Міністерство освіти і науки України

Львівський національний університет імені Івана Франка

Механіко-математичний факультет

Кафедра алгебри, топології та основ математики

Пояснювальна записка до дипломної роботи магістра на тему:

“Стандартні і нестандартні методи розв’язання ірраціональних рівнянь і нерівностей”

Виконала:

Студентка VI курсу, групи МТОМ-21з

Спеціальності:

014 “Середня освіта”. “Математика”

Палюх Ольга

Керівник: Бридун В. Л.

Львів-2021

ЗМІСТ

Вступ ……………………………………………………………………………3

I. Теоретичні засади розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівностей…….5

1.1. Розв’язування ірраціональних рівнянь……………………………………...5

1.2. Розв’язування ірраціональних нерівностей………………………………12

II. Практичні приклади розв’язання ірраціональних рівнянь та нерівностей… 14

2.1. Розв’язування ірраціональних рівнянь……………………………………14

2.1.1. Метод, що ґрунтується на знаходженні ОДЗ……………………….. .14

2.1.2. Метод рівносильних перетворень……………………………..........14

2.1.3. Метод заміни змінної……………………………………………..20

2.1.4. Рівняння вигляду $\sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}}+\sqrt[n]{\frac{g(x)}{f(x)}}=m$…………………………………..23

2.1.5. Метод виділення повного квадрата……………………………..........25

2.1.6. Рівняння з кубічною ірраціональністю……………………………26

2.1.7. Метод розкладу на множники……………………………………28

2.1.8. Метод введення допоміжних невідомих……………….……………30

2.1.9. Нестандартні ірраціональні рівняння ………………………….....31

2.2. Приклади розв’язування ірраціональних нерівностей…………………...36

2.2.1.Найпростіші випадки розв’язування ірраціональних нерівностей…..36

2.2.2.Зведення ірраціональної нерівності до системи раціональних нерівностей……………………………………………………………………......37

2.2.3. Метод інтервалів……………………………………………………..38

Висновки……………………………..………………………………………41

Література ……………………….…………………………………………42

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Шкільний курс математики будується на основі змістовно-методичних напрямів, які змінювалися протягом століть, коли науковці досліджували і впроваджували нові поняття. Так у шкільну математику прийшли поняття функціональної залежності, множини, рівняння, нерівності, без яких сучасна математична освіта була б дуже обмеженою і недосконалою.

Особливо змінили шкільну математику рівняння і нерівності. Вони стали основою курсу алгебри, яка дає найкращі методи розв'язання найважчих задач, формує математичну мову, що використовується в різних галузях науки і техніки.

Одним із розділів алгебри є розділ "Ірраціональні рівняння і нерівності" . Труднощі у вивченні даної теми зв'язані із такими особливостями:

1) у більшості випадків відсутній чіткий алгоритм розв'язання;
2) під час розв'язання доводиться робити перетворення, що приводять до втрати рівносильності даного і одержаного рівняння (нерівності).

Досвід показує, що учні недостатньо засвоюють цей матеріал, часто допускають помилки у розв'язанні.

Вище викладене обумовило проблему дослідження шляхів і методів розв'язання ірраціональних рівнянь і нерівностей.

Проблема вивчення методики розв'язуваня ірраціональних рівнянь та нерівностей в шкільному курсі широко обговорюється в науковій літературі. Різним її аспектам присвячені роботи відомих математиків і методистів А.Г. Мерзляк, Л.Г. Хохлова, С.Г.Хома-Могильська, М. І. Шкіль, А.С. Істер.

Об'єкт дослідження - методика розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей.

Предмет дослідження - різні види ірраціональних рівнянь і нерівностей і методи їх розв'язання.

Метою роботи є аналіз різних методів і шляхів розв'язання ірраціональних рівнянь і нерівностей у різноманітних завданнях.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні **завдання:**

- дати характеристику методів розв’язування ірраціональних рівнянь;
- проаналізувати методику розв’язування ірраціональних нерівностей;
- розглянути типові приклади розв’язування ірраціональних рівнянь;
- проілюструвати приклади розв’язування ірраціональних нерівностей.

Методи дослідження. Для реалізації поставлених у роботі завдань мною використовувалися методи аналізу фахової наукової та періодичної літератури, синтетичний метод для узагальнення даних.

Структура роботи. Випускна робота складається зі вступу, двох поширених розділів, висновків, списку використаної літератури, загальний обсяг роботи складає 42 аркуші.

I. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

1.1.РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Означення: Областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ називають множину

$D(f) \cap D(g)$.

Кожний корінь рівняння належить до його області визначення.

Означення: Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називають **рівносильними**, якщо множини їхніх коренів рівні.

Це означає, що якщо будь-який корінь рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, що належить множині M,є коренем рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, а будь-який корінь рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, що належить множині M, є коренем рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то такі два рівняння називають рівносильними на множині M.

Наприклад, рівняння $x^2 – 1 = 0$ і $x = -1$ рівносильні на множині $(–\infty; 0)$.

Теорема 1.1: Якщо до обох частин даного рівняння додати(або від обох частин відняти) одне й те ж число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Теорема 1.2: Якщо обидві частини рівняння помножити(поділити) на одне й те ж відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Означення: Якщо множина розв'язків першого рівняння є підмножиною множини розв'язків другого рівняння, то друге рівняння називають **наслідком** першого рівняння.

Зазначимо, що коли два рівняння є рівносильними, то кожне з них є наслідком другого.

Корені рівняння-наслідку, які не є коренями даного рівняння, називають сторонніми коренями даного рівняння.

Якщо під час розв'язування рівняння рівносильність було порушено й відбувся перехід до рівняння-наслідку, то отримані при цьому сторонні корені, як правило, можна виявити за допомогою перевірки.

Розглянемо функцію $y = x^3$. Ця функція є зростаючою, а отже, оборотною. Через це функція $y = x^3$ кожного свого значення набуває тільки один раз. Іншими словами, з рівності $x_1^3 = x_2^3$ випливає, що $x_1 = x_2$. Оскільки з рівності $x_1 = x_2$ випливає, що$x_1^3 = x_2^3$, то можна стверджувати наступне: якщо обидві частини рівняння піднести до куба, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Приклад 1 Розв'яжемо рівняння

$$\sqrt[5]{x^2 - 6} = \sqrt[5]{-x}$$

Розв'язання: Піднесемо обидві частини даного рівняння до п'ятого степеня. Отримаємо рівносильне рівняння:

$$\left(\sqrt[5]{x^2 - 6}\right)^5 = \left(\sqrt[5]{-x}\right)^5$$

Звідси,

$x^2 - 6 = -x;$

$x^2 + x - 6 = 0;$

.$x_1 = -3,\ x_2 = 2$

Відповідь: $x_1 = -3,\ x_2 = 2$

Означення: Рівняння, у яких змінна міститься під знаком кореня, називають **ірраціональними.**

Ось ще приклади ірраціональних рівнянь: $\sqrt{x - 2} = 3$, $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 2 = 0$, $\sqrt{x + 11} = 1 - x$

Оскільки функція $y = x^{2k-1}$, $k \in N$, є оборотною, то міркування, використані під час розв'язування прикладу 1, можна узагальнити у вигляді такої теореми.

Теорема 1.3: Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Доведення: Покажемо, що рівняння

$f(x) = g(x)$; (1)

і

$(f(x))^{2k-1} = (g(x))^{2k-1},\ k \in N,$ (2)

є рівносильними.

Нехай число α — корінь рівняння (1). Тоді маємо правильну числову рівність $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Звідси можна записати:

$$(f(\alpha))^{2k-1} = (g(\alpha))^{2k-1}$$

Це означає, що число α є коренем рівняння (2).

Нехай число β — корінь рівняння (2). Тоді отримуємо, що

$$(f(\beta))^{2k-1} = (g(\beta))^{2k-1}$$

Оскільки функція $y = x^{2k-1}$, $k \in N$, є оборотною,то $f\,(\beta)$=$g\,(\beta)$. Отже, число β — корінь рівняння (1).

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і, навпаки, кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1). Це означає, що рівняння (1) і (2) рівносильні. ◄

Розв'язуючи приклад 1, ми спрощували вирази виду $(\sqrt[n]{f(x)})^n$,де n — непарне натуральне число. Розглянемо випадок, коли n — парне натуральне число.

Приклад 2 Розв'яжемо рівняння

$$\sqrt{6x+8} = \sqrt{2x-4}$$

Розв'язання: Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата

$(\sqrt{6x+8})^2 = (\sqrt{2x-4})^2$ (3)

$6x + 8 = 2x - 4$ (4)

Звідси $x = -3$.

Перевірка показує, що число –3 не є коренем вихідного рівняння. Отже, рівняння (3) не має коренів. Причина появи стороннього кореня полягає в тому, що застосування формули $(\sqrt{\text{a}})^2$ приводить до розширення області визначення рівняння.

Таким чином, рівняння (4) є наслідком рівняння (3).

Відповідь: коренів немає.

Ще однією причиною появи сторонніх коренів під час розв'язування ірраціональних рівнянь є необоротність функції $y = x^{2k}$, $k \in N$. Це означає, що з рівності ${x_1}^{2k} = {x_2}^{2k}$ не обов'язково випливає,що $x_1 = x_2$. Наприклад,

$(-2)^4=2^4$, але $-2 \neq 2$. Отже, із рівності $x_1 = x_2$ випливає рівність ${x_1}^{2x} = {x_2}^{2x}$. Наведені міркування підказують, що справедливою є така теорема.

Теорема 1.4: При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримуємо рівняння, яке є наслідком даного.

Доведення: Покажемо, що рівняння

$(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k},\ k \in N$, (5)

є наслідком рівняння

$f(x) = g(x)$ (1)

Нехай число α — корінь рівняння (1). Тоді маємо правильну числову рівність $f(\alpha) = g(\alpha)$. Звідси можна записати:

$$(f(\alpha))^{2k} = (g(\alpha))^{2k}$$

Це означає, що число α є коренем рівняння (5).

Нехай число β — корінь рівняння (5). Тоді отримуємо, що

$$(f(\beta))^{2k} = (g(\beta))^{2k}$$

Оскільки функція $y = x^{2k}$, $k \in N$,є необоротною функцією, це означає, що з рівності $(f(\beta))^{2k} = (g(\beta))^{2k}$ не обов'язково випливає, що $f(\beta) = g(\beta)$. Отже, число β — не завжди є коренем рівняння (1).

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (5), а корінь рівняння (5) не завжди є коренем рівняння (1). Це означає, що рівняння (1) є наслідком рівняння (5). ◄

Приклад 3 Розв'яжемо рівняння

$$\sqrt{2x+8} = x$$

Розв'язання: Підносячи обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо рівняння, яке є наслідком даного:

$8 + 2x = x^2$;

$x^2 - 2x - 8 = 0$;

$.x_1 = -2, x_2 = 4$

Перевірка показує, що число –2 не є коренем, а число 4 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: $x = 4$.

Теорема 1.5: Рівняння виду

$\sqrt{\mathrm{f(x)}} = \sqrt{\mathrm{g(x)}}$ 6)

рівносильне системі

$\begin{cases} \mathrm{f(x) = g(x)} \\ \mathrm{f(x)} \geq 0 \end{cases}$ (7)

Доведення: Покажемо, що рівняння

$\sqrt{\mathrm{f(x)}} = \sqrt{\mathrm{g(x)}}$ (6)

і система

$\begin{cases} \mathrm{f(x) = g(x)} \\ \mathrm{f(x)} \geq 0 \end{cases}$ (7)

є рівносильними.

Нехай число α — корінь рівняння (6). Тоді маємо правильну числову рівність

$\sqrt{\mathrm{f}(\alpha)} = \sqrt{\mathrm{g}(\alpha)}$.

Звідси можна записати: $f(\alpha) = g(\alpha)$, якщо $f(\alpha) \geq 0$.

Це означає, що число α є коренем системи (7).

Нехай число β — є коренем системи (7). Тоді отримуємо, що

$\begin{cases} \mathrm{f}(\beta) = \mathrm{g}(\beta) \\ \mathrm{f}(\beta) \geq 0 \end{cases}$.

Оскільки функція $y = \sqrt{\mathrm{x}}$, є оборотною на множині невід’ємних чисел, то$\sqrt{\mathrm{f}(\beta)} = \sqrt{\mathrm{g}(\beta)}$. Отже, число β — корінь рівняння (1).

Ми показали, що кожний корінь рівняння (6) є коренем системи (7) і, навпаки, кожний корінь системи (7) є коренем рівняння (6). Це означає, що рівняння (6) і система (7) рівносильні. ◄

Зауваження. Рівняння $\sqrt{\mathrm{f(x)}} = \sqrt{\mathrm{g(x)}}$рівносильне системі

$$\begin{cases} \mathrm{f(x) = g(x)} \\ \mathrm{g(x) \geq 0} \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x) \geq 0$ або $(g) \geq 0$, розв'язати легше.

Приклад 4 Розв'яжемо рівняння

$$\sqrt{\mathrm{x^2 - 5x + 1}} = \sqrt{\mathrm{x - 4}}$$

Розв'язання: Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 1 = x - 4 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \begin{cases} \mathrm{x_1 = 1, x_2 = 5} \\ \mathrm{x \geq 4} \end{cases}$$

Відповідь: $\mathrm{x = 5}$. ◄

Теорема 1.6: Рівняння виду

$\sqrt{\mathrm{f(x)}} = \mathrm{g(x)}$ (8)

рівносильне системі

$\begin{cases} \mathrm{f(x) = (g(x))^2} \\ \mathrm{g(x) \geq 0} \end{cases}$ (9)

Доведення:Покажемо, що рівняння

$\sqrt{\mathrm{f(x)}} = \mathrm{g(x)}$ (8)

і система

$\begin{cases} \mathrm{f(x) = (g(x))^2} \\ \mathrm{g(x) \geq 0} \end{cases}$ (9)

є рівносильними.

Нехай число α — корінь рівняння (8). Тоді маємо правильну числову рівність $\sqrt{\mathrm{f(\alpha)}} = \mathrm{g(\alpha)}$. Звідси можна записати: $f(\alpha) = (g(\alpha))^2$, якщо $g(\alpha) \geq 0$.

Це означає, що число α є коренем системи (9).

Нехай число β — є коренем системи (9). Тоді отримуємо, що

$$\begin{cases} \mathrm{f}(\beta) = (\mathrm{g}(\beta))^2 \\ \mathrm{g}(\beta) \geq 0 \end{cases}.$$

Оскільки функція $y = x^2$ є оборотною, якщо $x \geq 0$, то$\sqrt{\mathrm{f}(\beta)} = g(\beta)$. Отже, число β — корінь рівняння (8).

Ми показали, що кожний корінь рівняння (8) є коренем системи (9) і, навпаки, кожний корінь системи (9) є коренем рівняння (8). Це означає, що рівняння (8) і система (9) рівносильні. ◄

Приклад 5 Розв'яжемо рівняння

$$\sqrt{2x-3} = x-3$$

Розв'язання: Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 2x-3=(x-3)^2 \\ x-3\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-8x+12=0 \\ x\geq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=2, x_2=6 \\ x\geq 3 \end{cases}$$

Відповідь: $x = 6$.

Теорема 1.7: Якщо для будь-якого x∈M виконуються нерівності $f(x) \geq 0$, і $g(x) \geq 0$, то рівняння $f(x) = g(x)$ і $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in N$, рівносильні на множині M.

1.2. МЕТОДИКА РОЗВ’ЯЗАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ.

Означення: Дві нерівності називають **рівносильними**, якщо множини їхніх розв’язків є рівними.

Розв’язуючи рівняння методом рівносильних переходів, ми заміняли його іншим, простішим рівнянням, рівносильним даному.

Аналогічним чином розв’язують і нерівності, використовуючи такі теореми.

Теорема 2.1: Якщо до обох частин нерівності додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Теорема 2.2: Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Теорема 2.3: Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від’ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Означення: Якщо множина розв’язків першої нерівності є підмножиною множини розв’язків другої нерівності, то другу нерівність називають **наслідком** першої нерівності.

Основним методом розв’язання ірраціональних нерівностей є зведення вихідної нерівності до рівносильної системи або сукупності систем раціональних нерівностей .

Теорема 2.4: Нерівність виду

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$$

рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Нерівність виду

$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$$

рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Теорема 2.5: Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) \leq (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Теорема 2.6: Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильне системі

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ рівносильне системі

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq (g(x))^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

ІІ. ПРАКТИЧНІ ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТА НЕРІВНОСТЕЙ.

2.1. РОЗВЯЗАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

2.1.1. Метод, що грунтується на знаходженні ОДЗ.

Рівняння називається ірраціональним, якщо змінна входить під знак радикала або змінну піднесено до степеня з дробовим показником.

Приступаючи до розв'язання ірраціональних рівнянь, іноді корисно попередньо визначити ОДЗ, бо, можливо, це рівняння не визначене в області дійсних чисел. Спершу знаходимо ОДЗ на підставі того, що $\sqrt{f(x)}$має зміст за умови f(x)$\geq 0.$ Під час розв'язання перевіряємо, чи знайдені корені входять до ОДЗ.

Також потрібно відмітити, що

1. Всі корені парного степеня, які входять в рівняння є арифметичними. Інше кажучи, якщо підкореневий вираз від'ємний, то рівняння кореня не має. Якщо підкореневий вираз дорівнює нулю, то коренем рівняння також дорівнює нулю. Якщо підкореневий вираз додатній, то і корінь рівняння є додатній.

2. Всі корені непарного степеня, які входять в рівняння, визначені при будь якому дійсному значенні підкореневого виразу. Іншими словами корінь від'ємний, якщо підкореневий вираз від'ємний. Корінь дорівнює нулю, якщо підкореневий вираз дорівнює нулю. Корінь додатній, якщо підкореневий вираз додатній.

3. Функції $y = \sqrt[2n]{x}$ і $y = \sqrt[2n+1]{x}$ є зростаючими на своїй області існування.

Використовуючи ці властивості, в деяких випадках можна визначити, що рівняння не має розв'язку, не розв'язуючи його.

Приклад 1 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+3} = -5$$

Розв'язання: Арифметичний корінь не може дорівнювати від'ємному числу, тому рівняння не має розв'язку.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 2 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2x+4}+\sqrt{x+5}=0$$

Розв'язання: Кожен доданок лівої частини невід'ємний, тому сума рівна нулю, якщо обидва доданки рівні нулю одночасно. Перший доданок рівний нулю коли $x=-2$, а другий коли $x=-5$.Тому рівняння розв'язку не має.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 3 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{-x-5}=40$$

Розв'язання: Вираз $\sqrt{x+3}$ визначена при $\mathrm{x}\geq-3$, а вираз $\sqrt{-x-5}$ визначений при $x\leq-5$. Отже, нема такого х, при якому обидві частини мають зміст. Тому рівняння розв'язку немає.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 4 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{-x-3}=\sqrt[3]{x-8}$$

Розв'язання: Вираз $\sqrt{-\mathrm{x}-\mathbf{3}}$ визначений при $x\leq-3$. При таких х вираз $\sqrt[3]{x-8}<0$, тому рівняння розв'язку немає.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 5 Розв'язати рівняння

$$6\sqrt{x}+7\sqrt{-x}+\frac{9}{x}=11$$

Розв'язання: Вираз $6\sqrt{\mathrm{x}}$ не має розв'язку при $x<0$, вираз $7\sqrt{-x}$ не має розв'язку при $x>0$, а вираз $\frac{9}{\mathrm{x}}$ не має розв'язку при $x=0$. Тому рівняння розв'язку немає.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 6 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x-4}-\sqrt{x+7}=\sqrt{x-3}$$

Розв'язання: Знайдемо ОДЗ рівняння

$$\begin{cases}\mathrm{x}-4\geq0\\ \mathrm{x}+7\geq0\\ \mathrm{x}-3\geq0\end{cases}$$

З системи маємо, що $x \geq 4$.

При будь-якому x вірна нерівність $x - 4 < x + 7$.Враховуючи ОДЗ правильна рівність $\sqrt{x-4} < \sqrt{x+7}$і вираз$\sqrt{x-4} - \sqrt{x+7}$ буде від'ємний, а вираз $\sqrt{x-3}$ буде додатній. Тому рівняння розв'язку немає.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 7 Розв'язати рівняння

$$(x^2 + 5x - 6)\sqrt{x+2} = 0$$

Розв'язання: Знайдемо ОДЗ даного рівняння:

$$x + 2 \geq 0;$$

$$x \geq -2;$$

Добуток дорівнює нулю, коли хоча б один множник дорівнює нулю. Одержимо:

$$(x^2 + 5x - 6) = 0 \quad \text{або} \quad \sqrt{x+2} = 0$$

$$x_1 = -6, \qquad x_2 = 1, \qquad\qquad x_3 = -2$$

Враховуючи ОДЗ корінь $x = -6$ є сторонній.

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$

Приклад 8 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{-5-x} = \sqrt[5]{x-20}$$

Розв'язання: Знайдемо ОДЗ рівняння :

$$-5 - x \geq 0,$$

$$x \leq -5,$$

Враховуючи ОДЗ права частина є від'ємною, а ліва невід'ємна.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 9 Вказати рівняння, областю визначення якого є порожня множина

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\sqrt{x-4} + \sqrt{3-x} = 6$	$\sqrt{x+4} + \sqrt{7+x} = 9$	$\sqrt{x+9} + \sqrt{3-x} = 16$	$\sqrt{x+8} + \sqrt{4-x} = 5$	$\sqrt{x-4} + \sqrt{4-x} = 13$

Відповідь: А

Приклад 10 Вказати рівняння, областю визначення якого є одне число

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\sqrt{2x-4}+\sqrt{3-x}=1$	$\sqrt{x+4}+\sqrt{7+3x}=4$	$\sqrt{x+9}+\sqrt{3-2x}=6$	$\sqrt{x-8}+\sqrt{6-x}=15$	$\sqrt{x-5}+\sqrt{5-x}=3$

Відповідь: Д

Приклад 11 Вказати рівняння коренем якого є число 5.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$(x-5)\sqrt{3-x}=0$	$(x-5)\sqrt{6-4x}=0$	$(x-5)\sqrt{-x}=0$	$(x-5)\sqrt{7-x}=0$	$(x-5)\sqrt{-x-1}=0$

Відповідь: Г

Приклад 12 Знайти область визначення рівняння $\sqrt{x+9}+\sqrt{6-2x}=6$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$(4;9)$	$(-9;3)$	$[-3;9]$	$[-9;3]$	$(3;-9)$

Відповідь: Г

Приклад 13 Які з наведених тверджень є правильними?

І. Ірраціональне рівняння з квадратними коренями завжди має 2 корені.

ІІ. При рівносильних перетвореннях ОВ рівняння може лише звузитися

ІІІ. Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
Лише І	Лише ІІ	Лише ІІІ	ІІ і ІІІ	І і ІІІ

Відповідь: В

Завдання для самостійної роботи.

Розв’язати рівняння:

1. $\sqrt{8-x}+\sqrt{x+8}=54$; Відповідь: коренів немає

2. $\sqrt{x-9}+\sqrt{2-x}=4$; Відповідь: коренів немає

3. $\sqrt{2x+4}+\sqrt{x^2+5x+6}+5=0$; Відповідь: коренів немає

4. $3\sqrt{x+6}+\sqrt{x+5}=-7$; Відповідь: коренів немає

5. $\sqrt{x-12}-\sqrt{9-x}=3$; Відповідь: коренів немає

6. $\sqrt{5-x}=x-5$; Відповідь: $x=5$

7. $\sqrt{x}+\sqrt{x-6}=3-x$; Відповідь: коренів немає

8. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+15}=3$; Відповідь: коренів немає

9. $\sqrt{x6-1}+4\sqrt{1-x}+\frac{9}{x-1}=15$; Відповідь: коренів немає

2.1.2.Метод рівносильних перетворень.

Рівняння виду

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$$

рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\geq 0 \end{cases}$$

Приклад 14 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2-5x+2}=\sqrt{x-4}$$

Розв'язання: Це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-5x+2=x-4 \\ x-4\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-6x+5=0 \\ x\geq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \{x_1=1;\ x_2=5; \\ x\geq 4 \end{cases}$$

Відповідь: $x=5$

Приклад 15Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{x+1}$$

Розв'язання: Знайдемо ОДЗ для рівняння:

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 3x-1\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq \frac{1}{3} \\ x\geq -1 \end{cases}$$

З системи маємо, що $x\geq 1$.

Піднесемо обидві частини до квадрата

$$(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-1})^2=(\sqrt{x+1})^2$$

$$(\sqrt{x-1})^2+2\sqrt{x-1}\sqrt{3x-1}+(\sqrt{3x-1})^2=(\sqrt{x+1})^2$$

$$x-1+2\sqrt{x-1}\sqrt{3x-1}+3x-1=x+1$$

$$2\sqrt{3x^2-x-3x+1}=x+1-x+1-3x+1$$

$$2\sqrt{3x^2-4x+1}=3-3x$$

$$(2\sqrt{3x^2-4x+1})^2=(3-3x)^2$$

$$12x^2-16x+4=9-18x+9x^2,$$

$$3x^2 + 2x - 5 = 0,$$

$$D = 2^2 - 4 * 3 * (-5) = 64,$$

$x_1 = 1; x_2 = -1{,}5$

Враховуючи ОДЗ корінь $x = -1{,}5$ є сторонній.

Відповідь: $x = 1$

Рівняння виду

$$\sqrt{\mathrm{f(x)}} = \mathrm{g(x)}$$

рівносильне системі

$$\begin{cases} \mathrm{f(x)} = (\mathrm{g(x)})^2 \\ \mathrm{g(x)} \geq 0 \end{cases}$$

Якщо над ірраціональними рівняннями робити перетворення, які зводяться до піднесення обох частин до квадрату, тоді кожен знайдений корінь отриманого рівняння треба перевірити: задовольняє він розв'язок вихідного рівняння чи ні.

Перевірка проводиться безпосередньо підстановкою у вихідне рівняння кожного із коренів отриманого рівняння. Якщо знайдений корінь підставити у вихідне рівняння і воно перетворить його у правильну рівність, то число є коренем рівняння, а якщо не виконується рівність то цей корінь є стороннім коренем.

При піднесенні обох частин ірраціонального рівняння до квадрату, для того щоб позбутися радикала, сторонні корені вихідного рівняння появляються як правило із за таких причин:

a) тому, що розширюється ОДЗ вихідного рівняння.

b) тому, що піднесення до парного степеня правої і лівої частини, які рівні за модулем, але одна з них від'ємна, а друга – додатна.

Приклад 16 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2\mathrm{x} - 3} = \mathrm{x} - 9$$

Розв'язання: Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 2x - 3 = (x - 9)^2 \\ x - 9 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 20x + 84 = 0 \\ x \geq 9 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 6, x_2 = 14 \\ x \geq 9 \end{cases}$$

Відповідь: $x = 14$

Приклад 17 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{1+3x} = x+1$$

Розв'язання: Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 1+3x = (x+1)^2 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 0, x_2 = 1$

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння:

1. $\sqrt{5+2x} = 3x - 3$; Відповідь: $x = 2$
2. $\sqrt{2+3x} = 3\sqrt{x+3}$; Відповідь: $x \in \emptyset$
3. $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-5} = 3$; Відповідь: $x = 5\frac{1}{9}$
4. $\sqrt{2+3x+x^2} = x+3$; Відповідь: $x_1 = -\frac{7}{3}, x_2 = -2\frac{1}{3}$
5. $\sqrt{6+5x-x^2} = 5 - x$; Відповідь: $x_1 = 2{,}5,\ x_2 = 6$

2.1.3.Метод заміни змінної.

Розв'язок ірраціональних рівнянь шляхом заміни його підкореневого виразу можна зробити таким чином:

1. Знайти ОДЗ вихідного рівняння.
2. Перейти від вихідного рівняння до рівняння з заміною
3. Знайти корені отриманого рівняння.
4. Перевірити, чи знайдені корені є коренями вихідного рівняння.

Перевірка полягає в наступному:

a) перевірити належність кожного знайденого кореня ОДЗ початкового рівняння. Ці корені, які не належать ОДЗ, є сторонніми для вихідного рівняння;

b) для кожного кореня, який належить ОДЗ вихідного рівняння, перевіряється чи мають одинакові знаки ліва і права частини кожного з рівнянь, які виникли в процесі розв'язку вихідного рівняння. Ці корені, для яких частини рівнянь мають різні знаки, є сторонніми коренями для вихідного рівняння;

с) тільки ці корені, які належать ОДЗ вихідного рівняння і для яких обидві частини кожного із рівнянь, які виникли в процесі розв'язку вихідного рівняння, мають однакові знаки, перевіряються безпосередньою підстановкою в вихідне рівняння.

Заміна підкореневого виразу спрощує зведення ірраціонального рівняння до раціонального.

Приклад 18 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2-3x+5}=-x^2+3x+7$$

Розв'язання: Запишемо систему нерівностей для ОДЗ

$$\begin{cases} x^2-3x+5\ge 0 \\ -x^2+3x+7\ge 0 \end{cases}$$

Заміна $\sqrt{x^2-3x+5}=t\ge 0$;;

$$\sqrt{x^2-3x+5}=-(x^2-3x+5)+12$$

Отримаємо рівняння $t^2+t-12=0$;

За теоремою Вієта маємо $t_1=3$; $t_2=-4$ – не підходить.

Повертаючись до початкових змінних, отримаємо рівняння:

$$\sqrt{x^2-3x+5}=3,$$

$$x^2-3x+5=9,$$

$$x^2-3x-4=0,$$

$$x_1=-1;\ x_2=4$$

Ці розв'язки задовольняють ОДЗ системи

Відповідь: $x_1=-1$; $x_2=4$

Приклад 19 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+11}-\sqrt[3]{x-4}=3$$

Розв'язання: Заміна

$$\sqrt[3]{x-4}=t,$$

$$x-4=t^3 \text{ або } x=t^3+4,$$

$$\sqrt{t^3+4+11}-t=3,$$

$$\sqrt{t^3+15}=t+3,$$

$$t^3+15=t^2+6t+9,$$

$$t^3 - t^2 - 6t + 6 = 0,$$

$$t^2(t-1) - 6(t-1) = 0,$$

$$(t-1)(t^2-6) = 0,$$

$$t_1 = 1, \qquad t_2 = \sqrt{6}, \qquad t_3 = -\sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{\mathrm{x}-4} = 1, \quad \sqrt[3]{\mathrm{x}-4} = \sqrt{6}\,, \qquad \sqrt[3]{\mathrm{x}-4} = -\sqrt{6}\,,$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 4 + 6\sqrt{6}, \qquad x_3 = 4 - 6\sqrt{6}$$

Відповідь: $x_1 = 5, \quad x_2 = 4 + 6\sqrt{6}, \qquad x_3 = 4 - 6\sqrt{6}$

Приклад 20 Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x-2}} = 2$$

Розв’язання: Заміна

$$\sqrt{x-2} = t, t \geq 0,$$
$$x = t^2 + 2,$$

Рівняння набуде вигляду

$$\sqrt{t^2 - 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = 2$$

Виділимо під радикалом повний квадрат

$$\sqrt{(t-1)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = 2,$$

Отримаємо рівняння

$$|t-1| + |t-3| = 2,$$

Розв’язуємо рівняння на інтервалах $(0; 1)$; $[1; 3]$; $(3; +\infty)$ і знаходимо корені рівняння:

1) $t \in (0{,}1)$,то одержимо рівняння:

$$-(t-1) - (t-3) = 2,$$

$$-t + 1 - t + 3 = 2,$$

$t = 1$, не належить $(0; 1)$

2) $x \in [1; 3]$то одержимо рівняння:

$$(t-1) - (t-3) = 2,$$

$$t - 1 - t + 3 = 2,$$

$$2 = 2,$$

Отже, t ∈ $[1; 3]$, тоді x∈[3;11]

3) $t \in (3;+\infty)$ то одержимо рівняння:

$$(t-1)+(t-3)=2,$$

$$t-1+t+3=2,$$

$t=3,$ не належить $(3;+\infty)$

Відповідь: $x \in [3;11]$

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння:

1. $\sqrt{x-5}-\frac{2}{\sqrt{x-5}}=1$; Відповідь: $x=9$
2. $x^2+3x+2=2\sqrt{x^2+3x+5}$; Відповідь: $x_1=-4, x_2=1$
3. $\sqrt{x^2-5x+6}+x^2=5x-6$; Відповідь: $x_1=2, x_2=3$
4. $\sqrt{-x^2+5x-5}-\sqrt{x^2-5x+6}=1$; Відповідь: $x_1=2, x_2=3$
5. $\sqrt{x+\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-3+\sqrt{x-2}}=1$; Відповідь: $x=3$

2.1.4. Рівняння вигляду $\sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}}+\sqrt[n]{\frac{g(x)}{f(x)}}=m$

Приклад 21 Розв'язати рівняння $\sqrt[7]{\frac{9-x}{x+1}}+\sqrt[7]{\frac{x+1}{9-x}}=2$

Розв'язання: Маємо корені 7 степеня. Оскільки цей степінь непарний, тому обмеження на змінну x виникнуть лише зі знаменниками дробів – вони не повинні бути рівні нулю. Звідси отримуємо дві нерівності, що задають область допустимих значень змінної x:

$\begin{cases} x+1\neq 0 \\ 9-x\neq 0 \end{cases}, \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq 9 \end{cases}$ Аналізуючи рівняння, бачимо, що дроби під коренями обернені. Тому доцільно зробити заміну змінних:

$$\sqrt[7]{\frac{9-x}{x+1}}=t$$

тоді

$$\sqrt[7]{\frac{x+1}{9-x}}=\frac{1}{t}$$

Шляхом заміни, початкове рівняння зводиться до наступного

$$t+\frac{1}{t}=2$$

$$t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)^2=0$$

$$t=1$$

Повернемося до заміни

$$\sqrt[7]{\frac{9-x}{x+1}}=1$$

Піднесемо це рівняння до 7-го степеня:

$$\frac{9-x}{x+1}=1$$

$$9-x=x+1$$

$$2x=8$$

$$x=4$$

Переконавшись, що $x=1$ є допустимим значенням змінної x, робимо висновок, що $x=4$ є коренем вихідного рівняння.

Відповідь: $x=4$

Завдання для самостійної роботи.

Розв’язати рівняння:

1. $\sqrt{\frac{5x+2}{x+3}}+\sqrt{\frac{x+3}{5x+2}}=\frac{13}{6}$; Відповідь:$x_1=-\frac{30}{127}, x_2=5$

2. $\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x}}=\frac{5}{2}$; Відповідь:$x=-\frac{4}{3}$,

3. $\sqrt{\frac{3x^2+x}{x^2-1}}+\sqrt{\frac{x^2-1}{3x^2+x}}=\frac{3}{2}$; Відповідь:$x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{2}\ x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

4. $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}}=\frac{5}{2}$; Відповідь:$x_1=-\frac{5}{511}, x_2=2$

5. $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}+\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=\frac{7}{12}$; Відповідь:$x=7$

2.1.5.Метод виділення повного квадрата.

Вирази, що стоять під знаком квадратного кореня, мають бути квадратами двочленів. Застосовуючи формулу $\sqrt{x^2} = |x|$, одержуємо рівняння з модулями.

Приклад 22 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-8x+16}$$

Розв'язання: Виділимо під радикалами повний квадрат:

$$\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=\sqrt{(x-4)^2},$$

або

$$|x+3|+|x-3|=|x-4|$$

Розв'язуємо рівняння на інтервалах $(-\infty;-3]$; $(-3;3]$; $(3;4]$; $(4;+\infty)$ і знаходимо корені рівняння:

1) $x \in (-\infty;-3]$, то одержимо рівняння:

$-(x+3)-(x-3)=-(x-4)$,

$-x-3-x+3=-x+4$,

$$x=-4,$$

2) $x \in (-3;3]$, то одержимо рівняння:

$(x+3)-(x-3)=-(x-4)$,

$x+3-x+3=-x+4$,

$$x=-2,$$

3) $x \in (3;4]$, то одержимо рівняння:

$(x+3)+(x-3)=-(x-4)$,

$x+3+x-3=-x+4$,

$$x=\frac{4}{3} \text{ не належить } (3;4]$$

4) $x \in (4;+\infty]$, то одержимо рівняння:

$(x+3)+(x-3)=(x-4)$,

$x+3+x-3=x-4$,

$x=-4$ не належить $(4;+\infty)$

Відповідь:$x_1=-4,\ x_2=-2$

Приклад 23 Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=4;$$

Розв’язання: Виділимо під радикалами повний квадрат:

$$\sqrt{x-4+2\sqrt{x-4}+1}+\sqrt{x-4-6\sqrt{x-4}+9}=4,$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-4}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-4}-3)^2}=4,$$

$$\left|\sqrt{x-4}+1\right|+\left|\sqrt{x-4}-3=4,\right|$$

Зробимо заміну

$$\sqrt{x-4}=t\geq 0,$$

$$|t+1|+|t-3|=4,$$

1) $t\in[0;3]$, то одержимо рівняння:

$$(t+1)-(t+3)=4,$$

$$4=4,$$

$$\sqrt{\mathrm{x}-4}\in[0;3],$$

$$x-4\in[0;9],$$

$$x\in[4;13],$$

2) $t\in(3;+\infty)$, то одержимо рівняння:

$$t+1+t-3=4,$$

$$2t=6,$$

$t=3$ – не є розв’язком даного рівняння

Відповідь: $x\in[4;13]$

Завдання для самостійної роботи.

Розв’язати рівняння:

1. $\sqrt{2x-3}+4x^2-12x+9=0$; Відповідь: $x=1{,}5$
2. $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}=4$; Відповідь: $x_1=-1{,}5;\ x_2=2{,}5$
3. $\sqrt{4x^2+4x+1}=x^2+x-1$; Відповідь: $x_1=-3;\ x_2=2$
4. $\sqrt{x^2+2x+1}=3x-3$; Відповідь: $x=1$

2.1.6. Рівняння з кубічною ірраціональністю.

При піднесенні обох частин рівняння до третього степеня (непарного) завжди отримаємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ).

Приклад 24 Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{3x+4}-\sqrt[3]{3x+2}=2$$

Розв'язання: При піднесенні обох частин до куба використаємо формулу

$$(а-в)^3=а^3-в^3-3ав(а-в)$$

Піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня, отримаємо:

$$3x+4-3x-2-3\sqrt[3]{3x+4}\sqrt[3]{3x+2}\left(\sqrt[3]{3x+4}-\sqrt[3]{3x+2}\right)=8$$

Оскільки $\sqrt[3]{3x+4}-\sqrt[3]{3x+2}=2$,

$$-3\sqrt[3]{3x+4}\sqrt[3]{3x+2}\cdot 2=6$$

$$\sqrt[3]{3x+4}\sqrt[3]{3x+2}=-1,$$

$$(3x+4)(3x+2)=-1$$

$$9x^2+18x+9=0,$$

$$x^2+2x+1=0,$$

$$x=-1,$$

Відповідь: $\text{x}=-1$,

Приклад 25 Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)^2}\sqrt[3]{(28-x)^2}+\sqrt[3]{(28-x)^2}=7$$

Розв'язання: Використовуючи формулу

$$(а+в)^3=а^3+в^3+3ав(а+в)$$

Домножимо ліву і праву частину на

$$\sqrt[3]{(7+x)^2}+\ \sqrt[3]{(28-x)^2}$$

одержимо

$$(7-x)+(28-x)=7\left(\sqrt[3]{(7+\text{x})^2}+\ \sqrt[3]{(28-\text{x})^2}\right),$$

$$35=7\left(\sqrt[3]{(7+x)^2}+\ \sqrt[3]{(28-x)^2}\right),$$

$$\sqrt[3]{(7+x)^2}+\ \sqrt[3]{(28-x)^2}=5,$$

Піднесемо обидві частини до кубу $(7+x)+(28-x)+3\sqrt[3]{(7+\text{x})^2}\ \sqrt[3]{(28-\text{x})^2}\ (\ \sqrt[3]{(7+\text{x})^2}+\ \sqrt[3]{(28-\text{x})^2})=125$

$$35+3\sqrt[3]{(7+\text{x})^2}\ \sqrt[3]{(28-\text{x})^2}\ 5=125,$$

$$15\sqrt[3]{(7+x)^2}\ \sqrt[3]{(28-x)^2},$$

$$\sqrt[3]{(7+x)^2}\ \sqrt[3]{(28-x)^2}=6,$$

$$(7+x)(28-x)=216,$$

$$196-7x+28x-x^2=216,$$

$$x^2-21x+20=0,$$

$$x_1=1, \qquad x_2=20,$$

Відповідь: $x_1=1,\ x_2=20,$

Завдання для самостійної роботи.

Розв’язати рівняння:

$\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[3]{3-x}=1,$ Відповідь: $x=2$

2.1.7. Метод розкладу на множники.

Приклад 26 Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x^2-21x+98}-\sqrt{x^2-16x+63}=\sqrt{x^2-13x+42}$$

Розв’язання: Розкладемо на множники підкореневі вирази

$$\sqrt{(x-7)(x-14)}-\sqrt{(x-7)(x-9)}=\sqrt{(x-7)(x-6)},$$

Винесемо спільний множник за дужки

$$\sqrt{(x-7)}(\sqrt{(x-14)}-\sqrt{(x-9)}-\sqrt{(x-6)})=0,$$

Добуток дорівнює нулю, коли один із множників дорівнює нулю

$$\sqrt{(x-7)}=0,$$

$$x_1=7,$$

Піднесемо обидві частини до квадрату.

$$\sqrt{(x-14)}-\sqrt{(x-9)}=\sqrt{(x-6)},$$

$$x-14+x-9-2\sqrt{x^2-23x+126}=x-6,$$

$$x-17=2\sqrt{x^2-23x+126},$$

$$x^2-34x+289=4(x^2-23x+126),$$

$$3x^2-58x+215=0,$$

$$D=58^2-4*3*215=784, \quad \sqrt{D}=28,$$

$$x_2 = 5, x_3 = 14\frac{1}{3},$$

Підставиивши корені у вихідне рівняння, ми маємо що x_3 є сторонній корінь

Відповідь: $x_1 = 5, x_2 = 7$

Приклад 27 Розв'язати рівняння

$$(x + \sqrt{x^2 - 4})^5 (x - \sqrt{x^2 - 4})^3 = 256,$$

Розв'язання:

Розкладемо вихідне рівняння на множники

$$(x + \sqrt{x^2 - 4})^2 \; (x + \sqrt{x^2 - 4})^3 \; (x - \sqrt{x^2 - 4})^3 = 256,$$

$$(x + \sqrt{\mathrm{x}^2 - 4})^5$$

Спростимо вираз

$$(x + \sqrt{\mathrm{x}^2 - 4})^3 \; (x - \sqrt{\mathrm{x}^2 - 4})^3 = (x^2 - (x^2 - 4))^3 = 64,$$

Отже, рівняння перепишеться

$$(x + \sqrt{\mathrm{x}^2 - 4})^2 \cdot 64 = 256,$$

$$(x + \sqrt{\mathrm{x}^2 - 4})^2 = 4,$$

$$x + \sqrt{\mathrm{x}^2 - 4} = 2 \;\; \text{або} \;\; x + \sqrt{\mathrm{x}^2 - 4} = -2$$

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -2,$$

Відповідь: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння:

1. $\sqrt[3]{4\mathrm{x}^2 + 10\mathrm{x} + 4} + \sqrt[3]{2\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} - 3} = \sqrt[3]{2x + 1}$;

   Відповідь: $x_1 = 0{,}5\,; x_2 = 2$

2. $\sqrt{2\mathrm{x}^2 - 9\mathrm{x} + 4} + 3\sqrt{2\mathrm{x} - 1} = \sqrt{2\mathrm{x}^2 + 21\mathrm{x} - 11}$;

   Відповідь: $x_1 = 0{,}5\,; x_2 = 1$

3. $\sqrt{2\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} - 14} - \sqrt{\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 2} = \sqrt{\mathrm{x}^2 - 4}$; Відповідь: $x = 2$

4. $\sqrt{2\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 1} - \sqrt{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 3} = \sqrt{\mathrm{x}^2 - 1}$; Відповідь: $x = 1$

2.1.8.Метод введення допоміжних невідомих.

Приклад 28 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2\mathrm{x}+5}+\sqrt{\mathrm{x}-1}=8$$

Розв'язання: Заміна

$\sqrt{2\mathrm{x}+5}=y\geq 0$, то $2\mathrm{x}+5=y^2$

$\sqrt{\mathrm{x}-1}=z\geq 0$, то $x-1=z^2$

Одержимо $z+y=8$,

Щоб виключити х, друге рівняння домножаємо на 2 і віднімаємо від першого.

$$y^2-2z^2=2x+5-2x+2=7$$

Отже, отримали систему з двома змінними

$$\begin{cases} \mathrm{y}+\mathrm{z}=8 \\ \mathrm{y}^2-2\mathrm{z}^2=7 \end{cases} \quad \begin{cases} z=8-y \\ \mathrm{y}^2-2(8-\mathrm{y})^2=7 \end{cases} \quad \begin{cases} z=8-y \\ y^2-32y+135=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1=3, \ \ z_2=-19 \\ y_1=5, y_2=27 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=10 \\ x_2=362 \end{cases}$$

$x_2=362$ є сторонній корінь

Відповідь: $x=10$

Приклад 29 Розв'язати рівняння

$$\sqrt[4]{8-\mathrm{x}}+\sqrt[4]{89+\mathrm{x}}=5$$

Розв'язання: Заміна

$\sqrt[4]{8-\mathrm{x}}=y,$ тоді $8-x=y^4, x=8-y^4$

$\sqrt[4]{89+\mathrm{x}}=z,$ тоді $89+x=z^4, x=z^4-89,$

Одержимо таку систему

$$\begin{cases} y+z=5 \\ y^4+\mathrm{z}^4=97 \end{cases}$$

Зробимо перетворення

$$y^4+z^4=(y^2+z^2)^2-2y^2z^2=((y+z)^2-2yz)^2-2y^2z^2,$$

Одержимо рівняння:

$$(25-2yz)^2-2y^2z^2=97,$$

Ще одна заміна $yz=t$, тоді маємо

$$(25-2t)^2-2t^2=97,$$

$$625-100t+4t^2-2t^2-97=0,$$

$$2t^2 - 100t + 528 = 0,$$
$$t^2 - 50t + 264 = 0,$$
$$t_1 = 44 \qquad t_2 = 6$$

$$\left[\begin{matrix} \text{t1} = 44 \\ \text{t2} = 6 \end{matrix}\right. \left[\begin{matrix} \begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 44 \end{cases} \end{matrix}\right. \left[\begin{matrix} \begin{cases} y_1 = 2, z_1 = 3 \\ y_2 = 3, z_2 = 2 \end{cases} \\ \{\text{розв'язків немає} \end{matrix}\right.$$

Повернувшись до заміни, маємо

$$x = 8 - y^4,$$
$$x_1 = -8 \qquad x_2 = -73$$

Відповідь: $x_1 = -8 \qquad x_2 = -73$

Завдання для самостійної роботи.

Розв’язати рівняння:

1. $\sqrt{4\text{x} + 8} - \sqrt{3\text{x} - 2} = 2$; Відповідь: $x_1 = 2$; $x_2 = 34$
2. $\sqrt{2\text{x} + 8} + \sqrt{\text{x} + 5} = 7$; Відповідь: $x = 4$
3. $\sqrt{3\text{x} + 7} - \sqrt{\text{x} + 1} = 2$; Відповідь: $x = 3$
4. $\sqrt{\text{x} + 3} + \sqrt{\text{x} + 8} = 5\sqrt{\text{x}}$; Відповідь: $x = 1$
5. $\sqrt{\text{x} + 7} + \sqrt{\text{x} + 2} = \sqrt{3\text{x} + 19}$; Відповідь: $x = 2$

2.1.9. Нестандартні ірраціональні рівняння

Приклад 30 Розв’язати рівняння

$$\sqrt[2021]{\frac{8 - x}{x + 4}} + \sqrt[2021]{\frac{x + 4}{8 - x}} = 2$$

Розв’язання Ми бачимо що корінь є непарної степені, тому під коренем може бути вираз будь-якого знаку. Знайдемо ОДЗ.

$$x \neq -4 \quad \text{і} \quad x \neq 6$$

Заміна

$$\sqrt[2021]{\frac{8 - x}{x + 4}} = t$$

тоді

$$\sqrt[2021]{\frac{x+4}{8-x}} = \frac{1}{t}, \qquad t \neq 0$$

Тоді рівняння перетвориться на таке, що зводиться до квадратного:

$$t + \frac{1}{t} = 2$$

$$\frac{t^2 - 2t + 1}{t} = 0,$$

$$(t-1)^2 = 0,$$

$$t = 1,$$

Повертаємось до заміни:

$$\sqrt[2021]{\frac{8-x}{x+4}} = 1,$$

звідки знаходимо, що

$$8 - x = x + 4,$$

$$x = 2$$

Відповідь: $x = 2$

Приклад 31 Розв'язати рівняння

$$\sqrt{6x+3} - \sqrt{4x+2} = \sqrt{7x+5} - \sqrt{5x+4}$$

Розв'язання: Рівняння містить 4 радикали. Знайдемо ОДЗ.

$$\begin{cases} 6x+3 \geq 0 \\ 5x+4 \geq 0 \\ 7x+5 \geq 0 \\ 4x+2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -0{,}5 \\ x \geq -0{,}8 \\ x \geq -\dfrac{5}{7} \\ x \geq -0{,}5 \end{cases} \qquad x \geq -0{,}5$$

Перенесемо радикали так, щоб сума в підкореневих виразах були однаковими.

$$(6\mathrm{x}+3) + (5\mathrm{x}+4) = (7\mathrm{x}+5) + (4\mathrm{x}+2)$$

$$\sqrt{6x+3} + \sqrt{5x+4} = \sqrt{7x+5} + \sqrt{4x+2},$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату

$$6x + 3 + 2\sqrt{6x+3}\sqrt{5x+4} + 5x + 4 = 7x + 5 + 2\sqrt{7x+5}\sqrt{4x+2} + 4x + 2,$$

$$11x + 7 + 2\sqrt{6x+3}\sqrt{5x+4} = 11x + 7 + 2\sqrt{7x+5}\sqrt{4x+2},$$

$$\sqrt{6x+3}\sqrt{5x+4} = \sqrt{7x+5}\sqrt{4x+2},$$

Підносимо знову до квадрату

$$(6x+3)(5x+4) = (7x+5)(4x+2),$$

$$30x^2 + 39x + 12 = 28x^2 + 34x + 10,$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0,$$

$$D = 25 - 4 * 2 * 2 = 25 - 16 = 9,$$

$$x_1 = -2, \qquad x_2 = -0{,}5$$

Враховуючи ОДЗ $x = -2$ є сторонній

Відповідь: $x = -0{,}5$

Приклад 32 Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{x+11} + 2\sqrt{x-4}\sqrt{x+11} = 2(11{,}5 - x)$$

Розв’язання: Аналізуючи рівняння, помічаємо, що вираз у лівій частині нагадує повний квадрат, якби перші два доданки були без радикалів.

Перенесемо праву частину рівняння у ліву

$$2x - 23 + 2\sqrt{x-4}\sqrt{x-11} + \sqrt{x-4} + \sqrt{x+11} = 0,$$

$$x - 4 + 2\sqrt{x-4}\sqrt{x-11} + x + 11 - 23 + 4 - 11 + \sqrt{x-4} + \sqrt{x+11} = 0,$$

$$\left(\sqrt{x-4}\right)^2 + 2\sqrt{x-4}\sqrt{x+11} + \left(\sqrt{x+11}\right)^2 + \left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+11}\right) - 30 = 0,$$

$$\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+11}\right)^2 + \left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+11}\right) - 30 = 0,$$

Заміна $\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+11}\right) = y \geq 0,$

Одержимо квадратне рівняння

$$y^2 + y - 30 = 0,$$

За теоремою Вієта, одержимо:

$$y_1 = -6 - \text{не задовілняє умову } y \geq 0,$$

$$y_{\,2} = 5,$$

Отже, $\qquad \sqrt{x-4} + \sqrt{x+11} = 5$

$$\sqrt{x+11} = 5 - \sqrt{x-4},$$

Піднесемо до квадрату

$$x+11=25-10\sqrt{x-4}+x-4,$$

$$10\sqrt{x-4}=10,$$

$$\sqrt{x-4}=1,$$

$$x-4=1,$$

$$x=5,$$

Відповідь: $x=5$

Приклад 33 Розв’язати рівняння

$$(x-1)\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+14}=\sqrt{2x+16}\sqrt{x^2-2x+5}$$

Розв’язання: Рівняння нестандартне, потребує штучного методу розв’язання.

Знайдемо ОДЗ

$$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x+14\geq \\ 2x+16\geq 0 \\ x^2-2x+5\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq -2 \\ x\geq -14 \\ x\geq -8 \\ x\in(-\infty;+\infty) \end{cases} \quad x\geq -2$$

Скористаємось методом «геометричної» підстановки, а саме – розглянемо вектори:

$$\vec{a}(x-1;2), \qquad \vec{b}\left(\sqrt{x+2};\sqrt{x+14}\right),$$

Тоді їх скалярні добуток

$$(x-1)\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+14}$$

це ліва частина нашого рівняння, добуток модулів

$$\sqrt{(x-1)^2+2^2}\sqrt{(\sqrt{x+2})^2+(\sqrt{x+4})^2}=\sqrt{x^2-2x+5}\sqrt{2x+16}$$

це права частина рівняння.

Скалярний добуток векторів дорівнює добутку модулів векторів, якщо вектори колінеарні, якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні. Одержимо відношення.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x+2}}=\frac{2}{\sqrt{x+14}}$$

$$(x-1)\sqrt{x+14}=2\sqrt{x+2}$$

Піднесемо до квадрату

$$(\mathrm{x}-1)^2(x+14)=4(x+2)$$

$$(x^2-2x+1)(x+14)=4x+8$$

$$x^3+14x^2-2x^2-28x+x+14-4x-8=0$$

$$x^3+12x^2-31x+6=0$$

Легко перевірити, що $x_1=2$

$$x^3+12x^2-31x+6=(x^2+14x-3)(x-2)$$

$$x_2=\frac{-14+4\sqrt{3}}{2}-\text{ не розв'язок}$$

$$x_3=\frac{-14-4\sqrt{3}}{2}-\text{ не розв'язок}$$

Відповідь: $x=2$

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати рівняння:

1. $\sqrt{8\mathrm{x}-7}+\sqrt{3\mathrm{x}-8}=\sqrt{7\mathrm{x}-3}+\sqrt{2\mathrm{x}-4}$; Відповідь: $x=4$
2. $\sqrt{\mathrm{x}-2}+\sqrt{\mathrm{x}+6}+2\sqrt{(x-2)(x+6)}=2(8-x)$; Відповідь: $x=3$
3. $(x+1)\sqrt{\mathrm{x}-2}+\sqrt{\mathrm{x}+13}=\sqrt{x-1}\sqrt{x^2+3x+14}$; Відповідь: $x=3$

2.2. ПРИКЛАДИ РОЗВЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ.

2.2.1. Найпростіші випадки розв'язування ірраціональних нерівностей.

Приклад 1Розв'язати нерівність

$$\sqrt{3x-9} \geq -8$$

Розв'язання: Розв'язком нерівності будуть усі значення x з ОДЗ.

$$3x-9 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

Відповідь: $x \geq 3$

Приклад 2 Розв'язати нерівність

$$\frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x-12}\left(\sqrt{x}+3\right)} \leq \frac{9-x^2}{(x-3)(x+6)}$$

Розв'язання: Знайдемо ОДЗ нерівності

$$\begin{cases} 6-x \geq 0 \\ x-12 > 0 \\ x \geq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 6 \\ x > 12 \\ x \geq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq -6 \end{cases}$$

Система розв'язків немає. Отже, ОДЗ є порожня множина. Вихідна нерівність розв'язків немає.

Відповідь: розв'язків немає.

Приклад 3 Розв'язати нерівність

$$\sqrt[4]{x^2+6x+8} + \sqrt{x-6} \leq -2$$

Розв'язання: Знайдемо ОДЗ нерівності

$$\begin{cases} x^2+6x+8 \geq 0 \\ x-6 \geq 0 \end{cases}$$

При будь-яких значеннях x з ОДЗ ліва частина нерівності невід'ємна, а права – від'ємна. Тому нерівність задовольнити неможливо. Задача не має розв'язків.

Відповідь:розв'язків немає.

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати нерівність:

1. $(x+1)\sqrt{x+4}\sqrt{x+7} \leq 0$; Відповідь: $x \in [-4;-1]$
2. $\frac{x^2-25}{\sqrt{x+4}} < 0$; Відповідь: $x \in (-4;5)$
3. $\sqrt{x+2} < x$; Відповідь: $x \in [2;+\infty)$
4. $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$; Відповідь: $x \in (-\infty;-\frac{7}{3})$
5. $\sqrt{2x-1} \leq 3$; Відповідь: $x \in [0{,}5;5]$
6. $\sqrt{3x+6} > \sqrt{x-3}$; Відповідь: $x \in [3;+\infty)$
7. $\sqrt{5x+6} < -x$; Відповідь: $x \in [-1{,}2;-1)$
8. $(x-12)\sqrt{x-3} \leq 0$; Відповідь: $x \in [3;12]$
9. $\sqrt{\frac{x+2}{2x}} \geq 2$; Відповідь: $x \in (0;\frac{2}{7})$

2.2.2. Зведення ірраціональної нерівності до системи раціональних нерівностей.

Основним методом розв'язування ірраціональних нерівностей є метод зведення вихідної нерівності до рівносильної системи раціональних нерівностей або сукупності таких систем.

Проте треба пам'ятати:

1) Піднесення обох частин нерівності до непарного степеня із збереженням знака нерівності завжди є рівносильним перетворенням.

2) Якщо обидві частини нерівності на деякій множині X визначені та набувають тільки додатних значень, то можна піднести обидві частини нерівності до квадрата або іншого парного степеня із збереженням знака вихідної нерівності, оскільки отримаємо нерівність, рівносильна вихідній на множині X.

Даний метод грунтується на таких твердженнях:

1. Нерівність виду $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$, $n \in$ N рівносильною системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

2. Нерівність виду $\sqrt[2n+1]{f(\mathrm{x})} < \sqrt[2n+1]{g(\mathrm{x})}$, є рівносильною нерівності

$$f(x) < g(x).$$

Приклад 4 Розв'язати нерівність

$$\sqrt{3\mathrm{x}+7} < x+1$$

Розв'язання: Розв'язання нерівності зводиться до розв'язання системи

$$\begin{cases} \mathrm{x}+1 \geq 0 \\ 3\mathrm{x}+7 \geq 0 \\ 3\mathrm{x}+7 < (\mathrm{x}+1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{x} \geq -1 \\ \mathrm{x} \geq -\dfrac{7}{3} \\ \mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 6 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{x} \geq -1 \\ \mathrm{x} \geq -2\dfrac{1}{3} \\ (-\infty; -2) \cup (3; +\infty) \end{cases}$$

Відповідь: $\mathrm{x} \in (3; +\infty)$

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати нерівність:

1. $\sqrt{4-x} < x+2$; Відповідь: $x \in (0; 4]$
2. $\sqrt{\frac{x-3}{1-3x}} > -1$; Відповідь: $x \in (\frac{1}{3}; 3]$
3. $\sqrt{x^2-2x} > 4-x$; Відповідь: $x \in (2\frac{2}{3}; +\infty)$
4. $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$; Відповідь: $x \in (-\infty; -1] \cup [2{,}5; 3)$

2.2.3. Метод інтервалів

Алгоритм розв'язання складається з таких кроків:

1) звести нерівність до виду $f(x) > 0$ або $f(x) < 0$;

2) знайти ОДЗ нерівності;

3) знайти нулі функції, розв'язати рівняння $f(x) = 0$;

4)позначити нулі функції та знайти знаки функції на кожному із проміжків, на які розбито ОДЗ;

5) записати відповідь, урахувавши знак нерівності.

Приклад 5 Розв'язати нерівність

$$\sqrt[3]{x-3}\sqrt{x-2}\sqrt[4]{5-x} \leq 0$$

Розв'язання:

Знайдемо ОДЗ нерівності

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$2 \leq x \leq 5$$

Знайдемо нулі функції,розв'яжемо рівняння

$$\sqrt[3]{x-3}\sqrt{x-2}\sqrt[4]{5-x} = 0$$

$$x-3=0 \qquad x-2=0 \qquad 5-x=0$$

$$x=3 \qquad x=2 \qquad x=5$$

Позначимо нулі функції і знайдемо знаки функції.

$$\underset{2}{} \quad - \quad \underset{3}{} \quad + \quad \underset{5}{}$$

Відповідь: $\boldsymbol{x} \in [2;3] \cup \{5\}$

Приклад 6 Розв'язати нерівність

$$2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} > \sqrt{x+21}$$

Розв'язання:

Зведемо нерівність до виду

$$2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} - \sqrt{x+21} > 0$$

Знайдемо ОДЗ нерівності

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x+21 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ x \geq -21 \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 5$$

Знайдемо нулі функції

$$2\sqrt{\mathrm{x}} + \sqrt{5-\mathrm{x}} - \sqrt{\mathrm{x}+21} = 0,$$

$$2\sqrt{\mathrm{x}} + \sqrt{5-\mathrm{x}} = \sqrt{\mathrm{x}+21},$$

$$4x + 5 - x + 4\sqrt{\mathrm{x}}\sqrt{5-\mathrm{x}} = x + 21,$$

$$4\sqrt{5\mathrm{x}-\mathrm{x}^2} = 16 - 2x$$

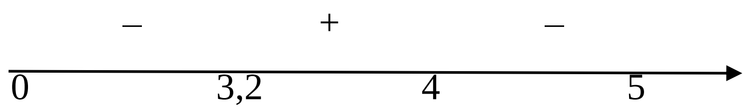
$$2\sqrt{5\mathrm{x}-\mathrm{x}^2} = 8 - x,$$

$$4(5x - x^2) = 64 - 16x + x^2,$$

$$5x^2 - 36x + 64 = 0,$$

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = 3{,}2$$

Позначимо нулі функції і знайдемо знаки функції



Відповідь: $(3{,}2; 4)$

Завдання для самостійної роботи.

Розв’язати нерівність:

1. $\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{x+3} < 0$; Відповідь: $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; -1)$
2. $\sqrt{x} - \sqrt{6x+1} < \sqrt{2x+1}$; Відповідь: $x \in \emptyset$

ВИСНОВКИ

Школа передає своїм вихованцям певну суму знань з математики, передбачену навчальними програмами. Вона вчить їх логічно мислити, застосовувати свої знання у практичній діяльності. Вміння думати цінувалось завжди. Цю рису особливо цінимо в людях в наш час.

Мислительні процеси неможливі без певної суми знань, здобування яких є нелегким процесом, тому кожен вчитель перед вивченням певної теми повинен продумати план її мотивації і подачі. Це значно полегшить засвоєння знань.

Проаналізувавши і систематизувавши матеріал даної теми, я зробила висновок, що для успішного її засвоєння учнями треба:

1) Звернути увагу на особливість ірраціональних рівнянь і нерівностей.
2) Наголосити на загальний прийом розв’язування, що полягає у “вилученні радикалів”
3) Систематизувати їх за типами і способами розв’язання.
4) Завжди слідкувати за рівносильністю перетворень, використовуючи для цього ОДЗ і перевірку коренів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. Для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018.
2. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Номирський Д.А., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 класу загальноосвіт. закладів. Академічний рівень. – К.: Гімназія, 2010.
3. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Збірник задач і контрольних робіт. – Х. : Гімназія, 2010.
4. Романюк В.Я., Дутко Л.В. Технології інтерактивного навчання на уроках математики. – Львів: Тріада плюс, 2004.
5. Б.Г. Орач. Підвищимо ефективність викладання математики в школі. – Львів: Сполом , 2006.
6. Сканаві М.І. Збірник задач з математики для вступників у ВНЗ. – К.: Вища шк., 1994.
7. Математика: Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання / Уклад.: А. М. Капіносов, Г. І. Білоусова,Г. В. Гап'юк, Л. 1. Кондратьєва, О. М. Мартинюк, С. В. Мартинюк, Л. І. Олійник, П. І. Ульшин, О. Й. Чиж. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2015. — 528 с.