Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет ім. Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра алгебри, топології та основ математики

Магістерська робота

Використання властивостей квадратичної функції при розв’язуванні задач з параметрами.

студ. групи Мто-61
Федишин Т.Й.
Науковий консультант
доц. Холявка Я.М.

Львів 2021

Зміст:

1.Вступ

Задачі з параметрами-це один із найбільш важливих розділів елементарної математики. Мета цих задач полягала у знаходженні лінійних рівнянь відносно однієї змінної виду: y + ay + by + cy + … =d, де

$$y = \frac{d}{1 + a+b+c+\cdots}$$

Саме після цього розпочалась історія такої науки, як алгебра. Від тоді ця наука відкрилась,як наука про розв'язування рівнянь. Першим зразком математичної теорії були Вавілонські задачі на квадратні рівняння. На той час людство не мало відповідних знань і вмінь застосовувати математичні позначки. Люди словами сформульовували методи, які давали можливість вирахувати число, яке називається корінь рівняння. Вперше на арабській мові була написана книга про розв'язування рівнянь, яку написав ал-Хорезмі. Перехід з словесної алгебри до символічної відбувся лише в кінці XV ст. Великий вклад у створенні алгебраїчної символіки вніс французький математик Франсуа Вієт. В кінці XVII століття виникли ускладнення в математичних задачах стосовно визначення показника степеня, і тільки тоді почали вивчати функцію $y = e^x$.

Одним із найцікавіших і в той же час складних розділів математики є задачі з параметрами. Часто при дослідженнях фізичних процесів зводиться до розв'язування завдань з параметрами. З цим видом задач вже кілька років зустрічались вступники на вступних іспитах з математики у більшості вузів. Після введення в нашій країні ЗНО,задачі з параметрами стали набувати більшого значення ніж до цього. Відповідно після змін в освіті, особливо з математики ,почали вивчати більш поглиблено цю тему.

З результатів зовнішнього оцінювання можна зробити висновок,що не всім дітям під силу розв'язати дані задачі. Це зумовлено тим, що у школах недостатньо часу виділяють задачам з параметрами. Але для розв'язування задач з параметрами, знань які учні отримали під час вивчення таких задач у школах буде достатньо. Звісно,щоб розв'язати ці задачі, потрібно вміти розв'язувати нерівності, системи, рівняння та мати поглиблені знання властивостей функцій.

Для дітей буде нескладно розв'язати будь-яке інше рівняння і задачу, якщо вони навчились вже розв'язувати рівняння з параметром. Тому, що рівняння з параметром охоплюють багато рівнянь і задач. В залежності від значень нашого параметра необхідно розглянути всі випадки.

Отже, є три основних способи розв'язування задач цього типу.

Перший спосіб, це - графічний. В залежності від завдання розглядають (х,у) в координатній площині ,графіки чи в координатній площині (х,в).

Перший спосіб настільки захоплює своєю красою при розв'язуванні задач з параметрами, що інколи при розв'язуванні ігнорують інші способи. Переважно для розв'язування задач будь-якого типу можуть бути різні умови які легко вирішуються цим способом, і з великими труднощами іншими способами.

Другий спосіб, це - аналітичний. При цьому способі повторюються звичні процедури знаходження розв'язку задач без параметра. Цей спосіб вважається найважчим, оскільки вимагає зусиль та високої грамотності з його опануванням.

Третій спосіб, це – графічно-аналітичний. Цей спосіб часто спрощує розв'язання поєднання аналітичного розв'язання з графічними інтерпретаціями.

2.Теоретична частина.

Розглядаючи рівняння або нерівності у яких коефіцієнти задані не конкретними значеннями, тобто позначені літерами, то ці значення називаємо параметрами. Відповідно рівняння або нерівність називається параметричним.

Зазвичай параметри позначаються літерами латинського алфавіту.

Якщо рівняння мають однакові розв'язки, то ці рівняння називаються рівносильними.

Ознаки рівносильного рівняння:

- розв'язок другого рівняння є розв'язком першого або розв'язок першого є розв'язком другого.
- два рівняння при однакових значеннях параметра мають сенс.

Основними випадками при розв'язуванні задач з параметрами з використанням квадратичної функції є:

- D<0, a>0 ;
- D=0, a>0 ;
- D>0, a>0 ;
- D<0, a<0 ;
- D=0, a<0 ;
- D>0, a>0 .

1) Розміщення на числовій осі коренів квадратного тричлена.

Щоб розв'язати задачі з параметрами потрібно знати властивості квадратичної функції.

Отже, дано квадратне рівняння:

$ax^2 + bx + c = 0,$ де $f(y) = ax^2 + bx + c$ – квадратична функція.

Позначення:

f(n) – значення функції в точці $x = n$;

a, b, c – коефіцієнти квадратної функції;

D = $b^2 - 4ac$ –дискримінант;

$x_1 x_2$ – корені рівняння;

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases}$ теорема Вієта.

Ми можемо проаналізувати корені квадратного рівняння (комплексні чи дійсні)за допомогою знака дискримінанта. Для цих задач потрібно ще дізнатись, як будуть розміщені корені квадратного тричлена на числовій осі.

Для цього розглянемо деякі теореми:

Теорема 1.

Корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c$ з дійсними коефіцієнтами, завжди дійсні і менші числа m, якщо:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ a(an^2 + n + c) > 0 \\ n > -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Теорема 2.

Корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c$ з дійсними коефіцієнтами, завжди дійсні та більші за число n якщо:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ a(ax^2 + bx + c) > 0 \\ x < -\frac{b}{2a} \end{cases} \qquad (1)$$

З цієї теореми можемо сказати, що наш графік дотикається до осі x або перетинає цю вісь.

Розглянемо чотири різних варіанти розміщень параболи y = f(x), стосовно точки n та осі Ox.

Варіант 1.

$$\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \\ an^2 + bn + c > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > n \end{cases}$$

Варіант 2.

$$\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \\ an^2 + bn + c < 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > n \end{cases}$$

Варіант 3.

$$\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \\ an^2 + bn + c < 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > n \end{cases}$$

Варіант 4.

$$\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \\ an^2 + bn + c > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > n \end{cases}$$

Отже, ми розглянули всі варіанти розміщення параболи. Систему(1) ми можемо отримати,як об'єднати всі частини в один.

Ці корені задовольняють, коли:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ af(n) > 0 \\ af(m) > 0 \\ n < x_0 < m \end{cases}$$

Теорема 3.

Щоб число q знаходилось між дійсними коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c$, потрібно щоб виконувалась наступна умова:

$$a(ax^2 + bx + c) < 0$$

Також існують випадки:

- всередині проміжку між нашими коренями, знаходиться проміжок $(n;m)\begin{cases} af(n) < 0 \\ af(m) < 0 \end{cases}$;
- Проміжку $(n;m\ )$ належить тільки більший корінь рівняння $\begin{cases} af(n) < 0 \\ af(m) > 0. \end{cases}$
- Один корінь другого рівняння j(x) знаходиться між двома коренями одного рівняння *f(x)*: j$(x_1)\ \cdot j(x_2) < 0$, де x_1 та x_2 – корені тричлена *f(x).*
- проміжку $(p;n)$ належить тільки менший корінь рівняння $\begin{cases} af(p) > 0 \\ af(n) < 0. \end{cases}$

Теорема 4.

Два корені з дійсними коефіцієнтами квадратного рівняння містяться в інтервалі $(n;m)$, якщо:

$$\begin{cases} a(an^2 + bn + c) > 0 \\ a(am^2 + bm + c) > 0 \\ b^2 - 4ac \geq 0 \\ n < -\dfrac{b}{2a} < m \end{cases}$$

3.Задачі з використанням дискримінанта.

1.Знайти значення параметра *p* для рівняння $(\boldsymbol{p}-\mathbf{3})\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{3}(\boldsymbol{p}-\mathbf{3})\boldsymbol{x}+\mathbf{3}=\mathbf{0}$.

Розв’язання:

Якщо $p-3$=0, p = 3 то 0· $p-3=0$, 0· $p=-3$. Отже, рівняння не має розв’язків. Якщо $p\neq 3$, то рівняння є квадратним. Тому знаходимо дискримінант:

D= 4$(z-2)^2-4(z-2)2=4(z+2)(z-2-2)=4(z-2)(z-4)$

Не має розв’язків коли D < 0:

$(z-2)(z-4)<0$. Отримаємо $z\in(2;4)$.

2.Знайти всі значення параметра b, при яких система рівнянь не має роозв’язків.

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{z}+\mathbf{1}=\mathbf{0} \\ \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{b}+\mathbf{1})\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{b}-\mathbf{1})\boldsymbol{z}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0} \end{cases}$$

Розв’язання:

Запишемо 2 рівняння у вигляді: $(y-z)(y+z)+b(y+z)+y-z+b=0$ або $(y-z+b)(y+z+1)=0$. Якщо $z=-y-1$, тоді 1 рівняння запишемо у вигляді $y^2+y+2=0$ - бачимо, що дійсних коренів немає.

Отже, $z=y+b$, $y^2-y+1-b=0$. Потрібно, щоб D$\geq 0\leftrightarrow 1-4(1-b)\geq 0$.

Відповідь: $b\geq 3/4$.

3.Розв’язати рівняння $\mathbf{3}(\mathbf{2}\boldsymbol{b}-\mathbf{1}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}})$ $-\mathbf{2}(\boldsymbol{b}+\mathbf{1})\boldsymbol{y}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$

Розв’язання:

1)Якщо $b=\frac{1}{2}$, то це рівняння матиме вигляд.

$$0-2\left(\frac{1}{2}+1\right)y+1=0$$

$-3y+1=0\qquad y=\frac{1}{3}$.

2)$b\neq\frac{1}{2}$, то це рівняння є квадратним.

$$D=4(b+1)^2-4\cdot 3(2b-1)\cdot 1=4b^2+8b+4-24b+12=$$

$$= 4b^2 - 16b + 16 = (2b-4)^2 \geq 0$$

$D = 0$, коли $b = 2$. Тоді наше рівняння матиме вигляд : $9y^2 - 6y + 1 = 0$

$$(3y-1)^2 = 0 \qquad y = \frac{1}{3}$$

$D > 0$, коли $b \neq 2$. Тоді дане рівняння матиме 2 розв'язки:

$$y_1 = \frac{2(b+1) + 2b - 4}{6(2b-1)} = \frac{2b + 2 + 2b - 4}{6(2b-1)} = \frac{4b-2}{6(2b-1)} = \frac{2(b-1)}{6(2b-1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$y_2 = \frac{2b + 2 - 2b + 4}{6(2b-1)} = \frac{6}{6(2b-1)} = \frac{1}{2b-1}$$

Відповідь: $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{1}{2b-1}$ в тому випадку, коли $b \neq 2; \frac{1}{2}$.

$y = \frac{1}{3}$ в тому випадку, коли $b = 2; \frac{1}{2}$.

4.Розв'язати рівняння $(b+1)y^2 + 2by + b - 2 = 0$.

Розв'язання: Розглянемо два випадки 1) – коли $b \neq -1$; 2) – коли $b = -1$.

1)$b + 1 \neq 0$, тоді отримаємо квадратне рівняння. Знайдемо дискримінант:

$D = 4(b+2)$. Розглянемо пару випадків:

- $D < 0$, тоді $4(b+2) < 0$. Коренів немає.
- $D > 0$, тоді $4(b+2) > 0$. В такому випадку $b > -2$ та $b \neq 1$, тоді рівняння матиме два корені:

$$y_1 = \frac{-b - \sqrt{b+2}}{b+1}; \qquad y_2 = \frac{-b + \sqrt{b+2}}{b+1}$$

- $D = 0$, тоді $b = -2, y = -2$.

2)$b + 1 = 0$, звідси $b = -1$. Тоді : $-2y - 3 = 0; -2y = 3;\ -y = \frac{3}{2};\ y = -\frac{3}{2}$.

Відповідь: $b = -1$ тоді $y = -\frac{3}{2}$;

$b \neq -1; a \geq -2$ тоді $y = \frac{-b \pm \sqrt{b+2}}{b+1}$;

5. При яких значеннях параметра z рівняння має єдиний розв'язок

$\boldsymbol{2cy^2 - 4(c+1)y + 4c + 1 = 0}$.

Розв’язання: $D = 0$

$D = 16(c+1)^2 - 4\cdot 2c(4c+1)$=$16(c^2+2c+1) - 8c(4c+1) = 16c^2 + 32c + 16 - 32c^2 - 8c = -16c^2 + 24c + 16 = -2c^2 + 3c + 2$

$$2c^2 - 3c - 2 = 0; \qquad D = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 9 + 16$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{25} = 5 \qquad c_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \quad c_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Відповідь: $-\frac{1}{2},\ 0,\ 2.$

6.При яких значеннях параметра корені рівняння $\boldsymbol{x^2 - (3a-2)x - 4a^2 + 2a = 0}$ належать відрізку$[-3; 6]$.

$$\boldsymbol{D = (3a-2)^2 - 4(-4a^2 + 2a) = 9a^2 - 12a + 4 + 16a^2 - 8a =}$$

$$\boldsymbol{= 25a^2 - 20a + 4 = (5a-2)^2}$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{3a - 2 - 5a + 2}{2} = -a}$$

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{3a - 2 + 5a - 2}{2} = 4a - 2}$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} -3 \le -a \le 6 \\ -3 \le 4a - 2 \le 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \ge a \ge 6 \\ -1 \le 4a \le 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \ge a \ge 6 \\ -\frac{1}{4} \le a \le \frac{7}{4} \end{cases}}$$

Відповідь:[- $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{4}$].

7.При яких значеннях параметра $\boldsymbol{b}$ нерівність буде виконуватись

$\boldsymbol{(y-2)b^2 - yb + 6 - y \le 0}$.

Розв’язання: $\begin{cases} y^2 - 4(y-2)(6-y) \le 0 \\ y - 2 < 0 \end{cases} \to \begin{cases} y^2 - 4(6y - y^2 - 12 + 2y) \le 0 \\ y - 2 < 0 \end{cases} \to$

$$\begin{cases} y^2 - 24y + 4y^2 + 48 - 8y \le 0 \\ y - 2 < 0 \end{cases} \to \begin{cases} 5y^2 - 32y + 48 \le 0 \\ y - 2 < 0 \end{cases} \to$$

$$D = 32^2 - 4\cdot 5\cdot 48 = 1024 - 960 = 64$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{64}=8$$

$$y_1 = \frac{32+8}{10} = \frac{40}{10} = 4 \qquad y_2 = \frac{32-8}{10} = \frac{24}{10} = 2{,}4$$

$$\begin{cases} 2{,}4 \le y \le 4 \\ y < 2 \end{cases} \to \emptyset$$

Відповідь: Немає таких значень, при яких буде виконуватись дана нерівність.

8.Знайти всі значення параметра $\boldsymbol{n}$, при яких нерівність $\boldsymbol{nz^2 - 2z + 3n + 2 > 0}$ виконується для всіх $\boldsymbol{z > 0}$.

$$f(0) = 3n + 2 \qquad\qquad z_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2n}$$

Отже ,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -12n^2 - 8n + 4 < 0 \\ n > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -12n^2 - 8n + 4 > 0 \\ n > 0 \\ 3n + 2 \ge 0 \\ \frac{2}{2n} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3n^2 + 2n - 1 > 0 \\ n > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3n^2 + 2n - 1 \le 0 \\ n > 0 \\ n \ge -\frac{2}{3} \\ n < 0 \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n < -\dfrac{1}{3} \text{ або } n > 1 \to n > 1 \\ n > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3n^2 + 2n - 1 \le 0 \\ n > 0 \\ n \ge -\dfrac{2}{3} \\ n < 0 \end{cases} \to \begin{cases} -\dfrac{1}{3} \le n \le 1 \\ n > 0 \\ n \ge -\dfrac{2}{3} \\ n < 0 \end{cases} \leftrightarrow \emptyset \end{array}\right.$$

Відповідь: $n \in (1; +\infty)$.

9.Довести, що вершина параболи описує пряму лінію

$$\boldsymbol{y = x^2 + (2b + 2)x + b^2 + 2.}$$

Доведення: Обчислимо координати вершин параболи:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2b - 2}{2}; D = (2b + 2)^2 - 4(b^2 + 2) = 4b^2 + 8b + 4 - 4b^2 - 8 =$$

$$= 8b - 4 = 4(2b - 1) \qquad\qquad y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{4(2b - 1)}{4} = -(2b - 1)$$

тобто, маємо систему

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{2-2b}{2} \\ y_0 = -2b+1 \end{cases}$$

Знайдемо n_0, як функцію m_0. Для цього виразимо b з першого рівняння системи і підставимо його в друге рівняння.

b=$\frac{2-2x_0}{2}$ $\quad n_0 = -2\left(\frac{2-2x_0}{2}\right) + 1 = -(2-2x_0) + 1 = -2 + 2x_0 + 1 = 2x_0 - 1$

Отже, ордината вершини параболи лінійно залежить від абсциси, причому

-∞ $< x_0 <$ ∞.

Таким чином, довели, що при зміні параметра b вершина параболи описує пряму $y = 2x - 1$.

10. Знайти всі значення параметра $\boldsymbol{b}$, при якому квадратна функція

$\boldsymbol{f(y) = (cosb)y^2 + (2sinb)y + \frac{cosb-sinb}{2}}$ **є квадратом лінійної функції.**

Розв'язання: Якщо дискримінант квадратного тричлена дорівнює нулю, то цей тричлен можна записати у вигляді $b(y-y_0)^2$, де y_0- корінь. Ще необхідно, щоб $b > 0$. Тоді шукані значення параметра даної задачі, це розв'язок системи:

$$\begin{cases} cosb > 0, \\ 2sin^2b - cos^2b + \sin b \cos b = 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} cosb > 0, \\ \left[\begin{array}{l} tgb = -1, \\ tgb = \frac{1}{2}. \end{array} \right. \end{cases}$

Відповідь: $b = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ або $b = arctg\frac{1}{2} + 2\pi k$, де n і k −цілі .

11.При яких значеннях $\boldsymbol{n}$ нерівність $\boldsymbol{by^2 + (2-b)y + 3 - 2b \leq 0}$ виконується тільки для одного дійсного значення $\boldsymbol{y}$?

Розв'язання: Розглянемо випадок $b = 0$. Тоді отримаємо $2y + 3 \leq 0$.Зрозуміло, що $b = 0$ не підходить.

Випадок, коли $b \neq 0$. Якщо $b < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз. Відповідно нерівність не може мати один розв'язок. Якщо $b > 0$ то D квадратного тричлена має приймати нульове значення.

$$\begin{cases} b > 0, \\ (b-2)^2 - 4b(3-2b) = 0. \end{cases}$$

Отримаємо: $b_1 = \frac{8-2\sqrt{7}}{9}$; $b_2 = \frac{8+2\sqrt{7}}{9}$.

Відповідь: $b = \frac{8-2\sqrt{7}}{9}$ або $b = \frac{8+2\sqrt{7}}{9}$.

12.При яких значеннях параметра $\boldsymbol{a}$ існує єдина пара чисел$(\boldsymbol{y};\boldsymbol{z})$, яка задовольняє $\boldsymbol{y^2 + (1-a)z^2 - 2yz(1-a) + 2y(1-2a) + 2z(a-1) + 1 = 0}$

Розв'язання: Розглянемо рівняння, як квадратне відносно z записавши його у вигляді:

$$\boldsymbol{(1-a)z^2 - 2(a-1)(y+1)z + y^2 + 2y(1-2a) + 1 = 0}$$

Якщо $a = 1$, тоді $y^2 - 2y + 1 = 0$. Звідси $y = 1$. Отже, розв'язком буде будь-яка пара (1;z).

Якщо $a \neq 1$. Тоді $D = (a-1)^2(y+1)^2 + (a-1)(y^2 + 2y(1-2a) + 1) = a(a-1)(y-1)^2$.

Якщо $a(a-1) < 0$ то $D < 0$, тому за однієї умови може існувати єдиність розв'язку, коли $y = 1$.

Якщо $a(a-1) \geq 0$ то $D \geq 0$. Дане рівняння має безліч розв'язків.

Відповідь: *0 < a <1.*

Задачі аналогічні до задач, що містять в посібниках-[Горнштейн Г.И., Полонский В.Б., Якир М.С. - Задачи с параметрами (Кладовая школьной математики) – 2005]

4.Задачі з використанням теореми Вієта.

13. При яких значеннях параметра $\boldsymbol{b}$, сума квадратів коренів приймає найменше значення $\boldsymbol{y^2 + y\sqrt{b^2-4b} - b - 2 = 0}$?

Розв'язання: Для знаходження коренів використаємо теорему Вієта:

$y_1{}^2 + y_2{}^2 = (y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2$=$(-\sqrt{b^2-4b})^2 - 2(-b-2) = b^2 - 2b + 4$.

Таким чином, для отримання відповіді залишилось знайти найменше значення функції $f(b) = b^2 - 2b + 4$ на множині $(-\infty; 0] \cup [4; \infty)$. Оскільки при $b \leq 0 f(b) \geq f(0) = 4$, а при $b \geq 4 f(b) = 12,$ то найменше значення яке може приймати функція, це в точці $b = 0$.

Відповідь: $b = 0$.

14. При яких значеннях $\boldsymbol{c}$, корені рівняння $(\boldsymbol{c^2 - 2c + 2})\boldsymbol{y^2} + \boldsymbol{2(c-1)cy} - \boldsymbol{3c^2} = \boldsymbol{0}$ задовольняють нерівність $\boldsymbol{y_1 y_2} < |\boldsymbol{cy_1}|$-$|\boldsymbol{cy_2}|$?

Розв'язання: $f(y)$- позначимо ліву частину рівняння. Старший коефіцієнт квадратного рівняння f додатній при будь-яких c, тому корені можна отримати без обчислення дискримінанта.

$f(0) = -3c^2 \leq 0$ і відповідно рівняння $f(y) = 0$ має корені завжди. Це є очевидно, оскільки вітки параболи $y = f(y)$ напрямлені вгору. Відповідно існують точки в яких функція приймає від'ємні значення. Якщо $c \neq 0,$ то рівняння має 2 кореня. Розглянемо випадок, коли $c = 0$. Рівняння при такому c має один корінь $y = 0$. Отримані значення, очевидно не задовольняють нерівність. Якщо все-таки повернутись до $c \neq 0$, то будемо мати $y_1 y_2 = \frac{-3c^2}{c^2-2c+c} < 0$- корені рівняння різних знаків.

Звідси $|y_1| - |y_2| = y_1 + y_2 = \frac{-2(c-1)c}{c^2-2c+2}$ або $|y_1| - |y_2| = -(y_1 + y_2) = \frac{2(c-1)c}{c^2-2c+2}$.

Напишемо отриману нерівність в такому виді: $y_1 y_2 < |c|(|y_1| - |y_2|)$.

Тоді шукане значення параметра, можемо найти розв'язавши систему

$$\begin{cases} \dfrac{-3c^2}{c^2 - 2c + 2} < \dfrac{-2|c|(c-1)c}{c^2 - 2c + 2}, \\ \dfrac{-3c^2}{c^2 - 2c + 2} < \dfrac{2|c|(c-1)c}{c^2 - 2c + 2}. \end{cases}$$

Отже, з урахуванням $c \neq 0$ отримаємо:

$$\begin{cases} 3|c| > 2c(c-1), \\ 3|c| > 2c(1-c). \end{cases}$$

Отримаємо, $\quad 0 < c < 2{,}5 \quad$ або $\quad -\frac{1}{2} < c < 0$

Відповідь: $0 < c < 2{,}5 \quad$ або $\quad -\frac{1}{2} < c < 0$.

15.Вказати всі значення параметра $\boldsymbol{a}$, при яких система нерівностей має два різних вирішення $\begin{cases} \boldsymbol{log_2 y + log_2 z = 64} \\ \boldsymbol{z = 8 + a(y-6)} \end{cases}$.

Розв'язання: Дана система рівносильна цій:

$$\begin{cases} log_2 y + log_2 z = log_2 64 \\ z = 8 + a(y-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz = 64, \\ y > 0, \\ z = 8 + a(y-6). \end{cases}$$

Можемо знайти значення параметра a, якщо значення z підставимо у перше рівняння. Отримаємо, $y\big(8 + a(y-6)\big) = 64$. Звідси, $y(8 + ay - 6a) = 64$,

$$y(8 + ay - 6a) = 64, \;\; 8y + ay^2 - 6ay = 64, \;\; ay^2 - 6ay + 8y - 64 = 0,$$

$ay^2 - 2y(3a-4) - 64 = 0$. Відповідно $a = 0$ не підходить. Якщо $a \neq 0$, то отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{2(3a-4)}{a} > 0, \\ -\dfrac{64}{a} > 0, \\ (3a-4)^2 + 64a > 0. \end{cases}$$

$$9a^2 + 40a + 16 > 0 \quad D = \sqrt{1024} = 32$$

$$a_1 = -\frac{4}{9}, \quad a_2 = -4.$$

16.Знайти всі значення параметра $\boldsymbol{p}$, при яких система нерівностей має 4 різних розв'язки $\begin{cases} \boldsymbol{(y + p + 2)^2 + z^2 = 1} \\ \boldsymbol{z^2 = 2py} \end{cases}$.

Розв'язання: друге рівняння підставимо в перше, отримаємо:

$$(y + p + 2)^2 + 2py = 1$$

Очевидно, що $p = 0$ не підходить. Маємо $y^2 + 4y(p+1) + p^2 + 4p + 3 = 0$.

Далі домножимо ціле рівняння на p^2. Будемо мати рівняння:

$p^2y^2 + 4p^2y(p+1) + p^4 + 4p^3 + 3p^2 = 0$. Зробимо позначення. Вкажемо, що $py = t$. Тоді рівняння набуде такого вигляду: $t^2 + 4tp(p+1) + p^4 + 4p^3 +$ $+3p^2 = 0$. Отже,залишилось знайти значення y.

$$\begin{cases} p(p+1) < 0, \\ p(p^2 + 4p + 3) > 0, \\ 4p^2(p+1)^2 - p^2(p^2 + 4p + 3) > 0. \end{cases}$$

Відповідь: $-\frac{1}{3} < p < 0$.

17. Знайти всі значення a, при яких рівняння немає розв'язку

$$(\boldsymbol{a} - \mathbf{4})\mathbf{9}^{\boldsymbol{y}} + (\boldsymbol{a} + \mathbf{1})\mathbf{3}^{\boldsymbol{y}} + \mathbf{2}\boldsymbol{a} - \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Розв'язання: Виконаємо заміну $3^y = t, t > 0$. Отримаємо, $(a-4)t^2 +$ $+(a+1)t + 2a - 1 = 0$. Припустимо, що $a = 4$. Матимемо $5t + 8 - 1 = 0$

$5t = -7, \;\; t = -\frac{7}{5}$. Також розглянемо, коли $a \neq 4$. В цьому випадку буде квадратне рівняння. Тепер розглянемо випадки коли корені відсутні:

$$D = (a+1)^2 - 4(a-4)(2a-1) < 0.$$

Звідси, $a > 5$ або $a < \frac{3}{7}$.

Розглянемо наступний випадок:

$$\begin{cases} (a+1)^2 - 4(a-4)(2a-1) \geq 0, \\ \dfrac{a+1}{a-4} > 0, \\ \dfrac{2a-1}{a-4} > 0. \end{cases}$$

Звідси $4 < a \leq 5$.

Розглянемо ще один випадок коли два корені рівні нулю. Очевидно, що не виконується при ніяких a. І останній випадок, коли $t = 0$. Отримаємо $a = \frac{1}{2}$.

Це нас не влаштовує, оскільки рівняння має нульовий корінь та додатній. Отже, нам підходить коли $a \geq 4$ або $a < \frac{3}{7}$.

Відповідь: $a \geq 4$ або $a < \frac{3}{7}$.

18. На координатній площині зобразити множину точок $(c; d)$, коли рівняння має єдиний корінь $(\frac{1}{4})^y - 2c \cdot 2^{-y} - 4d + 1 = 0$.

Розв'язання: Виконаємо заміну 2^{-y}=$t, t > 0$. Отримаємо рівняння:$t^2 - 2ct - 4d + 1 = 0$. З цього рівняння ми можемо дізнатись, при яких c, d рівняння має один додатній корінь. Це можливо тільки тоді, коли виконуються наступні умови:1)один корінь додатний, другий дорівнює нулю;2)два корені різних знаків;3)два корені додатні і рівні між собою.

Оскільки у квадратному рівнянні старший коефіцієнт додатній, то для виконання пункту2) достатньо вказати: -$4d + 1 < 0$, $d > \frac{1}{4}$.

Якщо $d = \frac{1}{4}$, то відповідно один із коренів дорівнює $2c$, то другий в свою чергу дорівнює нулю. Отримаємо, що $c > 0$.

Якщо розглянути, що наші корені співпадають, то $\frac{D}{4} = c^2 + 4d - 1 = 0$. Щоб ці корені були додатні потрібно, щоб виконувалась наступна умова: $2c > 0$.

$d > \frac{1}{4}, c$ —будь яке число, або $d = \frac{1-c^2}{4}$, $c > 0$, або $d = \frac{1}{4}, c > 0$.

Задачі аналогічні до задач, що містять в посібниках-[Горнштейн Г.И., Полонский В.Б., Якир М.С. - Задачи с параметрами (Кладовая школьной математики) – 2005]

5.Розташування коренів квадратної функції стосовно заданих точок.

19.Знайти всі значення a, при яких один із коренів рівняння $y^2 - (2a + 1)y + {} +a^2 + a - 2 = 0$ знаходиться між числами 0 і 2, а другий між числами 3 і 5.

Розв'язання: Дане квадратичне рівняння має корені $y_1 = a - 1$, $y_2 = a + 2$. Зрозуміло, що $y_1 < y_2$. Шукані значення параметра можемо знайти, якщо розв'яжемо дану систему:

$$\begin{cases} 0 < a - 1 < 2, & | + 1 \\ 3 < a + 2 < 5. & | - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < a < 3, \\ 1 < a < 3. \end{cases}$$

Відповідь: $1 < a < 3$.

20.При яких $\boldsymbol{c}$ нерівність $(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} - \mathbf{2}) > \mathbf{0}$ є наслідком нерівності $\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}\boldsymbol{y} + \mathbf{3} < \mathbf{0}$?

Розв'язання: Розв'язком першої нерівності є об'єднання проміжків$(-\infty; c)$ і $(c + 2; \infty)$. Другий проміжок можемо знайти за т. Вієта-(1;3). За умовою розв'язок першої нерівності має містити всі розв'язки другої.

$\left[\begin{array}{l} c \geq 3, \\ c + 2 \leq 1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} c \geq 3, \\ c \leq -1. \end{array}\right.$

Відповідь: $c \leq -1$ або $c \geq 3$.

21.Знайти всі значення параметра $\boldsymbol{c}$, при яких будь яке значення $\boldsymbol{y}$, задовольняюче нерівність $\boldsymbol{c}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{c}^{\mathbf{2}})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} > \mathbf{0}$, по модулю не більше 2.

Розв'язання: Бачимо, що $c = 0$ не підходить. Тоді при $c \neq 0$, знайшовши корені квадратного тричлена, отримаємо $c(y - c)(y + \frac{1}{c}) > 0$. Якщо $c > 0$,то розв'язком цієї нерівності буде, необмежена множина чисел. Отже $c > 0$ також не підходить. Залишається можливість $c < 0$. Маємо, $(y - c)\left(y + \frac{1}{c}\right)$ <0, і оскільки $c < 0$, то$c < -\frac{1}{c}$. Звідси розв'язок цієї нерівності буде проміжок $(c; -\frac{1}{c})$. Слідуючи умові отриманий проміжок повинен належати проміжку [-2;2]. Тоді $\begin{cases} c \geq -2, \\ -\frac{1}{c} \leq 2. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c \geq -2, \\ -1 \leq 2c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c \geq -2, \\ -\frac{1}{2} \leq c. \end{cases}$

Відповідь: $c \geq -2, \quad c \geq -\frac{1}{2}$.

22.При яких значеннях параметра $\boldsymbol{c}$ два корені рівняння $\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{y} + \mathbf{2} = \mathbf{0}$ задовольняють умову 1$< \boldsymbol{y} < \mathbf{3}$?

Розв'язання: Зрозуміло, що $D \geq 0, f(1) > 0, \ f(3) > 0$. Ці умови необхідні для виконання вимог задачі. Отримаємо достатню умову, якщо додамо ще одну нерівність $1 < y_0 < 3$. Звідси запишемо систему:

$$\begin{cases} c^2 - 8 \geq 0, \\ 3 - c > 0, \\ 11 - 3c > 0, \\ 1 < \dfrac{c}{2} < 3. \end{cases}$$

Отже, отримаємо з системи: $2\sqrt{2} \leq c < 3$.

Відповідь: $2\sqrt{2} \leq c < 3$.

23.При яких значеннях параметра *c* існує єдиний корінь рівняння $\boldsymbol{y^2 - cy +}$ $\boldsymbol{+2 = 0}$, який задовольнятиме умову 1$\boldsymbol{< y < 3}$?

Розв'язання: Звернемо увагу, що в умові не сказано, що дане квадратичне рівняння має два різних кореня. Тому, спочатку розглянемо випадок, коли $D = 0$; $c = 2\sqrt{2}$ або $c = -2\sqrt{2}$. Для першого значення отримаємо : $y = \sqrt{2} \in (1; 3)$, для другого отримаємо $-y = -\sqrt{2}$ $\notin$(1;3).

У випадку , коли $D > 0$, позначимо корені через $y_{1\ ,} y_2$ $(y_1 < y_2)$. Виходячи з умови потрібно, щоб $y_1 \in (1; 3)$; y_2 $\notin$ (1;3) або навпаки. Розглянемо ці два випадки:

$$\begin{cases} f(1) > 0, \\ f(3) < 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} f(1) < 0, \\ f(3) > 0. \end{cases}$$

Отримана сукупність рівносильна нерівності $f(1) \cdot f(3) < 0$. Звідси $(3 - c)(11 - 3c) < 0; 3 < c < \frac{11}{3}$. Але очевидний результат не враховує можливості, коли $y_1 \in (1; 3)$, $y_2 = 3$ або $y_2 \in (1; 3), y_1 = 1$. Відштовхуючись від цього випадку,якщо $f(3) = 0$, $c = \frac{11}{3}$, то $y_1 = \frac{2}{3}, y = 3$, що відповідно не підходить. Якщо $f(1) = 0$, то $c = 3$; $y_1 = 1, y = 2$, що задовольняє умову задачі. Звідси,$3 \leq c < \frac{11}{3}$ або $c = 2\sqrt{2}$.

Відповідь: $3 \leq c < \frac{11}{3}$ або $c = 2\sqrt{2}$.

24.При яких значеннях $\boldsymbol{c}$ будь-який розв’язок нерівності $\boldsymbol{y^2 - y - 2 < 0}$ більший будь-якого розв’язку нерівності $\boldsymbol{cy^2 - 4y - 1 \geq 0}$?

Розв’язок: З першої нерівності, отримаємо $-1 < y < 2$. Розглянемо другу нерівність. Якщо $c = 0$, то отримаємо $-4y - 1 \geq 0$, $y \leq -\frac{1}{4}$. Відповідно, $c = 0$ не підходить. Якщо $c > 0$, то відповідно розв’язком нерівності буде або об’єднання двох проміжків $(-\infty; y_1]$ і $[y_2; \infty)$ у випадку, коли $D > 0$; $y_1, y_2 -$ корені рівняння,або всі множини дійсних чисел, у випадку коли $D \leq 0$.

Значить $c > 0$ не підходить. Якщо $c < 0$, то $D \geq 0$ (якщо $D < 0$, то рівняння розв'язку немає). Звідси розв'язок нерівності буде точка y_0, коли $D = 0$, або відрізок $[y_1; y_2]$. Тоді шукані значення y знайдемо, вирішив дану систему:

$$\begin{cases} c < 0, \\ D \geq 0, \\ f(-1) \leq 0, \\ y_0 \leq -1. \end{cases}$$

Звідси
$$\begin{cases} c < 0, \\ \frac{2}{c} \leq -1, \\ c + 3 \leq 0, \\ c + 4 \geq 0. \end{cases}$$

Виходить, що таких c не існує.

Відповідь: таких c не існує.

25.Знайти всі значення параметра c, при яких із нерівності $cy^2 - y + 2 - c < 0$ випливає нерівність 0$< y < 2$.

Розв'язання: Якщо$c \leq 0$, то розв'язком першої нерівності буде нескінченна множина чисел, які не входять в проміжок (0;2). Якщо $c > 0$, то можемо сказати,що випадок, коли $D \leq 0$ нас влаштовує. Дійсно, при $D \leq 0$ розглянута нерівність розв'язків не має, а відповідно, будь-яка нерівність з одним параметром може являтись його наслідком. Маємо:

$D = 4c^2 - 8c + 1 \leq 0$. Звідси отримаємо: $\frac{2-\sqrt{3}}{2} \leq c \leq \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. Розглянемо, коли $D > 0$. Тоді розв'язком нерівності буде кореневий проміжок $(y_1; y_2)$. Звідси

отримаємо: $\begin{cases} c > 0, \\ D > 0, \\ f(0) \geq 0, \\ f(2) \geq 0, \\ 0 < y_0 < 2. \end{cases}$

Звернемо увагу,що корені нашої функції можуть співпасти з кінцями розглядаю чого проміжку. Маємо:

$$\begin{cases} c > 0, \\ 2 - c \geq 0, \\ 4c^2 - 8c + 1 > 0, \\ 0 < \frac{1}{2c} < 2, \\ 3c \leq 0. \end{cases}$$

Очевидно, ця система розв'язків не має.

Відповідь: $\frac{2-\sqrt{3}}{2} \leq c \leq \frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

26.Знайти всі значення параметра c, при яких корені y_1 і y_2 рівняння $(c-2)y^2 - 2(c+3)y + 4c = 0$ задовольняють умову $y_1 < 2, y_2 > 3$.

Розв'язання: З умови задачі бачимо, що дане рівняння є квадратним. Звідси $c - 2 \neq 0$. Крім тої, вимоги, представленні до коренів y_1 та y_2, дозволяють зробити висновок, що числа 2 і 3 належать кореневому проміжку. Відповідно, якщо $c - 2 > 0$, то $f(2) < 0$ і $f(3) < 0$; а якщо $c - 2 < 0$, то $f(2) > 0, f(3) > 0$.

Таким чином, шукані значення параметра знайдемо, вирішивши сукупність двох систем. Маємо:

$$\begin{cases} f(2) > 0, \\ f(3) > 0, \\ c - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(2) < 0, \\ f(3) < 0, \\ c - 2 > 0. \end{cases}$$

Бачимо, що це сукупність рівносильна системі:

$$\begin{cases} (c-2)f(3) < 0, \\ (c-2)f(2) < 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} (c-2)(7c-36) < 0, \\ (c-2)(4c-20) < 0. \end{cases}$$

Тепер отримаємо $2 < c < 5$.

Відповідь: $2 < c < 5$.

27. При яких значеннях параметра c всі розв'язки рівняння $(c-1)y^2 - -2(c+1)y + c - 3 = 0$ задовольняє умову $-1 < y < 5$?

Розв'язання: Якщо $c = 1$, то коренем рівняння буде $y = -\frac{1}{2}$, який задовольняє дану умову. Якщо $c \neq 1$, то рівняння стає квадратним і його дискримінант $D = 24c - 8$. При $D = 0$ рівняння має один двійний корінь $y = -2$, що відповідно нам не підходить. Якщо $D > 0$, то квадратне рівняння має два різних корені, які за умовою повинні належати проміжку $(-1; 5)$. Звідси в залежності від знака двочлена $c - 1$ необхідне положення коренів буде забезпечено наступною сукупністю двох систем.

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(5) < 0, \\ c - 1 < 0, \\ f(-1) < 0, \\ -1 < y_0 < 5 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} D > 0, \\ f(5) > 0, \\ c - 1 > 0, \\ f(-1) > 0, \\ -1 < y_0 < 5 \end{cases}$$

Так як і в попередній задачі, не має необхідності розв'язувати кожну із отриманих систем. Можна замітити, що достатньо просто розв'язати систему:

$$\begin{cases} D > 0, \\ (c-1)f(5) > 0, \\ (c-1)f(-1) > 0, \\ -1 < y_0 < 5. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} 3c - 1 > 0, \\ (c-1)(16c - 38) > 0, \\ (c-1)(4c-2) > 0, \\ -1 < \frac{c+1}{c-1} < 5. \end{cases}$$

З цієї системи отримаємо, що $c > \frac{19}{8}$.

Відповідь: $c > \frac{19}{8}$ або $c = 1$.

Задачі аналогічні до задач, що містять в посібниках-[Горнштейн Г.И., Полонский В.Б., Якир М.С. - Задачи с параметрами (Кладовая школьной математики) – 2005]

6.Задачі, які зводяться до дослідження розташування коренів квадратичної функції.

28.При яких параметрах $\boldsymbol{b}$ система рівняння

$$\begin{cases} (\boldsymbol{b}-\mathbf{1})\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{2}(\mathbf{3}\boldsymbol{b}+\mathbf{1})\boldsymbol{x} + \mathbf{9}\boldsymbol{b} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{x} = -\sqrt{\boldsymbol{y}-\mathbf{3}} + \mathbf{2} \end{cases}$$ **має розв'язок ?**

Розв'язання: Із другого рівняння системи слідує, що $x \le 2$. Тоді, якщо з першого рівняння хоча б один буде більше 2, то система не буде мати розв'язку.

Якщо $b=1$, то $b=\frac{9}{8}$. Відповідно, $b=1$ входить у відповідь. Якщо $b\neq 1$, то квадратне рівняння зручно записати в такому вигляді: $x^2-\frac{2(3b+1)}{b-1}x+\frac{9b}{b-1}=0$.

Для нього $\frac{D}{4}=\frac{15b+1}{(b-1)^2}$. Якщо $b=-\frac{1}{15}$, то $x=-\frac{3}{4}$. А тому $b=-\frac{1}{15}$ також нам не підходить. Якщо $D>0$, то шукані значення параметра вибирається наступною сукупністю нерівностей: $f(2)>0$ або $f(2)\leq 0$.

Отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} D>0,\\ x_0<2,\\ f(2)>0,\end{array}\right.\\ f(2)\leq 0.\end{array}\right.$$

Розв'язком цієї сукупності буде $1< b\leq 8$ або $-\frac{1}{15}<b<1$.

Відповідь: $-\frac{1}{15}\leq b\leq 8$.

29.При яких значеннях параметра $\boldsymbol{a}$ один корінь рівняння $\boldsymbol{ay^4-(a-3)y^2+}$ $\boldsymbol{+3a=0}$ менше -2, три інші – більше-1?

Розв'язання: Виконаємо заміну $y^2=v$. Якщо дотримуватись вимог, висунутих до коренів рівняння, достатньо вирішити наступну задачу: при яких значеннях c один корінь рівняння більше 4, а другий менше 1 але не менше 0

$$cv^2-(c-3)v+3c=0 \quad ?$$

Зрозуміло, що $c\neq 0, D>0$. Запишу квадратне рівняння в такому вигляді:

$v^2-\frac{c-3}{c}v+3=0$. Його корені будуть задовольняти вище вказані умови, якщо $f(1)<0, f(4)<0$ і $f(0)>0$. Оскільки $f(0)=3$, то достатньо розв'язати дану систему:

$$\begin{cases} 1-\dfrac{c-3}{c}+3<0,\\ 16-\dfrac{4(c-3)}{c}+3<0.\end{cases}$$

Розв'язком цієї системи буде: $-\frac{4}{5}<c<0$.

Відповідь: $-\frac{4}{5}<c<0$.

30. При яких значеннях параметра c множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x^2 + (c+4)x + 4c \le z, \\ 3x + z - (2c+4) \le 0 \end{cases}$ включає відрізок [-2; -1] осі x?

Розв'язання: Перша система нерівностей задає множину точок, які лежать «всередині» параболи $z = f(x)$, включаючи границю. Тоді ці множина буде належати відрізку [-2;-1] осі абсцис, якщо розв'язок нерівності $f(x) \le 0$ належить цьому ж проміжку. Звідси $f(-2) \le 0$ і $f(-1) \le 0.$ Тоді:

$$\begin{cases} 4 - 2(c+4) + 4c \le 0, \\ 1 - c - 4 + 4c \le 0. \end{cases}$$

Отримаємо, що $c \le 1$.

Друга нерівність системи задає на півплощину. Якщо точки (-2;0) і (-1;0) належать цій площині, то очевидно відрізок, який ми розглядаємо також належить до розв'язків вказаної нерівності. Підставивши координати цих точок в нерівність, отримаємо:$\begin{cases} -10 - 2c \le 0, \\ -7 - 2c \le 0. \end{cases}$ Звідси $c \ge -\frac{7}{2}$.

Отже, розв'язок системи будуть задовольняти умови задачі, якщо $c \le 1$ і $c \ge -\frac{7}{2}$.

Відповідь: $-\frac{7}{2} \le \ c \le \ 1.$

31. Знайти всі значення параметра b, при яких значення функції $y = b4^x +$ $+(b+2)2^x + 2$ від'ємні для всіх x із проміжка [0;1].

Розв'язання: Виконаємо заміну $2^x = v, v > 0.$ З умови 0$\le x \le 1,$ то $1 \le v \le 2$

Необхідно знайти всі значення параметра, при яких нерівність виконується для всіх v з проміжку [1;2] $\quad bv^2 + (b+2)v + 2 \le 0.$

Зрозуміло, що $b \ne 0.$ Якщо $b = 0$ то нерівність не має розв'язків для $v > 0.$ Тоді коренями тричлена є $\frac{2}{b}$ і 1. Перепишемо нашу нерівність в такому виді: $b(v+1)(v+\frac{2}{b}) \le 0.$ Оскільки $v > 0,$ то $b\left(v + \frac{2}{b}\right) \le 0.$ Якщо $b < 0$ то отримаємо, що $v \ge -\frac{2}{b}$. Ця нерівність виконується при всіх $v \in [1;2]$, якщо $-\frac{2}{b} \le 1.$ Враховуючи, що $b < 0$ отримаємо $b \le -2.$

Відповідь: $b \le -2.$

32.Знайти всі значення параметра c, для яких при всіх $a > 0$ існує в інтервалі $0 < x < \frac{1}{2}$ розв'язок нерівності $log_2(2 - x - x^2) = clog_{1-x-x^2}2 + a$.

Розв'язання: Оскільки $0 < x < \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{4} < 2 - x - x^2 < 1, c - 2 < log_2(2 - x - -x^2) < 0$. Виконаємо заміну $log_2(2 - x - x^2)$=v. Отримаємо рівняння $v = \frac{c}{v} + a$. Зрозуміло, що потрібно знайти такі c, для яких при всіх $a > 0$ рівняння $v^2 - av - c = 0$ має хоча б один корінь в інтервалі (-2;0).

$v_0 = \frac{a}{2} -$ абциса вершини параболи. Відповідно, при $D = 0$ рівняння не має коренів на проміжку (-2;0). Якщо $D > 0$, знову ж таки завдяки тому, що $v_0 > 0$, більший корінь рівняння завжди додатній. Тому залишилось розглянути тільки один випадок, коли менший корінь належить інтервалу (-2;0). Тоді отримаємо $f(0) < 0$ і $f(-2) > 0$. Звідси $\begin{cases} c > 0, \\ c < 4 + 2a. \end{cases}$

Оскільки, друга нерівність системи повинна виконуватись для всіх $a > 0$, то звідси отримаємо, що $c \leq 4$.

Відповідь: $0 < c \leq 4$.

33.При яких параметрах b система

$$\begin{cases} 2^{z+x} - 2^{2z-x} = 1 - 2^4 \\ 2^{4z} - 2^{z+3x+1} = 3 \cdot 2^{4+2x} - 2^{2x+2} \end{cases}$$ **, має єдиний розв'язок?**

Розв'язання: Помноживши друге рівняння системи на 2^{-2x}, отримаємо

$$\begin{cases} 2^{z+x} - 2^{2z-x} = 1 - 2^b, \\ 2^{4z-2x} - 2 \cdot 2^{z+x} = 3 \cdot 2^b - 4. \end{cases}$$

Нехай 2^{z+x}=v, $2^{2z-x} = t$, де $v > 0, t > 0$. Звідси маємо,що

$$\begin{cases} v - t = 1 - 2^b, \\ t^2 - 2v = 3 \cdot 2^b - 4. \end{cases}$$

Підставивши $v = t + 1 - 2^b$в друге рівняння системи, отримаємо квадратне рівняння $t^2 - 2t - 2^b + 2 = 0$.

Вимагання єдиного розв'язку вихідної системи може послужити повідом для пред'яви аналогічного вимагання до отриманого квадратного рівняння. Однак зіткнувшись з ситуаціями подібного роду,важливо не опустити, що в результаті заміни значення нової змінної можуть бути обмеженні якимись множинами. Тому питання про кількість розв'язків повинен бути безпосередньо зв'язаний з тими множинами. Так, в справжній задачі в ході заміни встановлено, що $t > 0$.

Разом з тим і $v > 0$. Тоді з урахуванням останньої системи отримаємо $t > 2^b - -1$. Таким чином треба знайти значення параметра при якому рівняння $t^2 - 2t - 2^b + 2 = 0$ має один розв'язок для $t > 0$ і $t > 2^b - 1$. Зрозуміло, необхідно, щоб $D \geq 0, 2^b - 1 \geq 0$.Тому значення змінної m можна обмежити тільки однієї нерівністю $t > 2^b - 1$. Якщо $D = 0$, $b = 0$, то розглянута нерівність має єдиний корінь $t = 1$, задовольняючий вимогам $t > 2^b - 1$. Якщо $D > 0$, то число $2^b - 1$ повинно знаходитись в кореневому проміжку або співпадати з меншим коренем. Звідси шукані значення параметра y знайдемо, вирішив сукупність

$$\left[\begin{array}{l} f(2^b - 1) < 0, \\ \begin{cases} f(2^b - 1) = 0, \\ 2^b - 1 < t_b \end{cases} \end{array}\right.$$

Неважко переконатись, що її вирішенням буде проміжок $[log_2 \frac{5-\sqrt{5}}{2};\ log_2 \frac{5+\sqrt{5}}{2})$.

Відповідь: $b = 0$ або$log_2 \frac{5-\sqrt{5}}{2} \leq b < log_2 \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Задачі аналогічні до задач, що містять в посібниках-[Горнштейн Г.И., Полонский В.Б., Якир М.С. - Задачи с параметрами (Кладовая школьной математики) – 2005]

Висновок:

В задачах, які описують різні явища, що відбуваються в природі та суспільстві , крім невідомих величин *(x, y, z, …)* зустрічаються величини, які називаються параметрами *(a, b, c, …).* Розв'язуючи задачі з параметром, значення параметрів вважають сталими величинами, і розв'язок знаходять з урахуванням того, які значення можуть приймати параметри.

Отже задачі з параметром, як правило розпадаються на сукупність задач, кожній з яких відповідають певні множини значень параметрів. Кожній з цих задач відповідає множина рівнянь, нерівностей або їх систем і сукупностей. Розв'язки задачі записують, вказуючи множини значень параметрів, що відповідають кожному з цих розв'язків. Крім того, розв'язування таких задач передбачає проведення учнями дослідницької діяльності та вимагає від них певного рівня математичного та логічного мислення.

Список літератури:

1. Азаров А.И., Барвенов С.А., Федосенко В.С. Методи розв’язування задач з параметрами.
2. Вишенський В. А., М. О Перестюк, А. М. Самойленко Конкурсні задачі з математики Київ “Вища школа” 2001.
3. Горнштейн П. І., Полонський В.Б., Якір М.С. Необхідні умови в задач з параметрами. Квантор. Львів.1991.
4. Шаригін И. Ф. Факультативний курс по математике 10, 11 кл. Москва “Просвещение”,1989 .
5. Шкіль М. І., З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук Алгебра і початки аналізу 10-11 кл. Київ “Зодіак – Еко” 1998.

.