому $a^2 \cdot b^4 = 2 \cdot 64 = 128$.

Завдання 1.68. Знайдемо найменше значення рівняння у $4a^2 + b^2$, якщо $ab = 3$.

Розв’язок. Оскільки добуток рівняння $4a^2$ та $b^2$ є сталим (із умови випливає, що $4a^2 \cdot b^2 = 36$), то рівняння прийматиме найменше значення при $4a^2 = b^2$, тобто при $b = 2a$. При цьому $a^2 = \frac{3}{2}$, звідки $4a^2 + b^2 = 12$.

Завдання 1.69. Знайдемо найбільше значення функції $y = \frac{x^2}{x^4 + 4}$.

Розв’язок. При $x = 0$ значення функції дорівнює 0. При $x \neq 0$ запишемо рівняння для функції у виді $y = \frac{1}{x^2 + \frac{4}{x^2}}$. Дослідимо, коли знаменник рівнянняу найменший. Зауваживши, що добуток рівнянняів $x^2$ та $\frac{4}{x^2}$ є сталим числом, робимо висновок, що знаменник найменший при $x^2 = \frac{4}{x^2}$, тобто при $x^2 = 2$. Значення функції при цьому є максимальним і буде дорівнювати $\frac{1}{4}$.

Завдання 1.70. Доказати, що для довільних чисел $a_i > 0,\ i = 1,\ 2, ...,\ n$ виконуємо нерівність

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + ... + \frac{a_n}{a_1} > n.$$

Підтвердження. Ми уже розглядали Підтвердження даної нерівності, використовуючи нерівність Коші. Зупинимося на інших міркуваннях. Оскільки добуток чисел $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, ..., \frac{a_n}{a_1}$ є сталою величиною, то їхня сума буде

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}\geq n\cdot\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_1}}=n.$$

Завдання 1. 8. 7. Оцінити значення рівнянняу $\sin^{2012}x+\cos^{2012}x$.

Розв'язок. Нехай $\sin^2 x=\alpha$, $\cos^2 x=\beta$. Тоді

$$\alpha^{1006}+\beta^{1006}\geq 2\sqrt{\alpha^{1006}\cdot\beta^{1006}}=2(\alpha\beta)^{503}$$

і сума прийматиме найменше значення, коли добуток $\alpha\beta$ найбільший. Оскільки рівняння $\alpha+\beta=1$ є сталим, то максимальне значення буде при $\alpha=\beta$, тобто, коли $\sin^2 x=\cos^2 x$ або при $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. Значення заданого рівнянняу у цьому випадку дорівнює $\frac{1}{2^{1005}}$. Одержали нижню оцінку рівнянняу. Верхня оцінка випливає з нерівностей $\sin^{2012}x+\cos^{2012}x\leq\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Рівність досягається у точках $x=\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

Таким чином, $\frac{1}{2^{1005}}\leq\sin^{2012}x+\cos^{2012}x\leq 1$.

# РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ПРИ ДОВЕДЕННІ НЕРІВНОСТЕЙ

## 2.1. Оцінка областей визначення та множини значень. Монотонність. Опуклість

При доведенні нерівностей у поодиноких випадках рекомендується аналізувати набір значень рівняння, зазначених в області та умови. Іноді цього достатньо, щоби вирішити проблему.

Завдання 2.1. Доказати нерівність

$$\sqrt[3]{x^2-4x-4y}<1+\sqrt[3]{(x-2)^2-4y-3}.$$

Підтвердження. Нема потреби робити певні перетворення при доведенні даної нерівності. Достатньо, порівнюючи підкореневі рівняння, побачити, що при довільних $x$ та $y$ виконуємо нерівність $x^2-4x-4y<(x-2)^2-4y-3$. Тому ліва частина приймає значення менші, ніж права.

Завдання 2.2. При $x\ge y$ Доказати нерівність

$$2\lg\left(x^2-2xy+y^2+10\right)+3\sqrt{x-y}-2y+y^2\ge 1.$$

Підтвердження. Відповідно, що

$$2\lg\left(x^2-2xy+y^2+10\right)=2\lg\left((x-y)^2+10\right)\ge 2\lg 10=2, \qquad 3\sqrt{x-y}\ge 0,$$

$$y^2-2y=(y-1)^2-1\ge -1.$$

Тому ліва частина рівняння приймає значення більші або рівні 1. Відповідно,нерівність виконуємо на всій області допустимих значень, тобто при $x\ge y$. Знак рівності досягається при $x=y=1$.

Завдання 2.3. Доказати нерівність

$$5\sqrt{x^2-3x+2}-3\sqrt[4]{-2x^2+5x-3}+x+1\le\left|\ln a+\log_a e\right|.$$

Підтвердження. Проаналізуємо область визначення рівняння. Для його лівої частини вона вважається системою нерівностей

$$\begin{cases} x^2-3x+2\ge 0, \\ -2x^2+5x-3\ge 0 \end{cases}$$

з єдиним розв'язком $x=1$. При знайденому значенні ліва частина нерівності набуває значення 2. Залишається зауважити, що в правій частині нерівності є сума двох обернених чисел, яка не менша 2. Знак рівності досягається при $a=e$.

Завдання 2.4. Доказати нерівність

$$\sqrt{x+2}+9\sqrt[4]{x-7}+2x-15\ge 6y-y^2-7.$$

Підтвердження. Насамперед, зауважимо, що ліва частина нерівності визначена в інтервалі $[7,\ +\infty)$ і що цей інтервал збільшується без змін і набуває найменшого значення в точці $x=7$. Це значення дорівнює 2.

Записавши праву частину нерівності у виді $2-(y-3)^2$, бачимо, що значення цього рівняння не перевищують 2, причому рівність двом досягається в єдиній точці $y=3$. Порівнюючи множини значень обох частин заданого рівняння, робимо висновок, що рівність можлива тільки при $y=3,\ x=7$. Для інших значень змінних нерівність буде строгою.

Завдання 2.5. Доказати, що на всій області визначення рівняння виконуємо нерівність

$$x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}}}\geq\frac{1}{4},$$

де кількість радикалів – довільне число $n\geq 2$.

Підтвердження. Відповідно, що структура рівняння дозволяє суттєво спростити його, використовуючи перетворення лівої частини за допомогою співвідношення

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=x+\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}=x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Ми виберемо інший підхід, який є простішим. Побачивши, що рівняння $f(x)=x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}}$ монотонно зростає на всій своїй області визначення $x\in\left[-\frac{1}{4},\ +\infty\right)$, знаходимо його найменше значення. Воно, як легко бачити, при $x=-\frac{1}{4}$ дорівнює $\frac{1}{4}$. Цим самим нерівність доведено.

При доведенні деяких нерівностей використовуються властивості опуклих функцій. Зокрема, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ опукла вгору, то для двох довільних різних точок $x_1,\ x_2\in[a,\ b]$ виконуємо нерівність $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Якщо ж функція $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ опукла вниз, то для двох довільних різних точок $x_1,\ x_2\in[a,\ b]$ виконуємо нерівність

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Наведемо приклади.

Завдання 2.6. Порівняти числа:

а) $3^{2014}+5^{2014}$ та $2\cdot 4^{2014}$,

б) $\sqrt[2014]{3}+\sqrt[2014]{5}$ та $2\cdot\sqrt[2014]{4}$.

Розв’язок. У випадку а) Розберемо функцію $f(x)=x^{2014}$, яка є опуклою вниз. Тому, використавши нерівність $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, отримуємо, що $3^{2014}+5^{2014}>2\cdot 4^{2014}$.

У випадку б) розглядаємо функцію $f(x)=\sqrt[2014]{x}$, яка є опуклою вгору. Використавши нерівність $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, отримуємо $\sqrt[2014]{3}+\sqrt[2014]{5}<2\cdot\sqrt[2014]{4}$.

Завдання 2.7. Числа $a,\ b,\ c$ задовольняють нерівності $a+b+c>0$, $ab+bc+ac>0$, $abc>0$.

Доказати, що всі вони додатні.

Підтвердження. Насамперед зауважимо, що числа $a,\ b,\ c$ є коренями кубічного рівняння

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc=0.$$

Відповідно, що для від’ємних $x$ ліва частина рівняння приймає від’ємні значення. Відповідно,корені можуть бути тільки плюсовими, що завершує Підтвердження.

В окремих випадках у залежності від постановки задачі доцільно досліджувати необхідні умови. Наприклад, необхідною умовою того, щоб рівняння $x^2-ax-3a=0$ мало два корені, сума яких більша 2, а добуток був більший 3, відповідно до теореми Вієта, є виконання системи нерівностей $\begin{cases} a>2, \\ -3a>3 \end{cases}$. У даному випадку система несумісна і поставлена Завдання розв'язків не має. Але, якщо ми цю ж задачу сформулюємо для рівняння $x^2 - ax + 3a = 0$ і отримаємо систему $\begin{cases} a > 2, \\ 3a > 3 \end{cases}$ із розв'язками $a > 2$, то одержаної нерівності ще не достатньо, щоб вважати задачу розв'язаною. Обов'язково потрібно врахувати умову існування коренів у вигляді нерівності $D = a^2 - 12a \ge 0$. Звідси, оскільки $a > 2$, отримуємо $a \ge 12$.

Зауважимо, що відшукання необхідних умов не є обов'язковим етапом розв'язування задач. Наприклад, при розв'язуванні нерівності $\sqrt{x^2 - ax} > a^2$ нема потреби займатися знаходженням її області визначення, оскільки нерівність $x^2 - ax > a^4$ рівносильна заданій.

Розберемо подібну до попередньої наступну задачу.

Завдання 2.8. При яких значеннях параметра $a$ рівняння $x^2 - 4x + a^2 - 1 = 0$ має два корені, які обидва більші від 1?

Наступне – неправильне рішення, запропоноване авторами цього питання в одному з посібників. Стан завдання аналогічний системі нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 2, \\ x_1 x_2 > 1, \\ D = 16 - 4(a^2 - 1) > 0 \end{cases}$$ ($x_1$, $x_2$ – корені рівняння),

звідки, оскільки перша нерівність системи виконуємо (сума коренів дорівнює 4), а друга записується у виді $a^2 - 1 > 1$, отримуємо розв'язок $\sqrt{2} < |a| < \sqrt{5}$.

Помилка в наведеній вище логіці полягає в тому, що система запису виражає ситуацію, коли для двох джерел потрібно більше 1, але цього недостатньо. Насправді, якщо добуток двох чисел більший за 1, це зовсім не так. Для кожного з них потрібно більше ніж 1. Правильний розв'язок може виглядати наступним чином. Оскільки абсциса вершини параболи $y = x^2 - 4x + a^2 - 1$ дорівнює 2 і розташована правіше точки $x = 1$, то для відшукання розв'язку задачі достатньо вимагати, щоб виконувалися умови

$y(1) > 0$ та $D > 0$. Розв'язавши систему нерівностей $\begin{cases} a^2 - 4 > 0, \\ a^2 - 5 < 0 \end{cases}$, отримуємо $2 < |a| < \sqrt{5}$.

Завдання 2.9. При яких значеннях параметра $a$ точка $x = 1$ є точкою екстремуму функції $y = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + 5a$?

Розв'язок. Згідно з умовою задачі, похідна $y' = 3x^2 - 6ax + 3a^2$ у точці $x = 1$ повинна перетворюватись у 0. Це дозволяє отримати значення $a = 1$. Проте, як легко переконатися, функція $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ у точці $x = 1$ екстремуму не має.

Відповідно,точка $x = 1$ при жодному значенні параметра $a$ не може бути точкою екстремуму заданої функції.

Завдання 2.10. При яких значеннях параметра $a$ сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a + 2 = 0$ буде найменшою?

Розв'язок. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = a,\ x_1x_2 = a + 2$. Тоді

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a + 2) = (a - 1)^2 - 5,$$

але стверджувати, що значення $a = 1$, при якому одержаний рівняння приймає мінімальне значення, є шуканим, ще рано. Потрібно додатково дослідити умову існування дійсних коренів. Знаходимо $D = a^2 - 4a - 8 \geq 0$, звідки $a \leq 2 - \sqrt{12}$ та $a \geq 2 + \sqrt{12}$. Як бачимо, число $a = 1$ одержаним інтервалам не належить. Тому, оскільки на знайдених інтервалах функція $(a - 1)^2 - 5$ монотонна, мінімальне значення рівнянняу $x_1^2 + x_2^2$ буде в одній із точок $a = 2 \pm \sqrt{12}$. Відповідно, що такою точкою є $a = 2 - \sqrt{12}$.

## 2.2. Застосування властивостей квадратного тричлена

Ідея прийняття доведень з використанням властивостей квадратного тричлена полягає у наступному. У разі, коли нерівність має квадратний тричлен за деякою змінною, робиться висновок, що вона не має коріння. Потім, якщо старший коефіцієнт позитивний, дискримінація цього тричлена має бути негативною.

І навпаки, якщо ми можемо показати, що коріння існує, тим самим ми доведемо, що розрізнення квадратного тричлена є немінусовим. Іноді питання про наявність джерел може дещо ускладнитись, і тоді можна спробувати з'ясувати, чи є у виражені значення змінних, що набирають значення різних символів. Цього у разі продовження функції достатньо для підтвердження наявності джерел.Наведемо приклади задач.

Завдання 2.11. Якщо $a \ge 0,\ b \ge 0,\ c \ge 0,\ d \ge 0$, то $\sqrt{(a+b)(c+d)} \le \frac{a+b+c+d}{2}$. Доказати.

Підтвердження. Якщо $a = b = 0$, то нерівність очевидна. Нехай $a + b > 0$. Зведемо нерівність до виду $(a+b+c+d)^2 - 4(a+b)(c+d) \ge 0$ та Розберемо квадратне рівняння $(a+b)x^2 - (a+b+c+d)x + (c+d) = 0$. Відповідно, що рівняння має корені (зокрема коренем є значення $x = 1$). Тому дискримінант $D$ рівняння задовольняє умову $D = (a+b+c+d)^2 - 4(a+b)(c+d) \ge 0$, звідки отримуємо потрібну нерівність $\sqrt{(a+b)(c+d)} \le \frac{a+b+c+d}{2}$. Рівність можлива при рівних значеннях всіх змінних.

Завдання 2.12. Для невід'ємних чисел $a_i \quad (i = 1, 2, ..., 2013)$ Доказати нерівність $\sqrt{\sum_{i=1}^{1000} a_i \cdot \sum_{i=1001}^{2013} a_i} \le \frac{\sum_{i=1}^{2013} a_i}{2}$.

Підтвердження. Нехай $\sum_{i=1}^{1000} a_i > 0$. Запишемо нерівність у виді

$$\left(\sum_{i=1}^{2013} a_i\right)^2 - 4 \cdot \sum_{i=1}^{1000} a_i \cdot \sum_{i=1001}^{2013} a_i \ge 0$$

та Розберемо квадратне рівняння $\sum_{i=1}^{1000} a_i x^2 - \sum_{i=1}^{2013} a_i x + \sum_{i=1001}^{2013} a_i = 0$. Відповідно, що рівняння має корені (зокрема коренем рівняння є значення $x=1$). Тому дискримінант $D$ рівняння задовольняє умову $D=\left(\sum_{i=1}^{2012} a_i\right)^2 - 4\cdot\sum_{i=1}^{1000} a_i \cdot \sum_{i=1001}^{2012} a_i \geq 0$. Звідси отримуємо потрібну нерівність. Рівність можлива при рівних значеннях всіх змінних.

Завдання 2.13. Доказати, що при всіх $a>1,\ b>1$ виконуємо нерівність $\left(a^2+b^2+a+b\right)^2 > 8ab(a+b)$.

Розв'язок. Розберемо квадратний тричлен $f(x)=2x^2-\left(a^2+b^2+a+b\right)x+ab(a+b)$.

Знайдемо його значення в точках $x=a$ та $x=b$. Маємо:

$f(a)=2a^2-\left(a^2+b^2+a+b\right)a+ab(a+b)=a^2-a^3+a^2b-ab=a(1-a)(a-b)$,

$f(b)=2b^2-\left(a^2+b^2+a+b\right)b+ab(a+b)=b^2-b^3+b^2a-ab=b(1-b)(b-a)$.

Тепер, оскільки при $a\neq b$

$f(a)\,f(b)=ab(1-a)(1-b)(a-b)(b-a)=-ab(a-1)(b-1)(a-b)^2<0$,

то можна стверджувати, що в точках $x=a$ та $x=b$ функція приймає значення різні за знаком. Тому на відповідному проміжку існує корінь квадратного тричлена. Відповідно,його дискримінант $D=\left(a^2+b^2+a+b\right)^2-8ab(a+b)$ додатний, а це доводить задану нерівність.

При $a=b$ нерівність набуває виду $\left(2a^2+2a\right)^2>16a^3$ або $(a+1)^2>4a$. Записавши її у виді $(a-1)^2>0$, бачимо, що при $a>1$ вона вірна.

Завдання 2.14. Доказати, що для всіх дійсних значень $a$ виконуємо нерівність $\left(a^3+a^2+2\right)^2 \geq 4\left(a^3+1\right)\left(a^2+1\right)$.

Розв'язок. Різницю $\left(a^3+a^2+2\right)^2-4\left(a^3+1\right)\left(a^2+1\right)$ можна вважати дискримінантом квадратного тричлена $x^2-\left(a^3+a^2+2\right)x+\left(a^2+1\right)\left(a^3+1\right)$. Даний тричлен має корені $x_1=a^2+1$ та $x_2=a^3+1$, тому його дискримінант не може бути мінусовим. Знак рівності можливий, коли ці корені рівні, тобто при $a=0$ або $a=1$.

Завдання 2.15. Відомо, що один із коренів рівняння $x^{12} - abx + a^2 = 0$ більший 2. Доказати, що $|b| > 64$.

Підтвердження. Нехай $x_0$ – корінь, про який іде мова в умові, тобто $x_0 > 2$. Маємо $a^2 - abx_0 + x_0^{12} = 0$, $D = (bx_0)^2 - 4x_0^{12} \geq 0$. Звідси $b^2 \geq 4x_0^{10} > 2^{12}$ або $|b| > 64$.

Завдання 2.16. Числа $a,\ b,\ c$ такі, що $(a + b + c)c < 0$. Доказати, що $b^2 > 4ac$.

Підтвердження. При $a = 0$ отримуємо нерівність $b^2 > 0$, яка не виконуємо тільки у випадку, коли $b = 0$. Але тоді відповідно до умови матимемо $c^2 < 0$, що неможливо. Відповідно, $b \neq 0$ і нерівність при $a = 0$ виконується.

Нехай $a \neq 0$. Розберемо функцію $f(x) = ax^2 + bx + c$. Оскільки $f(0) = c$ і $f(1) = a + b + c$, то відповідно до умови отримуємо $f(0) \cdot f(1) < 0$. Це означає, що на інтервалі $(0,\ 1)$ знаходиться один із коренів квадратного тричлена, тому його дискримінант $D = b^2 - 4ac > 0$.

Завдання 2.17. Додатні числа $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ такі, що $b_1^2 < 4a_1c_1$, $b_2^2 < 4a_2c_2$. Доказати, що $4(a_1 + a_2 + 2013)(c_1 + c_2 + 503) > (b_1 + b_2 + 2012)^2$.

Підтвердження. Короткий аналіз структури нерівності, яку потрібно Доказати, показує, що рівняння

$$D = (b_1 + b_2 + 2012)^2 - 4(a_1 + a_2 + 2013)(c_1 + c_2 + 503)$$

можна розглядати, як дискримінант квадратного тричлена

$$f(x) = (a_1 + a_2 + 2013)x^2 + (b_1 + b_2 + 2012)x + (c_1 + c_2 + 503).$$

Якщо ми зуміємо показати, що цей тричлен приймає тільки додатні значення, то цим самим доведемо, що $D < 0$. Відповідно до умови квадратні тричлени $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ та $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ такі, що при довільному $x$ виконуються нерівності $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$, $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$. Очевидна також нерівність $2013x^2 + 2012x + 503 > 0$. Додавши три одержані співвідношення, отримаємо нерівність, яку доводимо.

Завдання 2.18. При яких значеннях параметра $a$ сума квадратів коренів рівняння $x^2 - ax + a - 1 = 0$ буде найменшою?

Розв’язок. Нехай $x_1$ та $x_2$ – корені заданого рівняння. За теоремою Вієта маємо $x_1 + x_2 = a,\ x_1x_2 = a - 1$. Тому

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1.$$

Найменше значення одержаного рівнянняу дорівнює 1 і досягається воно при $a = 1$. Залишається зауважити, що при $a = 1$ дійсні корені рівняння існують. Без цієї перевірки вважати Розв’язок задачі завершеним не можна. Наприклад, для аналогічної задачі з рівнянням $4x^2 - 4(a+1)x + a^2 + 2a + 2 = 0$ подібні міркування у вигляді перетворень

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a+1)^2 - \frac{a^2 + 2a + 2}{2} = \frac{a^2 + 2a}{2}$$

привели б до неправильної відповіді $a = -1$. При цьому значенні $a$ рівняння дійсних коренів не має.

Завдання 2.19. Доказати, що для будь-яких дійсних чисел $x$ та $y$ виконуємо нерівність $x^2 + 3y^2 + 2xy + 2x + 6y + 3 \ge 0$.

Підтвердження. Перетворимо заданий рівняння наступним чином:

$$x^2 + 3y^2 + 2xy + 2x + 6y + 3 = (x + y + 1)^2 + 2(y+1)^2.$$

Відповідно, що одержаний рівняння не може бути мінусовим, а значення 0 досягається при виконанні умов $\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ y + 1 = 0 \end{cases}$, тобто при $x = 0,\ y = -1$.

Даний результат можна було отримати і за допомогою інших міркувань, зокрема досліджуючи дискримінант лівої частини нерівності, розглядаючи її, як квадратну відносно змінної $x$ або $y$.

Завдання 2. 20. Доказати нерівність $a^2 + b^2 \ge ab$.

Підтвердження. Зробимо наступні перетворення:

$$a^2+b^2-ab=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}.$$

Отриманий рівняння не може бути мінусовим, а це доводить вказане в умові твердження. Рівність можлива при $a=b=0$. Цей самий результат випливає з того, що дискримінант квадратного тричлена $a^2-ab+b^2$ відносно змінної $a$, який дорівнює $D=-3b^2$, не може бути плюсовим.

Завдання 2. 21. Доказати нерівність $a^2+b^2+\tilde{n}^2\ge ab+bc+ac$

Підтвердження. Дискримінант квадратного тричлена $a^2-a(b+c)+b^2+c^2-bc$ відносно змінної $a$, який дорівнює $D=(b+c)^2-4(b^2+c^2-bc)=-3(b-c)^2$, не може бути плюсовим. Це означає, що даний рівняння не може приймати від'ємні значення. Знак рівності досягається при $a=b=\tilde{n}$.

Завдання 2.22. Доказати, що при довільному дійсному $x$ виконуємо нерівність

$$4\cos^4\frac{x}{4}\ge\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{4}\cos 2x.$$

Підтвердження. Перетворимо нерівність до виду

$$4\cos^4\frac{x}{4}-2\cos^2\frac{x}{4}(1+\cos 2x)-\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{4}\ge 0\Leftrightarrow 4\cos^4\frac{x}{4}-2\cos^2\frac{x}{4}(1+\cos 2x)+1\ge 0$$

та Розберемо її ліву частину, як квадратний тричлен відносно $\cos^2\frac{x}{4}$. Дискримінант цього квадратного тричлена $D=4(1+\cos 2x)^2-16$. Оскільки $(1+\cos 2x)^2-4\le 0$, то $D\le 0$. Тому рівняння $4\cos^4\frac{x}{4}-2\cos^2\frac{x}{4}(1+\cos 2x)+1$ не може приймати від'ємні значення, що завершує Підтвердження нерівності. Знак рівності досягається при $\cos 2x=-1\Leftrightarrow 2x=\pi+2\pi n\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

Зауважимо, що в результаті нами одночасно отримано розв'язки відповідних тригонометричних рівняння та нерівності.

## 2.3. Застосування похідної

Розберемо, як при доведені нерівностей можна використовувати похідну. Суть цього прийому полягає в наступному.

Нехай на певному проміжку $x \in [a,\ b]$ із області визначення функцій $f$ та $g$ потрібно Доказати нерівність $f(x) \geq g(x)$. Введемо в розгляд функцію $u(x) = f(x) - g(x)$. Нехай похідна $u'(x)$ має на відрізку, що розглядається, єдиний корінь $x_0$, це значення є точкою мінімуму функції $u$, а також виконуємо нерівність $u(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \geq 0$. Тоді цього достатньо, щоб стверджувати, що на проміжку $[a,\ b]$ виконуємо нерівність $f(x) \geq g(x)$.

Даний прийом можна використовувати і при доведенні числових нерівностей. Для цього спочатку вводять у розгляд деяку функцію, яка приймає задані числові значення у певних точках, після чого приступають до реалізації описаної вище схеми.

Наведемо приклади таких доведень.

Завдання 2. 3. 1. Доказати нерівність

$e^x \geq 1 + \ln(x+1)$.

Підтвердження. ОДЗ: $x > -1$. Відповідно, що при $x = 0$ ми отримуємо рівність. Розберемо функцію $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+1)$. Її похідна $f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$ дорівнює 0 в точці $x = 0$ і монотонно зростає (останнє випливає з того, що її похідна $e^x + \frac{1}{(1+x)^2}$ додатна). Таким чином, для функції $f(x)$ точка $x = 0$ є точкою екстремуму, а саме точкою мінімуму. Тому для всіх $x$, що належать ОДЗ, виконуємо нерівність $f(x) \geq f(0) = 0$, що і потрібно було Доказати.

Зауважимо, що одночасно нами фактично розв’язане рівняння $e^x = 1 + \ln(x+1)$ з єдиним коренем $x = 0$ та нерівність $e^x > 1 + \ln(x+1)$ з розв’язками $x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

Завдання 2.23. При $x > 0$ виконуємо нерівність $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$. Доказати.

Підтвердження. Розберемо функцію $y(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. Знайшовши $y'(x) = e^x - 1 - x$ та $y''(x) = e^x - 1$, бачимо, що друга похідна перетворюється в 0 у точці $x = 0$ і при переході через цю точку змінює знак із «-» на «+». Це означає, що для функції $y'(x)$ точка $x = 0$ є точкою мінімуму і $y'(0) = 0$. Таким чином, $y'(x) \geq 0$ на всій числовій осі. Звідси випливає, що функція $y(x)$ монотонно зростає. Оскільки $y(0) = 0$, то при $x > 0$ маємо $y(x) > 0$. Нерівність доведено.

Одночасно нами отримано наступні результати:

рівняння $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ має єдиний корінь $x = 0$;

нерівність $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ має розв’язки $x \in (0, +\infty)$.

розв’язками нерівності $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}$ є проміжок $x \in (-\infty;\ 0)$.

Завдання 2.24. Доказати, що при $x > -1$ для всіх натуральних $n$ виконуємо нерівність $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (нерівність Бернуллі).

Підтвердження. При $n = 1$ нерівність вірна. Нехай $n > 1$. Розберемо функцію $f(x) = (1 + x)^n - 1 - nx$. Її похідна $f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n$ перетворюється в нуль у єдиній точці $x = 0$, яка, як легко бачити,, є точкою мінімуму. Тому для всіх $x > -1$ виконуємо нерівність $f(x) \geq f(0)$, тобто $(1 + x)^n - 1 - nx \geq 0$. З одержаного співвідношення випливає нерівність Бернуллі.

Завдання 2.25. Доказати, що при $ab \geq 0$ виконуємо нерівність

$(a + b)^4 \geq a^4 + b^4$.

Підтвердження. Розберемо тільки випадок $a \geq 0,\ b \geq 0$, оскільки при $a \leq 0,\ b \leq 0$ перепозначення змінних $a$ на $-a$ та $b$ на $-b$ приведе нас до аналогічних міркувань. При $a = 0$ маємо очевидну рівність. Нехай $a > 0$.

Введемо заміну $b = x$ та Розберемо функцію $f(x) = (x+a)^4 - x^4 - a^4,\ x \geq 0$. Відповідно, що похідна $f'(x) = 4(a+x)^3 - 4x^3$ не перетворюється в нуль у жодній точці і, оскільки $f(a) = (a+a)^4 - a^4 - a^4 = 14a^4 > 0$ та $f(0) = 0$, то $f(x)$, монотонно зростаючи, не може приймати від'ємних значень. Тому $f(x) = (x+a)^4 - x^4 - a^4 \geq 0$, що доводить задану нерівність.

Завдання 2.26. Доказати нерівність $a^2 + b^2 \geq ab$ (приклад 2. 2. 10).

Підтвердження. Нехай $b = x$. Розберемо функцію $f(x) = x^2 - ax + a^2$. Її похідна $f'(x) = 2x - a$ перетворюється в нуль у точці $x = \dfrac{a}{2}$. Відповідно, що це є точка мінімуму і $f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{3a^2}{4} \geq 0$. Оскільки $f(x) \geq f\left(\dfrac{a}{2}\right) \geq 0$, то $x^2 - ax + a^2 \geq 0$, що фактично і потрібно було Доказати. Рівність виконуємо при $a = b = 0$.

Завдання 2.27. Доказати, що для всіх дійсних $x$ виконуємо нерівність $e^x \geq 1 + x$.

Підтвердження. Розберемо функцію $f(x) = e^x - 1 - x$. Маємо $f'(x) = e^x - 1$. Рівність похідної нулю досягається при $x = 0$. Відповідно, що знайдене значення є точкою мінімуму. Для значень $x \neq 0$ буде виконуватися нерівність $f(x) = e^x - 1 - x > f(0) = 0$. Рівність виконуємо при $x = 0$.

Завдання 2.28. Доказати, що для всіх дійсних $x$ виконуємо нерівність

$\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Підтвердження. Розберемо функцію $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Похідна $f'(x) = x - \sin x$ приймає значення 0 в єдиній точці $x = 0$. Відповідно, що це значення є точкою мінімуму. Тому для значень $x \neq 0$ буде виконуватися нерівність $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0$. Рівність досягається при $x = 0$.

Завдання 2.29. Доказати, що $2^n > n^2$ для всіх натуральних $n \geq 5$.

Підтвердження. Розберемо функцію $f(x)=2^x-x^2$ та знайдемо її похідну. Маємо $f'(x)=2^x\ln 2-2x$. Оскільки

$$f'(-1)=\frac{\ln 2}{2}+2>0,\ \ f'(2)=4\ln 2-4<0,\ \ f'(4)=16\ln 2-8=8(\ln 4-1)>0,$$

то на проміжках $[-1,\ 2]$, $[2,\ 4]$ похідна має принаймні по одному кореню. Більше коренів рівняння $f'(x)=0$ мати не може. Справді, рівняння $f''(x)=2^x\ln^2 2-2=0$ має єдиний корінь (оскільки $f''(0)=\ln^2 2-2<\ln^2 e-2<0$ і $2^x\ln^2 2-2>0$ для достатньо великих $x$). Тому функція $f'(x)$ має єдину точку екстремуму – а саме точку мінімуму, а рівняння $f'(x)=0$ у нашому випадку має тільки два корені. Таким чином обґрунтовано, що похідна $f'(x)$ на проміжку $(4,\ +\infty)$ приймає додатні значення і функція $f(x)$ зростає. Відповідно, $f(x)=2^x-x^2>f(4)=0$. Нерівність $2^x-x^2>0$ на проміжку $x\in(4,\ +\infty)$ виконуємо для довільних $x$, тому і для всіх натуральних $n$, вибраних у цій множині.

Зауважимо, що інше Підтвердження цієї нерівності методом математичної індукції наведене нами у виді задачі 1. 6. 3.

Завдання 2. 30. Доказати нерівність $a^8-a^5+a^2-a+1>0$.

Підтвердження. Зробимо наступні перетворення:

$$a^8-a^5+a^2-a+1=a^5(a^3-1)+a^2-a+1=(a^2-a+1)(a^6-a^5+1).$$

Перший множник отриманого рівнянняу приймає тільки додатні значення. Покажемо, що і другий множник теж завжди додатний. Для цього Розберемо функцію $f(x)=x^6-x^5+1$. Її похідна $f'(x)=6x^5-5x^4$ перетворюється в нуль в точках $x=0$ та $x=\frac{5}{6}$. Легко переконатися, що при $x=0$ екстремуму нема, а точка $x=\frac{5}{6}$ є точкою мінімуму. Оскільки $f\left(\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^6-\left(\frac{5}{6}\right)^5+1=1-\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6}>0$, то функція приймає тільки додатні значення.

Завдання 2. 31. Порівняти числа $\sqrt[2012]{2012}$ та $\sqrt[2013]{2013}$.

Розв'язок. Порівняємо натуральні логарифми цих чисел, тобто числа $\frac{\ln 2012}{2012}$ та $\frac{\ln 2013}{2013}$, що рівносильне поставленій задачі, оскільки функція $\ln x$ монотонно зростає на своїй області визначення. Для цього Розберемо функцію $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, визначену на інтервалі $(0, +\infty)$. Встановимо проміжки її монотонності. Відповідно, що похідна $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ перетворюється в нуль у точці $x=e$. Легко встановити, що це точка максимуму і що на проміжку $x\in(e, +\infty)$ функція монотонно спадає. Оскільки цьому проміжку належать числа $2012$ та $2013$, то більшому з них відповідає менше значення функції. Тому $\frac{\ln 2012}{2012}>\frac{\ln 2013}{2013}$ і $\sqrt[2012]{2012}>\sqrt[2013]{2013}$.

Завдання 2. 32. Доказати, що при $0<x<y<\frac{\pi}{2}$ виконуємо нерівність $\frac{tgx}{tgy}<\frac{x}{y}$.

Підтвердження. Доведемо нерівність $\frac{tgx}{x}<\frac{tgy}{y}$, яка на вказаному проміжку рівносильна заданій. Розберемо функцію $f(x)=\frac{tgx}{x}$ на інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ та доведемо, що на ньому вона зростає. Для цього достатньо показати, що $f'(x)>0$. Маємо

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-tgx}{x^2}=\frac{x-\sin x\cdot\cos x}{x^2\cdot\cos^2 x}.$$

Оскільки знаменник похідної на вказаному проміжку додатний, то покажемо, що плюсовим є також чисельник, тобто, що виконуємо нерівність

$x - \sin x \cdot \cos x > 0$. А це випливає з нерівності $2x > \sin 2x$ для $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ та $2x \geq \frac{\pi}{2} > 1 \geq \sin 2x$ при $x \in \left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$. Відповідно, $f'(x) > 0$ і функція $f(x) = \frac{tgx}{x}$ зростає на інтервалі $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Тому $\frac{tgx}{x} < \frac{tgy}{y}$ для $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ або $\frac{tgx}{tgy} < \frac{x}{y}$.

## 2.4. Застосування інтеграла

Використання інтегрального числення при доведенні нерівностей використовує наступні міркування. Нехай на проміжку $[a,\ b]$ задані дві неперервні функції $f(x)$ та $g(x)$ і в усіх точках цього проміжку виконуємо нерівність $f(x) \geq g(x)$. Тоді на заданому відрізку виконуємо також нерівність $\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt$. Аналогічне твердження стосується також випадків $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ та $f(x) < g(x)$.

Алгоритм використання даного прийому може виглядати наступним чином. Для Підтвердження нерівності $F(x) \geq G(x)$ розглядаємо функції $f(x)$ та $g(x)$, де $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Якщо виконуємо нерівність $f(x) \geq g(x)$, то стверджуємо, що вірна нерівність $F(x) = \int_a^x f(t)dt \geq G(x) = \int_a^x g(t)dt$.

Завдання 2.34. Доказати, що при $x \in [1,\ +\infty)$ виконуються нерівності $2013x^{2014} + 1 \geq 2014x^{2013}$, $2013x^{2015} + 2 \geq 2015x^{2014}$.

Розв’язок. Оскільки на вказаному проміжку виконуємо нерівність $x^{2013} \geq x^{2012}$, то $\int_1^x t^{2013}dt = \frac{t^{2014}}{2014}\Big|_1^x = \frac{x^{2014} - 1}{2014} \geq \int_1^x t^{2012}dt = \frac{t^{2013}}{2013}\Big|_1^x = \frac{x^{2013} - 1}{2013}$. Звідси знаходимо $2013x^{2014} + 1 \geq 2014x^{2013}$. Інтегруючи одержану нерівність ще раз, маємо

$$\int_1^x (2013t^{2014}+1)dt = \frac{2013t^{2015}}{2015}\Big|_1^x = \frac{2013(x^{2015}-1)}{2015} \ge 2014\int_1^x t^{2013}dt = t^{2014}\Big|_1^x = x^{2014}-1.$$

З одержаної нерівності отримуємо, що $2013x^{2015}+2 \ge 2015x^{2014}$.

Завдання 2.35. Доказати нерівність

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{2012} < \frac{4026\sqrt{2013}-4\sqrt{2}}{3}.$$

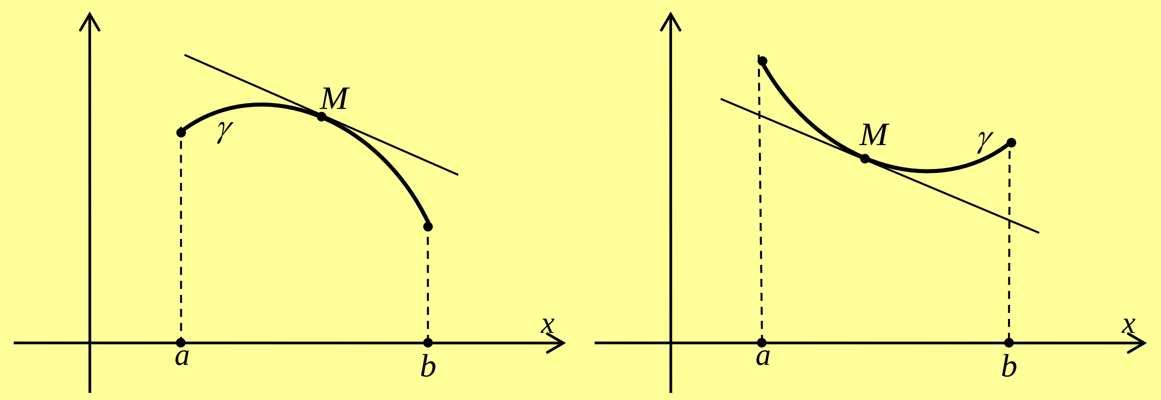
Розв’язок. Розберемо функцію $f(x)=\sqrt{x}$, значення якої наявні в нерівності. Оскільки кожний доданок $\sqrt{n}$ можна трактувати, як площу прямокутника з висотою $\sqrt{n}$ та основою, що дорівнює 1 (відстань між точками $n$ та $n+1$), то

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{2012} < \int_2^{2013}\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_2^{2013} = \frac{4026\sqrt{2013}-4\sqrt{2}}{3}.$$

## 2.5. Опуклі функції та їх застосування до Підтвердження нерівностей. Нерівність Єнсена

Розберемо функцію $f(x)$, визначену та диференційовану на відрізку $[a,\ b]$ і позначимо через $\gamma$ частину її графіка, що відповідає відрізку $[a,\ b]$.

Функцію $f(x)$ називають опуклою вгору (вниз) на відрізку $[a,\ b]$, якщо для довільної точки $M\in\gamma$ крива $\gamma$ лежить нижче (вище) від дотичної до $\gamma$, проведеної в точці $M$ (рис. 1).




Ðèñ 1

Серед деяких властивостей опуклих функцій Зазначимо ті, які в подальшому використаємо при доведенні деяких нерівностей.

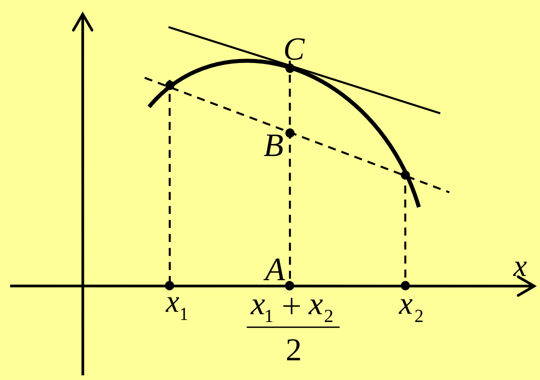
1. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ опукла вгору, то для двох довільних різних точок $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ виконуємо нерівність

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

2. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ опукла вниз, то для двох довільних різних точок $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ виконуємо нерівність

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Підтвердження обох тверджень очевидне. Зокрема у першому випадку достатньо побачити, що довжина відрізка $AB$, який дорівнює $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, менша від довжини відрізка $AC$, який дорівнює $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ (рис. 2).



Ðèñ. 2

3. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ опукла вгору і числа $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n \in [a,\ b]$ не всі рівні між собою, то виконуємо нерівність

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}. \ (*)$$

4. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ опукла вниз і числа $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n \in [a,\ b]$ не всі рівні між собою, то виконуємо нерівність

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}. \ (**)$$

Підтвердження двох останніх тверджень можна реалізувати за допомогою методу математичної індукції.

Нерівності (*), (**), які у математиці називають нерівностями Єнсена, можуть служити основою для складання та Підтвердження різних нерівностей. Достатньо вибрати конкретну функцію, опуклу вгору або вниз та замінити нею функцію $f$.

Наведемо приклади подібних доведень.

Завдання 2.36. Доказати, що для різних $x_1,\ x_2, ...,\ x_n \in [0,\ \pi]$ виконуємо нерівність

$$\sin\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) > \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + ... + \sin x_n}{n}.$$

Підтвердження. Для Підтвердження достатньо у співвідношенні (*) використати замість $f$ функцію $\sin$, графік якої на вказаному відрізку опуклий вверх.

Завдання 2.37. Доказати, що для довільних чисел $a \ge 0,\ b \ge 0$ виконуємо нерівність

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Підтвердження. Тут ми повертаємося до розгляду задачі 1. 3. 2. У цьому випадку використовуємо співвідношення (**), а в ролі $f$ функцію $x^3$, графік якої при $x \ge 0$ опуклий вниз.

Завдання 2.38. Порівняти числа $\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{1}{4}$ та $2\arcsin\frac{29}{80}$.

Підтвердження. Розберемо функцію $f(x) = \arcsin x$, графік якої на проміжку $[0,\ 1]$ опуклий вниз. Застосувавши нерівність Єнсена у виді співвідношення (**), отримуємо

$$\arcsin\frac{3}{8} = \arcsin\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2}\right) < \frac{\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{4}}{2}.$$

Тому

$$\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{1}{4} > 2\arcsin\frac{3}{8} > 2\arcsin\frac{29}{80}.$$

Завдання 2.39. Доказати, що правильний $n$-кутник має найбільший периметр серед усіх вписаних в коло $n$-кутників.

Підтвердження. Нехай $n$-кутник $A_1A_2...A_n$ вписаний у коло з центром у точці $O$ та радіусом $R$. Позначимо $\angle A_iOA_{i+1}=\alpha_i,\ i=1,\ 2,...,\ n,\ \alpha_i\in(0,\ \pi]$. Тоді $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\le 2\pi$ (знак строгої нерівності буде у випадку, коли центр кола лежить поза многокутником). Користуючись теоремою косинусів отримуємо, що для периметра многокутника $P$ маємо

$$P=\sum_{i=1}^{n}A_iA_{i+1}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2R^2(1+\cos\alpha_i)}=2R\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_i}{2}.$$

Оскільки $\frac{\alpha_i}{2}\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ і функція $\cos x$ на вказаній множині значень опукла вгору, то з нерівності Єнсена отримуємо, що

$$nP=2nR\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_i}{2}\le 2nR\cos\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{2}\right)=2nR\cos\frac{\pi}{n},$$

а саме останньому значенню дорівнює периметр правильного вписаного в коло многокутника.

Розберемо, як нерівність Єнсена та наведені міркування можна використати для Підтвердження класичних нерівностей між середніми. Як ми уже знаємо (розділ 1. 7), для $n$ додатних чисел $x_i$ такими є середнє арифметичне $A_n=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, середнє геометричне $G_n=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$, середнє квадратичне $K_n=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}$ та середнє гармонічне $H_n=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$. Ці середні величини знаходяться у співвідношеннях $K_n\ge A_n\ge G_n\ge H_n$. Знак рівності в усіх випадках виконуємо у разі, якщо $x_i$ рівні. Доведемо строгі нерівності, вважаючи $x_i$ різними.

Для Підтвердження першої нерівності $K_n>A_n$, тобто

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} > \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

використаємо у ролі $f$ функцію $x^2$, графік якої опуклий вниз, та співвідношення (**). Відповідно до нього отримуємо

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 < \frac{x_1^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n},$$

звідки, добувши корінь з обох частин, отримуємо шукане співвідношення.

Для Підтвердження другої нерівності $A_n > G_n$, тобто

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

використаємо у ролі $f$ функцію $\ln$, графік якої опуклий вгору, та співвідношення (*). Отримуємо

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) > \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n}{n}$$

або

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) > \frac{\ln(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n)}{n}.$$

Потенціюючи одержаний рівняння, отримуємо шукане співвідношення.

Для Підтвердження останньої нерівності $G_n > H_n$, тобто нерівності між середнім геометричним та середнім гармонічним

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} > \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}},$$

знову використаємо функцію $\ln$, тільки співвідношення (*) застосуємо до чисел $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$. Отримуємо

$$\ln\left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n}\right) > \frac{\ln\frac{1}{x_1} + \ln\frac{1}{x_2} + ... + \ln\frac{1}{x_n}}{n}$$

або

$$\ln\left(\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}\right) > \frac{-\ln(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)}{n} = \ln(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^{-\frac{1}{n}},$$

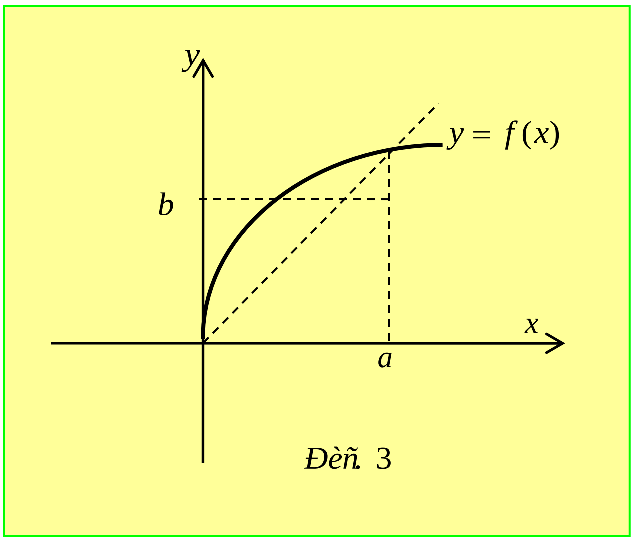
що фактично завершує Підтвердження потрібної нерівності.

## 2.6. Нерівність Юнга

Нехай $y=f(x)$ – неперервна строго зростаюча функція від $x,\ x\geq 0$, і $f(0)=0$ (див. рис. 3). Розглядаючи площі, представлені відповідними інтегралами, ми переконуємося в тому, що

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy\geq ab, \quad (***)$$

де $f^{-1}(y)$ – функція, обернена до $f(x)$. Легко бачити, що рівність тут має місце тільки при $b=f(a)$. Ця нерівність називається нерівністю Юнга. Вибираючи у ролі $f$ різні функції, ми отримуємо ряд цікавих результатів.




Ðèñ. 3

Візьмемо, наприклад, у ролі функції $f(x)$ функцію $y=x^{p-1}$, p>1, оберненою до якої є функція $y=x^{\frac{1}{p-1}}$. У цьому випадку співвідношення (***) приймає вид

$$\int_0^a x^{p-1}dx+\int_0^b x^{\frac{1}{p-1}}dx=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geq ab,$$

де $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Нехай $p = 2012$ і $q = \dfrac{2012}{2011}$. Тоді отримуємо, що при $a \ge 0,\ b \ge 0$ виконуємо нерівність $2012\,a^{2012} + 2011\,b \cdot \sqrt[2011]{b} \ge 2012\,ab$.

Вибираючи в ролі функції $f(x)$ функцію $y = \ln(x+1)$ та використовуючи обернену до неї функцію $y = e^x - 1$ із (***) знаходимо

$$\int_0^a \ln(x+1)dx + \int_0^b (e^x - 1)dx = \left(x+1\right)\ln(x+1) - (x+1)\Big|_0^a + \left(e^x - 1\right)\Big|_0^b \ge ab.$$

Замінюючи $a$ на $a-1$, отримуємо нерівність $a\ln a + e^b - a \ge ab$. Одержане співвідношення в математиці застосовується в теорії рядів Фур'є.

Нехай $f(x) = tgx,\ x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тоді $f^{-1}(x) = arctgx$. Користуючись нерівністю Юнга, знаходимо

$$\int_0^a tgxdx + \int_0^b arctgxdx = -\ln\cos x\Big|_0^a + \left(xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_0^b > ab,$$

звідки отримуємо нерівність

$$barctgb - \ln\left(\sqrt{1+b^2}\cdot\cos a\right) > ab,\ \ a,b \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

При $a = \dfrac{\pi}{4},\ b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ отримуємо $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}} - \ln\sqrt{\dfrac{2}{3}} > \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}$ або $6\sqrt{3}(\ln 3 - \ln 2) > \pi$.

Таким чином, доведено нерівність $6\sqrt{3}(\ln 3 - \ln 2) > \pi$.

# ВИСНОВОК

У процесі дослідження ціль дипломної роботи досягнута, повністю вирішені поставлені задачі й отримані наступні результати й висновки:

Наведено відомості про давнину постановки перед людиною задачі рішення рівнянь і нерівностей.

Наведено й розглянуті на прикладі методи рішення рівнянь і нерівностей, засновані на використанні властивостей функції.

Розглянуто й випробувані додаткові нестандартні методи рішення рівнянь і нерівностей.

Продовження дослідження може полягати у вивченні застосування властивостей синуса й косинуса, застосуванні похідній, використанні числових нерівностей, використанні графіків і інших нестандартних способів рішення рівнянь і нерівностей.

## Список використаної літератури

1. Жидков С.І. Геометричні нерівності для довільного трикутника - Х. : Видавнича група "Основа", 2008. - 143 с. - (Б-ка ж-лу "Математика в школах України";вип.12(72)).

2. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М., Наука, Физматлит, 1970. - 336с. (Выпуск 12 серии "Библиотека математического кружка").

3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. 5-е изд., испр.и доп.—М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006.— 640 с.

4. Радченко В.М. Про Підтвердження нерівностей // У світі математики, 2(1996),No1.

5. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. — К.: Видавництво А.С.К., 2004. — 344 с.: іл.

6. Сивашинський І. Х. Неравенства в Завданнях.−М.:Наука, 1967.

7. Федак І.В. Розв'язування рівнянь. Підтвердження нерівностей: Посібник для підготовки до математичних олімпіад у 9-10 класах //Тернопіль,1997, 64с.

8. Филипповский Г. Школьная геометрия в миниатюрах // Киев, ―Грот‖, 2002,239с.

9. Кикоть В. М., Кислюк О.О. Посібник для підготовки учнів 7-11 класів до олімпіад К-77 Математика, Шепетівка, 2011. – 20с. 10. Яремчук М.Л., Попруженко М.Г. Збірник геометричних задач. Планіметрія //К., Радянська школа, 1996.