ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Механіко – математичний факультет

(повне найменування назва факультету)

Кафедра алгебри, топології та основ математики

(повна назва кафедри)

Пояснювальна записка

до кваліфікаційної (дипломної) роботи

Магістр

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему «Розв'язування задач з математики на факультативних заняттях для учнів 5-6 класів»

Виконав: студент ІІ курсу, групи МТОм-21
напряму підготовки (спеціальності)
014 – «Середня освіта (Математика)»
(шифр і назва напряму підготовки, спеціальності)

Гаращак В-Р. О.
(прізвище та ініціали)

Керівник Гринів О. С.
(прізвище та ініціали)

Рецензент ______
(прізвище та ініціали)

Львів - 2021 року

Зміст

Вступ

Ще в кінці XIX і початку XX століття педагоги зрозуміли, що викладання у середньому навчальному закладі будь-якого предмета за єдиною обов'язковою програмою стає більш успішним, якщо його доповнити курсами необов'язкових занять, що не передбачені програмою навчання. Ці факультативні заняття призначені тільки для бажаючих учнів.

Досвід багатьох педагогів показав, що у предметному факультативі виникає сприятлива атмосфера для вивчення певного навчального курсу заданої теми.

Математика вимагає уяви, спонукає до досліджень, сприяє розвитку інтелекту і формування таких рис характеру, як акуратність, вміння долати труднощі, доводити справу до кінця. Велике значення має інтерес учнів. І цьому сприяє їх залучення в активну пізнавальну діяльність не тільки на уроках, а й на факультативах. Учитель повинен створити в учня позитивну мотивацію до виконання розумових і практичних дій.

Впровадження нового факультативного курсу «Логічні кроки» за рахунок варіативної складової навчальної програми сприятиме досягненню поставлених цілей: інтелектуальний розвиток учнів, розвиток їх логічного мислення, уяви, вміння аналізувати, класифікувати, робити висновки, отримувати результати з передумов даних шляхом послідовного розгляду. Освоєння учнями системи таких знань і навичок є необхідною умовою для реалізації життєвих цілей, а також за необхідне в повсякденному житті і достатнім для засвоєння інші шкільні предмети на високому рівні. Під час вивчення курсу пропонується вирішувати цікаві логічні задачі, які спрямовані на розвиток уяви та кмітливості в різних предметах.

Основне завдання таких занять - розширити і поглибити вивчення програмного матеріалу, ознайомити учнів з деякими загальними математичними ідеями, навчити логічному мисленню, зацікавити вивченням різних закономірностей і принципів роботи з ними, виробити нестандартне мислення.

Розділ 1. Теоретичні основи про факультативні заняття у навчальних закладах.

1.1 Факультативні заняття, як інструмент для розвитку інтелектуальних та творчих вмінь учнів.

Серед форм диференціації, що створюють передумови для активізації самостійної діяльності учнів і реалізовують творчий потенціал особистості, значне та особливе місце займають факультативи.

Однією важливою рисою навчального процесу у дитячому віці має бути посилення його інформаційних, загальних розвиваючих функцій на основі широкої і всебічної інформації для дітей про навколишнє середовище і їх власної ідентичності, а також їх залучення в нові види діяльності. Через обмеження часу навчання ця вимога не може бути виконано в обов'язкових класах. Це додаткове навчання, що має значні резерви. Співвідношення загальної спрямованості відповідних впливів на особистість дітей з певними функціями факультативів свідчить про те, що такі дії можуть здійснюватися переважно в процесі реалізації розвиваючої функції факультативів. Тому ця функція повинна стати провідною в початковій школі та впливати як на зміст факультативів, так і на організацію їх вивчення.

За змістом навчальні факультативи бувають: із поглибленого вивчення предметів; вивчення додаткових дисциплін із набуттям спеціальності, міжпредметні факультативи. Залежно від дидактичної мети факультативи поділяються на теоретичні, практичні та комбіновані. Теоретичні факультативи проводяться з метою поглибленого вивчення складних теоретичних проблем, узагальнення та систематизації з кардинальних розділів чи тем предмета. Головним при цьому є постановка, висунення гіпотез, створення проблемних ситуацій, розробка проблемних завдань, самостійність розкриття проблем з використанням аналізу та синтезу, усвідомлення головного, істотного. Методи та прийоми при цьому можуть бути як традиційними (пояснення, розповідь, бесіда), так і частково-пошуковими, дослідними (уявний експеримент, формуючий експеримент, порівняння, співставлення) [13, с. 6].

Результативність факультативних занять багато в чому залежить від ступеня творчого підходу вчителя в цьому процесі; правильного поєднання методів та форм навчання; індивідуальний підхід, реалізація професійної спрямованості школярів; зв'язок навчання з досягненнями науки і практики.

Метою практичних факультативних занять є розвиток навичок і умінь наукового характеру, поглиблюючи теоретичні знання. При цьому учні виконують практичні завдання, а також навчальні завдання, що мають практичне спрямування. У цьому випадку педагог розкриває практичну значущість проблеми, що змушує школярів ставати на пошук шляхів для її вирішення, забезпечує контроль і корекцію навчально-пізнавальної діяльності учнів; разом з учнями підводить підсумки результатів заняття. Особливу важливість набувають завдання з прихованими даними; задачі моделювання, що сприяють формуванню конструкторських і технічних навичок учнів. Важливі також завдання виробничого характеру, рішення яких підвищує інтерес школярів до професії.

Сучасні факультативи є особливою формою виховної роботи, що відрізняється від уроків і поза навчальних занять. Також можна сказати, що факультативи мають багато спільного з уроками в школі і позакласними заняттями. Адже факультативні заняття проводяться за затвердженими планами та програмами, ведеться відповідна документація, заняття проходять згідно розкладу, на них застосовуються методи навчання і форми організації самостійної пізнавальної діяльності учнів, що є спільними з шкільним предметом. Схожість з предметними групами полягає в тому, що факультатив поєднує учнів за спільними інтересами, добровільним вибором такого навчання. Деякі форми і методи, характерні для позакласних занять, використовуються на факультативних заняттях. Однак учитель повинен пам'ятати, що факультативні заняття не замінюють позакласну роботу з предмета. Як самостійна частина виховної роботи факультативи можуть доповнюватися позакласними (груповими) заняттями, на яких учні додатково поглиблюють і розширюють свої знання і вміння.

При спостереженні та аналізі факультативних занять слід ураховувати такі параметри:

- тип факультативного заняття та врахування вчителем його специфіки;
- вибір і формулювання теми, постановка цілей і завдань заняття, мотивація навчально-пізнавальної діяльності учнів;
- зміст факультативного заняття (вибір навчального матеріалу, реалізація дидактичних принципів, забезпечення зворотного зв'язку, корекція знань, розвиток самостійності та творчого мислення учнів, формування в них дослідницьких умінь і навичок);
- раціональний вибір форм організації факультативного заняття (лекція, семінар, практикум, екскурсія, лабораторна робота);
- педагогічна доцільність навчально-матеріального забезпечення факультативного заняття (наочні посібники, ТЗН, обладнання, роздавальний дидактичний матеріал, аудіовізуальні засоби);
- профорієнтаційна робота з учнями у процесі заняття з урахуванням специфіки факультативу;
- результативність факультативного заняття з поглиблення знань учнів з основного курсу навчального предмета, розширення світогляду та інформованості учнів з питань сучасних наукових досягнень; засвоєння наукових ідей, принципів та алгоритмів,

законів, закономірностей; формування навичок самостійної праці; набуття знань про оточуючий світ; формування стійкого інтересу до науки, що вивчається на факультативі, активної життєвої позиції; реалізація комплексу аспектів виховання особистості - розумового, морального, естетичного, фізичного, трудового[13, с. 9].

Значення факультативів не тільки в навчанні, але і в освітньому впливі на студентів. Саме у таких заняттях учні мають можливість в повній мірі проявити свої творчі та інтелектуальні вміння. Науково-дослідницька робота учнів здійснює значний емоційний вплив, дає їм можливість випробувати ні з чим незрівнянну радість творчості. У невеликій групі у вчителя є можливість простежити за думками кожного учня, показати всім красу знахідок одного з них.

1.2 Роль математичних факультативів у навчанні учнів середньої школи.

Важливу роль при виборі учнями курсу за вибором грає його назва. Якщо більшість курсів за вибором мають академічну назву, то в назві курсів за вибором повинен бути рекламний аспект. Він повинен бути доступним, зрозумілим, надихаючим, цікавим, перш за все, студентам. Важливу роль в успішній реалізації курсів за вибором відіграє підготовка навчальної літератури з даних курсів.

Тут можна використовувати підручники для курсів за вибором, для групової гурткової роботи, а також науково-популярну літературу та довідники.

З метою поглибленого вивчення предметів, професійної орієнтації учнів, розвитку пізнавальних інтересів, з варіативного компонента виділені години на факультативні заняття.

Мета факультативних курсів:

- поглиблене вивчення предметів;
- професійна орієнтація;
- розвиток пізнавальних інтересів.

Процес зміни системи середньої освіти повинен включати не тільки модернізацію шкільного курсу математики, а й наповнення його новим змістом, що підвищить рівень математичної освіченості підростаючого покоління. Навчати дітей бачити красу математики, розвивати і розвивати до неї інтерес - одна з найважливіших завдань навчання математики. Однак знань, які учні отримують на уроках при вивченні базового курсу математики, не завжди достатньо. У зв'язку з цим зростає роль факультативних занять з математики, на яких учні поглиблюють і систематизують знання основного курсу, отримують додаткову інформацію на основі досягнень математичної науки.

При навчанні математики задачі є одночасно метою і засобом навчання і математичного розвитку учнів. При розв’язуванні задач учні можуть набратися досвіду для порівняння, спостереження, виявлення простих математичних закономірностей, формулювання припущень, гіпотез, що вимагають пояснення та доведення.

Практична спрямованість шкільного курсу математики передбачає формування у школярів вміння використовувати отримані знання при вивченні як математики, так і інших предметів, застосовувати раціональні методи вирішення задач.

Практичні задачі охоплюють усі прикладні аспекти математики. Подібні задачі сприяють виконанню багатьох завдань процесу у навчанні, розкривають методологічні питання взаємозв'язку теорії і практики; активізують пізнавальну діяльність; сприяють розвитку компетенцій; підвищують інтерес до предмета, забезпечити розвиток технічної творчості, сприяти профорієнтації. Прикладні задачі є доброю мотивацією до навчання: переконують школярів у правильності теоретичних знань, в необхідності їх засвоїти.

Пріоритетними напрямками поновлення сучасної освіти, в тому числі математичної, є підвищення якості математичної підготовки, створення умов для розвитку особистості школяра, забезпечення його навчальної та особистісної самореалізації як в повсякденному житті, так і в майбутній професійній діяльності. При цьому зростає роль прикладного напрямку базових предметів. Це вимагає пошуку нових підходів до організації навчальної діяльності учнів. Стає своєчасним створення програм курсів за вибором логічного та прикладного напрямку [10].

Курси за вибором і факультативи реалізуються за рахунок годин варіативної складової навчального плану школи. Їх оптимальний сумарний обсяг має становити не менше ніж 34-70 годин на рік. Пропедевтичний етап допрофільної підготовки можна розпочинати вже в 5 класі, що дозволить учням усвідомити власний вибір якомога раніше[10].

Розділ 2. Навчальна програма та методичні матеріали факультативного курсу «Логічні кроки» для учнів 5-6 класів.

2.1 Основні історичні та теоретичні відомості про математичну логіку.

Термін «логіка» походить від давньогрецького слова «логос» (logos), яке перекладається на українську мову як «мислення» (або «розум», «мисль», «думка»), «мова», «слово» (або «мовлення», «речення», «висловлювання») і «смисл» (або «поняття», «судження») [14, с. 20].

У Стародавній Греції термін «logos» вперше запровадив Геракліт (544– 483 рр. до н.е.). Цей термін означав у нього одвічну, сталу необхідність, стійку і загальну закономірність світу. Вперше термін «логіка» ввів у науку давньогрецький філософ Демокріт (460 – 370 рр. до н.е.), назвавши свою працю «Про логіку, або про канони» (слово «канони» означає «правила», «критерії») [14, с. 21].

Засновником логіки вважають давньогрецького мислителя Аристотеля (384 – 322 рр. до н.е.), який вперше в історії античної філософії зробив людську думку предметом наукового дослідження. Він вивчав внутрішню структуру людського мислення [14, с. 22].

Людство з давніх часів цікавилося різноманітними способами правильної побудови і обгрунтування своїх власних думок, воно шукало форму викладу своїх аргументів, яка виглядала б найбільш переконливо. У зв'язку з цим виникає природна потреба в створенні списку правил, законів і постанов, на яких можна будувати свої власні міркування. Так виникла така наука, як логіка. У своєму розвитку вона пройшла довгий шлях від логіки Аристотеля до сучасної некласичної логіки. Більш того, логіка як наука за цей значний період часу істотно змінилася.

В українському педагогічному словнику записано: «Логіка – наука про закони, форми та прийоми мислення, які забезпечують досягнення об'єктивної істини у процесі міркування й пізнання. Виділяють діалектичну логіку та формальну логіку, які розвиваються в тісному взаємозв'язку. Діалектична логіка досліджує змістовний аспект людського мислення, особливості прояву в ньому законів діалектики; вивчає найзагальніші категорії як форми мислення, форми буття та ступені розвитку людського пізнання; виявляє закономірності виникнення й розвитку знання в процесі взаємодії суб'єкта й об'єкта. Формальна логіка досліджує структурні аспекти людського мислення й наукового знання, абстрагуючись від їхнього змісту й розвитку» [9, с.11].

Математична логіка займає важливе місце в сучасній математичній науці. Вона широко застосовується у різних галузях наукових досліджень таких, що традиційна формальна логіка ніколи не знала. Математична логіка успішно використовується в лінгвістиці, кібернетиці, психології та ін.

Ідею побудови математичної логіки вперше досить чітко сформулював великий німецький математик і філософ Г. Лейбніц (1646 – 1716). Він же закладав основи для алгебраїзації логіки й побудови логічних числень. «Ми використовуємо знаки не тільки для того, щоб передати наші думки іншим особам, а й для того, щоб полегшити сам процес нашого мислення», - писав Лейбніц. Проте його праці містили лише програму побудови алгебри логіки. За часів Лейбніца в створенні математичної логіки не було особливої потреби; та й сама математика тоді ще не досягала такого рівня, щоб запропонувати досконалий апарат для розвитку алгебри логіки. Ідею Лейбніца було реалізовано в середині XIX ст., коли в розвитку математики важливе місце почали займати питання обгрунтування математики, виявлення її логічної структури і взаємозв'язків між структурними частинами, тобто коли назріли умови для якісно нового етапу розвитку формальної логіки. Формальну логіку було математизовано в основному в працях «Математичний аналіз логіки» (1847), «Дослідження законів думки» (1854), що належали англійському математику Д.Булю (1815 – 1864). Він застосував наявний тоді математичний апарат до формальної логіки й започаткував нову науку – математичну (або символічну) логіку [15, с.3-4].

2.2 Ціль і завдання навчання учнів елементів логіки.

Довгий час поставало питання, актуальне для загальноосвітніх шкіл, чи варто вивчати такий курс як «Логіка та її елементи»,. З деяких джерел відомо, що багато вчених наполягали на введенні логіки у шкільну програму.

Вивчені в школі предмети в комплексі складають смислову основу діяльності, в процесі якої формуються і розвиваються необхідні особистісні якості. Логіка сприяє розвитку пам'яті та мислення учнів, вихованню їх почуттів та формуванню практичних навичок. Згодом, в процесі навчання, настає момент, коли для освоєння нового матеріалу учням необхідно знати і вміти застосовувати основні принципи елементарної логіки.

Логіка вивчається в середніх школах майже у всіх країнах світу. У середніх школах в Україні логіка вивчалася з 1806 по 1828 роки і з 1871 по 1917 роки в курсі філософської пропедевтики. У період з 1946 по 1956 логіка вивчалася як самостійний предмет. У сучасній школі логіка як обов'язковий предмет не вивчається. Але вона може й повинна вивчатися в школах як предмет за вибором учнів або факультативний курс [9, с. 19-20].

Основне завдання навчання логіки в середній школі - забезпечити міцне і свідоме володіння системою логічних знань і навичок, що є необхідними у повсякденному житті і роботі, достатньої для вивчення інших дисциплін і подальшого навчання.

Логіка розвиває розумові здібності учнів при вивченні прийомів і методів мислення: індукції й дедукції, узагальнення й конкретизації, аналізу й синтезу, класифікації й систематизації, абстрагування й аналогії[9, с.28]. Під час вивчення логіки формуються навички і вміння розумової роботи: планування своєї роботи, пошук раціональних способів її виконання. У процесі вивчення логіки студенти можуть і повинні навчитися точно і лаконічно висловлювати свої думки, а також набути вмінь чітко і грамотно робити нотатки.

Розвиток логічного мислення сприяє естетичному вихованню школярів, витонченості математичних суджень, чіткому та лаконічному висловлюванню думок, впевненості в роздумах, формуванню умінь абстрагуватися від конкретного змісту та орієнтуватися на структуру своїх думок, розвитку інтуїції. Опанувавши знання та навички логічного мислення, учні завжди зможуть чітко викладати свої думки, виключаючи будь-які неясності у розмові. Вони швидко знайдуть раціональність в будь-якому спірному питанні і вірний спосіб виправити помилки.

2.3 Вступ до факультативного курсу «Логічні кроки» для учнів 5-6 класів та навчальна програма.

Вища мета сучасної освіти - виховання у школярів вміння критично мислити, самостійно обробляти різноманітну інформацію, творчо вирішувати проблеми. Тобто в першу чергу постає завдання інтелектуального розвитку, щоб мислення учнів було точним, логічно послідовним, незалежним та творчим.

Впровадження нового факультативного курсу «Логічні кроки», варіативна складова навчальної програми якого, сприятиме досягненню поставлених цілей: інтелектуальний розвитку, логічного мислення, пам'яті, уяви, вміння аналізувати, робити висновки, отримувати результати з передумов даних шляхом послідовного розгляду і т. д. Освоєння учнями системи таких знань та навичок є найважливішою умовою для реалізації всього задуманого. При вивченні курсу пропонується вирішувати цікаві логічні задачі, спрямовані на розвиток уяви, інтелекту з різних предметів.

Основне завдання таких занять - розширити і поглибити вивчення програмного матеріалу, ознайомити учнів з певними математичними ідеями, навчити логічно мислити, зацікавити різного роду закономірностями, виробити нестандартне мислення.

Пропонований курс вирішення логічних завдань повинен формувати в учнів мислення, вміння використовувати математичні знання під час вирішення нестандартних завдань. Окрім того, цей курс дозволяє учням познайомитися з тими розділами математики, що не вивчаються в курсі шкільної програми, але дозволяють учням зацікавитися математикою та поглибити сприйняття предмета.

Мета курсу:

- розвиток інтелекту учнів, формування логічного мислення, уяви, вміння самостійно обробляти та аналізувати нестандартну інформацію, моделювання вирішення нестандартних завдань;
- розширення, поглиблення та систематизація знань учнів;
- розширення математичного світогляду учнів;
- забезпечення умов для розвитку математичних здібностей і талантів кожного учня з урахуванням його віку.

Завдання курсу:

- розвинути зацікавленість в учнів до цього курсу;
- ознайомити учнів із загальними математичними ідеями щодо курсу;
- навчити учнів формулювати логічні послідовності в пошуку розв'язку задач, показувати розв'язок, використовуючи послідовні логічні кроки;
- розвивати в учнів нестандартне мислення;
- показати учням різні методи розв'язування завдань логічного характеру.

Програма факультативного курсу «Логічні кроки» складена згідно вимог державного стандарту шкільної математичної освіти. Річний курс навчання розрахований на 34 години, тижневе навантаження - 1 година.

Програма даного курсу структурована за темами. Кожна тема розглядається теоретично і практично. Це дозволяє навчити учнів вирішувати завдання логічного характеру.

Навчальна програма складається з таких розділів: «Задачі на кмітливість», «Закономірності», «Задачі із сірниками», «Задачі на зважування», «Задачі на переливання», «Задачі на відновлення», «Множина. Круги Ейлера», «Задачі з дробами», «Задачі з відсотками», «Принцип Діріхле», «Подільність чисел», «Магічні квадрати».

Розробка запропонованих тем сприяє не тільки інтересу до математики, а й формуванню в учнів просторової уяви, здатності до аналізу і послідовного мислення, дослідницької діяльності, спонукає учнів до більш глибокого і всебічного вивчення математики. Учні познайомляться з методом вирішення числових головоломок, криптограмами; навчаться використовувати круги Ейлера при вирішенні логічних завдань; познайомляться з елементами теорії множин, вибравши найбільш раціональний спосіб. Даний факультативний курс сприятиме подальшому формуванню у школярів здатності аналізувати і шукати логічне мислення.

2.4 Практичні матеріали та методичні рекомендації до вивчення розділів факультативного курсу «Логічні кроки».

2.4.1 Розв’язування найпростіших задач логічного характеру.

Тема «Розв’язування найпростіших задач логічного характеру» розрахована на два навчальні заняття. На першому занятті рекомендовано показати приклади розв’язання різних задач логічного характеру: задач-жартів, задач на кмітливість та задач-загадок. Також пропонується з учнями розв’язування на даному занятті задач-жартів та задач-загадок.

<u>Заняття №1.</u>

Приклади розв’язання задач, що будуть продемонстровані учням:

1. **Задача – загадка:** Що сильніше його б’ють, то краще він виконує свої функції. Назвіть цього бідолаху.

   Розв’язання: Цвях.

2. **Задача – жарт:** Ви сидите у літаку, перед вами жираф, позаду верблюд. Де ви знаходитеся [16, с. 189]?

   Розв’язання: На каруселі.

Задачі-загадки, задачі на кмітливість та задачі-жарти для розв’язування з учнями на першому факультативному занятті та домашнє завдання:

Задача 1. Ішов дідусь до Києва й зустрів трьох бабусь. Кожна з них несла три торби, в кожній торбі – по три кішки. Скільки істот рухалося до Києва [1, с. 6]?

Розв’язання: Тільки дідусь, бо всі інші рухалися в протилежному напрямку.

Задача 2. У кімнаті було 12 курчат, 3 кролики, 5 щенят, 2 кішки, 1 півень і 2 качки. Сюди зайшов господар із собакою. Скільки в кімнаті стало ніг [16, с. 188]?

Розв’язання: Дві ноги господаря, бо у всіх тварин лапи.

Задача 3. Горіло тринадцять свічок. Дві з них загасили. Скільки свічок залишилося?

Розв’язання: Дві, оскільки інші згоріли.

Задача 4. Вулицею йдуть два батька та два сини, а всього троє осіб. Як таке може бути [1, с. 7]?

Розв’язання: Дідусь, батько, син.

Задача 5. Чому чорні вівці менше їдять трави, ніж білі?

Розв’язання: Тому що чорних овець менше.

Задача 6. У їжачка було 11 яблук. Він з’їв усі крім чотирьох. Скільки яблук залишилося?

Розв’язання: Чотири яблука.

Задача 7. Дах будинку несиметричний: один бік пологий, а інший – крутий. Півень відклав яйце на гребінь даху. По якому боці покотиться яйце – пологому чи крутому [1, с. 8]?

Розв’язання: Півень не може відкладати яйця.

Задачі для домашнього завдання:

Задача 1. Диня важить 3 кг та ще півдині. Скільки важать дві такі дині?

Задача 2. У дитини було 6 яблук, половину вона віддала мамі. Скільки яблук залишилося у дитини?

Задача 3. Біля дороги стоять два вартові. Один дивиться в один бік дороги, а другий – в протилежний, але при цьому вони бачать один одного. Як таке може бути[16, с. 189]?

<u>Заняття №2. Таблички істинності</u>

На цьому занятті запропоновано розв’язування з учнями задач на складання таблиць істинності:

Задача 1. Юрко, Богдан і Володя навчаються в одному класі. Один з них їздить додому зі школи автобусом, другий – трамваєм, а третій – тролейбусом. Одного разу після уроків Юрко пішов проводити свого однокласника до автобусної зупинки. Коли повз них проїжджав тролейбус, третій однокласник крикнув з його вікна: «Богдане, ти забув у школі щоденник». Хто чим їздить [16, с. 40]?

Розв’язання:

	Автобус	Трамвай	Тролейбус
Юрко	X	O	X
Богдан	O	X	X
Володя	X	X	O

Позначення «О» вказує на правильну відповідь.

Задача 2. Василько, Андрійко і Марійка навчаються в одній школі. Серед них є найкращий у школі поет, найкращий математик і найкращий шахіст. Відомо, що:

- найкращий поет не написав вірша про себе, але написав вірша про Андрійка;
- Марійка жодного разу не грала у шахи.

Хто в класі найкращий поет, найкращий математик та найкращий шахіст?

Задача 3. У першій, другій, третій квартирах жили три котики: чорний, білий та рудий. У першій та другій квартирах жив не чорний котик. Білий жив не в першій квартирі. У якій квартирі жив кожний котик [23, с. 211]?

Задача 4. Гнат, Сват і Кіндрат живуть зовсім поряд. Один з них – електрик, другий – пекар, третій – водій. Якось уранці електрик прийшов до пекаря, щоб той допоміг йому спекти пиріг на іменини, але йому сказали, що він пішов віддавати Кіндрату позичені гроші. Визнач професію кожного, якщо відомо, що водій ніколи не бачив Свата [23, с. 212].

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Для Іринки, Оксанки й Петрика приготували три види вареників: з картоплею, з сиром та з вишнями. Двоє дівчаток їдять вареники з картоплею, двоє – з сиром, двоє – з вишнями. Одна з них не любить вареники з вишнями, не їсть і вареників з сиром, а Іринка не любить сир і не їсть також вареники з картоплею. Хто які вареники любить їсти?

Задача 2. Леся, Оленка та Юля – товаришки. Кожна з них займається якимось одним видом спорту: гімнастикою, шахами або плаванням. Визнач, хто яким видом спорту займається, якщо відомо, що Юля, Оленка і гімнастка ходили втрьох учора в кіно, а шахістка старша за Оленку [23, с. 212].

2.4.2 Закономірності.

Тема «Закономірності» поділена на два навчальні факультативні заняття, на яких пропонується розглянути поняття математичних закономірностей, типи закономірностей, різні приклади розв'язування завдань на закономірності та безпосередньо розв'язування самих завдань на закономірності.

Задачі типу «Знайди закономірність» розвивають логічне мислення дитини, вчать міркувати та робити висновки.

Заняття №1.

Математична закономірність - це правило, за яким в числовому або іншому ряді елементів відбувається повторення або зміна елементів чи властивостей відповідно до даного правила.

Існує три типи закономірностей:

1) зростаючі (закономірності, у якій збільшується числова властивість згідно певного правила);

   Приклад 1. Дерево росте і на його стовбурі щороку додається одне нове кільце. Цей процес називається простою зростаючою закономірністю. У цій закономірності легко обчислити, скільки кілець буде через 2 роки або через 10 років. Кількість кілець в стовбурі відповідає віку дерева [17].

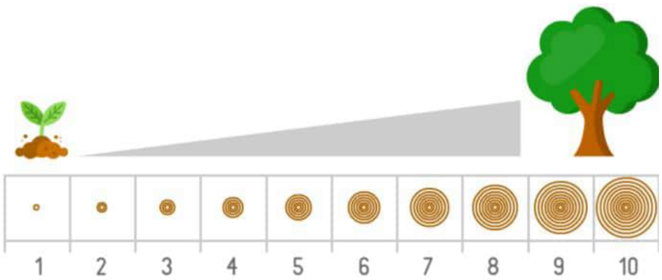


Рис. 2.4.2.1 Зображення до прикладу 1.

2) спадні (закономірності, у якій зменшується числова властивість згідно певного правила);

   Приклад 2. Уявіть змагання з поїдання сосисок на швидкість, в яких беруть участь два учасники. У кожного по 10 сосисок на тарілці. Перший з'їдає одну сосиску за хвилину, а другий з'їдає 2 сосиски за хвилину. Ясно, що другий учасник змагань переможе, так як він з'їдає більше сосисок за хвилину, ніж перший учасник. Але нам важливо побачити закономірність. На рисунку ми можемо побачити, як в кожній тарілці зменшується кількість сосисок. Цей процес називається спадною або убуваючою закономірністю. Другий учасник з'їв всю тарілку сосисок за п'ять хвилин і переміг [17].

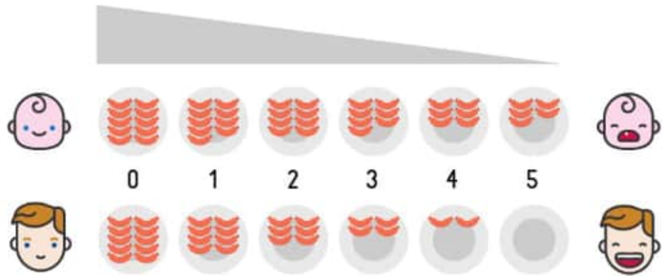


Рис. 2.4.2.2 Зображення до прикладу 2.

3) циклічні (закономірності, що повторюються кожного разу);

Приклад 3. Зміна пір року: літо – осінь – зима – весна. Щороку відбувається повторення.

Приклад 4. Розглянемо приклад з предметами різної форми. На малюнку ти бачиш ланцюжок з різної кількості предметів. Спробуй знайти закономірність на малюнку нижче. Продовжи ланцюжокр[17].

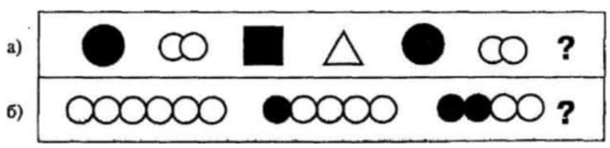
Рис. 2.4.2.3 Завдання до прикладу 4.

Розв’язання: Предмети повторюються через кожні три осередки. Знаючи закономірність, ми можемо припустити, які предмети будуть далі. За останньою ланкою буде трикутник, потім коло, далі квадрат[17].

Рис. 2.4.2.4 Розв’язок до прикладу 4

Пропоновані задачі для розв’язування з учнями на даному занятті:

Задача 1. Намалюйте замість знаку питання фігуру, що відповідає певному правилу.



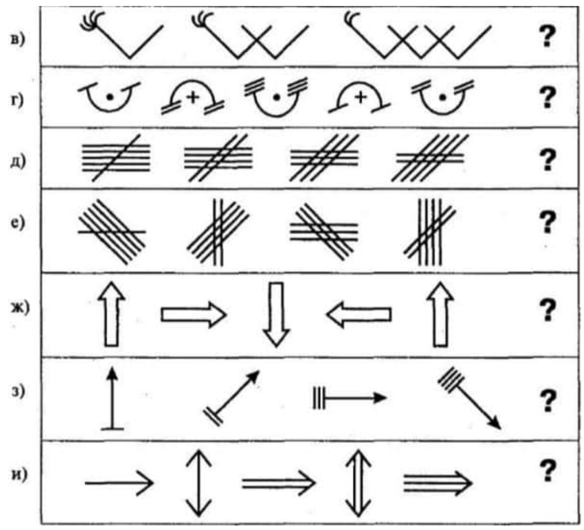


Рис. 2.4.2.5 Завдання до задачі 1

Задача 2. Намалюйте замість знаку питання фігуру, що відповідає певному правилу.

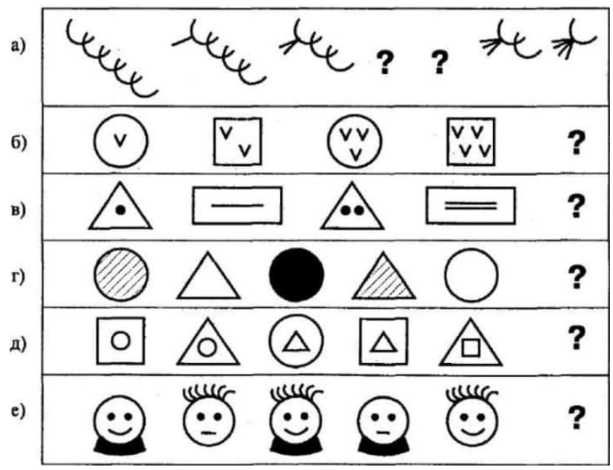


Рис. 2.4.2.6 Завдання до задачі 2

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Намалюйте замість знаку питання фігуру, що відповідає певному правилу.

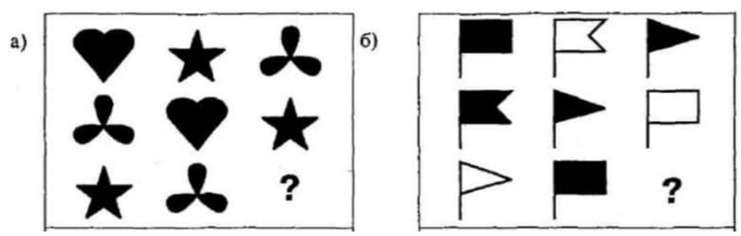


Рис. 2.4.2.7 Завдання до задачі 1 для домашнього виконання

Задача 2. Намалюйте замість знаку питання фігуру, що відповідає певному правилу.

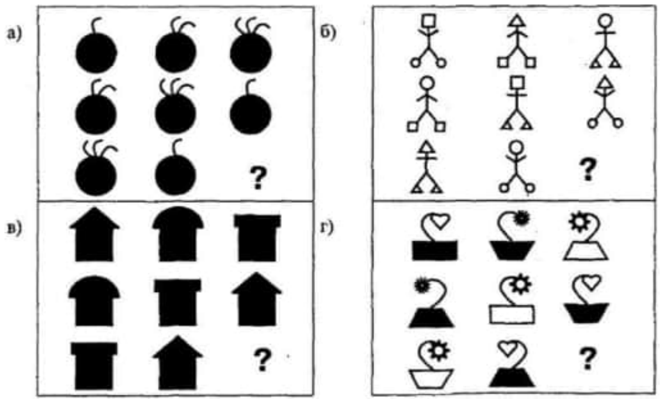


Рис. 2.4.2.7 Завдання до задачі 2 для домашнього виконання

Заняття №2.

Інколи трапляються задачі, у яких потрібно вгадати слово. Розглянемо це на конкретному прикладі:

Приклад. Відгадайте слово, що повинно стояти замість зірочок:

корова (коза) закон,

карета (****) шашки.

Розв'язання: Для цього необхідно уважно подивитися на слово попереднього рядка, записане в дужках. Як воно утворилося? Якщо перше й останнє слово першого рядка порівняти зі словом у дужках, то можна помітити, що слово «коза» складається з першого складу першого слова (ко-рова) і першого складу другого слова (за-кон). Якщо ми так само складемо слово в дужках наступного рядка, то отримаємо слово «каша». Необхідно пам'ятати, що слово повинно мати стільки літер, скільки зірочок є у дужках, а правило побудови слів може бути дещо зміненим [1, с. 15].

Задачі для виконання з учнями на факультативному занятті:

Задача 1. Відгадайте, яке слово треба поставити в дужках замість зірочок:

a) доміно (нога) гараж,
   молоко (****) замок;
b) сорока (комар) марка,
   перука (*****) сокіл;
c) город (роги) мир,
   роман (****) мед;
d) короп (поле) лепет,
   гараж (****) базар [1, с.15].

Розв'язання: Коза, кусок, море, жаба.

Задача 2. Яка фігура повинна стояти замість знаку питання? Поясніть чому.

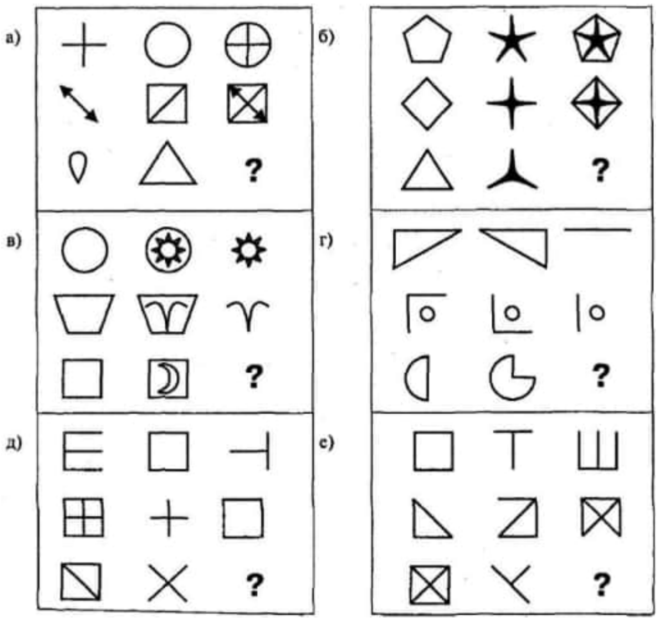


Рис. 2.4.2.8 Завдання до задачі 2

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Що за фігура повинна стояти замість знаку питання?

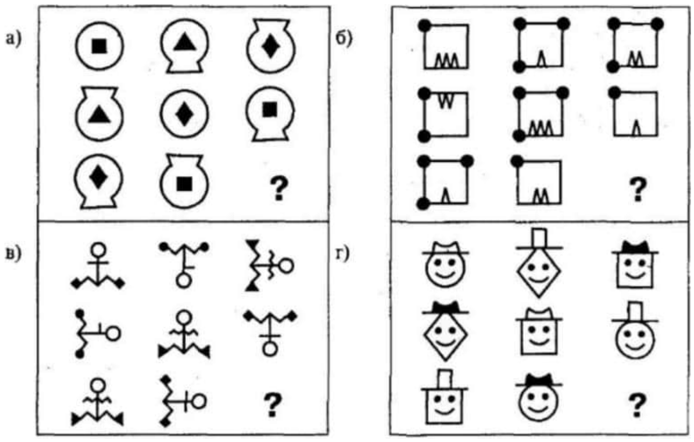


Рис. 2.4.2.9 Завдання до задачі 1 для домашнього виконання

Задача 2. Відгадайте, яке слово треба поставити в дужках замість зірочок:

a) корова (коло) голова,
   рушник (****) декада;
b) табу (бутон) тонус,
   ківі (*****) русло;
c) буква (куля) лялька,
   голуб (****) залізо.

1.4.3 Задачі із сірниками.

На факультативному курсі «Логічні кроки» відводиться три заняття на тему «Задачі із сірниками». На першому занятті пропонується розглянути деякі приклади розв’язання задач із сірниками, а також розв’язування з учнями найпростіших задач на перекладання та вилучення сірників; на другому занятті – розв’язування задач на перекладання сірників; на третьому занятті – розв’язування задач на вилучення сірників та задач, які називаються «Математичні каламбури».

Заняття №1.

Приклади розв’язання задач, що будуть продемонстровані учням:

1. **Задача на перекладання сірників.** Перед нами бокал, в якому лежить оливка. Перекладіть два сірники так, щоб оливка випала з бокала. Бокал можна перевернути догори дном, підняти чи опустити, але обов’язково зберігати його форму [1, с. 20].

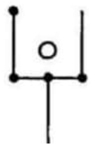


Рис. 2.4.3.1 Зображення до задачі на перекладання сірників

Розв’язання:

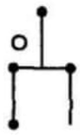


Рис. 2.4.3.2 Розв’язок до задачі на перекладання сірників

2. **Задача на вилучення сірників.** Вилучіть два сірники так, щоб утворилося чотири однакові квадрати.

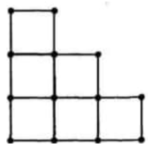


Рис. 2.4.3.3 Зображення до задачі на вилучення сірників

Розв’язання:

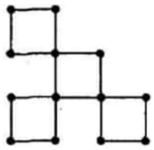


Рис. 2.4.3.4 Розв’язок до задач на вилучення сірників

Найпростіші задачі на перекладання та вилучення сірників для розв’язання з учнями на занятті:

Задача 1. Вилучіть два сірники так, що утворилися два нерівні квадрати (рис.2.4.3.5).

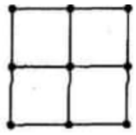


Рис. 2.4.3.5 Рисунок до задач 1- 4

Розв'язання:

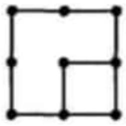


Рис. 2.4.3.6 Розв'язок до задачі 1

Задача 2. Перекладіть 3 сірники так, що отримати три рівні квадрати (рис.2.4.3.5).

Розв'язання:

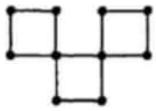


Рис. 2.4.3.7 Розв'язок до задачі 2

Задача 3. Перекладіть чотири сірники так, щоб утворилося три рівні квадрати (рис. 2.4.3.5).

Розв'язання:

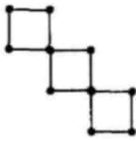


Рис. 2.4.3.8 Розв'язок до задачі 3

Задача 4. Перекладіть два сірники так, щоб утворилися два нерівні квадрати (рис. 2.4.3.5).

Розв'язання:

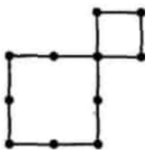


Рис. 2.4.3.9 Розв'язок до задачі 4

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Вилучіть чотири сірники так, щоб утворилося п'ять однакових квадратів (рис.2.4.3.10).

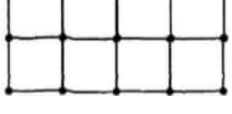


Рис. 2.4.3.10 Рисунок до задачі 1 для домашнього виконання

Задача 2. Перекладіть три сірники так, щоб утворилося чотири квадрати (рис.2.4.3.11).

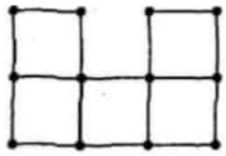


Рис. 2.4.3.11 Рисунок до задачі 2 для домашнього виконання

Заняття №2.

Пропоновані задачі на перекладання сірників для розв'язування з учнями на даному занятті:

Задача 1. Перекладіть чотири сірники так, що утворилося чотири трикутники (рис. 2.4.3.12).

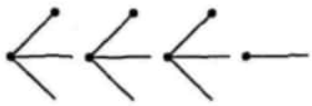


Рис. 2.4.3.12 Рисунок до задачі 1

Розв'язання:

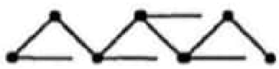


Рис. 2.4.3.13 Розв'язок до задачі 1

Задача 2. Терези складаються з 9 сірників. Вони не знаходяться в рівновазі. Перекладіть 5 сірників так, щоб урівноважити терези [1, с. 19].

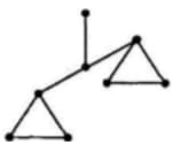


Рис. 2.4.3.14 Рисунок до задачі 2

Розв'язання:

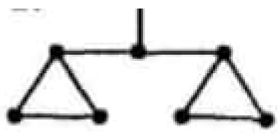


Рис. 2.4.3.15 Розв'язок до задачі 2

Задача 3. Знайти помилку у рівностях та виправити її, при цьому дозволяється перекласти лише один сірник (рис. 2.4.3.16).

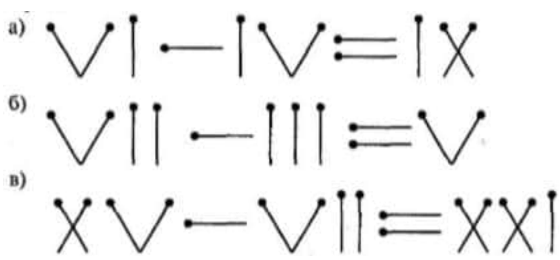


Рис. 2.4.3.16 Рисунок до задачі 3

Розв’язання:

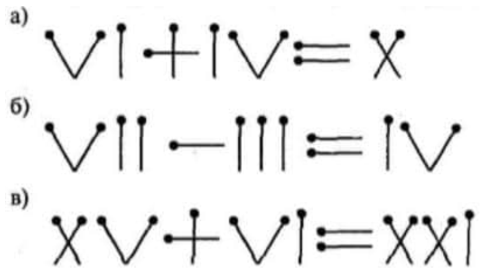


Рис. 2.4.3.17 Розв’язок до задачі 3

Задача 4. Із дев’яти сірників складіть 6 квадратів [1, с.20].

Розв’язання:

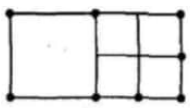


Рис. 2.4.3.18 Розв’язок до задачі 4

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Перекладіть два сірники так, щоб утворилося 5 квадратів з ключа, що зображений на рис. 2.4.3.19.

Рис. 2.4.3.19 Рисунок да задачі 1 для домашнього виконання

Задача 2. Перекладіть чотири сірники так, щоб одержати два квадрати (рис.2.4.3.20).

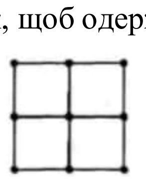


Рис. 2.4.3.20 Рисунок да задачі 2 для домашнього виконання

<u>Заняття №3.</u>

Пропоновані задачі на вилучення сірників для розв’язування з учнями на даному занятті:

Задача 1. Вилучіть шість сірників, щоб отримати чотири однакові квадрати (рис.2.4.3.21).

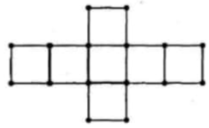


Рис. 2.4.3.21 Рисунок до задачі 1

Розв’язання:

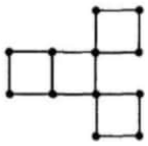


Рис. 2.4.3.22 Розв’язок до задачі 1

Задача 2. Вилучіть два сірники таким чином, щоб утворилося чотири однакові квадрати (рис. 2.4.3.23).

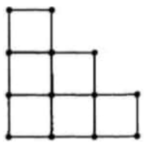


Рис. 2.4.3.23 Рисунок до задачі 2

Розв’язання:

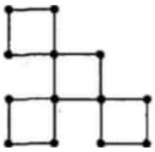


Рис. 2.4.3.24 Розв’язок до задачі 2

Другий тип задач, що пропонується розв’язувати на даному занятті – «Арифметичні парадокси»:

Задача 3. Як з десяти сірників одержати нуль [1, с. 21]?

Розв’язання:

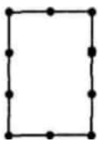


Рис. 2.4.3.25 Розв’язок до задачі 3

Задача 4. Як з дев'яти сірників, не ламаючи їх, зробити десять [1, с.21]?

Розв'язання:

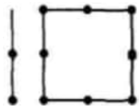


Рис. 2.4.3.26 Розв'язок до задачі 4

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Вилучіть три сірники таким чином, щоб одержати три однакові квадрати (рис. 2.4.3.27).

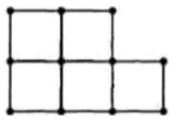


Рис. 2.4.3.27 Рисунок до задачі 1 для домашнього виконання

Задача 2. Як з трьох сірників, не ламаючи їх, зробити 7 [1, с.22]?

2.4.4 Задачі на зважування.

Загалом на тему «Задачі на зважування» відводяться дві академічні години (два заняття). На першому занятті пропонується загалом розповісти учням, що являють собою задачі на зважування, показати деякі приклади розв'язання задач та, власне, саме розв'язування задач на визначення фальшивої монети. На другому занятті рекомендовано розв'язування з учнями задач двох типів: на обмежене число зважувань та на визначення кількості зважувань.

Заняття №1.

Щоб розв'язати задачу на зважування використовують шалькові терези. Ними не можна визначити точну вагу предметів. За допомогою таких терезів можна визначити однакова чи не однакова вага предметів (терези повинні бути в рівновазі, якщо вага предметів однакова). Для визначеності в основному ми будемо зважувати монети (хоча іноді це будуть будь-які предмети). У задачі, де потрібно визначити яка з монет фальшива, часто доводиться проводити обмежену кількість зважувань. Якщо завдання полягає в тому, щоб визначити кількість зважувань, за допомогою яких необхідно визначити фальшиву монету, це означає, що ми маємо зробити найменшу кількість зважувань.

Задачі на зважування поділяються на два основні типи:

1) коли у задачі вказано, що фальшива монета легша за справжні;
2) коли у задачі не вказано, що фальшива монета легша від справжніх.

Приклади розв'язання задач відповідно до двох вище вказаних типів:

Приклад 1. Маємо шалькові терези без гир і 3 однакові на вигляд монети, серед яких одна фальшива: вона легша за справжні (всі справжні монети однакової маси). Скільки потрібно зважувань, щоб визначити фальшиву монету [18]?

Розв'язання: Нам буде достатньо одного зважування. Кладемо на кожну шальку терезів по монеті. Якщо одна з шальок легша, то фальшива монета на ній. Якщо терези в рівновазі, то на терезах справжні монети, а фальшива та, яку не поклали на терези [18].

Приклад 2. Маємо шалькові терези без гир і 3 однакові на вигляд монети, серед яких одна фальшива, причому не відомо легша чи важча вона за справжні (всі справжні монети однакової маси). Скільки потрібно зважувань, щоб визначити фальшиву монету [18]?

Розв'язання: Нам буде достатньо 2 зважувань. Кладемо на кожну шальку терезів по монеті: 1) якщо терези не в рівновазі, то фальшива монета на терезах, а та, що залишилась, – справжня. Кладемо її на терези з однією із уже зважених. Якщо терези в рівновазі – фальшива не на терезах; якщо ні – то фальшива та, яку важили двічі; 2) якщо терези в рівновазі, то на терезах справжні монети, а фальшива та, яку не поклали на терези [18].

Пропоновані задачі на визначення фальшивих монет для розв'язання на першому факультативному занятті на тему «Задачі на зважування» разом з учнями:

Задача 1. На столі лежать дев'ять монет. Одна з них – фальшива (легша за інші). Як за допомогою двох зважувань можна виявити фальшиву монету [16, с. 81]?

Розв'язання: Перше зважування: на кожну чашу терезів кладемо по три монети. Якщо терези врівноважені, то для другого зважування беруться дві із трьох монет, що залишилися. Якщо фальшива монета на терезах, то, ясно, на якій вона чаші терезів. Якщо ж терези врівноважені, то фальшивою є незважена монета, що залишилася. Якщо при першому зважуванні одна із чаш переважує іншу, то фальшива монета знаходиться серед монет, вага яких виявляється меншою. Тоді другим зважуванням встановлюємо, яка з монет фальшива [16, с. 248].

Задача 2. У хлопчика є вісім монет, одна з яких є фальшивою та легшою за справжні. Як за три зважування визначити яка з монет є фальшивою?

Розв'язання: Хлопчику потрібно поділити монети на дві рівні частини, тобто по 4 монети. Покласти на терези й ту купку, яка легша знову поділити на дві однакові частини (тобто по 2 монети). Знову їх зважити та визначити легшу з них. Тоді легшу купку розділити по 1 монеті і знову зважити. Таким чином хлопчик визначить яка монета є фальшивою.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. На столі лежить 27 срібних монет. Одна з цих монет фальшива. Як за допомогою трьох зважувань визначити фальшиву монету? Відомо, що фальшива монета важча за справжні.

Задача 2. У хлопчика є 101 однакових на вигляд монет. Одна з цих монет є фальшивою. Як за два зважування визначити важчою чи легшою є фальшива монета за справжні?

<u>Заняття №2.</u>

Задачі на визначення кількості зважувань та на обмежене число зважувань, що пропонуються для розв'язування на даному занятті разом з учнями:

Задача 1. На столі лежать 9 однакових на вигляд монет, одна з яких є фальшивою та легшою. За скільки зважувань можна визначити фальшиву монету?

Розв'язування: Потрібно поділити монети на три рівні частини: по 3 монети. Зважимо дві частини. Очевидно, що якщо терези будуть знаходитися у стані рівноваги, то фальшива монета у третій купці. Якщо ваги не в стані рівноваги, то з легшої купки візьмем дві монети й зважимо їх. І за попередньою схемою визначимо фальшиву монету. Таким чином за два зважування можна визначити фальшиву монету.

Задача 2. Є 13 монет, з них одна фальшива, причому невідомо, легша вона за справжні чи важча. Потрібно знайти цю монету за три зважування на терезах з двома чашами без гир [16, с. 83].

Розв'язання: Відкладемо одну монету, а всі інші пронумеруємо від 1 до 12. Тоді на одну чашу терезів покладемо чотири монети: п'яту, другу, восьму, 11; на другу часу інші чотири монети: десяту, шосту, третю, четверту. І так повторимо ще два рази. На одну чашу покладемо п'яту, четверту, дванадцяту, одинадцяту; на другу – першу, шосту, сьому, восьму. І знову на першу: першу монету, другу, третю, четверту; на другу: дев'яту, одинадцяту, шосту, сьому. Тепер спробуємо відшукати фальшиву монету, якщо вона знаходиться серед цих дванадцятьох монет. Якщо результати зважування були такі: 1)зліва легше; 2)рівновага; 3)зліва легше, то фальшивою може бути тільки друга монета, яка легша за інші. Якщо ж фальшивою буде відкладена монета, то у всіх випадках терези знаходилися у рівновазі.

Задача 3. Найкращий друг Дмитрика дав йому вісім однакових на вигляд монет, причому одна з монет була фальшивою і легшою за справжні. Скількома зважуваннями за допомогою шалькових терезів та без гир Дмитрик зможе визначити фальшиву монету?

Розв'язання: Дмитрику найперше потрібно поділити 8 монет на 3 купки: по 2, 3, 3 монети. Далі розв'язання аналогічне як у задачі1.

Задача 4. Фальшивомонетники виготовили 4 монети, які мали важити 1, 3, 4 і 7 грамів. Але одну із цих монет виготовили неякісно – з неправильною вагою (невідомо, чи з більшою за правильну, чи з меншою). Як за два зважування на терезах без гир визначити браковану монету [16, с.81]?

Розв'язання: Спочатку потрібно покласти на одну шальку терезів монети, що мають вагу 1 г і 3 г, а на другу – 4 г. Пізніше на одну шальку потрібно поставити монети, що важать

3 г та 4 г, а на другу монету 7 г. Якщо в одному з двох зважувань терези перебуватимуть у стані рівноваги, то бракованої монети у цьому зважуванні не було. Якщо ж при двох зважуваннях одна й та сама шалька терезів виявилася важчою, то неправильна монета та, що має масу 3 г. В інакшому випадку 4 г.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. У сумці лежать 81 однакові за виглядом монети. Одна з цих монет є фальшивою і легшою за інші. Скількома зважуваннями можна визначити фальшиву монету?

Задача 2. Сім робітників виготовляють золоті монети. Один з них виготовляє монети легші на 1 г. Як за допомогою одного зважування визначити, який робітник виготовляє легші монети [1, с.32]?

2.4.5 Задачі на переливання.

Тема «Задачі на переливання» на факультативному курсі логічні кроки по рахунку є п'ятою. На цю тему відводяться два заняття. На першому занятті рекомендується розповісти учням загалом про задачі на переливання, про задачу Пуассона; показати учням деякі приклади розв'язання задач по цій темі; розв'язування найпростіших задач на переливання та складання таблиць до цих задач. На другому занятті рекомендовано розв'язання з учнями таких типів задач: на використання двох посудин сталого об'єму та необмеженої чи обмеженої кількості рідини, на використання трьох посудин.

<u>Заняття №1.</u>

У загальному вигляді задачі на переливання можна сформулювати так: Є дві порожні посудини A і B місткістю відповідно a і b одиниць об'єму (можна вважати, що $a < b$), і наповнена посудина C місткістю c одиниць ($c > a + b$). Переливаючи послідовно рідину з однієї посудини в іншу, треба досягти того, щоб у посудині B залишилося рівно d ($d < b$) одиниць об'єму даної рідини. При цьому передбачається, що правомірними (доступними) є лише наступні чотири типи переливань:

1) із посудини C в посудину A або B можна лити рідину доти, поки вона не наповниться вщерть;
2) із посудини B можна лити рідину в посудину A доти, поки або A не стане повною, або B не стане порожньою;
3) з посудини A можна лити рідину в посудину B доти, доки B не стане повною або не спорожніє A;
4) усю рідину з посудини A або B можна вилити в C [19].

Задачу на переливання називають задачею Пуассона. Симеон Дені Пуассон (1781-1840) – відомий знаменитий французький математик, механік та фізик. Коли він був ще молодим і вагався у виборі життєвого шляху, приятель показав йому кілька задач, із якими сам не зміг упоратися. Пуассон швидко розв'язав усі. Але особливо йому сподобалася задача про дві посудини: «Дехто має 12 пінт виноградного соку (пінта – це 0,568 л) і хоче подарувати половину другу, але у нього лише дві порожні посудини: одна – на 8, друга – на 5 пінт. Яким чином налити в більшу посудину 6 пінт?» «Ця задача визначила мою долю, – казав Пуассон. – Я вирішив, що обов'язково стану математиком»[19].

Традиційно в задачах переливання переливати можна тільки до тих пір, поки посудина, в яку ви наливаєте, не буде повністю заповненою, або поки посудина, з якої ви виливаєте, не буде повністю порожня. Просто зупинитися посередині або розлити вміст посудини на дві рівні частини теж не вийде. Завдання переливання рідини можна вирішувати по-різному: з початку, з кінця, підбираючи варіанти. Але найпоширеніший метод спроб.

Приклади задач для ілюстрації учням:

Приклад 1. Як, використовуючи банки 3л і 5 л, набрати води рівно 1 л [19]?

Розв'язання:

Банки	Переливання			
5 л	-	3	3	5
3 л	3	-	3	1

Приклад 2. Відро, що має об'єм 10 л наповнене яблучним соком. Як перелити з цього відра 5 л соку у відро, об'ємом 7 л, використовуючи при цьому відро, об'ємом 3 л?

Розв'язання:

Відро	Переливання							
10 л	3	3	6	6	9	9	2	2
7 л	7	4	4	1	1	-	7	5
3 л	-	3	-	3	-	1	1	3

Приклад 3. Маємо три посуди місткістю відповідно 8 л, 5 л і 3 л, найбільша з них наповнена молоком. Як поділити молоко на дві рівні частини, використовуючи ці посудини [19]?

Розв'язання:

Посудини	Переливання							
8 л	8	3	3	6	6	1	1	4
5 л	0	5	2	2	0	5	4	4
3 л	0	0	3	0	2	2	3	0

Найпростіші задачі на переливання, що рекомендовано для розв'язування на даному занятті:

Задача 1. Як набрати з річки 4 л води, користуючись банками, об'ємом 5 л і 3 л?

Розв'язання:

Банки	Переливання					
5 л	5	2	2	0	5	4
3 л	0	3	0	2	2	3

Задача 2. У бочці 20 л води. Як за допомогою двох порожніх відер на 7 і 13 літрів за найменше число переливань набрати 5 літрів води [16, с. 78].

Розв'язання:

Посудини	Переливання								
20 л	20	7	7	14	14	1	1	8	8
7 л	0	0	7	0	6	6	7	0	7
13 л	0	13	6	6	0	13	12	12	5

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Як набрати з крана 3 л води за допомогою двох бідонів, об'ємом 5 л і 9 л?

Задача 2. Є трилітрова банка соку й дві порожні банки: одна – літрова, друга – дволітрова. Як розлити сік так, щоб у всіх трьох банках було по одному літру [16, с. 78]?

Заняття №2.

Задачі різних типів, що рекомендовано для розв'язування з учнями на занятті №2:

Задача 1. Десяти літровий бідон наповнений молоком. Як за допомогою банок, об'ємом 7 л і 3 л виміряти 4 л молока?

Розв'язання:

Посудини	Переливання		
10 л	10	3	3
7 л	0	7	4
3 л	0	0	3

Задача 2. Є три посудини: 6 л, 3 л, 7 л. У першій посудині 4 л, а третій – 6 л молока. Використовуючи тільки ці три посудини, розлийте молоко порівну на дві частини [1, с. 32].

Розв'язання:

Посудини	Переливання					
6 л	4	4	6	2	2	5
3 л	0	3	1	1	3	0
7 л	6	3	3	7	5	5

Задача 3. 12 – ти літрова бочка наповнена квасом. Використовуючи 8 – літрову та 5 – літрову бочки, розлийте квас на частини 3 л і 9 л [1, с. 32].

Розв'язання:

Бочки	Переливання

12 л	12	4	4	9
8 л	0	8	3	3
5 л	0	0	5	0

Задача 4. Є три відра, об'ємом 14 л, 9 л, 5 л. Найбільше відро наповнене водою, а всі інші – порожні. Як, використовуючи ці посудини, розлити 14 л води навпіл за 14 переливань?

Розв'язання:

Відра	Переливання													
14 л	14	9	9	4	4	13	13	8	8	3	3	12	12	7	7
9 л	0	0	5	5	9	0	1	1	6	6	9	0	2	2	7
5 л	0	5	0	5	1	1	0	5	0	5	2	2	0	5	0

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Є три банки: 3 л, 5 л, 8 л. Як за допомогою цих посудин наповнити 8-літрову банку рівно наполовину [1, с.33]?

Задача 2. Як з повного бідона ємністю 12л відлити половину води, користуючись двома порожніми бідонами ємністю 8 і 5 л [16, с.79].

2.4.6 Магічні квадрати.

На факультативному курсі «Логічні кроки» передбачено дві академічні години на тему «Магічні квадрати». На першому занятті рекомендовано коротко розповісти, що таке магічні квадрати, розглянути деякі приклади розв'язання задач і, власне, розв'язування задач з учнями. На другому занятті – розв'язування логічних задач на побудову магічних квадратів.

Заняття №1.

Основною задачею магічних квадратів є розставлення чисел у клітинках будь – якого квадрата таким чином, щоб у всіх рядках, стовпцях та діагоналях утворювалися однакові суми.

Магічні квадрати можуть бути різних порядків: другого, третього, четвертого тощо. Порядок квадрата визначається числом відрізків, на яке поділено його сторону [1, с. 39].

Загалом у всіх задачах потрібно за трьома базовими числами заповнити магічний квадрат. Розглянемо приклад розв'язання:

Приклад 1. Заповнити магічний квадрат:

	7	
5	6	

Розв'язання: Суть заповнення магічного квадрата полягає в тому, щоб побачити, що a+7=6+5, звідки a=4. Далі знову потрібно побачити, що 4+b=5+7, звідки b=8. Далі квадрат заповнюється легко, оскільки нам відома сума стовпця: 8+7+6=21.

a=4	b=8	9
12	7	2
5	6	10

Задачі, що рекомендовані для розв'язування з учнями на даному факультативному занятті:

Задача 1. Заповнити магічний квадрат:

	7	
5		4

Розв'язання:

10	2	9
6	7	8
5	12	4

Задача 2. Заповнити магічний квадрат:

	7	
	6	
5		

Розв'язання:

4	7	7
9	6	3
5	5	8

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Заповнити магічний квадрат:

	5	
	4	3

Задача 2. Заповнити магічний квадрат:

	1	
3		
		2

<u>Заняття №2.</u>

Задачі логічного характеру на побудову магічних квадратів для розв'язування з учнями:

Задача 1. Заповнити магічний квадрат:

		3
	5	
		4

Розв'язання:

6	6	3
2	5	8
7	4	4

Задача 2. Заповнити магічний квадрат:

	3	5
	4	

Розв'язання:

4	3	5
5	4	3
3	5	4

Задача 3. Заповнити магічний квадрат:

4		2
	5	

Розв'язання:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Заповнити магічний квадрат:

	5	
4	9	

Задача 2. У клітинках квадрата 3x3 розмістіть числа від 1 до 9 так, щоб сума чисел по вертикалі, горизонталі, діагоналі дорівнювала 15 [1, с. 40].

2.4.7 Множини. Круги Ейлера.

Ознайомлення з теорією множин має на меті покращити організацію вивчення математики. Помірне систематичне використання понять математичної логіки і теорії множин надає суттєвої користі для більш глибокого розуміння основ сучасної математики, ознайомлює з основами правильних міркувань під час доведення тверджень [8, с. 98].

Тема «Множини. Круги Ейлера» є чи не найважливішою темою факультативного курсу «Логічні кроки». На цю тему відведено чотири заняття. Перші два заняття фактично є теоретичними, на них пропоновано розглянути такі теоретичні матеріали: поняття множини, елементи множин, співвідношення між множинами, види множин, круги Ейлера, об'єднання та переріз множин. Два наступні заняття є теоретичними. На них учні будуть набувати навичок розв'язування задач на дану тему.

Заняття №1.

Точного означення *«множини»* у математиці не існує. У математиці набір предметів або понять, зібраних за будь-якою ознакою, називають множинами, а кожний із цих предметів – елемент множини [20, с. 6].

Наприклад, знаки для записування чисел (цифри) утворюють множину цифр. Для окремих множин предметів люди придумали спеціальні назви множину корів називають чередою; множину коней – табуном ; множину квітів у вазі – букет. Елементами множини можуть бути об'єкти будь-якої природи. Наприклад, вересень - елемент множини місяців року.

Множини є:

- **скінченні** (елементи якої можна перерахувати, наприклад – множина цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0 – 10 елементів);
- **нескінченні** (елементи якої перерахувати неможливо, наприклад – множина всіх натуральних чисел);
- **порожні** (множина, яка не містить жодного елемента, позначається Ø);
- **злічені** (множини, елементи якої можна перерахувати, іншими словами, кожному елементу присвоїти порядковий номер);
- **незлічені** (нескінченна множина, елементам якої не можна у відповідність поставити порядковий номер) [20, с. 7].

Позначають множини великими латинськими літерами ($A, B, C, D, K, M,\dots$). Наприклад, множина всіх цифр $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Елементи множини прийнято позначати малими латинськими літерами $(a, b, c, d, k, m,\dots)$. Наприклад, $a \in A$. Знак «∈» позначає, що елемент a належність даній множині, читають: «елемент а належить множині А». Знак « ∉ » позначає «не належить множині», наприклад, $a \notin A$. Читають: «елемент а не належить множині А» [20, с. 7].

Приклад 1. Поставити замість * знак «∈» чи « ∉ » :

- математика * множина шкільних предметів;
- Говерла * множина українських гір;
- фарба * множина їжі;
- огірок * множина фруктів.

Розв'язання:

- математика ∈ множина шкільних предметів;
- Говерла ∈ множина українських гір;
- фарба ∉ множина їжі;
- огірок ∉ множина фруктів.

<u>Заняття №2.</u>

Кожному з нас відомо, наш навколишній світ існує завдяки взаємозв'язку між предметами та явищами. Аналогічні зв'язки існують між множинами.

Кожен учень є частиною школи, кожне дерево частиною природи тощо.

Тоді, якщо множина $A=\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$, а множина $B=\{1,3,5,7\}$, то множина B є частиною множини A. Але, як сказав А. Пуанкаре: «Математика – спосіб називати різні речі одним ім'ям». І для цього в математиці є своя назва, тому множину B називають **підмножиною** множини A. Тобто, якщо кожний елемент множини B є також елементом множини A, то множина B називається підмножиною множини A. Позначається: $\boldsymbol{B \subset A}$, в іншому випадку $\boldsymbol{A \subset B}$ [20, с. 9].

Об'єднанням (сумою) множин A і B називають таку множину C, яка містить у собі всі елементи множини A і ті елементи множини B, яких немає у множині A [20, с. 9].

Об'єднання позначають знаком «∪». Розглянемо приклад:

Приклад 1. Дано дві множини A={1,3,5,7,9,11} і B={2,4,6,8,10,}. Знайти об'єднання цих двох множин.

Розв'язання: Нехай C=A ∪ B. Тоді C={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,}.

Перерізом (добутком) множин A і B називають таку множину C, яка складається лише зі спільних елементів множин A і B [20, с. 11].

Переріз позначають знаком «∩». Розглянемо приклад:

Приклад 2. Дано дві множини A={1,2,3,5,7,8,9} і B={1,2,4,5,6,10}. Знайти переріз цих двох множин.

Розв'язання: Нехай C=A ∩ B. Тоді C={1,2,5}.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Дано дві множини A={1,2,3,4,5,6} і B={2,4,6,7,8,10,}. Знайти об'єднання цих двох множин.

Задача 2. Дано дві множини А={2,4,6,7} і В={1,2,3,4}. Знайти переріз цих двох множин.

<u>Заняття №3.</u>

Відомий математик Леонард Ейлер (1707-1783) запропонував чудовий спосіб розв'язування задач, у яких потрібно знайти перетин чи об'єднання певних множин, – зобразити їх геометричною схемою. Такі схеми називають кругами Ейлера, або діаграми Ейлера-Венна, оскільки пізніше, в 1894 р., Дж.Венн запропонував аналогічну методику використання діаграм для розв'язування логічних задач [20, с. 19].

За допомогою цих кругів вчений зобразив співвідношення між множинами дійсних чисел, які вивчаються у шкільному курсі математики:

- N – множина натуральних чисел;
- Z – множина цілих чисел;
- Q – множина раціональних (дробових) чисел;
- R – множина дійсних чисел (всі числа) [20, с. 5].

Співвідношення між цими множинами зображено на рисунку 2.4.7.1.

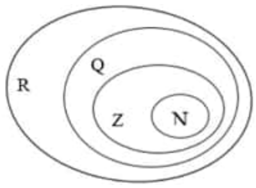


Рис. 2.4.7.1 Співвідношення між множинами дійсних чисел

Розглянемо приклади, як можна зобразити за допомогою діаграм Ейлера перетин та об'єднання множин:

Приклад 1. Дано дві множини А={1,3,5,7,9,11} і В={2,4,6,8,10,}. Зобразити за допомогою кругів Ейлера об'єднання множин А і В.

Розв'язання: Нехай С=А ∪ В. Тоді С={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,}.

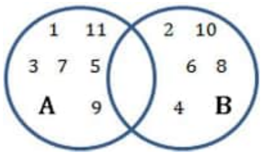


Рис.2.4.7.2 Розв'язок прикладу 1

Приклад 2. Дано дві множини А={1,2,3,5,7,8,9} і В={1,2,4,5,6,10}. Зобразити за допомогою кругів Ейлера об'єднання множин А і В.

Розв'язання: Нехай С=А ∩ В. Тоді С={1,2,5}.

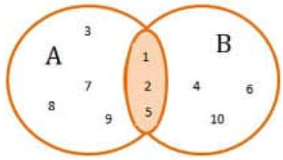


Рис.2.4.7.3 Розв’язок прикладу 2

Зауважимо, що якщо множини *A* і *B* не мають спільних елементів, то C=A∩B=∅. На рисунку 2.4.7.4 це показано за допомогою кругів Ейлера.

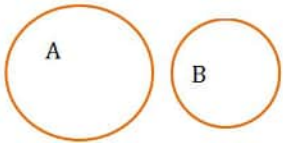


Рис. 2.4.7.4 Дві множини, що не мають спільних елементів

Задачі, що пропонуються для розв’язування на даному факультативному занятті разом з учнями:

Задача 1. Знайти перетин та об’єднання множин *A* і *B:*

1) A={а, ю, і, у, о}, B={б, і, о, к, а};
2) A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, B={12, 13, 14}.

Розв’язання: Нехай C=A ∪ B, M=A ∩ B.

1) C={а, ю, і, у, о, б, к}, M ={а, і, о};
2) C={1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 14}, M =∅.

Задача 2. Дано множини A і B, знайти об'єднання й переріз цих множин, якщо A - множина чисел кратних 5 і менших 100, B - множину чисел менших 105 і кратних 7 [20, с.18].

Розв’язання: A={5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95}, B={7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98}.

Нехай C=A ∪ B, M=A ∩ B.

C={5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 7, 14, 21, 28, 42, 49, 56, 63, 77, 84, 91, 98},

M ={35, 70}.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Дано множини A і B, знайти об'єднання й переріз цих множин, якщо A - множина чисел кратних 2 і менших 65, B - множину чисел менших 65 і кратних 3 [20, с.18].

Задача 2. Запишіть усі підмножини множини A={1, 3, 4, 6}.

<u>**Заняття №4.**</u>

Задачі, що пропонуються для розв'язування з учнями на останньому занятті по темі «Множини. Круги Ейлера»:

Задача 1. У класі навчаються 30 учнів. 12 учнів люблять ходити у похід, 14 – в цирк, а 6 – не люблять ні похід, ні цирк. Скільком любителям походів також подобається цирк?

Розв'язання: Позначимо множину учнів, що полюбляють ходити у похід, як **П**, а в цирк - як **Ц**. Зобразимо умову задачі за допомогою кругів Ейлера.

1) 30 – 6 = 24 (уч.) – люблять ходити в похід і в цирк;
2) 24 – 14 = 10 (уч.) – люблять похід, але не люблять цирк;
3) 12 – 10 = 2 (уч.) – люблять і похід і цирк.

Отже, двом учням подобаються і походи і цирк.

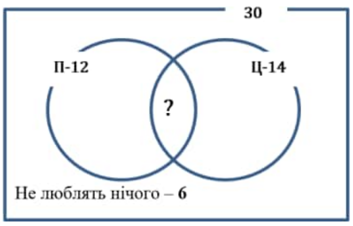


Рис. 2.4.7.5 Рисунок до умови задачі 1 з кругами Ейлера

Задача 2. Всі мої друзі мають які-небудь смартфони. Шестеро із них мають iPhone, п'ятеро - Samsung. І тільки у двох із них є і iPhone, і Samsung. Угадайте, скільки у мене друзів [20, с.22]?

Розв'язання:

1) 6 – 2 = 4 (д.) – тільки iPhone;
2) 5 – 2 = 3 (д.) – тільки Samsung;
3) 4 + 3 + 2 = 9 (д.)

Отже, у мене всього 9 друзів.

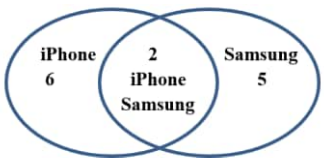


Рис. 2.4.7.6 Рисунок до умови задачі 2 з кругами Ейлера

Задача 3. З 20 людей двоє вивчали лише англійську мову, троє – тільки німецьку, шестеро – тільки французьку. Троє не вивчали ніякі мови. Один вивчав англійську і німецьку, троє – англійську і французьку. Скільки людей вивчало німецьку і французьку мови [20, с. 23]?

Розв'язування:

1) 20 – 3 =17 (л.) - вивчають англійську, німецьку і французьку разом;
2) 2 + 3 + 1 = 6 (л.) - вивчають англійську;

3) 17 – 6 = 11 (л.) - вивчають французьку разом з німецькою, але не вивчають англійську;

4) 11 – (3 + 6) = 2 (л.) - вивчають і французьку, і німецьку [20, с. 23].

Отже, двоє людей вивчало німецьку і французьку мови.

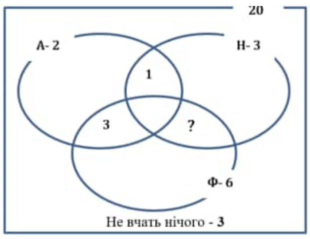


Рис. 2.4.7.7 Рисунок до умови задачі 3 з кругами Ейлера

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Відомо, що 15 учнів у класі відвідують музичну школу, а 16 – художню школу. З них 6 – музичну і художню. Скільки учнів відвідують тільки музичну школу?

Задача 2. У гурті 30 дівчаток. 18 з них пили сік, 16 пили каву, а деякі не пили нічого. Тих, хто пив і сік, і каву, у 2 рази більше, ніж тих, хто нічого не пив. Скільки дівчаток пили і сік, і каву [20, с. 21]?

2.4.8 Подільність чисел.

На тему «Подільність чисел» передбачено 3 заняття. На першому занятті рекомендується розглянути з учнями основні ознаки подільності чисел та теореми подільності суми й добутку. На другому – показати учням деякі приклади розв’язання задач на подільність та розв’язування задач. На третьому – розв’язування задач на подільність.

Заняття №1.

Ознаки подільності:

1) на 6:

   Якщо число закінчується парною цифрою і сума цифр числа ділиться націло на 3, то це число ділиться на 6;

2) на 15:

   Якщо сума цифр числа ділиться на 3 і остання цифра числа є 5 або 0, то це число ділиться на 15;

3) на 25:

   Якщо дві останні цифри числа 00, 25, 50 або 75, то це число ділиться на 25;

4) на 4:

   Якщо число, утворене двома останніми цифрами даного числа, ділиться на 4, то й саме число ділиться на 4;

5) на 8:

Якщо число, утворене трьома останніми цифрами даного числа, ділиться на 8, то й саме число ділиться на 8;

6) на 100:

Якщо останні дві цифри числа є 00, то число ділиться на 100;

7) на 7:

Потрібно справа наліво підписати під цифрами числа коефіцієнти: - 1, 2, 3, 1, - 2, - 3, - 1, 2, 3, 1, потім помножити кожну цифру на коефіцієнт, що під нею, і всі добутки скласти. Якщо знайдена сума ділиться на 7, то й саме число ділиться на 7;

8) на 11:

Якщо різниця між сумою його цифр, що стоять на парних місцях, та сумою цифр, що стоять на непарних місцях, ділиться на 11, то й саме число ділиться на 11 [1, с. 49-50].

Теорема про подільність суми: Якщо кожен з доданків ділиться на дане число, то й сума ділиться на це число [1, с. 50].

Теорема про подільність добутку: Якщо хоча б один із множників ділиться на дане число, то й добуток ділиться на це число [1, с. 50].

Заняття №2.

У десятковій системі числення усі числа можна розкласти на розрядні доданки: $6976 = 6 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6$.

Взагалі будь – яке п'ятизначне число можна записати у вигляді: $\overline{abcde}$. Риску ставлять для того, щоб відрізняти п'ятизначне число від добутку п'яти множників [1, с. 51].

Розглянемо деякі приклади розв'язування задач на подільність чисел:

Приклад 1. Знайдіть усі парні цифри e і c, щоб число $\overline{1ec05}$ ділилося на 9.

Розв'язання: $e = 6; c = 6$.

Приклад 2. Доведіть, що сума двозначного числа та числа, записаного тими самими цифрами, але в оберненому порядку, ділиться націло на 11 [1, с. 51].

Розв'язання:

$$\overline{mn} + \overline{nm} = 10 \cdot m + n + 10 \cdot n + m = 11 \cdot m + 11 \cdot n = 11(m+n) \vdots 11$$

за теоремою про подільність добутку

Приклад 3. Доведіть, що якщо цифру двоцифрового числа записати двічі в тому самому порядку, то здобуте число буде більше від початкового в 101 раз [1, с.52].

Розв'язання:

$$\overline{mnmn} = 1000m + 100n + 10m + n = 1010m + 101n = 101(m+n).$$

Рекомендовані задачі на подільність чисел для розв'язування з учнями на даному факультативному занятті:

Задача 1. Чи ділиться 35 – цифрове число на 9, у якого всі цифри дорівнюють нулю, окрім першої та останньої, що дорівнюють 1 та 8 відповідно.

Розв'язання: Ділиться, оскільки сума цифр цього числа дорівнює 9.

Задача 2. Праворуч та ліворуч допишіть по одній цифрі до числа десять таким чином, щоб отримати число, яке кратне 72.

Розв'язання: За теоремою про подільність добутку, щоб число ділилося на 72, воно також буде ділитися на 8 і 9. Отже, отримане число становить 4104.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Число 82** націло ділиться на 90. Знайдіть це число.

Задача 2. Праворуч та ліворуч допишіть по одній цифрі до числа тринадцять таким чином, щоб отримати число, яке кратне 45.

Заняття №3.

Рекомендовані задачі на подільність чисел для розв'язування з учнями на даному факультативному занятті:

Задача 1. У Змія Горинича 1000 голів. Казковий богатир може одним ударом меча відрубати 1, 17, 21 чи 33 голови, але при цьому в Змія виросте відповідно 10, 14, 0 чи 48 голів. Чи зможе богатир подолати Змія Горинича [1, с.51]?

Розв'язання: У будь – якому випадку, якщо богатир відрубає голови, різниця між відрубаними та новими головами буде кратною трьом. Проте 1000 не ділиться націло на 3. Отже, богатир не зможе подолати змія.

Задача 2. Довести, що будь-яке число, що складається з трьох однакових цифр, націло ділиться на 37.

Розв'язання: $\overline{mmm} = 100m + 10m + m = 111m$. Можна стверджувати, що 111 = 37 · 3, тому $\overline{mmm} = 37 \cdot 3 \cdot m ⋮ 3$.

Задача 3. До магазину привезли 223 л олії в бідонах по 10 і 17 л. Скільки було бідонів [1, с.52]?

Розв'язання: Оскільки кількість олії, яку привезли у 10-літрових бідонах, закінчується на 0, то кількість олії, що привезли у 17-літрових бідонах, закінчується на 3 (223 - …0=…3). Тому кількість 17-літрових може бути лише 9. Тож кількість 10-літрових бідонів (223 – 17 · 9) : 10 = 7[1, с. 97] .

Задача 4. Довести, що сума чисел $\overline{mnp}$, $\overline{npm}$ та $\overline{pmn}$ є кратною 11.

Розв'язання:

$$\overline{mnp} + \overline{npm} + \overline{pmn} = 111m + 111n + 111c = 111(m + n + p) ⋮ 111.$$

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Доведіть, що число, записане шістьма однаковими цифрами, ділиться на 3, 7, 11, 13 і 37[1, с.51].

Задача 2. Доведіть, що число $\overline{mnmnmn}$ націло ділиться на 7.

2.4.9 Задачі з дробами.

Тема «Задачі з дробами» дозволить учням навчитися розв'язувати нетипові задачі логічного характеру, використовуючи дроби. На дану тему відводиться два заняття. На них учні розглянуть деякі приклади розв'язання нетипових задача з дробами і, власне, навчаться розв'язувати логічні задачі з дробами.

<u>Заняття №1.</u>

Приклади задач з дробами, що пропонуються для демонстрації учням на факультативному занятті:

Приклад 1. У дитячому садку кількість дітей, що не люблять молочну кашу складає $\frac{1}{6}$ частину від числа дітей, що полюбляють цю кашу. Пізніше ще одна дитина перестала їсти молочну кашу. Тоді число дітей, що не люблять молочну кашу становило $\frac{1}{5}$ частину числа дітей, які люблять кашу. Скільки дітей у дитячому садку?

Розв'язання: Число дітей, що люблять молочну кашу у 6 разів більше від числа тих, що її не люблять. Звідси число дітей, що не люблять кашу становить $\frac{1}{7}$ частину усіх дітей в садку. Після того, як одна дитина теж перестала любити кашу, то діти, що не люблять кашу, складають $\frac{1}{6}$ від усіх дітей в садку. Тому одна дитина – це $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$ частина дітей у садку. Отже, у садку 42 дитини.

Приклад 2. Як від відрізу шовку довжиною $\frac{2}{3}$ метри відрізати півметра, не маючи під рукою лінійки [1, с. 56]?

Розв'язання:

1) $\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$ (м) – складаємо початковий відріз шовку навпіл і при цьому поки не розрізаємо його;
2) $\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}$ (м) – складаємо, знайдений в попередній дії відріз, знову навпіл і не розрізаємо;
3) $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ (м) – залишиться шовку, якщо відрізати $\frac{1}{6}$ частину.

Отже, спочатку треба скласти початковий відріз навпіл, потім знову навпіл і відрізати цей шматок. Після цього у нас залишиться $\frac{1}{2}$ м шовку.

Рекомендовані логічні задачі з дробами для розв'язування з учнями на даному факультативному занятті:

Задача 1. Четверо друзів купили разом велосипед. Марійка внесла половину тієї суми, що внесли інші, Іван – третину суми, що внесли інші за велосипед, Кіндрат – чверть суми, що внесли інші, а Іринка – внесла 130 грн. Скільки коштує велосипед й скільки грошей вніс кожен з друзів?

Розв'язання: Марійка внесла $\frac{1}{3}$ частину від усієї суми, Іван - $\frac{1}{4}$, а Кіндрат - $\frac{1}{5}$ частину. Разом троє друзів внесли $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$ усієї вартості велосипеда. Іринка внесла $1-\frac{47}{60}=\frac{13}{60}$ або 130 грн. Звідси вартість велосипеда становить: $130:\frac{13}{60}=600$(грн). Марійка внесла: $600\cdot\frac{1}{3}=200$ (грн), Іван: $600\cdot\frac{1}{4}=150$(грн), Кіндрат: $600\cdot\frac{1}{5}=120$ (грн).

Отже, велосипед коштує 600 грн, Марійка внесла за нього 200 грн, Іван – 150 грн, а Кіндрат – 120 грн.

Задача 2. Школярка разом із своєю бабусею принесли на ринок для продажу корзину з гарбузами. Один покупець купив половину всіх гарбузів і ще півгарбуза, другий – половину остачі і ще півгарбуза і т д. Шостий покупець, що був останнім, купив половину гарбузів, тих що залишилися і ще півгарбуза. Скільки гарбузів принесли із собою на ринок для продажу школярка зі своєю бабусею?

Розв'язання: Щоразу бабуся з онукою продавали половину гарбузів і півгарбуза, тобто залишалося на один гарбуз менше, ніж вони продавали. Шостий покупець купив 1 гарбуз, п'ятий – 2 гарбузи, четвертий – 4 гарбузи, третій – 8 гарбузів, другий – 16 гарбузів, перший – 32 гарбуза. Отже, усього було 63 гарбузи.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Мати поклала на стіл сливи і сказала трьом синам, щоб вони, повернувшись зі школи, поділили їх порівну. Першим прийшов додому Михайло і взяв собі третю частину слив. Потім повернувся Петро і взяв третю частину від тих слив, що були на столі. Потім прийшов Микола і теж взяв третю частин слив, які він побачив. Скільки слив залишила мати, якщо Микола взяв 4 сливи [1, с. 55]?

Задача 2. Батько з'їв $\frac{1}{3}$ частину всіх цукерок і ще два цукерки, мати з'їла $\frac{1}{4}$ частину всіх цукерок і ще одну цукерку, син – половину цукерок, що залишилися після батька та матері. Загалом залишилася $\frac{1}{6}$ частина від початкової кількості цукерок. Скільки цукерок було спочатку?

Заняття №2.

Рекомендовані логічні задачі з дробами для розв'язування з учнями на даному факультативному занятті:

Задача 1. На День Народження Віктора прийшло 5 друзів. Першому він відрізав $\frac{1}{6}$ частину пирога, другому - $\frac{1}{5}$ остачі, третьому - $\frac{1}{4}$ нової остачі, четвертому - $\frac{1}{3}$ того, що залишилося. Останній шматок Віктор поділив навпіл з п'ятим другом. Кому дістався найбільший шматок [1, с. 56]?

Розв'язання:

1) $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ – залишилося частин пирога після того, як його з'їв перший друг;
2) $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ – частин пирога з'їв другий друг;
3) $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$ - залишилося частин пирога після того, як його з'їв другий друг;
4) $\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ - частин пирога з'їв третій друг;
5) $\frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ - залишилося частин пирога після того, як його з'їв третій друг;
6) $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ - частин пирога з'їв четвертий друг;
7) $\frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$ - залишилося частин пирога після того, як його з'їв четвертий;
8) $\frac{2}{6} : 2 = \frac{1}{6}$ - частин пирога з'їли п'ятий друг і Віктор.

Отже, кожен з'їв $\frac{1}{6}$ частину пирога.

Задача 2. Кіт Матроскін випив $\frac{1}{6}$ чашки чаю й долив молока. Пізніше він випив $\frac{1}{3}$ частину чашки і знову долив молока. Згодом він випив повну чашку чаю з молоком. Чого кіт Матроскін випив більше: чаю чи молока?

Розв'язання: $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$ – частина чашки, що складало молоко. Чаю кіт випив теж повну чашку. Отже, чаю у молока кіт Матроскін випив порівну.

Задача 3. Одна сім'я з'їдає мішок картоплі за 14 днів, а дві сім'ї разом – за 10 днів. За скільки днів друга сім'я могла б з'їсти мішок картоплі?

Розв'язання: $\frac{1}{10}$ частину мішка з картоплею з'їдають дві сім'ї за 1 день, $\frac{1}{14}$ частину з'їдає перша сім'я за 1 день.

$\frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{1}{35}$ - частину мішка з картоплею з'їла б друга сім'я за 1 день.

Отже, друга сім'я могла б з'їсти самостійно мішок картоплі за 35 днів.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Після того, як Наталка з'їла половину персиків, у банці рівень компоту знизився на одну третину. На яку частину від нового рівня знизиться рівень компоту, якщо з'їсти половину від персиків, що залишилися [1, с. 57]?

Задача 2. Корова з'їдає відро зерна за годину, кінь – за дві години, а коза – за три години. За скільки часу вони троє з'їли б відро зерна?

2.4.10 Задачі з відсотками.

Тема «Задачі з відсотками» дозволить учням навчитися розв'язувати нетипові задачі логічного характеру з відсотками. На дану тему відводиться два заняття. На них учні розглянуть деякі приклади розв'язання нетипових задач з відсотками та навчаться розв'язувати такі задачі.

Заняття №1.

Приклади задач з відсотками, що пропонуються для демонстрації учням на факультативному занятті:

Приклад 1. Ціну на шкільні підручники спершу підвищили на 25%, п пізніше знизили на 20%. Коли ж підручники коштували дорожче: до підвищення чи після зниження ціни?

Розв'язання: Нехай підручники коштували x грн, після підвищення ціни на 25% ціна дорівнює 125% від початкової, тобто 1,25x. Ціна після зниження дорівнюватиме 100% - 20% = 80% від попередньої, тобто: $0,8 \cdot 1,25 \cdot x = x$ (грн). Отже, ціна підручників не зміниться.

Приклад 2. Фабрика збільшувала об'єм випуску продукції кожного року на одне й те ж саме число відсотків. Знайдіть це число, якщо за два роки об'єм продукції збільшився на 21% [1, с. 59].

Розв'язання: Нехай фабрика випускала x товарів, тоді через два роки вона стала випускати 1,21x товарів.

$1,21x = 1,1 \cdot 1,1 \cdot x$.

Отже, щороку фабрика випускала 110%, тобто щорічний об'єм збільшувався на 10%.

Приклад 3. На підприємстві працюють перекладачі, з них 60% володіють російською мовою, 85% - англійською і 70% - французькою. Скільки відсотків перекладачів володіють одразу трьома мовами?

Розв'язання:

1) 100% - 60% = 40% - не володіють російською мовою;
2) 100% - 85% = 15% - не володіють англійською мовою;
3) 100% - 70% = 30% - не володіють французькою мовою;
4) 40% + 15% + 30% = 85% - не володіють одночасно трьома мовами;
5) 100% - 85% = 15% - володіють одночасно трьома мовами.

Отже, 15% перекладачів володіють трьома мовами одночасно.

Рекомендовані цікаві задачі з відсотками для розв'язування з учнями на даному факультативному занятті:

Задача 1. Як зміниться ціна сукні, якщо її підвищили на 100%, а пізніше на 50% знизили?

Розв'язання: Нехай спочатку сукня коштувала x грн, тоді після підвищення ціни на 100% її ціна дорівнювала 2x грн. Після зниження ціни на 50% її ціна становила: $0,5 \cdot 2x = x$ (грн). Отже, ціна сукні не змінилася.

Задача 2. Ціна штанів піднялася на 20%. Пізніше ціна знизилася на 20%. Коли штани коштували дорожче: до підняття чи після зниження ціни?

Розв'язання: Нехай спочатку штани коштували x грн, після підняття ціни на 20% вони стали коштувати 1,2x грн. Пізніше після зниження на 20% ціна становила 80% від попередньої: $0{,}8 \cdot 1{,}2x = 0{,}96x$.

Оскільки $0{,}96x < x$, то це означає, що штани коштували дорожче до підвищення ціни.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Ціну на курси англійської мови знизили на 20%, а пізніше підняли на 25%. Як зміниться ціна курсів?

Задача 2. Заробітна платня становила 200 грн. Її підвищили на 20%, а потім знизили на 20%. Якою стала заробітна платня [1, с.59]?

Заняття №2.

Нетипові задачі з відсотками логічного характеру, що рекомендуються для розв'язання з учнями:

Задача 1. Підприємство одержало завдання знизити за два роки на 51% об'єм продукції. Кожного року потрібно знижувати цей об'єм на одне й те ж саме число відсотків. На скільки [1, с. 59]?

Розв'язання: 100% - 51% = 49% - число відсотків продукції, що буде випускати підприємство через два роки.

Нехай підприємство випускало x одиниць продукції, тоді через два роки воно випускатиме 0, 49x продукції.

$0{,}49x = 0{,}7 \cdot 0{,}7x$.

Отже, кожного року випускали 70 % продукції, а це означає, що об'єм знижували на 30%.

Задача 2. Під час випаровування з 8 кг сольового розчину, отримали 2 кг солі, що містить в собі 10% води. Знайдіть скільки відсотків води міститься у сольовому розчині?

Розв'язання:

1) $2 \cdot 10 : 100 = 0{,}2$ (кг) – маса води у сольовому розчині після випаровування;
2) $2 – 0{,}2 = 1{,}8$ (кг) – маса чистої солі;
3) $8 – 1{,}8 = 6{,}2$ (кг) – маса води;
4) $6{,}2 : 8 \cdot 100\% = 77{,}5\%$ - число відсотків води у сольовому розчині.

Отже, у сольовому розчині міститься 77,5% води.

Задача 3. 40 % від 40 % деякого числа складають 32. Знайдіть це число [1, с. 59].

Розв'язання: Нехай початкове число дорівнює x, тоді 40% від 40% від x становить $0{,}4 \cdot 0{,}4x = 0{,}16x$. Складемо рівняння: $0{,}16x = 32$, $x = 200$.

Отже, шукане число дорівнює 200.

Задача 4. Ціну на кавуни знизили на 20%, а пізніше ще раз знизили до 45%. Знайдіть на скільки відсотків знизили початкову ціну на кавуни.

Розв'язання: Нехай ціна кавунів становила x грн, після зниження ціни на 20% кавун коштував 0,8x грн, а після зниження на 45% кавун став коштувати: $0{,}45 \cdot 0{,}8x = 0{,}36x$ грн. Тобто ціна кавунів зменшилася на $x - 0{,}36x = 0{,}64x$ або на 64%.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Фірма отримала завдання зменшити об'єм виготовлення продукції за два роки на 36%, зменшуючи його щороку на однакове число відсотків. На яке число відсотків кожного року потрібно зменшувати об'єм виготовлення продукції?

Задача 2. 50% від 40% деякого числа складають 64. Знайдіть це число [1, с. 60].

2.4.11 Принцип Діріхле.

На тему «Принцип Діріхле» виділяється 3 заняття. На першому занятті рекомендується розповісти учням загальні теоретичні відомості про принцип Діріхле, показати приклади розв'язання задач та розв'язування з учнями задач на використання принципу Діріхле. На другому – розповісти про наслідок принципу Діріхле та розв'язування задач, використовуючи цей наслідок. На третьому – розв'язування різних типів задач на принцип Діріхле.

Заняття №1.

Видатний німецький математик Петер Лежен Діріхле висловив принцип, який потім назвали на його честь. Жартома він формулюється так: «Якщо п'ять зайців розсадити в чотири клітки, то принаймні в одній із них опиняться два зайці» [1, с. 67].

Більш узагальнено це твердження можна сформулювати так: якщо множина із N елементів розбита на n частин, які не мають спільних елементів, де $N > n$, то принаймні в одній частині буде більше на один елемент [1, с. 67].

Або якщо $n \cdot k + 1$ предметів розкладено по n ящиках, то принаймні в одному з них буде знаходитися не менше, ніж $k + 1$ предметів [1, с. 67].

Розглянемо деякі приклади виконання задач на застосування принципу Діріхле:

Приклад 1. На підприємстві 33 кабінети, у них працюють 1150 працівників. Чи знайдеться кабінет, у якому менше 35 працівників?

Розв'язання: Припустимо, що у всіх кабінетах не менше 35 працівників. Тоді на всьому підприємстві буде не менше, ніж $35 \cdot 33 = 1155$ працівників, що заперечує умові задачі. Отже, на підприємстві знайдеться кабінет, у якому менше, ніж 35 працівників.

Приклад 2. У ящик склали 70 кульок п'яти кольорів. Відомо, що 20 з них червоні, 20 – жовті й 20 – сині. Інші кульки чорні й білі. Скільки кульок потрібно взяти, не дивлячись, щоб можна було із упевненістю сказати, що серед них є 10 одноколірних [16, с. 152]?

Розв'язання: У найгіршому випадку для досягнення мети витягнемо 10 чорних кульок, 10 білих, 9 синіх, 9 жовтих і 9 червоних. Разом вийшло 37 кульок. Скоріш за все наступна витягнена кулька дасть нам змогу досягти поставленої мети. Отже, потрібно взяти 38 кульок.

Задачі на застосування принципу Діріхле, що пропонуються для розв'язування на даному факультативному занятті:

Задача 1. До магазину привезли 25 банок варення трьох видів. Чи можна знайти 9 банок варення одного виду?

Розв'язання: Так, оскільки 25 : 3 = 8 (ост. 1). За принципом Діріхле буде по 8 банок варення кожного виду при майже рівному розподілі, тобто 24 банки. Власне 25 банка варення утворює із одним з трьох видів 9 шукану банку.

Задача 2. У класі 40 учнів. Чи знайдеться такий місяць року, в якому свій день народження відмічають не менш, ніж 4 учні цього класу [1, с. 67].

Розв'язання: Так, використовуючи принцип Діріхле, якщо k учнів «розмістити» у n «ящиках», де n=40, k=12 (кількість місяців). Тому хоча б у одному «ящику», буде не менше, ніж 4 учні.

Задача 3. У продуктовому магазині на 5 поличках 164 консерви, причому на одній – 3 консерви. Довести, що знайдеться поличка, на якій не менше, ніж 40 консервів.

Розв'язання: Оскільки на одній поличці стоять три консерви, то якщо розставити 161 консерви на 4 полички, то на кожній з них отримаємо 161 : 4 = 40 (ост. 1). Отже, знайдеться поличка, на якій не менше, ніж 40 книжок.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. У березовому гаю росте 10000 берізок. На кожній з них не більше, ніж 9000 листочків. Доведіть, що в лісочку знайдуться дві берізки з однаковим числом листочків [16, с. 153].

Задача 2. В одному місті більше ніж вісім мільйонів мешканців. Вчені довели, що в кожної людини є менше, ніж 200000 волосин на голові. Довести, що з однаковою кількістю волосин на голові є хоча б 41 житель.

Заняття №2.

Наслідок з принципу Діріхле. Серед m чисел при діленні на n (m, n – натуральні, m > n) знайдуться хоча б два, які мають однакові остачі [1, с. 68].

Задачі, рекомендовані для розв'язування з учнями, де використовується наслідок з принципу Діріхле і сам принцип Діріхле:

Задача 1. П'ятнадцять дівчаток зібрало 100 квіточок для плетіння віночків. Доведіть, що принаймні двоє з них зібрали однакову кількість квітів.

Розв'язання: 100 : 15 = 6 (ост. 10). Отже, за принципом Діріхле принаймні 5 дівчат зібрали однакову кількість квіточок.

Задача 2. Доведіть, що серед п'яти будь-яких цілих чисел знайдеться два, остача яких від ділення на 4 однакова [1, с. 68].

Розв'язання: За наслідком з принципу Діріхле серед п'яти чисел знайдуться два, остача від ділення яких на 4 однакова.

Задача 3. Чи завжди серед будь-яких шести цілих чисел знайдуться два, різниця яких ділиться на 5 без остачі [16, с. 153].

Розв'язання: Застосовуючи наслідок з принципу Діріхле, можна стверджувати, що при діленні шести цілих чисел на 5, знайдуться хоча б два числа, що матимуть однакові остачі. Їх різниця буде ділитися на 5.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Довести, що з будь-яких 7 цілих чисел знайдуться два числа, чия остача від ділення на 6 однакова.

Задача 2. Довести, що з будь-яких 8 цілих чисел знайдуться два числа, чия різниця ділиться на 7.

<u>Заняття №3.</u>

Інколи буває корисним ще таке формулювання принципу Діріхле: якщо одне з кількох чисел більше від їх середнього арифметичного, то серед цих чисел знайдеться інше, що є меншим від їх середнього арифметичного [1, с. 68].

Розглянемо приклад розв'язування задачі, де можна скористатися цим формулюванням методу Діріхле:

Приклад 1. У бригаді 7 осіб, їх сумарний вік складає 322 роки. Доведіть, що з них можна вибрати трьох осіб, сумарний вік яких не менший за 138 років [1, с.68].

Розв'язання: Знайдемо середній вік членів бригади: 322 : 7 = 46 (років). Отже, сумарний вік найстарших трьох людей дорівнює не менше $3 \cdot 46 = 138$ років.

Різні типи задач на тему «Принцип Діріхле», що рекомендовані для розв'язування на факультативному занятті:

Задача 1. У шухляді лежать кульки трьох різних кольорів: червоного, зеленого і жовтого. Яке найменше число кульок потрібно вийняти з шухляди наосліп так, щоб серед них напевне виявилися дві кульки одного кольору [16, с. 153]?

Розв'язання: У найгіршому випадку потрібно витягнути чотири кульки. Таким чином, серед перших трьох кульок ми витягнемо червону, зелену і жовту, а четвертою буде кулька одного з трьох кольорів.

Задача 2. У спортивній школі плаванням займаються 37 дітей. Довести, що знайдуться четверо дітей, що народилися в один і той самий місяць.

Розв'язання: Нехай у кожному місяці народилося не більш як троє дітей, що займаються плаванням. Слідуючи цій думці, плавців може бути не більше, ніж 12 · 3 = 36, але умова нам каже, що їх 37. Отже, серед дітей, що займаються плаванням знайдуться четверо, що народилися в один і той самий місяць.

Задача 3. За круглим столом сидять 30 однокласників, причому більше половини з них – дівчата. Доведіть, що якісь дві дівчинки сидять одна проти одної [16, с.153].

Розв'язання: Потрібно розбити всіх однокласників на 15 пар таким чином, щоб у кожній парі діти сиділи один навпроти одного. Якщо по кількості більше половини учнів – дівчата, то обов'язково знайдуться дві дівчинки, що сидять одна проти одної.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Баскетбольна команда складається з п'яти осіб, їх сумарний вік дорівнює 165 років. Довести, що у команді є три особи, сумарний вік яких дорівнюватиме 99 років.

Задача 2. 60 ельфів сидять за круглим столом, причому більше половини з них – лісові ельфи, інші – гірські. Доведіть, що деякі два лісові ельфи сидять навпроти один одного [1, с.69].

2.4.12 Задачі на відновлення.

На факультативному курсі «Логічні кроки» передбачено 3 заняття на тему «Задачі на відновлення». На першому занятті рекомендовано показати учням деякі приклади розв'язання задач на відновлення, а також розв'язування задач, де використовуються основні арифметичні операції. На другому та третьому занятті рекомендовано розв'язування ребусів.

<u>Заняття №1.</u>

Приклади на відновлення різноманітних арифметичних операцій, що рекомендується для демонстрації учням:

Приклад 1. Відновити цифри:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 7 & 8 & 5 \\
 & & \times & * & * & * \\
\hline
 & & & * & * & * \\
+ & 1 & * & * & * & \\
 & * & * & * & & \\
\hline
 & * & * & * & * & *
\end{array}
$$

Розв'язання: Тризначне число отримаємо тільки при множенні 785 на 1, а при множенні на 2 чотиризначне. Отже, другий множник – 121.

Приклад 2. Відновіть цифри:

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
- & * & * & * & * & * & \\
\cline{5-7}
 & * & * & * & * & 8 & * \\
\cline{2-4}
 & & * & * & * & & \\
- & & & * & * & & \\
\cline{3-5}
 & & & * & * & * & \\
- & & & * & * & * & \\
\cline{4-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Розв'язання: Якщо дільник помножити на 8, то одержимо двозначне число. Отже, найбільший можливий дільник – 12, оскільки 13 · 8 = 104 трицифрове число. При множенні дільника на першу чи останню цифру частки (що є більшою за 8) отримаємо тризначне число, а раніше ми визначилися, що дільник дорівнює 12.

Отже, 12 · 989 = 11868. І приклад має такий вигляд: 11868 : 12 = 989.

Задачі на відновлення, що рекомендуються для розв'язання з учнями на занятті:

Задача 1. Відновити цифри:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & * & * & 7 \\
 & & \times & 3 & * & * \\
\hline
 & & * & 0 & * & 3 \\
+ & & * & 1 & * & \\
 & * & 5 & * & & \\
\hline
 & * & 7 & * & * & 3
\end{array}
$$

Розв'язання:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 1 & 1 & 7 \\
 & & \times & 3 & 1 & 9 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 5 & 3 \\
+ & & 1 & 1 & 7 & \\
 & 3 & 5 & 1 & & \\
\hline
 & 3 & 7 & 3 & 2 & 3
\end{array}
$$

Задача 2. Замініть зірочки цифрами від 1 до 9. Кожна цифра використовується двічі [16, с. 99].

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
 & & * & * & * \\
\hline
 & \times & * & * & * \\
\hline
 & & * & * & * \\
\hline
+ & * & * & * & \\
\hline
* & * & * & & \\
\hline
* & * & * & * & * \\
\hline
\end{array}
$$

Розв'язання:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 1 & 7 & 9 \\
 & & \times & 2 & 2 & 4 \\
\hline
 & & & 7 & 1 & 6 \\
+ & & 3 & 5 & 8 & \\
 & 3 & 5 & 8 & & \\
\hline
 & 4 & 0 & 0 & 9 & 6
\end{array}
$$

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Відновити цифри:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 5 & 9 \\
 & & \times & * & * & * \\
\cline{3-6}
 & & & * & * & * \\
+ & & * & * & * & \\
 & 3 & * & * & & \\
\hline
 & * & * & * & 2 & 9
\end{array}
$$

Задача 2. Замініть зірочки цифрами від 1 до 9. Кожна цифра використовується тільки один раз [16, с. 99].

Заняття №2.

Логічні задачі з математичними ребусами, що рекомендуються для розв'язання:

Задача 1. Сім дев'яток виписали підряд: 9 9 9 9 9 9 9. Поставте між деякими з них знаки «+» або «-», щоб отриманий вираз дорівнював 1989 [16, с. 99].

Розв'язання: 999 + 999 – 9 = 1989.

Задача 2. Розв'яжіть ребус: CD · KD = 2001. Зауважте, що однаковим літерам відповідають однакові цифри, а різним – різні.

Розв'язання: Насамперед потрібно розкласти число 2001 на множники. Отримаємо: 2001 = 3 · 23 · 29. Дивлячись на цей розклад, можна стверджувати, що у вигляді двоцифрових чисел число 2001 можна розкласти тільки двома способами: 69 · 29 або 23 · 87. В даному випадку підійде тільки перший варіант.

Отже, CD = 29, KD = 69 або, навпаки, CD = 69, KD = 29.

Задача 3. Розв'яжіть ребус: CD · BB · K = 2002. Зауважте, що однаковим літерам відповідають однакові цифри, а різним – різні.

Розв'язання: Насамперед потрібно розкласти число 2002 на множники. Отримаємо: 2002 = 13 · 11 · 7 · 2. В даному випадку підійде тільки такий варіант: 91 · 11 · 7 = 2002.

Задача 4. Дане трицифрове число ABB. Добуток цифр цього числа – двоцифрове число AC, а добуток чисел цього числа дорівнює C. Визначте число ABB. Зауважте, що однаковим літерам відповідають однакові цифри, а різним – різні.

Розв'язання: Якщо A · C = C, то A = 1. Маємо: 1 · B · B = 10A + C; B · B = =10 + C. Дане рівняння має єдиний розв'язок: B = 4, C = 6. Отже, число ABB=144.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Розв'яжіть ребус: CDK · CD · C = 2002. Зауважте, що однаковим літерам відповідають однакові цифри, а різним – різні.

Задача 2. Розв'яжіть поданий числовий ребус: XXX – XX – X = ZZ. Зауважте, що однаковим літерам відповідають однакові цифри, а різним – різні.

Заняття №3.

Задачі на розв’язування математичних ребусів, що пропоновані для розв’язування з учнями:

Задача 1. Якій цифрі відповідає квадрат (рис. 2.4.12.1)? Зауважте, що однаковим фігурам відповідають однакові цифри, а різним – різні.

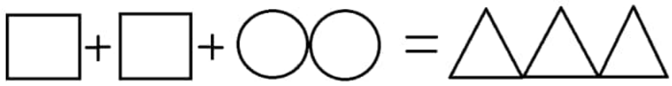


Рис. 2.4.12.1 Рисунок до задачі 1.

Розв’язання: Максимальна сума трьох доданків дорівнюватиме 9 + 9 + 99= = 117. Отже, три трикутники дорівнюють 111. Мінімальне значення двох кругів дорівнюватиме 111 – 9 – 9 =93, а саме число дорівнює 99. Квадрат замінює число: 6 : (111 – 99) : 2 = 6.

Задача 2. У рівності 1 * 2 * 4 * 8 * 16 * 32 * 64 = 27 потрібно поставити знаки «+» чи «-» замість зірочок так, щоб вона стала вірною.

Розв’язання: Найкраще робити заміну справа наліво. Так як 1 + 2 + 4 + 8 + + 16 + 32 = 63 < 64, тому перед 64 покладемо «+». Перед числом 32 поставимо «-», щоб зліва не вийшло занадто великого числа. Продовжуючи таку схему, отримаємо таку рівність: 1 – 2 + 4 + 8 – 16 – 32 + 64 = 27.

Задача 3. Розв’яжіть ребуси:

1) SEND + MORE = MONEY;
2) SEVEN + SEVEN + SIX = TWENTY;
3) ALFA + BETA + GAMA = DELTA;
4) ABCD · D = DCBA;
5) ABCD · E = DCBA.

Зауважте, що однаковим літерам відповідають однакові цифри, а різним – різні.

Розв’язання:

1) 9567 + 1085 = 10652;
2) 68782 + 68782 + 650 = 138214;
3) 5795 + 6435 + 2505 = 14735;
4) 1089 · 9 = 9801;
5) 2178 · 4 = 8712.

Задачі для домашнього виконання:

Задача 1. Замініть букви цифрами так, щоб отримати систему вірних рівностей:

1) RE + MI = FA;
2) DO + SI = MI;
3) LA + SI = SOL [16, с. 102].

Задача 2. Сашко не помітив знака множення між двома трицифровими числами й написав одне шестицифрове число, отримавши при цьому утричі більший результат. Знайдіть це шестицифрове число [16, с.102].

2.4.13 Підсумковий урок.

На підсумковому уроці учні повинні розв'язати 6 задач по вивченому факультативному курсу:

Задача 1. Граючись, кожна з трьох подруг – Катруся, Галинка і Настуся – опустили в чарівний мішок одну з іграшок: ведмедика, зайчика і слоненя. Відомо, що Катруся не ховала зайчика. Настуся не ховала ні зайчика, ні ведмедика. Хто яку іграшку заховав [23, с. 211]?

Задача 2. У трицифровому числі $\overline{ABB}$ добуток цифр дорівнює двоцифровому числу $\overline{AC}$, добуток цифр якого дорівнює С. Знайдіть задане трицифрове число [22, с. 132].

Задача 3. У Петрика є 4 монет по 1, 2, 3, 5 копійок. Їхня вага співпадає з номером відповідно. Відомо, що серед цих чотирьох монет є одна бракована. За яким найменшим числом зважувань на шалькових терезах без гир можна визначити фальшиву монету?

Задача 4. 15 їжаків назбирали на свої голки 100 шишок. Довести, що принаймні два їжака зібрали однакову кількість шишок.

Задача 5. У всіх подруг Маринки є домашні улюбленці. Шестеро з них мають кішок, а п'ятеро – собак. І тільки у двох подруг є одночасно котик і собака. Скільки у Маринки є подруг?

Задача 6. У каністрі міститься не менше, як 10 л води. Яким чином можна відлити з неї 6 літрів, маючи 9-ти літрове відро і 5-ти літрову банку?

Розділ 3. Організація та методика проведення факультативного курсу «Логічні кроки».

Факультативи з математики не є формою позакласної діяльності. Факультативи є однією з форм диференційованого навчання математики, метою якої є поглиблення і розширення знань учнів, розвиток їх математичних здібностей і стійкого інтересу до математики.

Факультативний курс «Логічні кроки» передбачений для тих учнів, які мають хорошу підготовку з математики. Проте, інколи їх можуть відвідувати і ті учні, що ще не досягли високого рівня, але мають потенціал для цього. Доцільно займатися на факультативах і гуртках, вирішуючи цікаві завдання на звичайних уроках і вирішуючи завдання, що вимагають розширення знань і навичок. Учням пропонується розширити їх на факультативних заняттях.

Різниця між факультативами і гуртками полягає, перш за все, в тому, що гуртки припускають наявність у школярів початкового інтересу до математики, який вони повинні розвивати, а умови факультативів - стійкий інтерес.

Вибір завдань дуже важливий для успішного засвоєння матеріалу. Початкові завдання на факультативних заняттях спрямовані на залучення учнів в самостійну творчу роботу, іноді викладач може свідомо видати завдання, яке може заплутати учнів. Також необхідно забезпечити в необхідних місцях виклад проблемних завдань, циклів для самостійного рішення, завдань для закріплення і формування навичок, завдань для дослідження. Час, відведений програмою на рішення задач підвищеної складності, можна розподіляти протягом навчального року. Доцільне використання наочних і технічних засобів навчання на факультативних заняттях. При вивченні деяких тем можна скористатися діафільмами.

Більшу частину матеріалу факультативного курсу в програмі необхідно подавати учням на заняттях і мінімізувати домашнє завдання. Створення завдань, що вимагають багато часу, не є обов'язковим для всіх учнів факультативу, але їх виконання повинно бути повністю схвалено.

Система оцінювання має бути досить гнучкою, не копіювати практики оцінювання в обов’язковому курсі. Заохочуючи учнів, які працюють у факультативі, в жодному разі не можна залякувати їх негативними оцінками і відштовхувати від роботи, яку вони вибрали за власним бажанням [21, с. 103].

Заняття на факультативі повинні бути цікавими, захоплюючими для учнів. Допитливість допоможе школярам засвоїти факультативний курс, ідеї та методи математичної науки, логіку і прийоми творчої діяльності. У зв'язку з цим мета викладача - дати учням зрозуміти, що вони готові працювати над складними завданнями.

Висновки

У сучасному світі математика широко застосовується у всіх сферах життєдіяльності людини, тому важливо забезпечити відповідний рівень математичної підготовки підростаючого покоління. Для здійснення цієї мети, дуже актуальним завданням є впровадження різноманітних факультативних курсів. Це поступово сформує у дітей логічне та критичне мислення, вміння використовувати знання математичного спрямування під час вирішення нестандартних задач та прийнятті рішень у повсякденному житті.

Факультативні курси є важливою складовою списку предметів як у середній школі, так і для допрофесійної підготовки. Вони мають велике значення в забезпеченні навчання, орієнтованого на людину, і створенні власної освітньої траєкторії учня.

Оскільки математична логіка займає важливе місце в сучасній математичній науці та широко застосовується у різних галузях наукових досліджень, а також успішно використовується в лінгвістиці, кібернетиці, психології та ін., то дуже актуальним є впровадження факультативних курсів для учнів саме у цьому напрямку. Саме тому ідеєю цієї роботи було розроблення факультативного курсу, що має назву «Логічні кроки». Варіативна складова навчальної програми якого, сприятиме досягненню поставлених цілей: розвитку логічного мислення, пам'яті, уяви, вміння аналізувати, робити висновки, отримувати результати з передумов даних шляхом послідовного розгляду і т. д.

Навчальна програма курсу складається з таких тем: «Задачі на кмітливість», «Закономірності», «Задачі із сірниками», «Задачі на зважування», «Задачі на переливання», «Задачі на відновлення», «Множина. Круги Ейлера», «Задачі з дробами», «Задачі з відсотками», «Принцип Діріхле», «Подільність чисел», «Магічні квадрати». Розробка запропонованих тем сприяє не тільки інтересу до математики, а й формуванню в учнів просторової уяви, здатності до аналізу і вміння доводити свою думку, дослідницької діяльності, спонукає учнів до більш глибокого і всебічного вивчення математики.

Навчання логіки сприяє становленню моральних якостей особостистості: наполегливості, цілеспрямованості, творчої активності й самостійності, відповідальності й старанності, дисципліні і критичному мисленні, здібності аргументовано відстоювати свої погляди й переконання. Вивчення логіки потребує від учнів розумових і вольових зусиль, концентрації уваги, актовності й систематичності, розвинутої уяви.

Результатом цієї роботи є:

- загальні пояснення для чого потрібні факультативні курси і їхня роль у становленні особистості учнів;
- пояснення важливості математичної логіки;

- розробка факультативного курсу «Логічні кроки»: навчальна програма курсу, розподіл навчального часу, орієнтовне календарне планування; практичні матеріали та методичні рекомендації (теоретичні матеріали, диференційовані задачі до кожного заняття для класного і домашнього виконання);
- рекомендації щодо викладання факультативного курсу «Логічні кроки».

Розроблений факультативний курс «Логічні кроки» може використовуватися педагогами для учнів 5 – 6 класів.

Список використаної літератури

1. Поліщук О. Р., Чайчук О. Р. Математична логіка. 5–6 класи. – Х. : Вид. група «Основа»: «Тріада +», 2007. - 112 с.
2. Апостолова Г. В., Бакал О. П. Розв’язуємо задачі логічного характеру: Навч. посібн.- Біла Церква: КОІПОПК, 2010.- 160 с.
3. Буковська О. І. Математична логіка. 5–9 класи.- Х.: Вид. група «Основа», 2005.- 176 с.
4. Лоповок Л. М. Збірник математичних задач логічного характеру.- К.: Рад. шк., 1972.- 142 с.
5. Харік О. Ю. Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 5–7.- Х.: Вид. група «Основа», 2008.- 143 с.
6. Буковська О. І., Васильєва Д. В. Академія логіки. Навчально-методичний посібник. 5 клас.- Харків: ФОП Співак В. Л., 2010.- 224 с.
7. Буковська О. І., Васильєва Д. В. Академія логіки. Навчально-методичний посібник. 6 клас.- Харків: ФОП Співак В. Л., 2010.- 224 с.
8. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. І. Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна.— Х.: Вид-во «Ранок», 2011.— 320 с.
9. Логіка 5-11 класи /Н. Василенко. – Харків: Видавнича група «Основа», 2011. – 256 с. – Серія «Логіка».
10. Чуманська С. О. Роль факультативних занять та курсів за вибором у формуванні інтересу до знань з математики та здійсненні соціалізації учнів /С. О. Чуманська // Таврійський вісик освіти. – 2015. - № 4. – с. 212.
11. Бородін А. І. Із історії арифметики. – К.: Вища школа, 1986. – 95 с.
12. Факультативні заняття – методика організації [Електронний ресурс]: Режим доступу: http://www.pedahohikam.net/nervs-921-1.html
13. Факультативні заняття та його аналіз [Електронний ресурс]: Режим доступу: https://osvita.ua/school/method/technol/726/
14. Орендарчук Г.О. Логіка. – Видання друге, перероблене і доповнене. – Тернопіль: Астон, 2008. – 272 с.
15. Середа В. Ю. Математическая логика в школьном курсе математики: Пособие для самообразования учителей. К.: Рад. шк., 1984. – 144с.
16. Горішки для розуму. Логіка. Збірник задач. 5-9 класи. / Укл. Геращенко В.О. – Х.: Торсінг плюс, 2010. – 384 с.
17. Закономірності [Електронний ресурс]: Режим доступу: https://playcoolmath.com/uk/math-lessons/math-for-kids/basic-math-concepts/patterns

18. Зважування (5 клас) [Електронний ресурс]: Режим доступу: https://shahistua.wixsite.com/site/post/2018/11/30/%D0%B7%D0%B2%D0%B0%D0%B6%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F
19. Задачі на переливання та зважування [Електронний ресурс]: Режим доступу: https://www.uzhnu.edu.ua/en/infocentre/get/30235
20. Кривоносова Т. Р. Розв’язування задач логічного характеру з використанням кругів Ейлера:[Навчально-методичний посібник для вчителів та учнів] / М.В. Ткачук. – Кривий Ріг : КЦМГ, 2017. – с. 44
21. Саркисян Е. А. Внеклассные и факультативные занятия в современной общеобразовательной школе. – Ереван: ЛУНС, 1987. – 196 с.
22. Математичні гуртки для тих, кому 10+ : навч. посіб. / А. Г. Мерзляк, М. С. Якір, А. М. Басанько. – Х. : Гімназія, 2021. – 272 с. : іл.
23. В Країні міркувань: Посібн. з розвитку логічного і творчого мислення для 1-4 кл. / О. Гісь. – Вид. 4-те. – Львів: Світ, 2008. – 272 с. + 46 с. вкладки.

Додаток А

Розподіл навчального часу

Усього факультативний курс має 34 години, І семестр – 17 год, ІІ семестр – 17 год).

№	Тема	Кількість годин
1	Вступ. Розв’язування найпростіших задач логічного характеру. Задачі на складання таблиць істинності.	2
2	Закономірності.	2
3	Задачі із сірниками.	3
4	Задачі на зважування.	2
5	Задачі на переливання.	2
6	Магічні квадрати.	2
7	Множини. Круги Ейлера.	4
8	Подільність чисел.	3
9	Задачі з дробами.	2
10	Задачі з відсотками.	2
11	Принцип Діріхле.	3
12	Задачі на відновлення.	3
13	Повторення, систематизація й узагальнення вивченого за рік.	4

Додаток Б

Зміст навчального матеріалу та вимоги до навчальних досягнень учнів

Кількість годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
2	**Тема 1.** ***Вступ. Розв’язування найпростіших задач логічного характеру. Задачі на складання таблиць істинності.*** Ознайомлення учнів із загальними поняттями логіки. Ознайомлення школярів із найпростішими задачами логічного характеру. Задачі на кмітливість. Задачі – жарти. Задачі – загадки. Задачі на складання таблиць істинності.	Учні: - наводять приклади задач логічного характеру; - розв’язують найпростіші логічні задачі; - зможуть навести приклади задач на кмітливість, задач – жартів, задач – загадок; - розв’язують логічні задачі на складання таблиць істинності.
2	**Тема 2.** ***Закономірності.*** Ознайомлення учнів із задачами, у яких застосовуються різного роду закономірності. Задачі «Знайди закономірність».	Учні: - дізнаються, що таке закономірності та яких видів вони бувають (зростаючі, спадаючі та циклічні); - вмітимуть розв’язувати задачі «Знайди закономірність» та будуть розуміти, у якому напрямку міркувати.
3	**Тема 3.** ***Задачі із сірниками.*** Задачі на складання геометричних фігур. Задачі на вилучення сірників. Задачі на перекладання сірників. Задачі «Арифметичні каламбури».	Учні: - умітимуть пояснити, що таке задачі із сірниками та навести приклади різних типів таких задач; - розв’язуватимуть задачі із сірниками різного типу.
2	**Тема 4.** ***Задачі на зважування.*** Задачі на визначення фальшивих монет. Задачі з обмеженою кількістю	Учні: - будуть мати розуміння, що таке задачі на зважування;

	зважувань. Задачі на визначення числа зважувань.	- вмітимуть навести приклади різних типів задач на зважування, а також їх розв’язати.
2	**Тема 5.** ***Задачі на переливання.*** Задача Пуассона. Задачі на використання двох посудин сталого об’єму та необмеженої кількості рідини. Задачі на використання двох посудин та обмеженої кількості рідини. Задачі на використання трьох посудин. Складання таблиць до задач.	Учні: - матимуть розуміння, що таке задачі на переливання; - вмітимуть навести приклади різних типів задач на переливання; - розв’язуватимуть різного типу задачі, складаючи до них таблиці та використовуючи різні методи (з початку, з кінця, добором варіантів або методом проб).
2	**Тема 6.** ***Магічні квадрати.*** Задачі на побудову магічних квадратів різного порядку.	Учні: - будуть мати розуміння, що таке магічний квадрат; - вмітимуть будувати різні види магічних квадратів різними способами.
4	**Тема 7.** ***Множини. Круги Ейлера.*** Множина. Елементи множин. Співвідношення між множинами. Види множин. Круги Ейлера. Об’єднання та переріз множин. Розв’язування задач.	Учні: - будуть розуміти поняття множини та її елементів; - можуть навести приклад співвідношення між множинами за допомогою кругів Ейлера; - розв’язуватимуть логічні задачі з використанням кругів Ейлера.
3	**Тема 8.** ***Подільність чисел.*** Ознаки подільності чисел. Приклади виконання задач логічного характеру на подільність чисел. Розв’язування задач на подільність.	Учні: - зможуть навести приклад різних типів задач на подільність чисел; - знатимуть різні ознаки подільності чисел;

		- вмітимуть розв'язати задачу, використавши для цього найбільш раціональний спосіб.
2	**Тема 9.** ***Задачі з дробами.*** Нестандартні задачі з дробами.	Учні: - зможуть навести приклади нетипових задач з дробами; - розв'язуватимуть нетипові задачі з дробами.
2	**Тема 10.** ***Задачі з відсотками.*** Цікаві задачі з відсотками. Нестандартні задачі з відсотками.	Учні: - зможуть навести приклад цікавих та водночас нестандартних задач з відсотками; - матимуть розуміння, як розв'язувати задачі такого типу; - будуть вміти розв'язати нестандартні задачі з відсотками.
3	**Тема 11.** ***Принцип Діріхле.*** Формулювання принципу Діріхле. Застосування принципу Діріхле до розв'язування алгебраїчних та геометричних задач. Розв'язування задач на принцип Діріхле.	Учні: - зможуть сформулювати загальний принцип Діріхле; - наведуть приклад задач на застосування принципу Діріхле; - вмітимуть застосувати принцип Діріхле до задач алгебраїчних та геометричних.
3	**Тема 12.** ***Задачі на відновлення.*** Задачі на відновлення, де використовуються основні арифметичні операції. Ребуси.	Учні: - вмітимуть пояснити та навести приклади задач на відновлення; - будуть знати методику розв'язання задач на відновлення; - розв'язуватимуть задачі на відновлення.
4	**Повторення, узагальнення й систематизація вивчених знань.**	

Додаток В

Орієнтовне календарно – тематичне планування

Номер заняття	Дата	Тема, зміст заняття
І семестр *(17 год)* **Тема 1.** ***Вступ. Розв'язування найпростіших задач логічного характеру*** (*2 год)*		
1		Вступ. Приклади розв'язування найпростіших задач логічного характеру. Розв'язування задач – жартів, задач на кмітливість та задач - загадок.
2		Розв'язування задач на складання таблиць істинності.
Тема 2. ***Закономірності*** *(2 год)*		
3		Поняття закономірностей. Розв'язування задач «Знайди закономірність».
4		Розв'язування задач «Знайди закономірність».
Тема 3. ***Задачі із сірниками*** *(3 год)*		
5		Приклади розв'язування задач із сірниками. Розв'язування найпростіших задач на перекладання та вилучення сірників.
6		Розв'язування задач на перекладання сірників.
7		Розв'язування задач на вилучення сірників. Задачі «Арифметичні каламбури».
Тема 4. ***Задачі на зважування*** *(2 год)*		
8		Приклади розв'язування задач на зважування. Розв'язування задач на визначення фальшивої монети.
9		Розв'язування задач на обмежене число зважувань. Розв'язування задач на визначення кількості зважувань.
Тема 5. ***Задачі на переливання*** *(2 год)*		
10		Задача Пуассона. Приклади розв'язування різних типів задач на переливання. Розв'язування найпростіший задач на переливання. Складання таблиць до задач.
11		Задачі на використання двох посудин сталого об'єму та необмеженої чи обмеженої кількості рідини. Задачі на використання трьох посудин.
Тема 6. ***Магічні квадрати*** *(2 год)*		

12		Приклади розв'язування задач на побудову магічних квадратів. Розв'язування логічних задач на побудову магічних квадратів.
13		Розв'язування логічних задач на побудову магічних квадратів.
Тема 7. ***Множини. Круги Ейлера*** *(4 год)*		
14		Множина. Елементи множин. Види множин.
15		Об'єднання та переріз множин. Приклади розв'язування задач.
16		Круги Ейлера. Співвідношення між множинами. Приклади розв'язування задач з використанням кругів Ейлера. Розв'язування найпростіших задач.
17		Розв'язування задач з використанням кругів Ейлера.
II семестр ***(18 год)*** **Тема 8.** ***Подільність чисел*** *(3 год)*		
18		Ознаки подільності чисел.
19		Приклади розв'язування задач логічного характеру на подільність чисел. Розв'язування задач на подільність.
20		Розв'язування задач на подільність.
Тема 9. ***Задачі з дробами*** *(2 год)*		
21		Приклади розв'язання нестандартних задач з дробами. Розв'язування нестандартних задач з дробами.
22		Розв'язування нестандартних задач з дробами.
Тема 10. ***Задачі з відсотками*** *(2 год)*		
23		Приклади розв'язання нетипових задач з відсотками. Розв'язування цікавих задач з відсотками.
24		Розв'язування нестандартних задач з відсотками.
Тема 11. ***Принцип Діріхле (3 год)***		
25		Формулювання принципу Діріхле. Приклади розв'язання задач на принцип Діріхле. Розв'язування найпростіших задач на принцип Діріхле.
26		Наслідок з принципу Діріхле. Розв'язування задач, використовуючи наслідок з принипу Діріхле.
27		Розв'язування різних типів задач на принцип Діріхле.
Тема 12. ***Задачі на відновлення*** *(3 год)*		
28		Приклади розв'язання задач на відновлення. Розв'язання задач на відновлення, де використовуються основні арифметичні операції.

29		Розв’язування ребусів.
30		Розв’язування ребусів.
Повторення, узагальнення й систематизація вивчених знань. *(4 год)*		
31		Розв’язування задач.
32		Розв’язування задач.
33		Розв’язування задач.
34		Підсумкова атестація.