ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Механіко- математичний факультет
(повне найменування назва факультету)

Алгебри, топології та основ математики
(повна назва кафедри)

Пояснювальна записка

до кваліфікаційної (дипломної) роботи
_________________магістр________________________
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему «Розв'язування задач про трикутники у середовищі GeoGebra»

Виконала: студентка II курсу, групи МТОм-21
напряму підготовки (спеціальності)
__014 «Середня освіта » «Математика»_
(шифр і назва напряму підготовки, спеціальності)

______Панчишин М.М. ________________
(прізвище та ініціали)
Керівник _Гринів О.С_________________
(прізвище та ініціали)
Рецензент_Сущик Н. С. ______________
(прізвище та ініціали)

Львів – 2021

ЗМІСТ

Анотація. У цій роботі наведені приклади використання середовища GeoGebra на уроках геометрії в школі. GeoGebra - це інтерактивна геометрія, алгебра, статистика та розрахунок для навчання та викладання математики та природничих наук від початкової школи до університетського рівня. Його можна використовувати для активного та проблемно-орієнтованого навчання та демонстрації математичних експериментів та доведень як у класі, так і вдома. У цій роботі я покажу ескіз використання вищезгаданого програмного забезпечення для побудови, вирішення та ілюстрації математичних задач, а саме розв'язування трикутників.

ВСТУП

Постановка проблеми.

Розвиток та наявність комп'ютерних технологій відкрили можливості і спростило використання багатьох сторін у різних аспектах життя, у тому числі у світі української освіти, як інструмент та засіб підтримки освіти. Ці інструменти можна використовувати різними способами для вдосконалення та покращити викладання математики. Розглядаючи інтеграцію технологій у викладання математики, зрозуміло, що заміна дошки та крейди цифровими презентаційними матеріалами не передбачена охоплюють усі аспекти математичних предметів. Одна з важливих передумов якості технологія інтеграції у навчання математики - це особистість вчителя, тобто знання, готовність та бажання покращити свої уроки, наблизивши математику до сьогодення покоління учнів.

Ще однією із проблем з якою зіштовхнулися українські школи це – карантин пов'язаний із запобігання поширенню на території України гострої респіраторної хвороби COVID -19, спричиненої корона вірусом. Навчання в умовах карантину – це справжній виклик для вчителя, бо їм довелося вийти зі звичної зони комфорту, працювати в режимі постійного пошуку, розробляти нові уроки і завдання до них, освоювати технології і бути на зв'язку з дітьми майже цілодобово. Працювати дистанційно не легко. На уроці вчитель бачить, як розуміють та засвоюють учні матеріал, чи їх зацікавила тема, іде відразу зворотній процес, віддача. Якщо учням не зрозуміло, вчитель може відразу перейти та зосередити увагу на більш складному матеріалі, ще раз його роз'яснити. Крім того навчання за комп'ютером потребує більшої самостійної роботи учня та більшого контролю і допомоги з боку батьків. Звісно, вони допомагають дітям (за це їм велика подяка), але вони звичайно не можуть – зокрема й фізично – виконати всі вимоги програми.

Однією із комп'ютерних програм, якою можна користуватися на уроках математики є програмне забезпечення Geogebra. Geogebra - це комп'ютерна динамічна програма для вивчення предмета математики, особливо геометрії, алгебри та статистики.

Різні засоби, що надаються програмним забезпеченням Geogebra, очікують, що він може стати чудовим засобом масової інформації, користувачі швидко, точно та ефективно візуалізують абстрактні геометричні об'єкти.

Його створив Маркус Хоенвартер у 2001/2002 рр. у рамках магістерської роботи в математичній освіті та інформатиці в Зальцбурзькому університеті в Австрії. За підтримки Австрійської академії наук він зміг розробити програмне забезпечення, як частину свого Кандидатського проекту з математичної освіти. Тим часом GeoGebra отримала багато міжнародних нагород, і була перекладена викладачами математики та вчителями у всьому світі більше ніж на 25 мов.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

В різних джерелах йдеться, що систематизоване використання інформаційно – комунікаційних технологій у навчальній діяльності в закладах загальної середньої освіти ефективно впливає на подальшому навчанні учнів навіть у вищих закладах освіти. Щодо навчального процесу системи післядипломної педагогічної освіти позитивно впливатиме на зміст, організаційні форми і методи навчально-виховного процесу в закладі, а також підвищить інтерес до навчання та сприятиме істотним позитивним змінам в діяльності учнів та учителя. На теперішній час дана галузь широко розвинена тому існує багато різноманітних спеціально розроблених навчальних програм тренажерів, програм для створення онлайн тестів, вікторин, готових презентацій та відеороликів для вивчення нового матеріалу та ін. Питання впровадження таких новітніх програм у навчальний процес останнім часом стає все більш популярним та більше привертає увагу науковців.

«Упровадження ІКТ в процес вивчення математики в Україні активно розпочалося ще з середини 90-х років минулого століття.» - Зазначає науковець М. Жалдак [19]

Окремого значення у розробці і створенні нових методик навчання набувають сучасні засоби та ідеї навчання, зокрема комп'ютери, гаджети та їх програмне забезпечення.

При цьому можна відокремити два типи педагогічних програмних засобів, що можна використати у навчальному процесі:

- Програмні забезпечення, що розраховані на раціонального використання часу та його зменшення пов'язане спілкування вихованця і вчителя або й на навчання зовсім і без нього
- Програмні забезпечення, що розраховані на якомога більшому спілкування вихованців і викладачів за рахунок частому використання засобів інформаційно – комунікативних технологій і для економії витраченого часу на виконання загальних рутинних дій, коли учень та вчитель майже не спілкуються.

«Вивільнений час міг би бути використаний на постановку проблем, з'ясування разом з учителем сутності досліджуваних процесів і явищ, розробку відповідних інформаційних моделей, встановлення причинно-наслідкових зв'язків і закономірностей, порівняння різноманітних проявів закономірностей, їх аналіз і синтез узагальнюючих висновків, абстрагування від окремих несуттєвих фактів та ознак тощо. Це має важливе значення як для фундаменталізації знань, так і для надання результатам навчання прикладного, практично значущого характеру. Слід зазначити, що для використання засобів сучасних інформаційних технологій при вивченні математики, фізики, загально-технічних та інших дисциплін зовсім не обов'язково знати будь-які мови програмування, складати власні алгоритми і програми, знати фізичні, арифметичні і логічні принципи побудови і дії комп'ютера і т. п. Головне – досконале знання відповідної предметної галузі та методики використання засобів ІКТ при її вивченні та викладанні. Сучасні ППЗ оснащені необхідним довідковим матеріалом і побудовані так, що ознайомитись з правилами користування ними можна за досить короткий час (іноді, при певному досвіді роботи з комп'ютером, за годину-дві.). Що ж стосується учнів молодшого віку, то деякі автори вважають, що використання ними комп'ютера в своїй навчально-пізнавальній діяльності і тим більше вивчення програмування навіть шкідливе для них, з чим важко не погодитись.» - науковець М. Жалдак [19]

Для супроводу навчального матеріалу можна ефективно використовувати інструментальні засоби, такі, як GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, DG, Advanced Grapher та KmPlot. Проте з багатьох причин використання цих програм у загальноосвітніх навчальних закладах не набуло системного характеру. [19]

Автори Ю. Горошко та Є. Вінниченко стверджують для розв'язування задач з параметрами застосовують програму GRAN-1, що сприяє полегшенню засвоєнню матеріалу. [14]

Науковці Л.Грамбовська, О. Яковчук зазначають, що динамічні моделі об'єктів, створених у середовищі ППЗ GRAN 2D, є потужними засобами освоєння геометричної дійсності, вдало доповнюють арсенал традиційних засобів навчання математики, геометрії. [15]

Учені Смалько О.А., Вінниченко Є.Ф., та Костюченко А.О., вивчають властивості та різноманітні особливості геометричних перетворень у програмному забезпечені GRAN2D та способи застосування середовища на уроках планіметрії. [26][13]

Використання різноманітних програмних забезпечень та різні можливості на уроках математики в закладах загальної середньої освіти описано в посібнику «Математика з комп'ютером», авторами якого є Жадлак М.І.,Горошко Ю.В., та Вінниченко Є.Ф..[18]

Також науковці Кушнір В. А., Ріжняк Р. Я., Ракута В.М., вивчають, яким чином можна досліджувати математичні функції та графіки за допомогою динамічних моделей, на уроках та заняттях як у школах та у вищих закладах. [22][25]

Важливе місце серед ІКТ посідають мобільні навчальні середовища. Трапляються випадки коли заклад не матеріально забезпечити комп'ютерною технікою чи новітніми засобами кабінети у школі. Тому на допомогу можуть прийти смартфони, адже ми живемо у час коли кожна дитина забезпечена мобільним гаджетом.

Тому дослідник В. Биков зокрема, зазначає, що, надаючи певні «свободи» учням, учителям, організаторам освіти щодо здійснення ними навчальної та організаційної діяльності, системи відкритої освіти водночас є системами керованими, створення і використання яких підпорядковане цілям освіти на певних етапах її розвитку. Відкрите навчальне середовище лише допомагає реалізувати основні принципи відкритої освіти. [11]

Використання Geogebra у навчанні отримало позитивну реакцію з боку більшості вчителів будь-якого рівня освіти. Як результат, це одне з найбільш рекомендованих програм, що застосовуються як інноваційний спосіб навчання математики, у поєднанні із інформаційними технологіями [6]. Відповідно до цих висновків, інше дослідження також показало, що багато студентів позитивно сприймають використання програмного забезпечення Geogebra, що покращує результати у навчання учнів [4]. Крім того, більшість студентів виявляють високий інтерес до навчання за допомогою програмного забезпечення Geogebra що сприяє їхньому розумінню математичних понять, що викладаються [5]. Крім того, використання програми в навчанні також ефективно призводить до взаємодії вчителя та учнів під час уроку [7]
Аналізуючи дослідження вище згаданих науковців можна сказати, що застосування ІКТ на уроках математики, а особливо на уроках геометрії вчитель може краще зрозуміти роль нових технологій у практиці навчання. А щодо вихованців то процес навчання буде здаватися грою, а легшим буде матеріал для них.

Мета і завдання дослідження.

Дослідження системи GeoGebra як засобу для створення та застосування динамічних моделей при вивченні задач з розв'язання трикутників у навчанні учнів загальноосвітніх шкіл.

Методи дослідження:

Під час роботи над публікацією використовувалися методи теоретичного аналізу, синтезу та узагальнення положень означеної проблеми.

Результати дослідження.

Із розвитком інформаційно комунікаційних технологій, створюються нові інформаційні навчальні середовища. Серед безліч різноманітних математичних програмних забезпечень слід виділити особливу увагу безкоштовній програмі GeoGebra. Чим же вона різниться від інших потужних застосунків? Відповідь однозначна, вона відповідає новим нормам якості освіти, та на відміну від інших поднює у собі традиційні методи навчання та використовує нові модернізовані, що є важливою складовою в організації у навчанні дітей. Результати досліджень

Одним із найбільших переваг модельної програми GeoGebra це наявність доступних безоплатних інструментів, для учнів, студентів та вчителів що дозволяють досліджувати різноманітні напрямки математики, та встановлювати їх взаємозв'язок. Однією із перешкод якою може виникнути під час вивчення математики із програмним середовищем це відсутність комп'ютерного забезпечення у закладах освіти. Також для якісного вміння користування та створення моделей, аби в подальшому використовувати їх на сучасних модернізованих уроках, що відповідають новим вимогам потрібен час щоб навчитися володіти даним забезпеченням. Це стосується як викладачів так і їх вихованців, щоби створити багато інформаційний урок у вигляді дискусій, у якій повинні бути задіяні усі учасники.

Підсумовуючи огляд літератури, зробимо висновки:

Програмне забезпечення Geogebra настійно рекомендується як для вчителів, так і для студентів, щоб навчати та вивчати конкретні предмети та теми [1]. На відміну від іншого комерційного програмного забезпечення, доступ до якого може бути обмежений під час навчання в школах, Geogebra може бути встановленим на персональних комп'ютерах і дозволяє користувачам легко підключатися в будь-який час і в будь-якому місці. Для вчителів програмне забезпечення Geogebra пропонує цінну можливість створити інтерактивне онлайн-навчання середовища, які дозволяють студентам мати різні способи вивчення математичних понять, які викладаються.

Geogebra має ряд переваг як допоміжний інструмент у навчанні математики, як представлено нижче [3].

1. Замість використання олівця, лінійки чи циркуля можна швидко й точно зробити креслення геометрії.

2. Студенти можуть легко зрозуміти геометрію, використовуючи функції анімації та віртуальні дисплеї Програмне забезпечення Geogebra, щоб учні отримали реальний візуальний досвід.

3. Результат розпису студентів може бути використаний як корекційний зворотний зв'язок або оцінка для забезпечення його правильності.

4. Властивості, які застосовуються до геометричного об'єкта, можуть бути продемонстрованими або вчителем або учнями за короткий термін часу.

Про можливості даної програми можна говорити багато. Вона різноманітна та багатогранна. Однією із особливостей її є не лише вміння будувати та зображати довільні графіки функцій та фігури у форматі 2D а й об'ємні фігури на полотні 3D. Це велика перевага, адже наочність найкращий метод для розуміння завдань. Як кажуть правильно побудований рисунок до певної задачі це вже половина розв’язку.

На відміну від інших програм для динамічного маніпулювання математичними об’єктами, ідея GeoGebra полягає в інтерактивному поєднанні геометричного, алгебраїчного і числового моделювання змісту задачі, яке дозволяє організовувати цілеспрямоване спостереження за зміною та взаємозв’язком величин даної задачі, надає можливості для перевірки гіпотез, що виникають при цьому спостереженні, та перевірити їх експериментально.

Отже, основною особливістю програми GeoGebra є можливість побудови динамічних об’єктів, тобто конструкцій. Такі переваги програмного продукту мають вагоме значення для дослідження розв’язків задач із трикутниками. Завдання з параметрами становлять хоч і невелику, але помітну частину математики. Вони часто бувають дуже складними і вимагають нестандартного підходу до вирішення. Учень, розв’язуючи завдання, може порівняти аналітичні або функціональні методи і перевірити свій результат. Використання графічного методу в цілому часто спрощує і скорочує час вирішення того чи іншого завдання з параметром. Аналіз у GeoGebra не завжди можливий без математичної суті розв’язання задач. А отже, використання GeoGebra дає можливість підвищити рівень якості розв’язування задач та покращити інформаційну компетентність учня. Нижче наведено приклади використання системи GeoGebra для розв’язування завдань з трикутниками різних типів.

ОСНОВНА ЧАСТИНА.

Можливості програмного забезпечення GeoGebra

Як було вище згадано застосунок є у вільному безоплатному доступі як для викладача так і для учня. Програма GeoGebra може використовуватися як засіб візуалізації досліджуваних математичних об’єктів, функцій, виразів, ілюстрації побудови розв’язків ; може виступати середовищем для моделювання та дослідження властивостей математичних об'єктів; використовуватися як інструментально-вимірювальний комплекс, що надає користувачеві набір спеціалізованих інструментів для створення і перетворення об'єкта, а також вимірювання його заданих параметрів. [16][17]

Розв’язування задач із трикутниками дуже часто викликає труднощі в учнів. Нерідко саме такі завдання представлені на олімпіадах та зовнішньому незалежному оцінюванні різного рівня. У процесі розв'язування задач з трикутниками, що містять графічний метод вирішення, виникають дві проблеми:

- правильно та доступно пояснити студенту мету даного методу;
- потрібно вміти правильно відтворити математичну модель задачі за її умовними зображеннями.

Викликати в учня почуття «небоязливого» до завдань з трикутниками та їх розуміння є важливим завданням для педагога.

Вчителі можуть використовувати програмне забезпечення GeoGebra, щоб зробити заняття математики більш змістовними та наочними для дітей.

Також, експерти та розробники пропонують переглянути та ознайомитися із підручниками та матеріалами, щодо вивчення програми. Для кожної функції є великий форум із запитаннями та детальними визначеннями

Вчителі мають можливість створювати класні групи, щоб швидко ділитися заняттями з дітьми. Крім того, система надає варіанти, які допоможуть вчителям включити GeoGebra у свій вже існуючий онлайн клас під час дистанційного навчання.

GeoGebra дає дітям можливість отримати доступ до математики, яка виходить за рамки простих обчислень олівцем і папером. Традиційні методи виконання конструкцій за допомогою циркуля та лінійки можуть бути трудомісткими та неприємними для учнів. GeoGebra робить це швидко, легко та весело, якщо є чіткі вказівки. Заздалегідь підготовлені ресурси, доступні на сайті, створюються та надаються всім, хто хоче стати автором незалежно від вікових категорій.

GeoGebra є потужним прикладом гнучкості в поєднанні зі спільнотою. Викладачу не обов'язково починати з нуля створювати модель: вони можуть будувати на основі роботи інших Це значно зекономить ваш час та зусилля. Це означає, що математичні симуляції будуються кожен день вчителями по всьому світу. Тобто вчителі можуть обмінюватися своїми знаннями, ідеями та розробками, що забезпечує розвитку компетентності та інтерактивних можливостей на уроках математики.

Однією із значних її переваг є можливість покроково відображати хід побудови фігур. Таким чином, є можливість анімовано змінювати координати точок, тоді фігура ніби оживає на моніторі, змінюючи своє зображення внаслідок зміни координат опорних точок

Методичний пакет до СДМ GeoGebra містить спектр інструментів для розв'язування базових задач геометрії:

• побудова різноманітних геометричних фігур на площині (точок, прямих, променів, ламаних, векторів, кутів, многокутників, правильних многокутників, бісектрис кутів, серединних перпендикулярів, паралельних і перпендикулярних прямих, кіл (за центром і точкою, за центром і радіусом, за трьома точками), дуг кіл і конічних перетинів, дотичних до кола тощо);

• обчислення та знаходження периметрів та площ многокутника, чи іншої фігури;

• знаходження: градусної міри кута, довжини відрізка, довжини вектора, відстані від точки до прямої, тангенса кута між прямою і додатнім напрямком осі абсцис тощо;

• перетворення фігур на площині: симетрія відносно точки і прямої, поворот навколо точки, гомотетія, паралельне перенесення;

• знаходження точок перетину двох фігур (двох прямих, прямої і кола тощо);

• знаходження середини відрізка, центра кола (еліпса).

У ракурсі означеної проблеми особливого значення набуває підготовка учительських кадрів для загальноосвітньої школи, не тільки висококваліфікованих, професійно і конкурентно спроможних, а й здатних ефективно діяти в умовах динамічних змін у суспільстві, науці і технологіях, самостійно нарощувати свій педагогічний потенціал у процесі самоосвітньої діяльності.

У наш час геометрія для учнів основної школи є обов'язковою дисципліною. Її вивчення сприяє розвитку раціонального стилю мислення школярів із характерними для нього рисами обґрунтованості, критичності, раціональності, алгоритмічності. Разом з тим, геометрична освіта має велике значення для розвитку уяви, інтуїції, які є основою творчої діяльності особистості. Однією з базових тем курсу планіметрії є змістова лінія «Трикутники». Теорія та задачі, які пов'язані з трикутником пронизують весь курс планіметрії.

На думку багатьох вчителів, методистів трикутники, з одного боку – одна із найпростіших тем, яка зазвичай не викликає в учнів проблем під час її вивчення; з іншого боку, учні недооцінюють складність і необхідність цієї теми. Певну кількість задач на розв'язування трикутників включено до Зовнішнього Незалежного Оцінювання. Тому проблема вивчення теми «Трикутники» є однією з актуальних проблем сьогодення. В даний час існує велика кількість методичної літератури з вивчення в закладах середньої освіти теми «Трикутники». Часті зміни навчальних програм з математики призвели до того, що ця тема мало вивчена в методичному плані. Внаслідок чого, методика вивчення трикутників вимагає постійного вдосконалення. У зв'язку з цим виникає проблема дослідження, яка полягає в тому, щоб розробити методичні рекомендації до вивчення теми «Трикутники» в курсі основної школи. Це і зумовило вибір теми роботи «Розв'язування задач про трикутники у середовищі GeoGebra»

Навчальна програма що охоплює вивчення властивостей та розв'язування трикутників у 7-9 кл.

Основний напрямок курсу геометрії - геометричні фігури та їх властивості. Головними поняттями курсу є: точка, лінія, площина, належати, лежати між. Перші три поняття є основними геометричними фігурами, а останні два — основними відношеннями. Ці терміни не мають означень, але їх зміст дуже важливий при вивченні геометрії і розкривається через опис, відображення, властивості. Інші концепції курсу можна дізнатися, а їх властивості будуть визначені на основі доказів і аргументів. Студент повинен розуміти, що для доведення нових теорем можна використовувати вже доведені визначення та теореми. Фігури, що розглядаються на площині - точка, пряма, відрізок, радіус, кут, трикутник, квадрат, многокутник, коло, круг. Учень повинен сформулювати визначення різних фігур та їх елементів, зобразити їх на малюнках, класифікувати кути, трикутники, квадрати, правильні многокутники.

У 7 класі учні вивчають основи геометричних наук – означення, аксіоми, теореми, методи доведення теорем, основні задачі на побудову. Опрацьовано та систематизовано відомості про геометричні розміри: довжину та міру кута. Однією з основних проблем, що досліджуються під час геометрії, це розв'язування задач про трикутники.

8 клас розв'язують задачі про прямокутного трикутника. Для цього ми вводимо поняття косинуса, синуса і тангенса гострого кута прямокутного трикутника і довели теорему Піфагора. Ця тема продовжується в 9 класі – розв'язуються довільні трикутники. Вводяться формули для визначення синуса і косинуса тупого кута і доводять теореми про косинус і синус. Учні 8 класу ще знайомляться з одним із найскладніших понять шкільного курсу – поняттям площі фігури. Вивчення формули для знаходження площі трикутника дає змогу розв'язати ряд прикладних задач.

У 7 класі вивчаючи тему «Трикутник і його елементи» наведено означення трикутника, вершин трикутника, його сторін. Подається означення периметра трикутника, бісектриси, висоти та медіани трикутника. Описують нерівність трикутника, формулюють означення кутів трикутника та на основі них – види трикутників: прямокутний, гострокутний, тупокутний. Далі пропонують розв'язати низку задач на знаходження периметра трикутника, задачі на побудову висоти, медіани, та бісектриси трикутника, задачі на доведення.

Наступна тема «Сума кутів трикутника», в якій сформулюються та доводяться теореми про суму кутів трикутника, про зовнішній кут трикутника та наслідків з них. Автори підручника зазначають, що будь-яку фігуру можна розділити на певну кількість трикутників, що дає змогу визначити суму кутів будь-якого опуклого n-кутника. Задачі і вправи теми дають змогу учням знаходити кути трикутника.

В наступному параграфі розглядають перші дві ознаки рівності трикутників, доводять теорему про зв'язок медіани та бісектриси трикутника. Далі переходять до вивчення рівнобедреного трикутника. Подають означення рівнобедреного трикутника. Доводять теореми про рівність кутів при основі, бісектрису, проведену до основи трикутника та обернені до них. Наступним вивчають третю ознаку рівності трикутників та нерівність трикутника та доводять ці теореми. В подальшому вивчають прямокутний трикутник, ознаки рівності прямокутних трикутників та розв'язують низку задач на знаходження елементів трикутника.

В темі «Коло і трикутник» подають означення кола, описаного навколо трикутника, доводять теорему про існування та єдність кола, описаного навколо трикутника та виводять наслідки з цієї теореми; означення вписаного в трикутник кола, та доводять теорему про існування та єдність кола, вписаного в трикутник та виводять наслідки з цієї теореми; доводять теорему про центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника та наслідок з неї; розв'язують низку задач з даної теми.

Для учнів 8-го класу автори різноманітних підручників пропонують такий порядок вивчення трикутників, і розпочинають з теми: «Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника», в якому доводять Теорему Фалеса та теорему про властивість середньої лінії трикутника, в ході розв'язування задач доводять, що:

- в рівносторонньому трикутнику всі середні лінії рівні;
- периметр даного трикутника вдвічі більший за периметр трикутника, сторони якого є середніми лініями даного трикутника;
- середні лінії трикутника ділять його на чотири рівні трикутники;
- точка перетину медіан трикутника ділить кожну медіану у відношенні 2:1, починаючи від вершини трикутника;
- три висоти трикутника перетинаються в одній точці.

У наступному розділі учні дізнаються:

- про подібні трикутники, їх властивості й ознаки;
- що таке пропорційні відрізки, як їх знаходити;
- які середні пропорційні відрізки є в прямокутному трикутнику;
- про основну властивість бісектриси;
- як застосовувати подібність трикутників на практиці та під час розв'язування задач. Також в даній темі учні доводять узагальнену теорему Фалеса.

В розділі «Розв'язування прямокутних трикутників» учні вивчають теорему Піфагора та наслідки з неї, дізнаються про синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника та про співвідношення між його сторонами, про алгоритм знаходження за однією із сторін прямокутного трикутника і гострим кутом двох інших сторін, а за двома сторонами трикутника – гострих кутів та як застосовувати вивчені алгоритми до розв'язування геометричних задач і задач прикладного змісту.

В темі «Площа трикутника» доводять теорему про площу трикутника, як половина добутку висоти на сторону, до якої її проведено, розв'язують задачу на доведення про площу трикутника як добуток півпериметра на радіус вписаного кола та розв'язують низку задач з даної теми.

Учні 9 класу у загальноосвітніх закладах на уроках геометрії продовжують дізнаватися про трикутники а саме:

- про співвідношення між сторонами й кутами трикутника (теорема синусів, теорема косинусів);

- про алгоритм знаходження невідомих сторін і кутів довільного трикутника за відомими його сторонами й кутами;

- як застосовувати вивчені алгоритми до розв'язування геометричних задач і задач практичного змісту;

- про нові формули обчислення площі трикутника та як їх використовувати в розв'язуванні задач.

Вивченню трикутників в курсі планіметрії присвячено чимало тем, а тому вони займають вагоме місце в кусі геометрії основної школи. Причому на різних рівнях вивчення математики навчання трикутникам відрізняється.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ 7-9 КЛАСІВ НА УРОКИ ГЕОМЕТРІЇ У СЕРЕДОВИЩІ GEOCEBRA

7 КЛАС
Теоретична частина

Початкові відомості про геометричну фігуру трикутник.

Трикутник — це замкнена ламана, що складається з трьох точок що не лежать на одній прямій і відрізків що з'єднують ці точки, або скінченна частина площини обмежена такою ламаною.

Трикутник — геометрична фігура що має три сторони. Найчастіше сторони позначають літерами *a, b, c***.**

Розрізняють три види трикутників за сторонами: рівносторонній, рівнобедрений, різносторонній. Але іноді вважають що рівносторонній це окремий вид рівнобедреного трикутника.
У будь якому трикутнику довільна сторона є менша за суму двох інших.
$a + b > c$
$a + c > b$
$b + c > a$

Із двох перших нерівностей слідують, що $a + b > c$та $b - a > c$,тому для кожної сторони трикутника вірна подвійна нерівність $|a - b| < c < a + b$

Суму усіх сторін трикутника називають *периметром*, *пів периметр* це значення що рівне половині периметра.

Кожний трикутник має три кути два з них гострі а третій гострий прямий або тупий. Залежності від цього розрізняють гострокутні, прямокутні і тупокутні трикутники. Кути трикутника а також їх міри позначають літерами A,B,C так щоб вони були протилежні сторонам *a, b, c*. Сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180 ° або π радіан. (Рис.1)

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

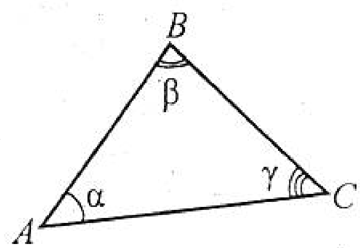


Рисунок 1

Кут суміжний з будь-яким кутом трикутника називають зовнішнім кутом трикутника. (Рис. 2) При кожній вершині трикутника можна побудувати два зовнішні кути вони рівні тому, що вертикальні. Якщо при кожній вершині трикутника рахувати тільки по одному зовнішньому куту. то їх сума дорівнює 360°. Як і сума зовнішніх кутів будь-якого опуклого багатокутника.

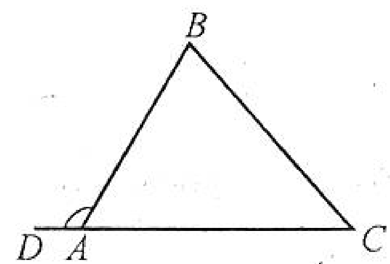


Рисунок 2

Ознаки рівності трикутників

1.Два трикутники рівні, якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту між ними іншого трикутника. (Рис. 3)

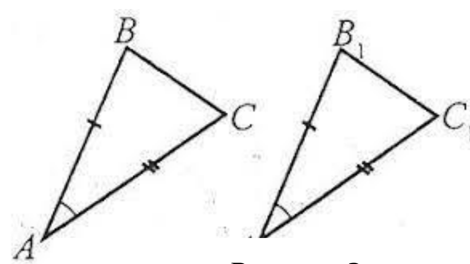


Рисунок 3

2.Сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника, відповідно дорівнюють стороні і прилеглим до неї кутам іншого трикутника. (Рис. 4)

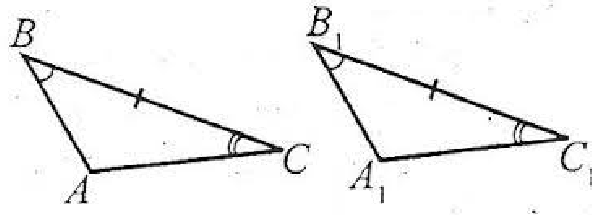


Рисунок 4

3. Три сторони одного трикутника, відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника. (Рис. 5)

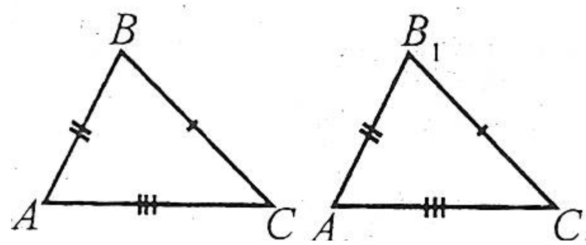


Рисунок 5

4.Дві сторони і кут, що лежать проти більшої з них одного трикутника дорівнюють відповідним елементам другого трикутника.

5.Два кути і сторона протилежна одному з них першого трикутника дорівнюють відповідним елементам другого трикутника.

У кожному трикутнику можна провести медіани, висоти і бісектриси, центр і радіус вписаного і описаного кіл.

Медіани трикутника

Медіаною трикутника називають відрізок, який сполучає вершину трикутника і серединою протилежної сторони. Кожен трикутник гострокутний, прямокутний і тупокутний має три медіани. Медіани будь-якого трикутника перетинаються в одній точці яка міститься у середині трикутника. (Рис. 6)

Для побудови медіани необхідно виконати такі дії:

1) Знайти середину сторони.

2) З'єднати точку, яка є серединою сторони трикутника, з протилежною вершиною трикутника. Це і буде медіана.

Медіану позначають літерою m те що медіани проведенні до сторін ***a, b, c*** і це відповідно записують так : m_a, m_b, m_c.

Медіани точкою перетину діляться у відношенні 2 : 1 починаючи від вершини трикутника. Медіана ділить трикутник на два рівновеликі трикутники. Рівновеликими називається трикутники які мають рівні площі.

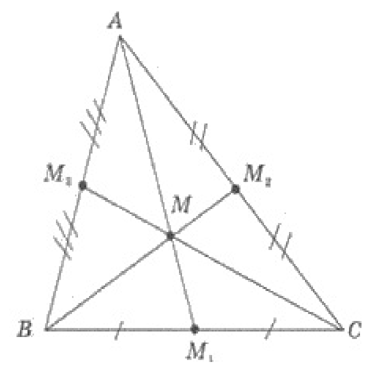


Рисунок 6

Висоти трикутника

Висота трикутника — це перпендикуляр, опущений із вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

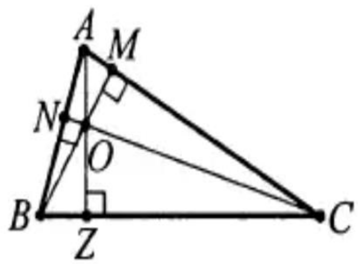
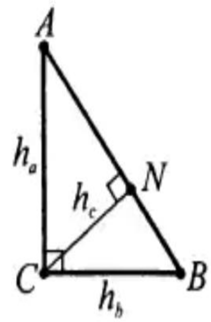
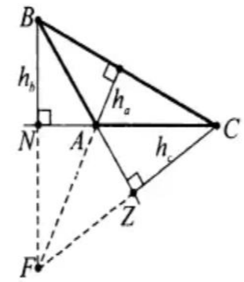
Для побудови висоти необхідно виконати такі дії:

1) провести пряму, яка містить одну зі сторін трикутника (у разі, якщо проводиться висота з вершини гострого кута в тупокутному трикутнику);

2) із вершини, що лежить навпроти проведеної прямої, опустити до неї перпендикуляр (перпендикуляр — це відрізок, проведений із точки до прямої, який утворює з нею кут величиною 90°). Це і буде висота.

В гострокутному трикутнику всі три висоти лежать всередині трикутника. В тупокутному трикутнику дві висоти опускаються на продовження сторін та лежать поза межами трикутника. В прямокутному трикутнику дві висоти збігаються з катетами цього трикутника.

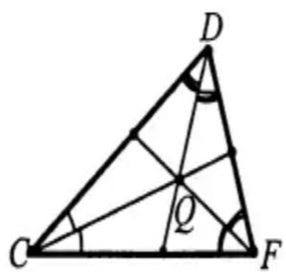
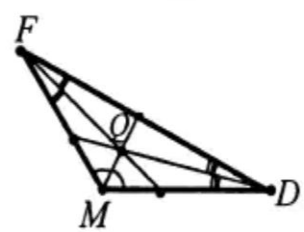
Таблиця 1

Висоти у трикутнику		
Проведені висоти у гострокутному трикутнику	Проведені висоти у прямокутному трикутнику	Проведені висоти у тупокутному трикутнику
		
Висоти проведені з вершин гострокутного трикутника перетинаються всередині трикутника у точці О.	Висоти проведені з вершин прямокутного трикутника перетинаються у вершині прямого кута С.	Висоти проведені з вершин тупокутного трикутника перетинаються поза трикутником у точці F.

Бісектриси трикутника

Бісектриса трикутника — це відрізок бісектриси одного з кутів цього трикутника від вершини кута до точки перетину з протилежною стороною.
Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці — в центрі вписаного в трикутник кола.

Таблиця 2

Бісектриси проведені з вершин довільних трикутників		
		
Бісектриси проведені з вершин гострокутного трикутника	Бісектриси проведені з вершин прямокутного трикутника	Бісектриси проведені з вершин тупокутного трикутника

У нерівнобедреному трикутнику кожна бісектриса лежить між медіаною і висотою, проведеними з цієї ж вершини : $h_a < l_a < m_a$ (Рис. 7)

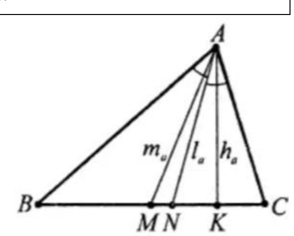


Рисунок 7

Властивість бісектриси :Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам, а саме на відрізки, відношення яких дорівнює відповідно відношенню прилеглих до них двох інших сторін трикутника. (Рис. 8)

Або бісектриса трикутника розбиває деяку сторону на дві такі частини, що відношення однієї з них до прилеглої до неї сторони трикутника дорівнює відношенню другої частини до відповідно прилеглої до неї сторони трикутника. $\frac{AB}{BC} = \frac{KA}{KC}$

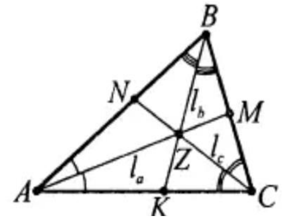
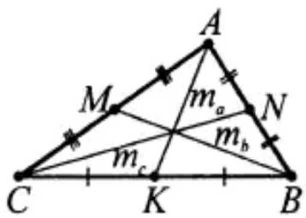
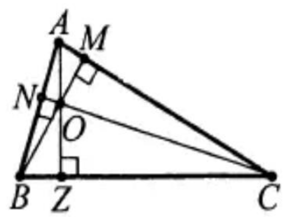
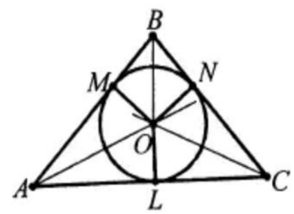
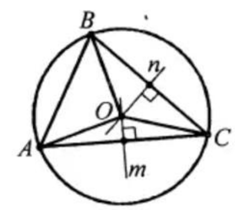


Рисунок 8

Визначні точки трикутника

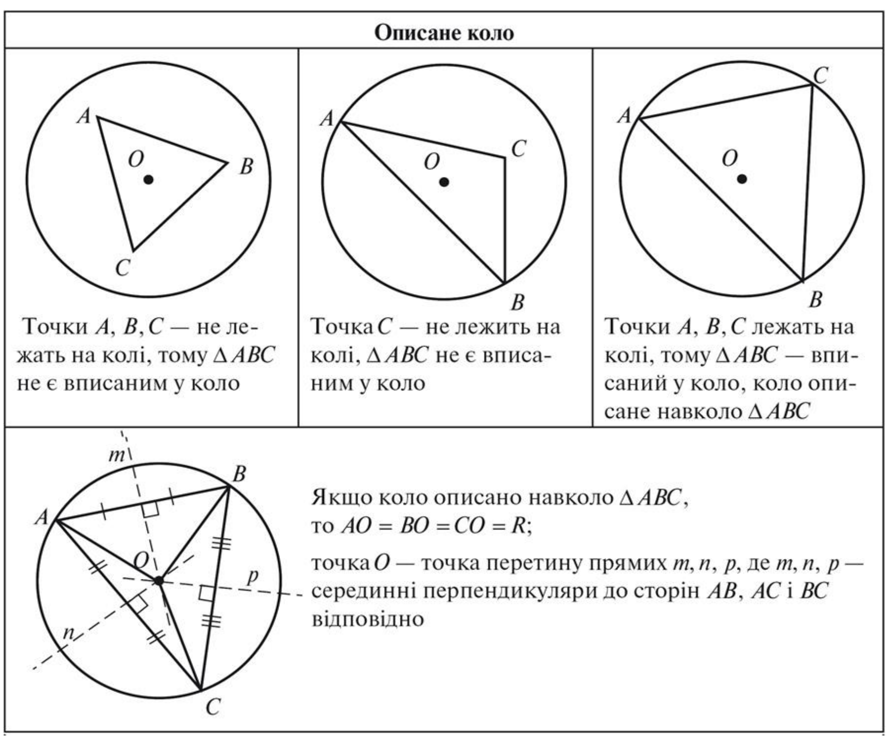
Таблиця 3

Точка перетину медіан-центр мас	Точка перетину висот або ж їх продовжень-ортоцентр	Точка перетину бісектрис, центр вписаного кола - інцентр	Точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника — центр описаного кола
			

Описане коло навколо трикутника.

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло до того ж тільки одне. Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини. Трикутник при цьому має назву вписаного.

Таблиця 4



Описане коло		
Точки A, B, C — не лежать на колі, тому ΔABC не є вписаним у коло	Точка C — не лежить на колі, ΔABC не є вписаним у коло	Точки A, B, C лежать на колі, тому ΔABC — вписаний у коло, коло описане навколо ΔABC

Якщо коло описано навколо ΔABC, то $AO = BO = CO = R$;

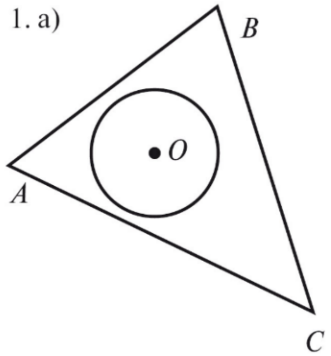
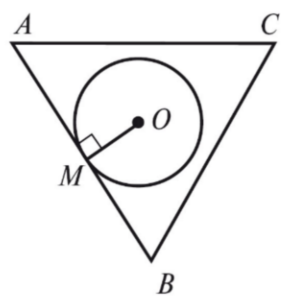
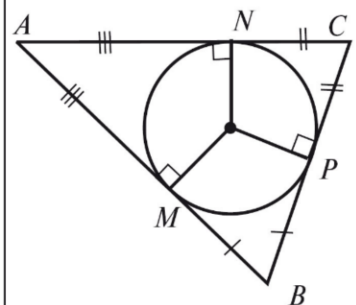
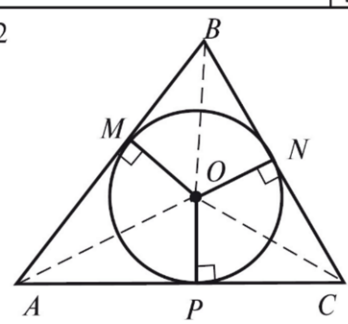
точка O — точка перетину прямих m, n, p, де m, n, p — серединні перпендикуляри до сторін AB, AC і BC відповідно

Вписане коло у трикутник

Кожний трикутник можна вписати коло до того ж тільки одне. Коло називають вписаним в трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін. Трикутник при цьому називається описаним навколо кола.

Точка перетину його бісектриси є центром вписаного кола трикутник.

Таблиця 5

<table>
<tr><th colspan="3">Коло, вписане в трикутник</th></tr>
<tr>
<td>1. а)

Жодна зі сторін ΔABC не дотикається кола, тому коло не є вписаним у трикутник ΔABC</td>
<td>б)

Тільки одна сторона AB ΔABC дотикається до кола в точці M, тому коло не є вписаним у ΔABC</td>
<td>в)

Всі сторони ΔABC дотикаються до кола, тому коло є вписаним у ΔABC</td>
</tr>
<tr>
<td>2
</td>
<td colspan="2">Якщо коло з центром у точці O вписане в ΔABC (точки M, N, P — точки дотику кола до сторін AB, BC і AC, відповідно, то:
1) OM, ON, OP — радіуси вписаного кола ($OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$) і відстані від точки O до сторін AB, BC, AC;
2) AO, CO, BO — відрізки бісектрис (кутів) ΔABC</td>
</tr>
</table>

Практична частина

Розв'язки прикладів та задач для учнів 7 класу що продемонстровані у середовищі GeoGebra

Завдання 1°

Нерівність трикутника — основна властивість геометричних фігур евклідового простору, відстані, що використовується в геометрії, функціональному аналізі. Вона стверджує, що будь-яка сторона довільного трикутника менша за суму двох інших його сторін та більша за їх різницю.

Продемонструємо властивість у середовищі GeoGebra, що дає можливість учням наочно переконатися у її справдженні змінюючи числове значення сторін трикутника. (Рис.9)

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням :

https://www.geogebra.org/classic/esbyyruf

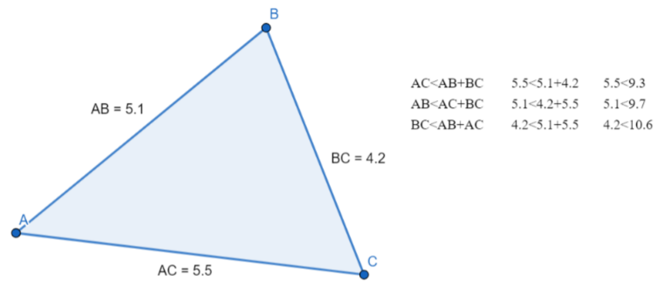


Рисунок 9

Завдання 2°

Теорема про суму кутів трикутника стверджує, що у евклідовому просторі сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Доведення:

Розглянемо довільний трикутник ABC і доведемо, що $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

1. Проведемо через вершину C пряму f, паралельну стороні AB.
2. Кути, $\angle BCE$ і $\angle ABC$, є внутрішніми різносторонніми кутами при перетині паралельних прямих a і AB січною BC.
3. Кути, $\angle BAC$ і $\angle ACD$, — внутрішніми різносторонніми кутами при перетині тих самих паралельних прямих січною AC.
4. Очевидно, що сума кутів ∠BCE, $\angle ACB$, $\angle ACD$ дорівнює розгорнутому куту з вершиною C, тобто:$\angle BCE + \angle ACB + \angle ACD = 180°$ або $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Теорему доведено.

Учні легко можуть переконатися у ствердженні теореми на практиці застосовуючи віртуальне середовище GeoGebra змінюючи величини кутів та сторін трикутника.(Рис.10)

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням :

https://www.geogebra.org/classic/vqxzpmda

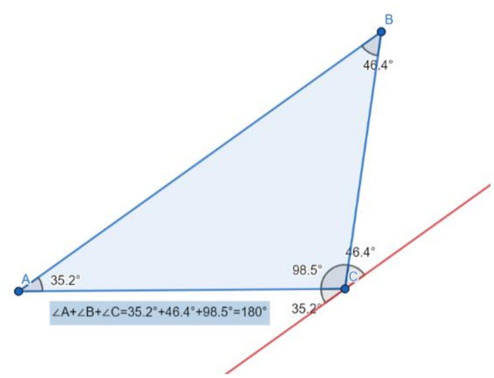


Рисунок 10

Завдання 3°°

Дано $ABCD$ -прямокутник. CA -діагональ чотирикутника. Точки F, H, I, G, E відповідно належать сторонам CD, DA, AB, CB, CA.

Доведіть, що площа чотирикутника GBIE дорівнює площі $FEHD$ незалежно від точки E.(Рис.11)

Доведення:

1)$\Delta CAB = \Delta CAD$ (діагональ прямокутника ділить фігуру на два рівні трикутники.)

2) $S_{\Delta CAB} = S_{\Delta CEG} + S_{\Delta EAI} + S_{\square GBIE}$

3) $S_{\Delta CAD} = S_{\Delta CEF} + S_{\Delta EAH} + S_{\square FEHD}$

4)ΔCEF=ΔCEG за другою ознакою рівності трикутників. (CE — спільна $\angle GCE = \angle FEC$, $\angle FCE = \angle GEC$ як внутрішньо різносторонні.)
5)$\Delta EAI = \Delta EAH$ за другою ознакою рівності трикутників. (EA — спільна, $\angle IEA = \angle HAE, \angle HEA = \angle IAE$ як внутрішні різносторонні)
6) Чотирикутники $GBIE$ і $FEHD$ рівновеликі.

Дана задача є хорошим прикладом для удосконалення вміння застосовувати ознаки рівності трикутників у різноманітних типів завдань.
Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням :
https://www.geogebra.org/classic/bb2uajhe

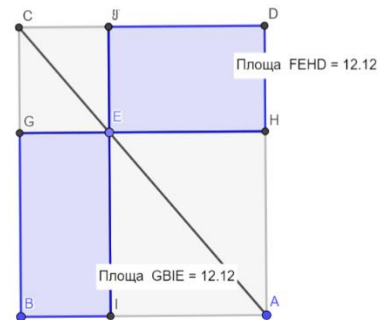


Рисунок 11

Завдання 4°°

Трикутник Евкліда (задача про ортоцентр) довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці. Три висоти трикутника перетинаються в ортоцентрі.

Доведення:
1.Зобразимо трикутник ABC.
2.Проведемо через вершину А пряму f паралельну до сторони BC. Виконаймо такі ж дії з наступними двома вершинами.
3.Проведемо висоти у трикутнику ABC.
4.З нескладних міркувань чотирикутники $ADBC, ABFC$ та $ABCE$ є паралелограмами за означенням тому що у них кожні дві сторони попарно паралельні.
5.З вище сказаного міркування випливає що $DA = AE, DB = BF, EC = CF$ тоді висоти проведені з відповідних вершин будуть серединним перпендикуляром до відрізків DE, DF та FE. Тобто прямі які містять висоти трикутника ABC є серединними перпендикулярами до сторін трикутника FED.(Рис.12)
Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням :
https://www.geogebra.org/classic/maqpxbrx

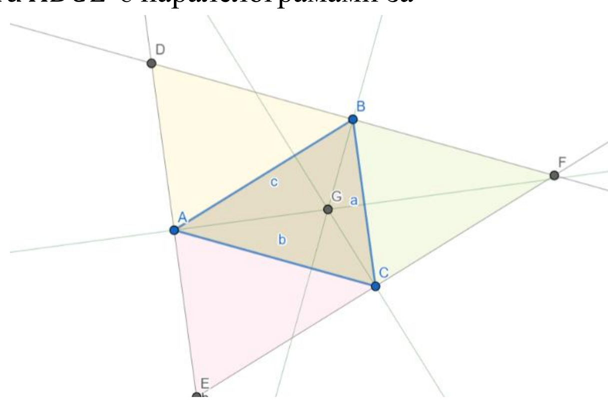


Рисунок 12

Завдання 5°°

Точку M всередині квадрата з'єднали із його вершинами. При цьому одержали чотири трикутники, один з яких рівнобедрений із кутом 150°. Визначити кути інших трьох трикутників.

Розв'язання.

Побудуємо на стороні AD рівносторонній трикутник AKD із вершиною К всередині квадрата. Зрозуміло, що $\angle KAB = \angle KDC = 30°$. А оскільки $AK = DK = AD = AB = CD$, то трикутники KAB та KDC рівнобедрені.

Тому легко знаходимо, що, $\angle KBC = \angle KCB = 15°$. Але, як ми встановили раніше, також $\angle CBM = \angle BCM = 15°$. Отже, точка К лежить на прямих MB та MC, а тому співпадає з точкою M. Звідси випливає, що кути трьох інших трикутників є такими: $60°, 60°, 60°$; $75°, 75°, 30°$; $75°, 75°, 30°$.(Рис.13)

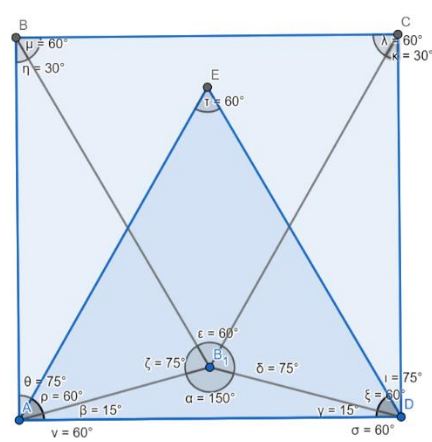


Рисунок 13

Відзначимо, що знання самих кутових величин виявилося недостатнім для розв’язання задачі. Тут суттєвим було те, що $ABCD$ - не довільний прямокутник, а саме квадрат. Це було використано у рівностях $AK = DK = AD = AB = CD$

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням : https://www.geogebra.org/classic/srgjatvw

Завдання 6*

Довести, що в прямокутному трикутнику сума довжин катетів дорівнює сумі діаметрів вписаного і описаного кола.

Доведення:

1) $CM = CP = r$.

2) $BM = BN$ (як відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола α). $BN = a - r$

3) $AN = AP$ (аналогічно). $AN = b - r$

4) $AB = AN + NB$, $c = a - r + b - r = a + b - 2r$

5) Коло $\beta(O, R)$ - описане навколо прямокутного трикутника:

$c = 2R = a + b - 2r = 2R = a + b = 2(R + r)$ (Рис.14)

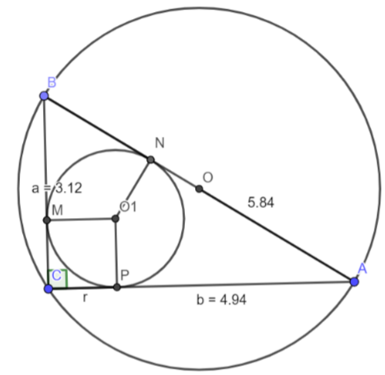


Рисунок 14

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням : https://www.geogebra.org/classic/z7rnfhds

Завдання 7*

Знайти суму кутів у вершинах A, B, C, D, E фігури “зірочка”

Розв’язання.

Зрозуміло, що можна було б просто виміряти величину кожного із кутів і додати одержані значення. Але таким чином потрібну суму ми зможемо одержати лише наближено, що не може вважатися розв’язанням.

Оскільки $\angle B + \angle D + \angle BFD = 180°, \angle FAE + \angle FEA + \angle AFE = 180°, \angle AFE = \angle BFD$ то, $\angle B + \angle D = \angle FAE + \angle FEA$.

А отже, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle C + \angle CAE + \angle CEA = 180°$

Звідси випливає, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle C + \angle CAE + \angle CEA = 180°$.(Рис.15)

Для розв’язування задачі нам вистачило знання суми кутів трикутника та рівності вертикальних кутів. Але не всі задачі є такими простими, як це може здатися на перший погляд при читанні їх умов.

Дана задача є хорошим наочним прикладом для її розв’язання у онлайн середовищі. Щоб переглянути та продемонструвати її своїм вихованцям скористайтеся посиланням

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням : https://www.geogebra.org/classic/dumyuzgf

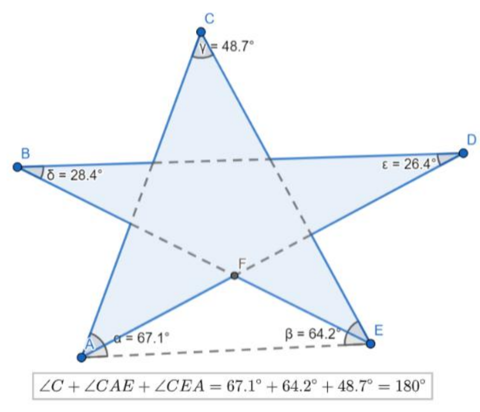


Рисунок 15

Задачі для самостійного опрацювання.

1. DA – бісектриса трикутника DEF. Чому дорівнює $\angle ADE$, якщо $\angle EDF = 58°$?

2. Чому дорівнює периметр трикутника ANK, якщо $AK = 12$ см, $PK = 20$ см та довжина медіани AN трикутника APK дорівнює 8 см

3. Трикутники ABC і ABM розташовані так, що точка C належить відрізку BM. Знайдіть градусну міру кута, утвореного бісектрисами CK і CT відповідно трикутників ABC і ACM.

4. У трикутниках KLM і FPO $KL = FP,\ KM = FO, \angle K = \angle F$.Доведіть що трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників?

5. У трикутниках ABC і DEF сторони AB і BC рівні відповідно сторонам DE i EF. Ці трикутники не рівні. Що можна сказати про кути B і E?

6. Точка O спільна середина відрізків AB і CD, що не лежить на одній прямій. Доведіть, що $\angle ACO = \angle BDO$.

7. У трикутнику ABC побудовано медіану AM і на промені AM позначено точку D таку, що $DM = AM$. Доведіть, що $CD = AD$.

8. У трикутнику ABC $\angle C = \angle B$, AM- медіана. На сторонах AC і AB відповідно позначено точки F i D такі, що $\angle FMC = \angle DMB$. Які відрізки однакової довжини при цьому утворилися?

9. Сторони рівностороннього трикутника ABC продовжені на відрізки AM, CP і BK так, що $MA{:}AB = PC{:}AC = BK{:}CB = 2{:}1$. Доведіть, що трикутник МРК рівносторонній.

10. Прямі AD i BC паралельні. Відрізки AB і DC перетинаються в точці O, причому O – середина відрізка CD. $OB = 8$ см, $OC = 5$ см, $AD = 9$ см. Знайдіть довжини відрізків BC і OD.

11. Відрізок BK є висотою й бісектрисою трикутника ABC. Знайдіть периметр трикутника BKC, якщо $AB = 20$ см, $BK = 16$ см, $AC = 24$ см.

12. У трикутнику ABC кут B дорівнює 60°. У середині трикутника позначено точку D, рівновіддалену від його вершин. Знайдіть кут ADC.

13. У рівнобедреному трикутнику ABC кут A дорівнює 120°, а сторона AC – 10 см. Чому дорівнюють кут B і сторона BC?

14. У трикутнику ABC кут C дорівнює 15°. На стороні AC позначено точку D так, що $\angle ABD = 12°,\ \angle ADB = 80°$. Доведіть, що трикутник ABC є гострокутним.

15. У трикутнику ABC кут A у тричі більший за кут C, кут B удвічі більший за кут C. Знайдіть кути трикутники ABC.

16.Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle A = 53°, \angle B = 84°, BD$ – бісектриса кута B.

17. Висоти AK і CD рівностороннього трикутника ABC перетинаються в точці O. Знайдіть кут DOA.

18. На прямій l позначено точки B і O. По різні боки від прямої l позначено точки A і C так, що $AO = OC$ і $AB = BC$. На продовженні прямої l за точку O позначено точку D. Доведіть, що $AD = DC$.

19. Зовнішній кут трикутника дорівнює 146°. Чи можуть два його кути дорівнювати 72° і 84° ?

20. Дві сторони трикутника дорівнюють 10 см і 12 см. Чи може кут, що лежить проти сторони 10 см, бути тупим?

21. У трикутнику ABC, $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$. Із вершини C поза трикутником проведено промінь CD так, що кут BCD дорівнює 109°. Чи може виконуватися рівність $AD = AC + CD$?

22. У ΔABC $\angle C = 60°, \angle B = 90°$. Висота BB_1 дорівнює 4см. Знайдіть AB.

23. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, CD – Висота трикутника, $BC = 2BD$. Доведіть, що $AD = 3BD$.

24. Коло вписане в трикутник ABC, у якому $\angle A = 60°, \angle B = 40°$. Під якими кутами з центра цього кола видно сторони трикутника ?

25. Відстань від центра кола, вписаного в трикутник ABC, до сторони AC дорівнює 5 см. Знайдіть радіус кола.

26. Знайдіть радіус вписаного кола в прямокутний трикутник, якщо сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см, 10 см.

27. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 32 см. Точкою дотику вписаного кола вона ділиться у відношенні 5:3, починаючи від вершини трикутника. Знайдіть периметр трикутника.

8 КЛАС

Теоретична частина

Теорема Фалеса. Середні лінії трикутника.

Для подальшого вивчення властивостей трикутника розглянемо важливу теорему.

Теорема Фалеса : Паралельні прямі, які перетинають сторони кута і відтинають на одній із них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на іншій стороні.(Рис.16)

Слід зазначити що за умовою даної теореми замість сторін кута можна розглядати дві довільні прямі.

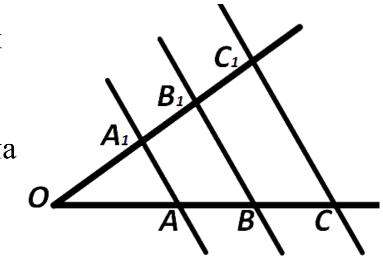


Рисунок 16

Означення: Середньою лінією трикутника називається відрізок що сполучає середини двох сторін.(Рис.17)

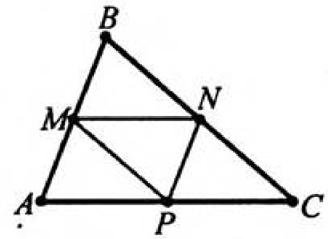


Рисунок 17

Теорема (властивість середньої лінії трикутника) : Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює половині цієї сторони.

Узагальнена теорема Фалеса

Для вивчення нового матеріалу слід пригадати поняття пов'язані з діленням і пропорціями, які знадобляться для подальших міркувань.

Відношенням відрізків завдовжки a і b називається частка їх довжин тобто число $\frac{a}{b}$.

Відрізки завдовжки a і c **пропорційні** відрізкам b і d, якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Теорема (про пропорційні відрізки):

Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на сторонах цього кута пропорційні відрізки :$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, або $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}$ (Рис.18)

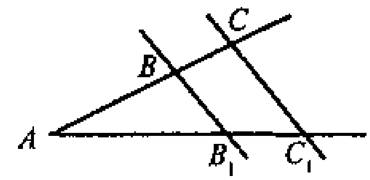


Рисунок 18

Означення подібних трикутників

Означення :

Два трикутники називаються подібними, якщо кути одного з них відповідно дорівнюють кутам іншого і відповідні сторони цих трикутників пропорційні.

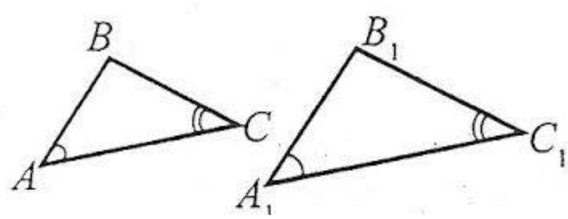


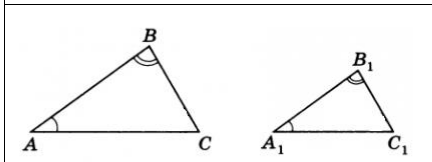
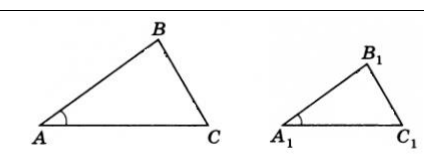
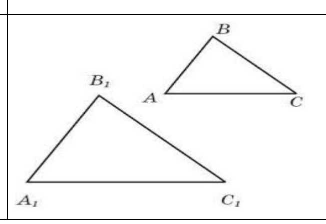
Рисунок 19

На рисунку 19 зображені подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Подібність цих трикутників коротко позначають так: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Це означає $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то$\angle A = A_1, \angle B = B_1, \angle C = C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$,

де k – коефіцієнт пропорційності (подібності).

Таблиця 6

Ознаки подібності трикутників.		
Теорема (ознака подібності трикутників за двома кутами): Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.	Теорема (ознака подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними): Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.	Теорема (ознака подібності трикутників за трьома сторонами): Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.
		

Означення : Пряма, яка паралельна стороні трикутника і перетинає дві інші сторони, відтинає від даного трикутника подібний.

Теорема (про відношення периметрів подібних трикутників):Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

Теорема (про відношення площ подібних трикутників):Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Прямокутний трикутник

Теорема Піфагора :

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів: $a^2 + b^2 = c^2$
Оскільки катет прямокутного трикутника менший за гіпотенузу, то синус і косинус гострого кута менші за одиницю. Тригонометричні функції гострого кута залежать тільки від величини кута.

Означення

Синусом гострого кута **α** прямокутного трикутника (позначається sin α) називається протилежного катета до гіпотенузи:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Косинусом гострого кута α прямокутного трикутника (позначається cos α) називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Тангенсом гострого кута α прямокутного трикутника (позначається tg α) називається відношення протилежного до прилеглого:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$$

Окрім синуса, косинуса і тангенса, розглядають також **котангенс** гострого кута **α** прямокутного трикутника (позначається ctg a), який дорівнює відношенню прилеглого катета до протилежного:

$$\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a}$$

Основні тригонометричні тотожності:

1) $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$;
2) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
3) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
4) $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$.

Площі трикутника

Кожний трикутник (як частина площини, обмежена замкненою ламаною) має площу. Площу S трикутника можна визначити за формулою $S = \frac{1}{2}ah_a$, де h_a – висота, проведена до сторони a.

Практична частина

Розв'язки прикладів та задач для учнів 8 класу що продемонстровані у середовищі GeoGebra

Завдання 8°

Висота CH прямокутного трикутника ABC ділить його гіпотенузу на відрізки AH та BH. Довести, що $AH \cdot BH = CH^2$

Розв'язання.

Знайдемо величини кутів $\angle BCH = 90°- \angle CBA = \angle CAH$. $\angle BHC = \angle CHA = 90°$. Тому $\triangle CBH \sim \triangle ACH$.

Отже, $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$, звідки $AH \cdot BH = CH^2$. (Рис.20)

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням : https://www.geogebra.org/classic/tjjsxnpr.

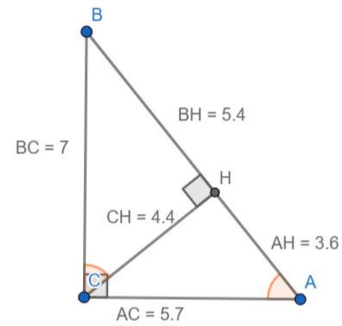


Рисунок 20

Завдання 9°

Три середні лінії трикутника розбивають його чотири частини. Площа однієї з них дорівнює S. Доведіть, що площа даного трикутника дорівнює $4S$.

Розв'язання :

За означення : периметр трикутника утвореного середніми лініями у довільному трикутнику рівний половині периметра даного трикутника.

$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = 2$. Коефіцієнт подібності трикутників $k=2$.

$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = k^2$. $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = 2^2 = 4 \rightarrow S_{ABC} = 4S_{DEF}$.(Рис.21)

Розв'язок задачі можна продемонструвати у динамічному середовищі. Запропонуйте учням змінити довжини сторін трикутника та градусну міру кутів, щоб переконатися у достовірності даної задачі.

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням : https://www.geogebra.org/classic/qhhapcyx

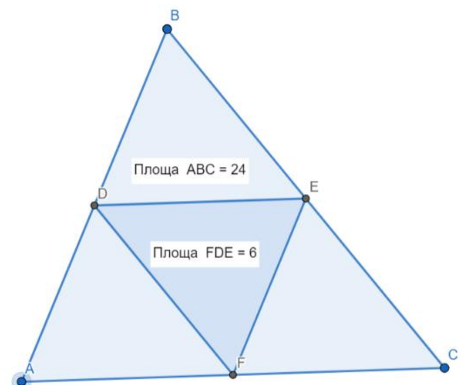


Рисунок 21

Завдання 10°

Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються в точці E. Довести, що площі трикутників ABE та CDE рівні.

Розв'язання:

Нехай – h висота трапеції. Тоді $S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot h = S_{ACD}$.

Звідси маємо : $S_{ABE} = S_{ABD} - S_{AED} = S_{ACD} - S_{CDE}$. (Рис.22)

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням : https://www.geogebra.org/classic/bqehnbet

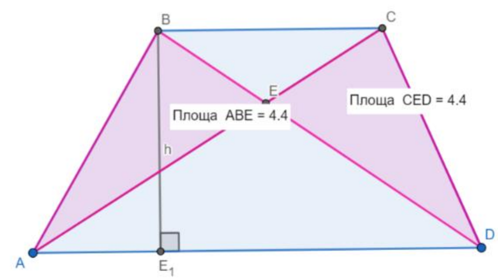


Рисунок 22

Завдання 11°°

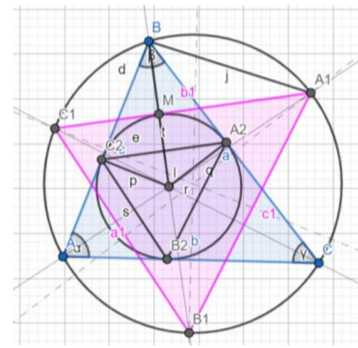
Трикутник ABC вписаний у коло. ТочкиA_1, B_1, C_1– відповідно середини дуг *BC, CA, AB,* а точкиA_2, B_2, C_2– відповідно точки дотику до сторін *BC, CA, AB* кола, вписаного у трикутник *ABC*. Довести, що прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 перетинаються в одній точці.

Розв'язання.

Нехай I – центр вписаного кола, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$

$\angle ACB = \gamma$, $M = BI \cap C_1A_1$.

Тоді $\angle IBC = \frac{\beta}{2}$,за властивістю вписаних у коло кутів $\angle BA_1C_1 = \frac{\gamma}{2}$, $\angle A_1BC = \frac{\alpha}{2}$.



У трикутнику MBA_1 , $\angle BMA_1 = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90°$

У чотирикутникуBC_2IA_2 маємо $BC_2 = BA_2, C_2I = A_2I$ тому $BI \perp C_2A_2$.Отже, $C_2A_2 \parallel C_1A_1$

Аналогічно показуємо, що, $C_2B_2 \parallel C_1B_1$, $B_2A_2 \parallel B_1A_1$

Отже, трикутники $A_1B_1C_1$і $A_2B_2C_2$ подібні. (Рис.23)

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням : https://www.geogebra.org/calculator/nqbpjw2r

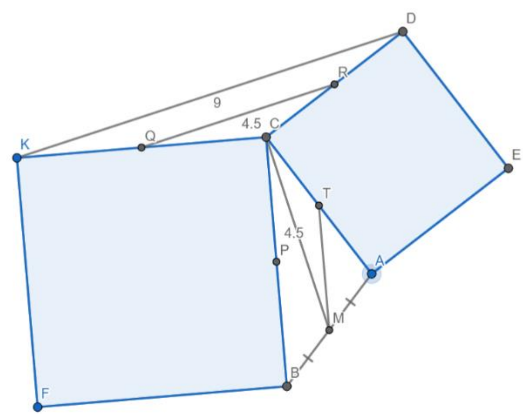
Рисунок 23

Завдання 12°°

На сторонах AC і BC трикутника ABC поза трикутником побудовано квадрати $ACDE$ та $BFKC$. Точка M – середина сторони AB. Доведіть, що $CM = \frac{1}{2}DK$. Визначіть взаємозв'язок відрізків AK та DB, а також взаємне розташування прямих AK, DB та FE.

Розв’язання :

Проведемо сторону *KD*.



Нехай Q − середина KC ; R − середина CD ; T − середина AC; P − середина CB.

Тоді QR – середня лінія трикутника CKD ; MT − середня лінія трикутника $CKD;$

$MT = PC = QR \rightarrow CT = CR.$

Нехай $\angle ACB = \alpha$. Тоді $\angle CTM = 180° - \alpha$; $\angle QCR = 360° - (90° + 90° + \alpha) = 180° - \alpha$;

Δ*CTM* =Δ*QCR* – за двома сторонами та кутом між ними; *CM* = *QR* = $\frac{1}{2}$*DK*. (Рис.24)

Рисунок 24

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням: https://www.geogebra.org/classic/swa5v9z5

Завдання 13°°

У рівнобедреному трикутнику *ABC* з вершиною в точці *B* проведено висоти *BH* та *CL*. Точка *D* є такою що *BHCD* - прямокутник. Знайдіть величину кута *DLH*.

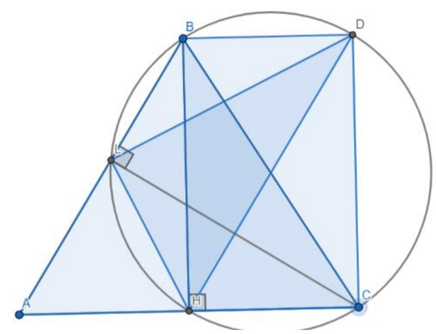


Рисунок 25

Розв’язання :

Чотирикутник *BLHC* - вписаний; чотирикутник *BLCD* - вписаний. Оскільки через три неколінеарні точки проходить лише одне коло то LBDCH- вписаний пятикутник у коло з діаметром *DC* і *DH*. ∠*DLH* - вписаний, який спирається на діаметр. Отже ∠*DLH* = 90 °.(Рис.25)

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням: https://www.geogebra.org/classic/avrbsmzp

Завдання 14*

Якщо продовження бісектриси кута A перетинає описане навколо трикутника ABC коло в точці W, то справедлива рівність $WB = WC = WI$, де I – інцентр трикутника ABC.

Розв'язання:

Проведемо бісектрису $\angle A$; Тоді$\angle BAW = \angle CAW = \alpha$;

$\angle BAW$ та $\angle CAW$ спитаються на рівні дуги BW та CW, а рівні дуги в свою чергу стягують рівні хорди $\rightarrow$ $BW = CW$ за властивістю вписаних кутів.

Доведемо, що $WB = WI$. Проведемо бісектрису $\angle B$; Тоді $\angle ABW_1 = \angle CBW_1 = \beta$.

$\angle BIW = \alpha + \beta$; $\angle CBW$ спирається на дугу $CW \rightarrow$ $\angle CBW = \alpha$; $\angle IBW = \alpha + \beta$; $\rightarrow \Delta WIB -$ рівнобедрений. $WB = WC = WI$.(Рис.26).

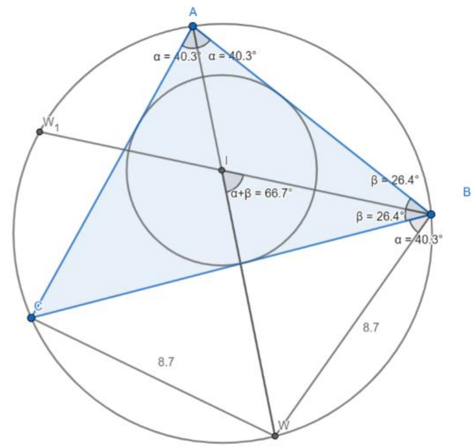


Рисунок 26

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням : https://www.geogebra.org/classic/hbsrcjez

Завдання 15*

Точка D належить стороні AC трикутника ABC. Точки M $і$ N належать сторонам AB $і$ BC відповідно. F - точка перетину відрізків MN $і$ BD. Доведіть, що коли $MN \parallel AC$, то $MF{:}FN = AD{:}DC$

Розв'язання :

Якщо $MN \parallel AC$ то $\angle BAD = \angle BMF$ як відповідні, $\angle ABD = \angle MBF$, сторона MB належить стороні AB $\rightarrow$ $\Delta\, ABD \sim \Delta\, MBF$ за ознакою подібності трикутників. Тоді виконується відношення $\frac{x}{a} = \frac{BF}{BD}$. Аналогічно $\Delta\, CBD \sim \Delta\, NBF$, тоді $\frac{y}{b} = \frac{BF}{BD}$. Отже $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ (Рис.27)

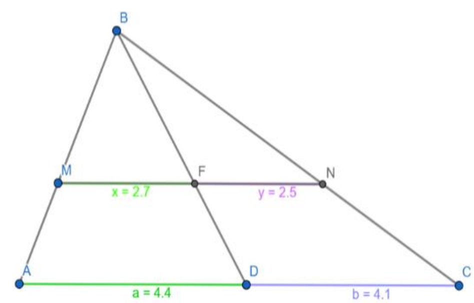


Рисунок 27

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням : https://www.geogebra.org/classic/jukrrvaf

Задачі для самостійного опрацювання.

1. У трикутнику ABC висота BH ділить сторону AC на відрізки $AH = 4$ см, $HC = 12$ см. Відрізок AM – медіана трикутника ABC, відрізок MD – висота трикутника AMC. Знайдіть відрізки AD і DC.

2. Знайдіть кути трикутника, якщо дві його середні лінії перпендикулярні й рівні.

3. Відрізки AB і AC– відрізки дотичних до кола, проведених з точки A. Доведіть, що центр кола, вписаного в трикутник ABC, лежить на даному колі.

4. Дано гострокутний трикутник ABC і точку M таку, що $BM \perp AB, CM \perp AC$. Доведіть, що точка M лежить на колі, описаному навколо трикутника ABC.

5. Чи можуть середні лінії трикутника дорівнювати 6 см, 8 см і 20 см? Якщо так то знайдіть периметр цього трикутника ?

6. У рівнобедреному трикутнику проведено пряму, що проходить через середини бічних сторін і відтинає від даного трикутника трапецію. Знайдіть її периметр, якщо периметр даного трикутника дорівнює 42 см, а основа відноситься до бічної сторони як10:8.

7. Середній лінії трикутника відносяться як 8 : 10 : 12. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 60 см.

8. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці K. Менша основа BC трапеції дорівнює 4 см, KB=5 см, AB=7 с. Знайдіть більшу основу трапеції.

9. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ відомо, що $BC: A_1C_1 = AC :B_1C_1 = 3$, $\angle C = \angle C_1$. Знайдіть сторони AB і A_1B_1, якщо їхня різниця дорівнює 9 см.

10. Визначте чи подібні трикутники, якщо їхні сторони дорівнюють:

1) 7 см, 11 см, 13 см і 21 см, 33 см, 39 см;

2) 9 см, 8 см, 7 см і 44 см, 43 см, 42 см?

11. У трикутниках ABC на стороні BC позначено точку L. Відомо, що $AL = 16$ см, $\frac{LB}{AB} = \frac{AB}{DC} = \frac{1}{8}$. Знайдіть довжину сторону AC.

12.У прямокутному трикутнику проведено висоту до гіпотенузи, вона ділить гіпотенузу на відрізки 12 см і 16 см. Знайдіть висоту прямокутного трикутника.

13. Катет прямокутного трикутника дорівнює 30 см, а його проекція на гіпотенузу – 18 см. Знайдіть сторони трикутника.

14. Знайдіть висоту та бічну сторону рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 8 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

15. Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 6 см і 96 см. Знайдіть периметр трапеції.

16.Катети прямокутного трикутника дорівнюють 15 см та 8 см. Знайдіть довжину третьої сторони трикутника.

17. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза та другий катет відповідно дорівнюють 13 см і 5 см.

18.Квадрат вписано у коло, знайдіть діаметр кола якщо сторона квадрата 12 см.

19. Одна із сторін прямокутника дорівнює 32 см. Знайдіть другу сторону прямокутника та його діагональ, якщо їхні довжини відносяться як 2:6.

20.Знайдіть сторону ромба, якщо діагоналі ромба відповідно рівні 14 та 48 см.

21. Гіпотенуза та один із катетів прямокутного трикутника відносяться як 26:24, а другий катет дорівнює 25 см. Знайдіть периметр та площу даного трикутника.

22. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 15 см і 17 см. Знайдіть:

1) синус кути, протилежного більшому катету;

2) косинус кута, прилеглого до меншого катета;

3) котангенс кута, протилежного більшому катету.

23. Знайдіть $cos\ a, tg\ a$ і $ctg\ a$, якщо $sina = 0{,}6$

24. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) якщо відомо:

1) $AB = 12$ см, $\angle B = 53°$; 3) $AB = 14$ см, $BC = 6$ см;

2) $AC = 10$ см, $\angle B = 73°$; 4) $BC = 9$ см, $AC = 12$ см.

25. Знайдіть діагональ рівнобічній трапеції $ABCD$ основи AD і BC дорівнюють відповідно 18 см і 12 см, а бічна сторона утворює з основою AD кут 30°.

26. Знайдіть площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 9 см і 14 см.

27. Площа трикутника дорівнює 98 см^2, а одна з його висот – 14 см. Знайдіть сторону трикутника, до якої проведено цю висоту.

28. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 34 см, а висота, проведена до основи – 30 см.

29. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 17 см, а радіус вписаного кола – 3 см.

30. Площа трикутника ABC дорівнює 98 см^2. Точка L ділить його сторону AB у відношенні 4:3, рахуючи від точки B. Знайдіть площі трикутників ACL і BCL.

31. У трикутнику ABC : $AB = 31$ см, $BC = 15$ см, $AC = 26$ см. Пряма α, паралельна стороні AB, перетинає сторони BC і AC у точках M і N відповідно. Обчисліть периметр трикутника MNC, якщо MC=5 см.

32. У трикутник ABC вписаного квадрат $OPND$. Висота цього трикутника, проведена до сторони, дорівнює 12 см. Знайдіть периметр площу квадрата (у см), якщо AC=10 см.

33. У трапеції $ABCD$; $\angle A = 90°, AB = 12$ см. Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML, причому $KM = 5{,}5$ см і $ML = 3$ см. Обчисліть периметр трапеції $ABCD$ (у см).

34. Дві вежі, одна з яких 40 футів, а друга – 30 футів заввишки, розташовано на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що знаходиться між ними, одночасно з обох веж злетіло по пташці. Рухаючись з однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (у футах).

9 КЛАС
Теоретична частина

Косинус і синус

Косинусом і синусом кута α $(0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ})$, якому відповідає точка М одиничного півкола, називають відповідно абсцису й ординату точки М.

Тангенс

Тангенсом кута α, де $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$ і $\alpha \neq 90^{\circ}$, називають відношення $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\sin(90^{\circ} - \alpha) = \cos\alpha$ $\quad\quad$ $\sin(180^{\circ} - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(90^{\circ} - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad\quad$ $\cos(180^{\circ} - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad\quad$ $tg(180^{\circ} - \alpha) = -\mathrm{tg}\ \alpha$

Теорема косинусів

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними: (Рис.28)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Наслідок з теореми косинусів

Нехай a, b і c – довжини сторін трикутника, причому a – довжина його найбільшої сторони.
Якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то трикутник є гострокутним.
Якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то трикутник є тупокутним.
Якщо $a^2 = b^2 + c^2$, то трикутник є прямокутним.

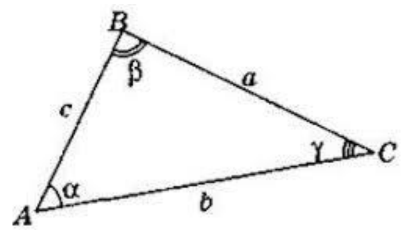


Рисунок 28

Лема про хорду кола

Хорда кола дорівнює добутку діаметра та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду.

Теорема синусів

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів (Рис.29):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

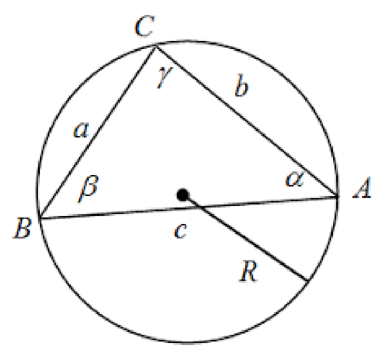


Рисунок 29

Формула для знаходження радіуса кола, вписаного в трикутник

$$r = \frac{S}{p}$$

Формули для знаходження радіуса кола, описаного навколо трикутника

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} \quad R = \frac{abc}{4S}$$

Формули для знаходження площ трикуників

Можна користуватися і такими формулами:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,\ S = pr,\ S = \frac{abc}{4R}.,$$

де r- радіус вписаного кола у трикутник, R- радіус описаного кола навколо трикутника, p- півпериметр трикутника.

Якщо відомі три сторони трикутника, то його площу можна визначити за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Коли ж довжини сторін – квадратичні ірраціональності, то замість формули Герона краще користуватися формулою $S = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$.

Відстань між двома точками

Відстань між точками A (x_1; y_1) і B (x_2; y_2) можна знайти за формулою

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Координати середини відрізка

Координати (x_0 ; y_0) середина відрізка з кінцями (x_2 ; y_2) і (x_1 ; y_1) можна знайти за формулами:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Рівняння фігури

Рівняння фігури F, заданої на площі xy, називають рівняння з двома змінами x і y, яке має такі властивості:

1) Якщо точка належить фігурі F, то її координати є розв'язком даного рівняння;

2) будь-якого розв'язок (x; y) даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі F.

Рівняння кола

Рівняння кола радіус R із центром у точці A (a; b) має вигляд $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Будь-яке рівняння виду $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, де a,b і R – деякі числа, причому $R > 0$, є рівнянням кола радіуса R із центром у точці з координатами (a; b).

Рівняння прямої

Ріняння прямої має вигляд $ax + by = c$, де a, b і c – деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно.

Будь-яке рівняння виду $ax + by = c$, де a, b і c – деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням прямої.

Якщо $b = 0$ і $a \neq 0$, то рівняння прямої $ax + by = c$ задає вертикальну пряму; якщо $b \neq 0$, то це рівняння задає невертикальну пряму.

Практична частина

Розв'язки прикладів та задач для учнів 9 класу що продемонстровані у середовищі GeoGebra

Завдання 16°

Знайдіть радіус описаного кола навколо трикутника із даними величинами кутів та довжинами сторін.

Розв'язання:

Скористаємось наслідком із теореми синусів $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.

$\frac{a}{\sin\alpha}=2R \Leftrightarrow R=\frac{a}{\sin\alpha}$ - Формула для знаходження радіуса описаного кола навколо трикутника через довжину сторони а та синуса кута α.

$\frac{b}{\sin\beta}=2R \Leftrightarrow R=\frac{b}{\sin\beta}$ - Формула для знаходження радіуса описаного кола навколо трикутника через довжину сторони b та синуса кута β

$\frac{c}{\sin\gamma}=2R \Leftrightarrow R=\frac{c}{\sin\gamma}$ - Формула для знаходження радіуса описаного кола навколо трикутника через довжину сторони c та синуса кута γ.(Рис.30)

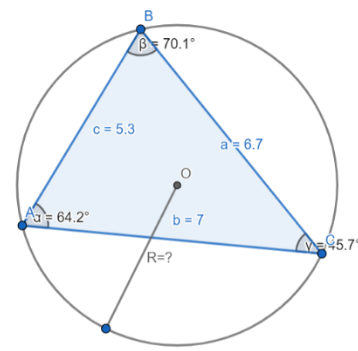


Рисунок 30

Дана задача являється хорошим прикладом базових задач у вивчені геометрії у 9 класі. Учні, використовуючи динамічну модель можуть легко освоїти властивості та справедливість теореми синусів на практиці.

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням:
https://www.geogebra.org/classic/rtfzyc4q

Завдання 17°

Знайдіть периметр та площу трикутника *ABC*, якщо його вершини мають такі координати:$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2), C(c_1; c_2)$.

Розв'язання :

Для знаходження периметра трикутника слід обчислити довжини сторін трикутника побудованого на векторах.

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$ формула для обчислення довжини вектора *AB*.

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}$ формула для обчислення довжини вектора *BC*.

$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2}$ формула для обчислення довжини вектора *CA*.

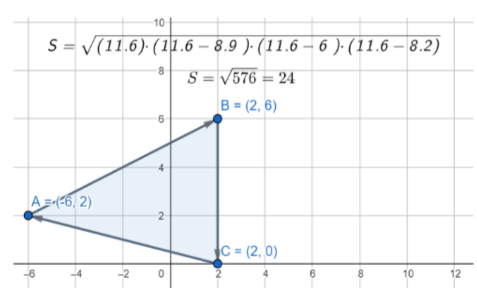


Рисунок 31

Для знаходження периметра трикутника обчислимо суму сторін $P_{\Delta ABC}=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{CA}|$. Для знаходження площі трикутника доцільно використовувати формулу Герона $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-|\overrightarrow{AB}|)(p-|\overrightarrow{BC}|)(p-|\overrightarrow{AC}|)}$, де $p=\frac{P_{\Delta ABC}}{2}$. (Рис.31)

Задача є базового рівня, виконуючи не складні геометричні та алгебраїчні операції, та застосовуючи формули для знаходження довжин вектора відомими за координатами, периметра та площі. Якщо вихованець легко та спритно знаходить розв'язок цього завдання, йому не важко буде знаходити розв'язання інших.
Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням:
https://www.geogebra.org/classic/t9eb2a9v

Завдання 18°°

Доведіть, що відстань від будь-якої точки кола, описаного навколо правильного трикутника до однієї з його вершин, дорівнює сумі відстаней від цієї точки до двох інших вершин.

Розв'язання :

1) Нехай $\angle MAC = \angle\varphi$.
За теоремою синусів: $MC = 2R\,sin\,\varphi,\ BM = 2R\,sin\,(60° - \varphi);$
2) $\angle MBC = 0{,}5$ дуги МnС $= \varphi$; $AM = 2R\sin(60° + \varphi)$;
$AM > BM, AM > MC.$
3)$BM + MC = 2R\sin(60° - \varphi) + 2R\sin\varphi =$
$= 4R\,sin30°cos(30° - \varphi) = 2R\,sin\,(60° + \varphi)$
$AM = 2R\,sin\,(60° + \varphi) = BM + MC$ (Рис.32)

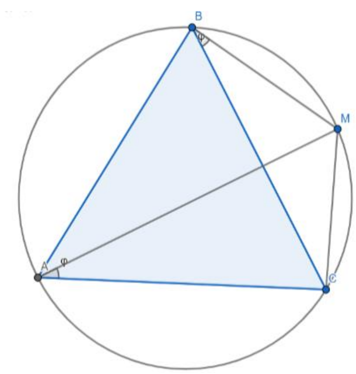


Рисунок 32

Розгляньте з вихованцями розв'язання у динамічному середовищі GeoGebra, та переконайтеся справедливості розв'язку даної задачі. Здійснюйте переміщення вершин трикутника та точки на колі та отримуйте нові результати.
Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням :
https://www.geogebra.org/classic/kjg2hc3v

Завдання 19°°

Всередині трикутника взята довільна точка О і через неї проведені три прямі, паралельні сторонам трикутника. Ці прямі ділять трикутник АВС на 6 частин, із яких три с трикутниками. Площі цих трикутників дорівнюють S_1, S_2, S_3. Довести, що площі трикутника АВС дорівнює $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$

Розв'язання:

Нехай $AB_2 = a, B_2B_1 = b, B_1C = c, S_{\Delta ABC} = S,\ \Delta OA_1A_2 \sim \Delta ACB.$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{c^2}{(a+b+c)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{c}{a+b+c}$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{b^2}{(a+b+c)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{b}{a+b+c}$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{c^2}{(a+b+c)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{a}{a+b+c}$$

$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = 1 \Rightarrow S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. (Рис.33)

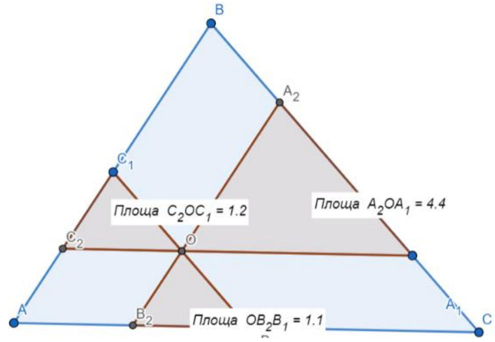


Рисунок 33

Такий тип задач дає змогу учням відійти від стандартних методів обчислення площ довільних трикутників, водночас завдання розвиває логічне мислення та оперуванням геометричними формулами та властивостями.
Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням:
https://www.geogebra.org/classic/evpkfzpu

Завдання 20°°

На сторонах прямокутного трикутника ABC (кут C =90°) побудовані квадрати площа квадрата на гіпотенузі x см квадратних а різниця площ квадратів на катетах y см квадратних. Доведіть що площу трикутника можна обрахувати за формулою $\frac{1}{4}\sqrt{x^2-y^2}$.

Розв’язання:

Застосуємо теорему Піфагора

$$S_1 = a^2$$
$$S_2 = b^2$$
$$S_3 = c^2$$
$$c^2 = x;\ a^2 - b^2 = y$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = x \\ a^2 - b^2 = y \end{cases}$$

Додаймо до першого рівняння друге і отримаємо рівняння:

$2a^2 = x + y$

$$a^2 = \frac{x+y}{2}$$
$$a = \sqrt{\frac{x+y}{2}}$$

Знайдемо b підставивши значення a у одне із рівнянь системи:

$$b^2 = x - \frac{x+y}{2}$$
$$b = \sqrt{x - \frac{x+y}{2}} = \sqrt{\frac{x-y}{2}}$$
$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x-y}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{x^2-y^2}$$

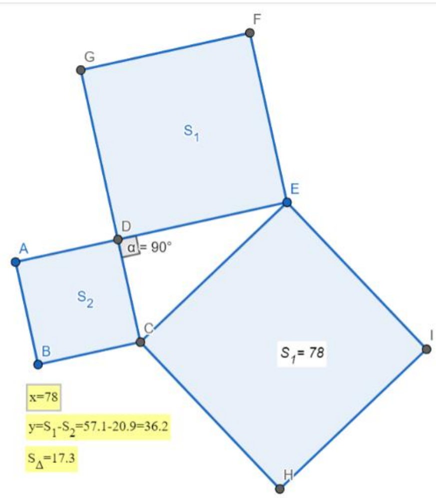


Рисунок 34

Задача формує уміння знаходити відношення та взаємозв’язок між різними величинами та застосування різних алгебраїчних знань та вмінь. (Рис.34)Для виконання завдання на уроках чи заняттях математики перейдіть за посиланням та змінюйте розміри квадратів за допомогою курсору, та переглядайте значення площі прямокутного трикутника.

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням : https://www.geogebra.org/classic/znardten

Завдання 21*

Чевіани AA_1, BB_1, CC_1, ΔABC перетинаються в точці D. Доведіть, що $\frac{AD}{DA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}$

Розв’язання:

До ΔAA_1C і прямої BB_1 застосуємо теорему Менеля $\frac{AD}{DA_1}\cdot\frac{A_1B}{BC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1$

Виконуючи нескладні алгебраїчні перетворення знаходимо: $\frac{AD}{DA_1} = \frac{BC}{A_1B}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{A_1B + A_1C}{A_1B}\cdot\frac{B_1A}{CB_1}$.

$\frac{AD}{DA_1} = \left(1 + \frac{A_1C}{A_1B}\right)\cdot\frac{B_1A}{CB_1} = \frac{B_1A}{CB_1} + \frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{B_1A}{CB_1}$

За теоремою Чеви:

$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1 \rightarrow \frac{A_1C}{BA_1}\cdot\frac{B_1A}{CB_1} = \frac{C_1B}{AC_1}$

Отже $\frac{AD}{DA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}$, що і треба було довести. (Рис.35)

Динамічна модель задачі у GeoGebra за посиланням: https://www.geogebra.org/classic/ec7urfad

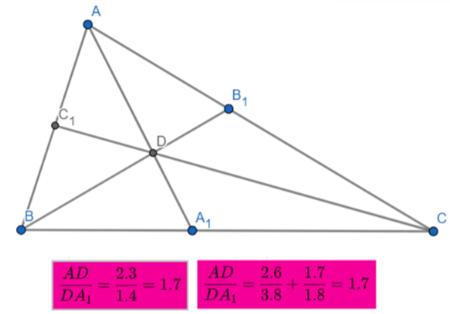


Рисунок 35

Задачі для самостійного опрацювання.

1. Знайдіть кути трикутника з вершинами $A\ (0; 12), B\ (8\sqrt{3};\ 12)$ і $C\ (6\sqrt{3};\ 6)$.

2. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°, AC = 1, BC = \sqrt{2}$. Доведіть. Що його медіани AK і CM перпендикулярні.

3. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°, \angle A = 30°, CB = 6$. Знайдіть скалярний добуток векторів:
1)$\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

4. Трикутник обмежений осями координат і прямою $4x - 3y = 12$. Знайдіть периметр трикутника.

5. Знайдіть площу трикутника, обмеженого осями координат і прямою $7y - 2x = 28$.

6. Знайдіть координати вершини C рівностороннього трикутника ABC, якщо $A(6;\ -3), B\ (-6;\ 3)$.

7. У трикутнику ABC відомо, що, $AB = BC, A\ (5;\ 9), C\ (1;\ -3)$, модулі координат точки B рівні. Знайдіть координати точки B.

8. Знайдіть бісектрису BL трикутника, вершинами якого є точки $A\ (-3;\ 9), B\ (15;\ 27), C\ (18;\ 6)$.

9. Вершинами трикутника є точки $A\ (-1;\ 3), B\ (5;\ 9), C\ (6;\ 2)$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

10. Знайдіть найбільший та найменший кут трикутника, якщо його сторони дорівнюють 12 см, 20 см і 28 см. Визначте вид трикутника.

11. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°, AC = 20$ см, $BC = 15$ см. На стороні AB позначено точку M так, що $BM = 4$ см. Знайдіть відрізок CM.

12. Дві сторони трикутника дорівнюють 16 см і 14 см, а кут, протилежний меншій із відомих сторін, дорівнює 60°. Знайдіть невідому сторону трикутника.

13. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а бічна сторона – 20 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при його основі.

14. Знайдіть сторону AB трикутника ABC, якщо $AC = \sqrt{6}$ см, $\angle B = 120°, \angle C = 45°$.

15. Радіус кола, описаного навколо трикутника MKP. Дорівнює 5 см, $sin\ M = 0{,}7$. Знайдіть сторону KP.

16. Катери які пливуть річкою, що має форму трикутника, два кути якого дорівнюють 40° і 105°. Меншу сторону цього трикутника один із катерів пропливає за 1 год. За який час він пройде вест шлях? Відповідь подайте в годинах, округливши її до сотих.

17. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а висота – 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

18. Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом між ними:
1) $b = 9\ см,\ c = 11\ см,\ α = 76°$;
2) $α = 20$ см, $b = 18$ см, $ɣ = 104°$.

19. Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом, який лежить проти однієї з даних сторін:
1) $α = 23\ см,\ c = 30\ см,\ ɣ = 102°$;
2) $α = 18$ см, $b = 25$ см, $α = 36°$.

20. Зайдіть площу трикутника зі сторонами:
1) 6 см, 8 см,10 см; 2) 12 см, 13 см, 14 см.

21. У трикутник із площею 108 см^2, вписано коло. Знайдіть радіус кола якщо периметр трикутника – 94 см трикутника.

22. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 15 см і 50 см, а бічні сторони – 18 см і 29 см.

23. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135°$. Знайдіть діаметр кола, описаного навколо трикутника.

24. У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 20°, \angle C = 30°, AC = 14$см. Коло із центром у точці A дотикається до прямої BC, Знайдіть довжину дуги цього кола, яка належить трикутнику ABC.

ВИСНОВКИ

У своїй роботі я розробила методичні вказівки та підібрала завдання для учнів 7-9 класів на уроки геометрії, які можна застосувати у програмному динамічному середовищі GeoGebra. У свою чергу методична праця складається із теоретичної та практичної частин.

У теоретичній частині викладено основні поняття про трикутник та все, що зв’язано із ним. Уся теорія поділена по класах, спираючись на навчальну програму затверджену Міністерством освіти України, для закладів загальної освіти, для того аби учню та вчителю було зручніше використовувати методичні вказівки та завдання.

Щодо практичної частини, я детально ознайомилася із навчальною програмою з геометрії 7-9 класів, аби підібрати та самостійно створити завдання. Задачі продемонстровані для самостійного розв’язання є досить цікавими та різноманітними. У свою чергу завдання є як для учнів із початковим рівнем знань так і для вихованців із високим. А найголовніше це те, що їх можна наочно показати та розв’язати у програмному динамічному середовищі GeoGebra.

Створюючи свою роботу, я замислилася чи не було б доцільно сформувати низку завдань, які вже будуть продемонстровані у програмному забезпеченні. Тому я створила та розв’язала більше двадцяти задач у програмі GeoGebra, котрі є доступними при переході за посиланням. На мою думку, застосування моїх динамічних моделей є досить корисними для вчителів, адже вони можуть продемонструвати даний приклад на своїх уроках у школі використовуючи інтерактивну дошку, так і під час дистанційного навчання. А учням такі унаочнення дадуть змогу краще зрозуміти матеріал.

Важливо зазначити, що використання програми GeoGebra сприяє формуванню алгоритмічного стилю мислення учнів, наочно демонструються формальний, алгоритмічний характер розв’язування прикладних задач, учні опановують сучасні інформаційно-комунікаційні технології та отримують доступ до структурно впорядкованої навчальної інформації. Процес вирішення математичних завдань, які містять задачі про трикутники, з використанням комп’ютерно-орієнтованої системи навчання стимулює учнів до розумової активності та сприяє розвитку їхньої проектно-дослідницької діяльності.

Таким чином, із появою та розвитком інформаційно комунікаційних технологій та їх використання у навчальному процесі системи динамічної математики GeoGebra є одним із перспективних напрямків підвищення ефективності навчання математики учнів школи. Замінюючи традиційні методи викладання не лише геометрії, а й інших предметів, на використання наочних динамічних середовищ підвищує інтерес учнів до даного предмету, що у свою чергу сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Hohenwarter M and Fuchs K 2004 Combination of Dynamic Geometry, Algebra, and Calculus in the Software System Geog.
2. Kusumah Y S, Kustiawati D and Herman T 2020 The Effect of Geogebra in Three Dimensional Geometry Learning on Students' Mathematical Communication Ability Int. J. Instr. 13 895- 908
3. Mahmudi A 2010 Membelajarkan Geometri dengan Program Geogebra Seminar FPMIPA UNY (Yogyakarta) pp 1-2
4. Shadaan P and Leong K E 2013 Effectiveness of Using Geogebra on Students' Understanding in Learning Circles Malaysian Online J. Educ. Technol. 1 1-11
5. Sudihartinih E and Purniati T 2019 February Using Geogebra to develop students understanding on circle concept In J. Phys. Conf. Ser. 1157 p 042090
6. Zakaria E and Lee L S 2012 Teacher's perceptions toward the use of Geogebra in the teaching and learning of Mathematics J. Math. Stat. 8 253-7
7. Zulnaidi H, Oktavika E and Hidayat R 2020 Effect of use of Geogebra on achievement of high school mathematics students Educ. Inf. Technol. 25 51-72

8. Бевз Г. П. Методика викладання математики: [навч. посіб.] / Г.П. Бевз. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.
9. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник /Г.П. Бевз. –[3-тє вид.перероб. і допов.]. – К.:Вища школа, 1989. – 367с.
10. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. – 3- тє вид., перероб. і допов. / Г.П. Бевз. – К.:Вища шк.., 1989. – 367 с.
11. Биков, В. Ю. (2008). Моделі організаційних систем відкритої освіти: Монографія. Київ: Атака.
12. Бурда М. І. Геометрія: [підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів] / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. –К.: Зодіак-ЕКО, 2008. – 239 с
13. Вінниченко, Є.Ф., & Костюченко, А.О. (2007). Деякі особливості геометричних перетворень в програмі GRAN-2D. Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць. Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 5(12), 114-120.
14. Горошко, Ю. В., & Вінниченко Є. Ф. (2008). Розв’язування задач з параметрами за допомогою програми «GRAN-1». Математика в школі, 7–8(84). 25-28.
15. Грамбовська, Л. В., & Яковчук, О. М. (2010). Комп'ютерні динамічні моделі як засіб дидактичного забезпечення процесу навчання геометрії в сучасній школі. Комп'ютер у школі та сім'ї, 7, 14-17.
16. Гриб’юк, О. & Юнчик, В. (2015b). Система динамічної математики GeoGebra як засіб активізації дослідницької діяльності учнів.Інформаційно-комунікаційні технологіїї в сучасній освіті: досвід, проблеми,перспективи : зб. наук. пр. 4, Is. 1, 163-167.
17. Гриб’юк, О. & Юнчик, В. (2015a). Розв’язування евристичних задач в контексті STEM-освіти з використанням системи динамічної математики GeoGebra. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців:методологія, теорія, досвід, проблеми. Зб. наук. пр. 43. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 206-218.
18. Жалдак М. І., Горошко Ю. В., &Вінниченко Є. Ф. (2009). Математика з комп’ютером : посібник для вчителів. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова.
19. Жалдак, М. І. (2011). Система підготовки вчителя до використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2: Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання, 11, 3-15.

20. Колмогоров А. Н. О системе основных понятий и обозначений для школьников курса математики / А. Н. Колмогоров // В кн.: на путях обновления школьного курса математики. – М., 1978. – С. 88-97.
21. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп’ютером : посіб. для вчителів і студ. / Т. Г. Крамаренко ; за ред. М. І. Жапдака. – Кривий Ріг.
22. Кушнір, В. А., & Ріжняк, Р. Я. (2009). Технологія дослідження математичних функцій засобами комп’ютерного моделювання.Комп’ютер в школі та сім’ї, 8(78), 12-18.
23. Про основні засади розвитку інформаційного суспільства в Україні на 2007–2015 роки [Електронний ресурс] : Закон України // Відомості Верховної Ради України (ВВР). – 2007. – № 12. – С. 102. – Режим доступу : http://zakon1.rada.gov.ua/laws/show/537-16. – Назва з екрана.
24. Раков, С. А., Горох, В. П., & Осенков, К. О та ін. (2002). Відкриття геометрії через комп’ютерні експерименти в пакеті DG : посібник для викладачів математики. Харків : ХДПУ.
25. Ракута, В.М. (2010). Програми для роботи з функціями та графіками. Комп’ютер у школі та сім’ї, 7(87), 29-33.
26. Смалько, О.А. (2003). Використання програмного педагогічного засобу «GRAN-2D» на уроці планіметрії. Математика в школі, 1, 10-14.
27. Тесленко І.Ф.,Вивальнюк Л.М.,Боровик Н.В..Математика: посібник для факультативних занять у 8-мкл – К.: Рад. шк.,1995. – 207 с.
28. Шумигай С.М. Історія науки на уроках геометрії у 7-9 кл./ С.М. Шумигай // Маематика в школі. – 2011. – № 11-12. – С.14-21.