МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Механіко-математичний факультет
(повне найменування назва факультету)

Магістерська робота

Розв’язування задач з параметрами графічним методом

Виконав: студент групи МТОМ-61з
спеціальності
014 «Середня освіта»
(шифр і назва спеціальності)

Бронтерюк Д. М.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівник доц. Холявка Я. М.
(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент
(підпис) (прізвище та ініціали)

Львів – 2021

Реферат

Дипломна робота містить 62 стор., 52 рис., 5 табл., 7 джерел.

Об'єктом дослідження є задачі з параметрами.

Мета роботи - систематизувати графічні методи розв'язання задач з параметрами.

Методика дослідження - вивчення метода та розв'язування задач.

Результати досліджень можуть бути застосовані при викладанні теми "Графічні методи розв'язування задач із параметрами" в математичних класах середніх шкіл та ліцеях.

Перелік ключових слів: ПАРАМЕТР, ФУНКЦІЯ, РОЗВ'ЯЗОК, РІВНЯННЯ, НЕРІВНІСТЬ, ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ, ПОВОРОТ, ГОМОТЕТІЯ, КООРДИНАТНА ПЛОЩИНА, ПОХІДНА.

Зміст

Вступ

Задачі з параметрами - один із найбільш важких розділів елементарної математики. Інтерес до задач з параметрами не випадковий. Розв'язати задачу з параметрами - це значить встановити для яких значень параметрів задача має розв’язки і знайти ці розв’язки (як правило, в залежності від параметрів). Тобто розв’язування таких задач має супроводжуватись дослідженням. Для розв’язування задач з параметрами не вимагається ніяких спеціальних знань, які виходять за рамки шкільної програми. Однак, розв’язування задач з параметрами вимагає глибоких знань властивостей елементарних функцій, властивостей рівнянь і нерівностей. Крім того, при використанні графічних методів треба вміти виконувати побудови різних графіків, вести графічне дослідження. Оскільки задачі з параметрами дуже різноманітні.

Зазвичай в рівнянях буквами позначають невідомі величини, але іноді рівняння крім таких букв містить ще букву, яка позначає невідоме стале число - параметр. Тоді ми маємо справу не з одним рівнянням, а з їх нескінченною кількістю, які отримуються при різних значеннях параметра. При цьому може статися так, що при деяких значеннях параметра рівняння не має розв’язків, при деяких має єдиний розв’язок, при деяких - безліч тощо. Розв’язати рівняння з параметрами означає для кожного значення параметра встановити, чи має рівняння розв’язки; якщо так, то встановити ці розв’язки, які в більшості випадках залежать від параметра. На жаль, універсальних методів розв’язування задач із параметрами немає. Найбільш загальну схему розв’язування можна окреслити наступним чином: спочатку знаходять область допустимих значень параметра (якщо вона відрізняється від множини всіх дійсних чисел), потім цю множину розбивають на випадки, в кожному з яких відповідь одна й та сама (наприклад, рівняння не має розв'язків або розв'язок виражається одним і тим самим виразом через параметр). Зауважимо, що важливим етапом розв'язування задач з параметрами є запис відповіді. У відповіді до таких задач збираємо всі раніше оримані результати, зазвичай записуючи їх у формі «якщо..., то...»

В програмах по математиці для середніх шкіл задачам з параметрами відводять незначне місце. Тому, в перше чергу, необхідно вказати розділи загальноосвітньої математики, в яких присутня сама ідея параметра.

Так, з параметрами учні зустрічаються при введенні деяких понять. Розглянемо як приклади наступні об'єкти: функція пряма пропорційність $y = kx$ (де x, y - змінні, k - параметр, $k \neq 0$);

лінійна функція $y = kx + b$ (де x, y - змінні, k, b - параметри);

лінійне рівняння $ax + b = 0$ (де x - змінна, a, b - параметри);

рівняння першої степені $ax + b = 0$ (де x - змінна, a, b - параметри, $a \neq 0$);

квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (де x - змінна, a, b, c - параметри, $a \neq 0$);

До задач з параметрами, які розглядаються в курсі середньої школи, можна віднести, наприклад, пошук розв'язків лінійних та квадратних рівнянь в загальному виді, дослідження кількості їх коренів в залежності від значень параметрів

Природно, що такий невеликий клас задач багатьом учням не дозволяє усвідомити головне: параметр (фіксоване, але невідоме число) має двоїсту природу. По-перше, параметр можна розглядати як число, а по-друге, - це невідоме. Таким чином, ділення на вираз, який містить параметр, добування кореня парного ступеня із таких виразів потребує попередніх досліджень. Як правило, результати досліджень впливають і на розв'язок, і на відповідь.

Головне, що необхідно усвідомити при роботі з параметром - це необхідність обережного відношення до фіксованого, але невідомого числа.

Магістерська робота присвячена розробці методики викладання теми “Графічні методи розв’язування задач з параметрами”.

Робота складається із вступу, 3 розділів, висновку та списку використаної літератури. Кожний із 3 розділів присвячений одному із графічних прийомів. Розділи діляться на параграфи. Кожний параграф побудовано за такою структурою. На початку параграфа наводиться необхідний теоретичний матеріал, потім зразок розв’язання задач.

I розділ роботи “Координатна площина (x, y)" присвячений побудові графічного образу на координатній площині (x, y).

II розділ роботи “Координатна площина (x, a)" присвячений побудові графічного образу на координатній площині (x, a).

III розділ роботи “Застосування похідної” присвячений побудові графічного образу із застосуванням похідної.

Всі задачі подібні до задач, наведених в посібниках [1] –[7].

Розділ **1.** *Координатна площина* (x, y)

На площині (x, y) функція $y = f(x, a)$ задає сукупність кривих, які залежать від параметра a. Кожній функції f властиві деякі властивості. Нас буде цікавити питання: за допомогою якого перетворення площини (паралельне перенесення, поворот, гомотетія і т.д.) можна перейти від однієї сукупності кривих до будь-якої іншої. Кожному з таких перетворень буде присвячено окремий підрозділ.

Не завжди графічний образ сукупності функцій $y = f(x, a)$ описується простим перетворенням. Тому в таких ситуаціях необхідно зосередити увагу не на тому, як пов'язані криві однієї сукупності, а на самі криві. Іншими словами, можна виділити ще один тип задач, в яких ідея розв'язку перш за все заснована на властивостях конкретних геометричних фігур, а не властивостях взагалі. Нас будуть цікавити прямі та параболи. Такий вибір обумовлено окремим (основним) положенням лінійної та квадратичної функції в шкільній математиці.

Побудова графічних образів в даній роботі заснована на побудові графіків вид $y = f(x + a),\quad y = f(x) + a,\quad y = f(|x|),\quad y = |f(x)|,\quad y = f(kx),\quad y = kf(x)$ за допомогою перетворень графіка функції $y = f(x)$.

1.1 Паралельне перенесення

Почнемо з задач, в який членами сім'ї кривих $y = f(x;a)$ будуть прямі.

1. Для якого найбільшого цілого значення параметра a рівняння $||x-4|-a|=11$ має два розв'язки?

Розв'язання.

Розв'яжемо рівняння графічним способом.

Дане рівняння має два розв'язки, коли графіки функцій $g(x)=||x-4|-a|$ та $f(x)=11$ перетинаються у двох точках.

Графіком функції $f(x)=11$ є пряма, яка паралельна осі Ox і проходить через точку (0; 11).

Розглянемо різні положення графіка функції $g(x)=||x-4|-a|$ залежно від значення параметра a та визначимо кількість точок перетину графіків $f(x)$ та $g(x)$.

1. Якщо $a=0$, $g(x)=g_1(x)=|x-4|$.

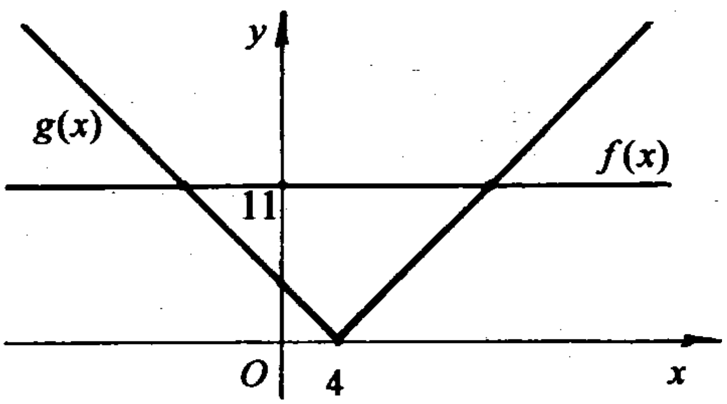

Рис.1

Графіки перетинаються у двох точках, тому рівняння має два розв'яжи.

2. Якщо $a<-11$, графік функції $g(x)$ можна отримати з графіка $g_1(x)$ паралельним перенесенням вздовж осі Oy на $|a|$ одиниць вгору.

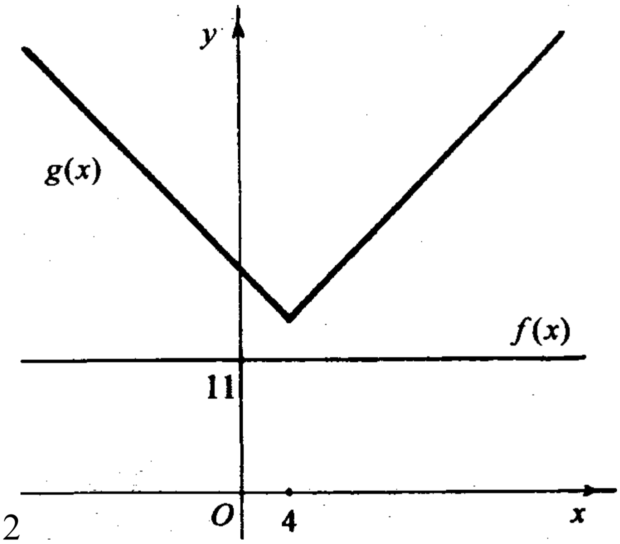

Рис.2

У даному випадку точок перегину немає. Рівняння розв'язків немає.

3. Якщо a=-11, маємо одну точку перетину графіків $g(x)$і f(x).

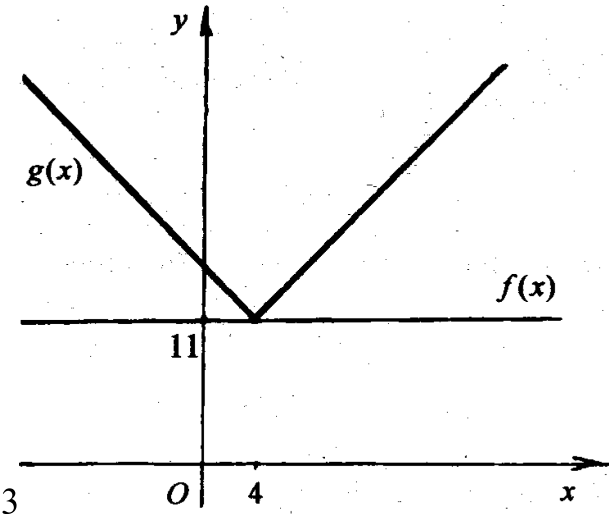

Рис.3

4. Якщо -11<a<0, графіки функцій $f(x)$і $g(x)$перетинаються у двох точках і рівняння має два розв'язки.

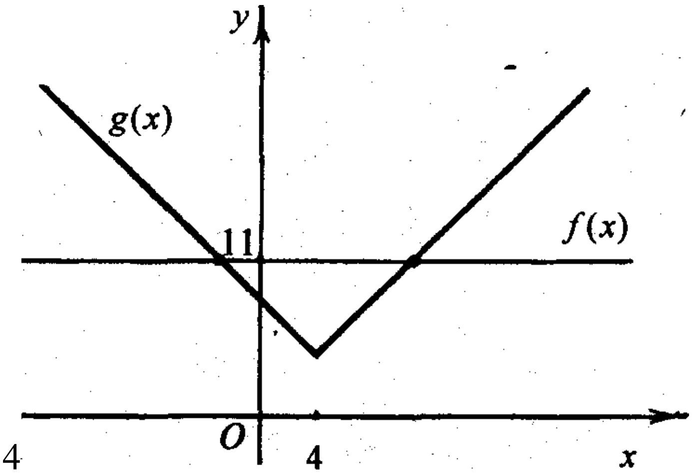

Рис.4

5. Якщо $0<a<11$, графік функції $g(x)$ можна отримати з графіка $g_1(x)=|x-4|$ так: виконати паралельне перенесення графіка $g_1(x)$вздовж осі Оyна $|a|$ одиниць вниз; частину графіка, яка знаходиться під віссю Ox, симетрично відобразити відносно осі Ox.

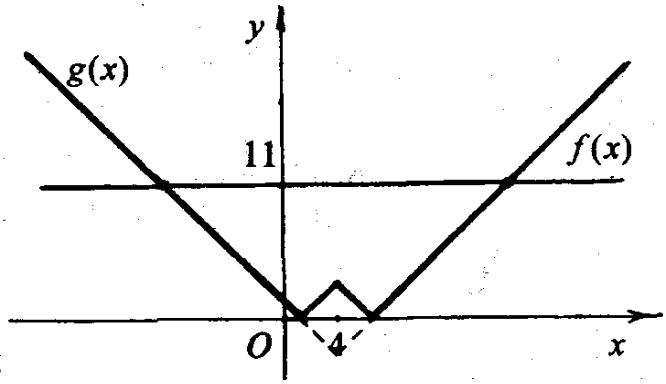

Рис.5

У цьому випадку рівняння має два розв'язки.

6. Якщо a=11, графіки функцій $f(x)$ та $g(x)$ перетинаються в трьох точках.

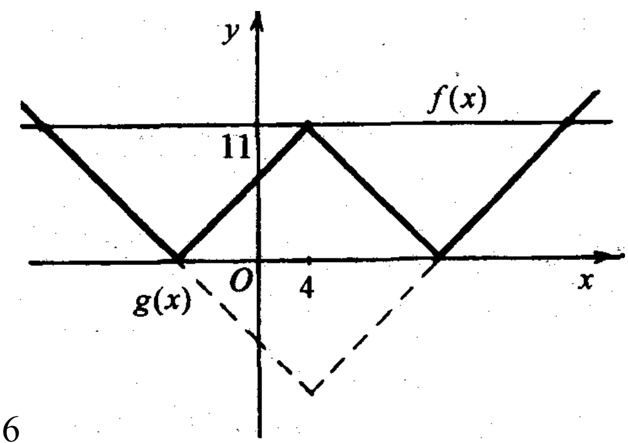

Рис.6

7. Якщо $a>11$, рівняння матиме чотири розв'язки, оскільки графіки $f(x)$і $g(x)$ перетинаються в чотирьох точках.

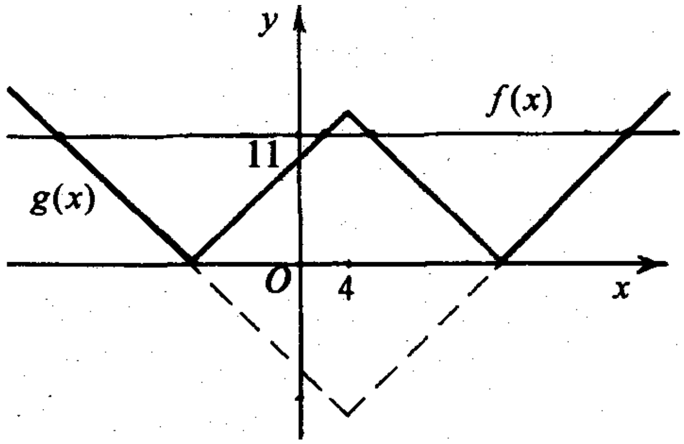

Рис. 1.1.1

Як видно з наведених міркувань, рівняння має два розв'язки, коли - $11<a<11$ (випадки 1, 4 і 5). Тому $a=10$ – найбільше ціле значення параметра, яке задовольняє умову.

Відповідь: 10.

2. Для кожного значення параметра *a* визначити число розв'язків рівняння $\left|(x-1)^2-4\right|=a$.

Розв'язання. Побудуємо графіки функцій $y=\left|(x-1)^2-4\right|$ та $y=a$.

З рисунка 1.1.2 випливає, якщо $a\in(-\infty;0)$ - розв'язків немає, якщо $a=0$, тоді 2 розв'язки, якщо $a\in(0;4)$ - 4 розв'язки, якщо $a=4$ - 3 розв'язки, якщо $a\in(4;\infty)$ - 2 розв'язки.

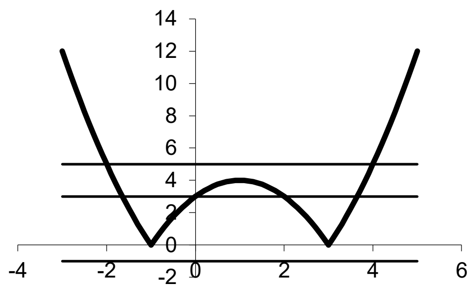

Рис.1.1.2

Відповідь: якщо $a\in(-\infty;0)$ - розв'язків немає, якщо $a=0$, то 2 розв'язки, якщо $a\in(0;4)$, то 4 розв'язки, якщо $a=4$, то 3 розв'язки, якщо $a\in(4;\infty)$, то 2 розв'язки.

3. Для кожного значення параметра *a* визначити число розв'язків рівняння $\sqrt{3|x|-x^2}=a$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y=\sqrt{3|x|-x^2}$. Знайдемо ОДЗ функції $3|x|-x^2\geq 0$, тобто $x\in[-3,3]$.

$y=a$ графіком функції є пряма паралельна віссі x.

З рисунка 1.1.3 випливає, якщо $a\in(-\infty;0)$ - розв'язків немає, якщо $a=0$, то 3 розв'язки, якщо $a\in(0;1{,}5)$, то 4 розв'язки, якщо $a=1{,}5$, то 2 розв'язки, якщо $a\in(1{,}5;\infty)$ - немає розв'язків.

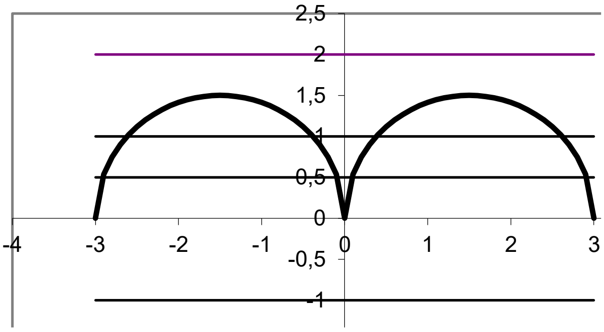

Рис.1.1.3

Відповідь: якщо $a \in (-\infty;0)$ - розв'язків немає, якщо $a = 0$, то 3 розв'язки, якщо $a \in (0;1{,}5)$, то 4 розв'язки, якщо $a = 1{,}5$, то 2 розв'язки, якщо $a \in (1{,}5;\infty)$ - немає розв'язків.

4. Знайти число розв'язків рівняння $\left|x^2 - 6x + 8\right| + \left|x^2 - 6x + 5\right| = a$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \left|x^2 - 6x + 8\right| + \left|x^2 - 6x + 5\right|$.

$y = a$ графіком функції є пряма паралельна віссі x.

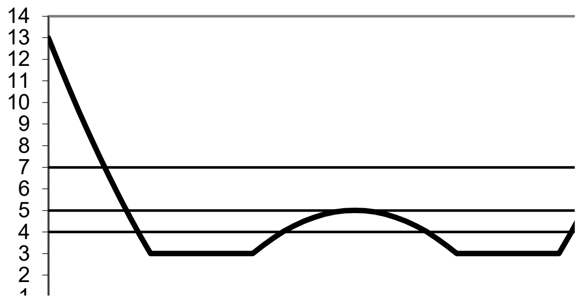

Рис.1.1.4

З рисунка 1.1.4 випливає, якщо $a \in (-\infty;3)$ - розв'язків немає, якщо $a = 3$, то розв'язки $x \in [1;2]$ або $x \in [4;5]$, якщо $a \in (3;5)$, то 4 розв'язки, якщо $a = 5$, то 3 розв'язки, якщо $a \in (5;\infty)$, то 2 розв'язки.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty;3)$ - розв'язків немає, якщо $a = 3$, то розв'язки

$x \in [1;2]$ або $x \in [4;5]$, якщо $a \in (3;5)$, то 4 розв'язки, якщо $a = 5$, то 3 розв'язки, якщо $a \in (5;\infty)$, то 2 розв'язки.

5. Розв'язати рівняння $\log_2(-|x^2 - 6x + 8| + 5) = a$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \log_2(-|x^2 - 6x + 8| + 5)$. Знайдемо ОДЗ: $-|x^2 - 6x + 8| + 5 > 0$; $|x^2 - 6x + 8| - 5 < 0$; $x^2 - 6x + 3 < 0$;

$x^2 - 6x + 3 = 0$; D=36-12=24; $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{24}}{2}$, звідси $x \in (3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6})$.

$y = a$ графіком функції є пряма паралельна віссі x.

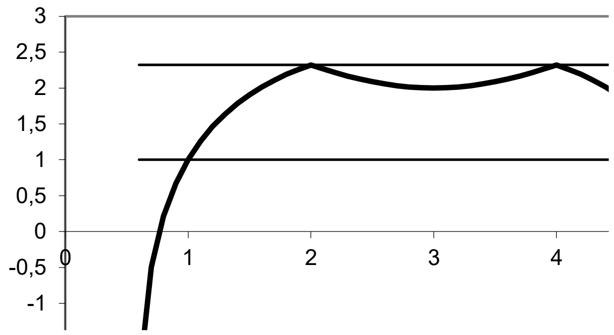

Рис.1.1.5

Розв'язуючи рівняння $\log_2(-|x^2 - 6x + 8| + 5) = a$,

$\log_2(-|x^2 - 6x + 8| + 5) = \log_2 2^a$; $-|x^2 - 6x + 8| + 5 = 2^a$ знаходимо $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6 - 2^a}$.

Якщо $a \in (-\infty;2)$, то $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6 - 2^a}$; якщо $a = 2$, то $x = 3 \pm \sqrt{6 - 4} = 3 \pm \sqrt{2}$ або $x = 3$.

Якщо $x = 2$ або $x = 4$, то $\log_2 5 = a$, звідси якщо $a \in (2; \log_2 5)$, то $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6 - 2^a}$, якщо $a \in (\log_2 5; \infty)$, то розв'язків немає.

Відповідь: Якщо $a \in (-\infty;2)$, то $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6 - 2^a}$; якщо $a = 2$, то

$x = 3 \pm \sqrt{6-4} = 3 \pm \sqrt{2}$ або $x = 3$.

Якщо $x = 2$ або $x = 4$, то $\log_2 5 = a$, звідси якщо $a \in (2; \log_2 5)$, то $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6 - 2^a}$, якщо $a \in (\log_2 5; \infty)$, то розв'язків немає.

6. При яких а рівняння $||4x| - 2| = x - a$ має рівно три розв'язки?

Розв'язання. Побудуємо графіки функцій $y = ||4x| - 2|$ та $y = x - a$.

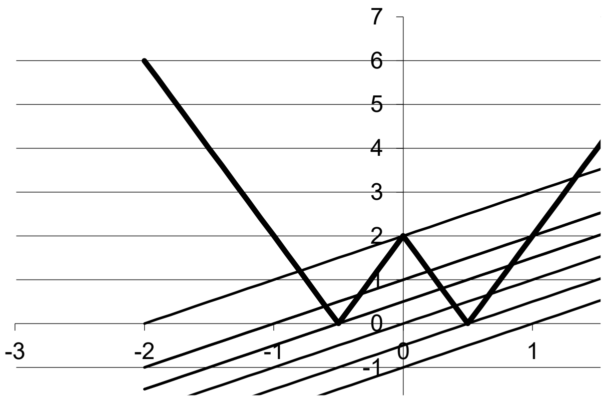

Рис.1.1.6

Графіки $y = ||4x| - 2|$ та $y = x - a$ мають три точки перетину при а=-2 та а=-0,5.

Відповідь: а=-2 та а=-0,5.

7. При яких значення параметра *a* рівняння $\log_{(x-1)}(x + a) = 0{,}5$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. $\log_{(x-1)}(x + a) = 0{,}5$; $\log_{(x-1)}(x + a) = \log_{(x-1)}(x - 1)^{0,5}$; $(x + a) = (x - 1)^{0,5}$.

Побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x-1}$ та $y = x + a$.

Знайдемо ОДЗ рівнянь $y = \sqrt{x-1} : x - 1 > 0,\ x - 1 \neq 1;$

$$y = x + a : x + a > 0$$

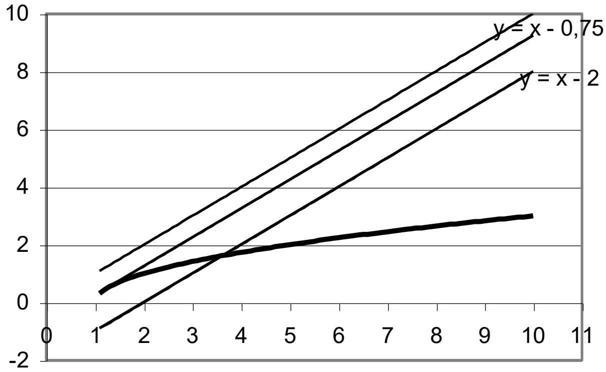

Рис.1.1.7

Графіки функцій $y=\sqrt{x-1}$ та $y=x+a$ мають одну точку перетину при $a=-0{,}75$ та $a<-1$.

Відповідь: $a=-0{,}75$ та $a<-1$.

8. При яких значеннях а рівняння $\sqrt{x+a}-x=0$ має два корені?

Розв'язання. $\sqrt{x+a}-x=0$, $\sqrt{x+a}=x$.

Побудуємо графіки функцій $y=\sqrt{x+a}$ та $y=x$. ОДЗ: $\begin{cases} x+a\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$,

звідки $a\geq 0$. Знаходимо дві точки перетину графіків: $\sqrt{x+a}=x$, $x^2-x-a=0$,

D $=1+4a$ звідси $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$, $1+4a>0$, $a>-0{,}25$. Тоді для параметра a справедлива нерівність $-0{,}25<a\leq 0$.

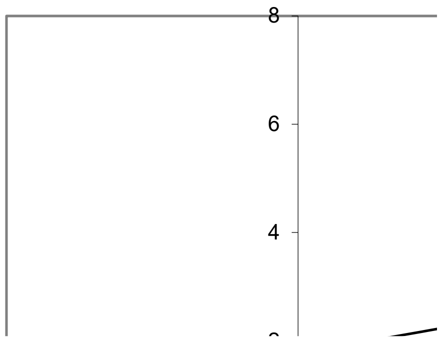

Рис.1.1.8

Відповідь: $-0{,}25 < a \le 0$.

9. При яких a рівняння $|x-a|-|2x+4|=4$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Запишемо задане рівняння в такому виді: $|x-a|=|2x+4|+4$. Права частина рівняння $y=|2x+4|+4$ задає нерухомий "кут", ліва частина $y=|x-a|$ - "кут", вершина якого рухається по вісі абсцис.

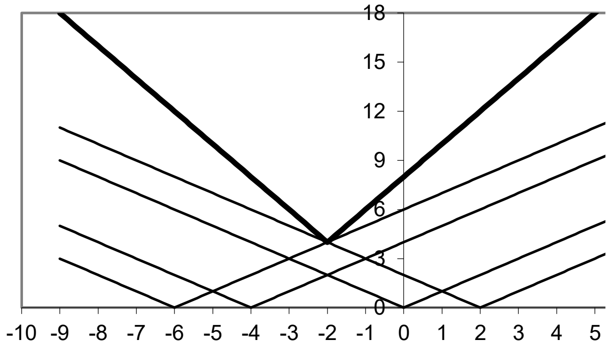

Рис.1.1.9

Задане рівняння буде мати єдиний розв'язок, якщо одна з сторін рухомого "кута" пройде через точку (-2,4). Маємо $4=|-2-a|$, $4=-2-a$, $a=-6$, $-4=-2-a$, $a=2$.

Відповідь: $a=-6$ або $a=2$.

10. Знайти всі значення параметра b, при яких рівняння $\lg 2|x|+\lg(2-x)-\lg(\lg b)=0$ має єдиний розв'язок

Розв'язання. $\lg 2|x|+\lg(2-x)-\lg(\lg b)=0$, $\lg 2|x|+\lg(2-x)=\lg(\lg b)$, $\lg 2|x|(2-x)=\lg(\lg b)$. Позначимо $\lg b = a$. Запишемо рівняння, яке рівносильне початковому: $lg(2|x|(2-x))=lga$, $2|x|(2-x)=a$. Переходимо до рівносильної системи

$$\begin{cases} 2|x|(2 - x) = a, \\ x < 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Будуємо графік функції $y = 2|x|(2 - x)$ з областю визначення $x < 2$ та $x \neq 0$ (рис.1.1.10).

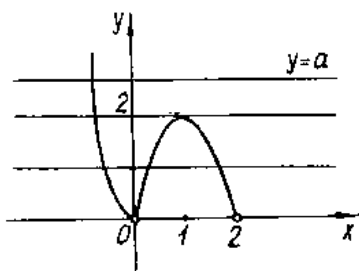

Рис.1.1.10

Знайдений графік прямі $y = a$ повинна перетинати тільки в одній точці. З рисунка видно, що ця вимога виконується лише при a > 2, тобто lg b > 2, b > 100.

Відповідь: b > 100.

1.2 Поворот

В цьому параграфі вибір графіків кривих не є різноманітним, а точніше він одноваріантний: графіки кривих $y = f(x; a)$ - прямі. Більш того, центр повороту належить прямій. Іншими словами, ми обмежимося графіками виду $y - y_0 = a(x - x_0)$, де $(x_0; y_0)$ - центр повороту.

Такий вибір обумовлено тим, що в рівності $f(x, y, a) = 0$ складно побачити аналітичне задання повороту кривих, які відрізняються від прямих. Тому про поворот, як про метод, доцільно говорити лише для прямих вказаного виду.

1. Розв'язати рівняння $|2x - 4| = ax + 3$ і визначити значення a, при яких воно має єдиний розв'язок.

Розв'язання.

$|2x - 4| = ax + 3$; $|2x - 4| - 3 = ax$.

Побудуємо графіки функцій $y = |2x - 4| - 3$ та $y = ax$. Прямі $y - 0 = a(x - 0)$ переходять друг в друга шляхом перетворення повороту з центром в точці О (0; 0).

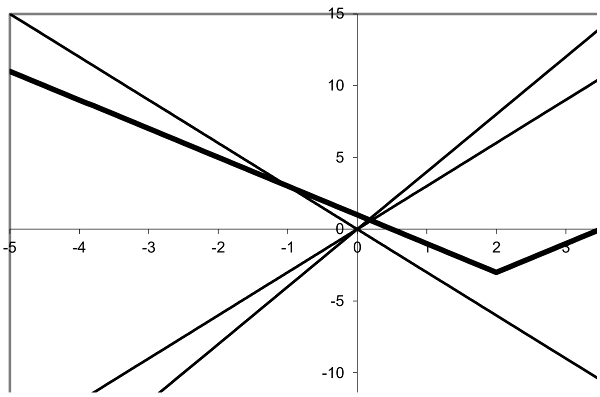

Рис.1.2.1

Якщо $x \in (-\infty, 2)$, то $-(2x-4)-3 = ax$; $-2x+4-3 = ax$; $ax+2x = 1$; $(a+2)x = 1$; звідки $x = \frac{1}{a+2}$.

Якщо $x \in (2, +\infty)$, то $(2x-4)-3 = ax$; $2x-4-3 = ax$; $ax-2x = -7$; $(a-2)x = -7$; звідки $x = \frac{-7}{a-2}$.

Знайдемо параметр a: $\frac{1}{a+2} < 2$; $\frac{1}{a+2} - 2 < 0$; звідки $\frac{-2a-3}{a+2} < 0$; $\frac{2a+3}{a+2} > 0$; тобто $a < -2, a > -1{,}5$.

$\frac{-7}{a-2} \geq 2$; $\frac{-7}{a-2} - 2 \geq 0$, звідки $\frac{-2a-3}{a-2} \geq 0$, $\frac{2a+3}{a-2} \leq 0$ тобто $-1{,}5 \leq a \leq 2$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -2)$ тоді $x = \frac{1}{a+2}$; якщо $a \in (-2; -1{,}5)$ на цьому проміжку коренів немає; якщо $a \in (-1{,}5; 2)$ тоді $x = \frac{1}{a+2}, x = \frac{-7}{a-2}$; якщо $a \in \{-1{,}5\}$ тоді $x = \frac{-7}{a-2}$; якщо $a \in [2; \infty)$ тоді $x = \frac{1}{a+2}$.

2. При яких a рівняння $\left|x^2 - 5x + 6\right| = ax$ має три розв'язки?

Розв'язання. Побудуємо графіки функцій $y = \left|x^2 - 5x + 6\right|$ та $y = ax$. Прямі $y - 0 = a(x - 0)$ переходять друг в друга шляхом перетворення повороту з центром в точці О (0; 0).

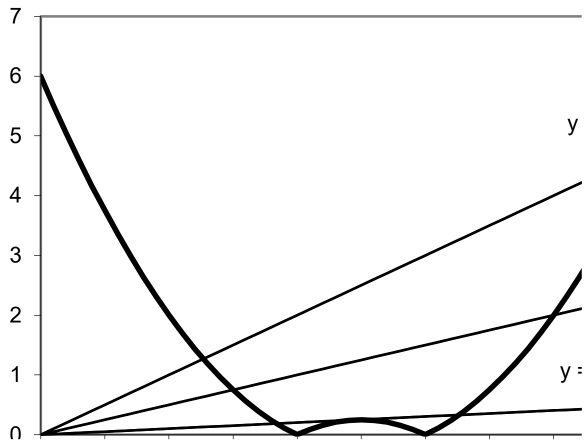

Рис.1.2.2

Рівняння буде мати три розв'язки, коли пряма $y = ax$ перетинає параболу в двох точках і дотикається до вершини, тобто коли $ax = -x^2 + 5x - 6$;

$$-x^2 + 5x - 6 - ax = 0; \quad -x^2 + (5-a)x - 6 = 0;$$

$$D = (5-a)^2 - 24 = 25 - 10a + a^2 - 24 = a^2 - 10a + 1 = 0;$$

$$a^2 - 10a + 1 = 0; \; D = 100 - 4 = 96; \; a_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}.$$

Обираємо $a = 5 - 2\sqrt{6}$, так як при $a = 5 + 2\sqrt{6}$ пряма дотикається вітки параболи нижче вісі абсцис.

Відповідь: $a = 5 - 2\sqrt{6}$.

3. При яких значеннях a рівняння $\log_{x+1} ax = 2$ має рівно 1 розв'язок? Знайти його.

Розв'язання. Запишемо ОДЗ рівняння: $\begin{cases} ax > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1. \end{cases}$

$\log_{x+1} ax = 2$; $\log_{x+1} ax = \log_{x+1}(x+1)^2$; $ax = (x+1)^2$.

Побудуємо графіки функцій $y = ax$ - пряма, $y = (x+1)^2$ - парабола вітки якої напрямлені вгору та враховуючи ОДЗ.

Прямі $y - 0 = a(x - 0)$ переходять друг в друга шляхом перетворення повороту з центром в точці О (0; 0).

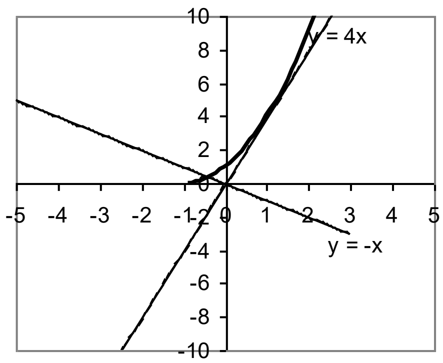

Рис.1.2.3

Розв'яжемо рівняння: $ax = (x+1)^2$; $ax = x^2 + 2x + 1$; $x^2 + (2-a)x + 1 = 0$. Знайдемо $D = (2-a)^2 - 4 = 4 - 4a + a^2 - 4 = a^2 - 4a$.

Якщо $D = 0$, то маємо 1 розв'язок: $a^2 - 4a = 0$, $a(a-4) = 0$, $a_1 = 0,\ \ a_2 = 4$. Значення $a_1 = 0$ відкидаємо згідно з ОДЗ. Якщо $a_2 = 4$, тоді маємо $4x = x^2 + 2x + 1$; $x^2 - 2x + 1 = 0$; $(x-1)^2 = 0$; $x = 1$.

Якщо $D > 0$, то маємо 2 розв'язки: $x_{1,2} = \dfrac{a - 2 \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$. Згідно з ОДЗ $x > -1$, тобто $\dfrac{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} > -1$; $\dfrac{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} + 1 > 0$; звідки $a < 0$.

Відповідь: якщо $a = 4$, тоді $x = 1$;

якщо $a < 0$, тоді $x = \dfrac{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$.

4. При яких значеннях параметра *a* рівняння $ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. $ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$; $ax = \sqrt{8x - x^2 - 15} + 1$.

Розглянемо функції $y = ax$ та $y = \sqrt{8x - x^2 - 15} + 1$.

$y = \sqrt{8x - x^2 - 15} + 1$; $y - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$; $(y-1)^2 = (\sqrt{8x - x^2 - 15})^2$;

$(y-1)^2 = 8x - x^2 - 15$; $(y-1)^2 + x^2 - 8x + 15 = 0$; $(y-1)^2 + x^2 - 8x + 16 - 1 = 0$;

$(y-1)^2 + (x-4)^2 = 1$; при $y \geq 1$. $(y-1)^2 + (x-4)^2 = 1$ графіком є півколо з центром в точці (4;1) і радіусом R=1.

На рис.1.2.4 це дуга *AB*. Всі прямі *y = ax,* які проходять між променями *OA* та *0B* перетинають дугу в одній точці. Також одну точку с дугою мають пряма *OB* та дотична *OM*.

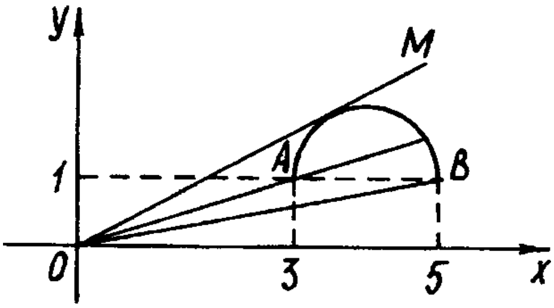

Рис.1.2.4

Кутові коефіцієнти прямих *0B* та *OA* відповідно дорівнюють $k = \frac{1}{5}$ та $k = \frac{1}{3}$. Кутовий коефіцієнт дотичної *OM* дорівнює $k = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$. Дійсно, вимагаючи від системи

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-1)^2 = 1, \\ y = ax, \\ a > 0 \end{cases}$$

мати єдиний розв'язок, знаходимо $a = \frac{8}{15}$.

Таким чином, прямі $y = ax$ мають з дугою AB тільки одну спільну точку при $\frac{1}{5} \le a < \frac{1}{3}$ або $a = \frac{8}{15}$. *Відповідь:* $\frac{1}{5} \le a < \frac{1}{3}$ або $a = \frac{8}{15}$.

5. При яких значеннях a рівняння $\left||x|-3\right| = a(x-9)$ має один, два, три чотири розв'язки?

Розв'язання. Побудуємо графіки функцій $y = \left||x| - 3\right|$ та $y = a(x-9)$. Прямі $y - 0 = a(x-9)$ переходять друг в друга шляхом перетворення повороту з центром в точці O (9; 0).

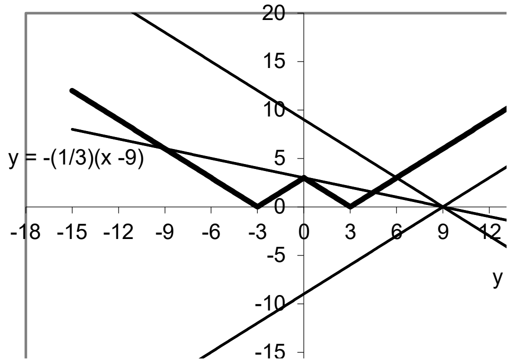

Рис.1.2.5

З рисунка видно, якщо $a \le -1$, то рівняння має 1 розв'язок, якщо $-1 < a < -\frac{1}{3}$, то 2 розв'язки, якщо $a = -\frac{1}{3}$, то 3 розв'язки, якщо $-\frac{1}{3} < a < 0$, то 4 розв'язки, якщо $a = 0$, то 2 розв'язки, якщо $a > 1$, то1 розв'язок.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, то 1 розв'язок, якщо $a \in (-1; -\frac{1}{3}) \cup \{0\}$, то 2 розв'язки, якщо $a = -\frac{1}{3}$, то 3 розв'язки, якщо $a \in (-\frac{1}{3}; 0)$, то 4 розв'язки.

6. При яких a рівняння $\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}=ax$ має розв'язки?

Розв'язання. Запишемо ОДЗ рівняння: $\begin{cases} 6-x\geq 0 \\ x+3\geq 0 \end{cases}$, звідки $-3\leq x\leq 6$.

Побудуємо графіки функцій $y=\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}$ та $y=ax$.

Прямі $y-0=a(x-0)$ переходять друг в друга шляхом перетворення повороту з центром в точці О (0; 0).

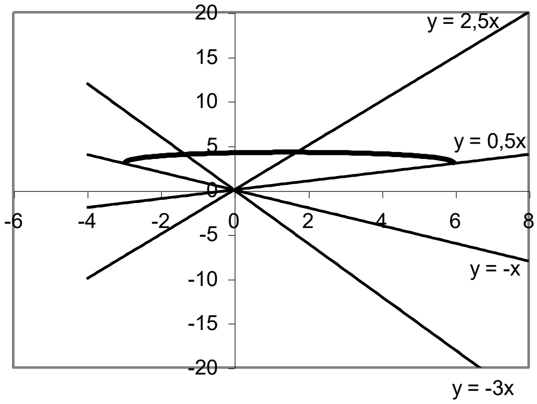

Рис.1.2.5

З рисунка видно, що при $a\leq -1$ та $a\geq \frac{1}{2}$ рівняння має розв'язки.

Відповідь: $a\leq -1$ та $a\geq \frac{1}{2}$.

7. При яких значеннях a рівняння $\log_{2x}(ax+1)=\frac{1}{2}$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ рівняння: $\begin{cases} 2x>0 \\ 2x\neq 1 \\ ax+1>0 \end{cases}$, $\begin{cases} x>0, \quad x\neq \frac{1}{2} \\ a>-\frac{1}{x} \end{cases}$.

Виконаємо перетворення рівняння $\log_{2x}(ax+1)=\frac{1}{2}$;

$\log_{2x}(ax+1)=\frac{1}{2}\log_{2x}2x$; $ax+1=\sqrt{2x}$, $ax=\sqrt{2x}-1$. Побудуємо графіки функцій $y=ax$ та $y=\sqrt{2x}-1$, враховуючи ОДЗ.

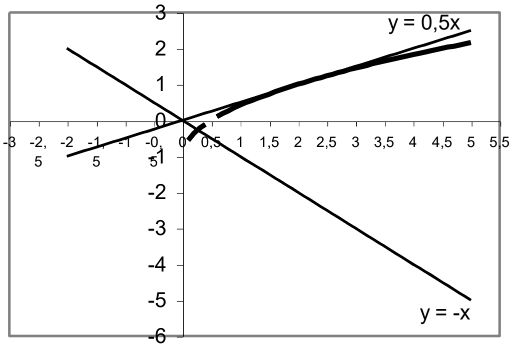

Рис.1.2.7

Знайдемо точку дотику двох графіків функцій: $ax=\sqrt{2x}-1$; $ax+1=\sqrt{2x}$; $(ax+1)^2=(\sqrt{2x})^2$; $a^2x^2+2ax+1=2x$; $a^2x^2+(2a-2)x+1=0$, $D=(2a-2)^2-4a^2=4a^2-8a+4-4a^2=-8a+4$; $D=0$; $-8a+4=0$; $a=\frac{1}{2}$.

Також з рисунка видно, що рівняння буде мати єдиний розв'язок при $a<0$.

Відповідь: $a=\frac{1}{2}$ або $a<0$.

8. Рівняння $2\log_7(cx-2)=\log_{\sqrt{7}}(-x^2-9x-18)$.Знайти при якому с рівняння має тільки один розв'язок.

Розв'язання. Запишемо ОДЗ рівняння:

$$\begin{cases} cx-2>0 \\ -x^2-9x-18>0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x>\dfrac{2}{c} \\ -6<x<-3 \end{cases}.$$

Перепишемо рівняння у вигляді: $2\log_7(cx-2)=2\log_7(-x^2-9x-18)$;

$\log_7(cx-2)=\log_7(-x^2-9x-18)$; $cx-2=-x^2-9x-18$; $cx=-x^2-9x-16$.

Побудуємо графіки функцій $y=cx$ та $y=-x^2-9x-16$. Прямі $y-0=c(x-0)$ переходять друг в друга шляхом перетворення повороту з центром в точці O (0; 0).

Розв'язуємо рівняння: $cx+x^2+9x+16=0$; $x^2+(9+c)x+16=0$; $D=(9+c)^2-64$

Точку дотику двох функцій знайдемо з умови: $D=0$, тоді $(9+c)^2-64=0$, $(9+c-8)(9+c+8)=0;$ $(c+1)(c+17)=0;$ $c=-1;$ $c=-17$ (не задовольняє умову задачі). Отже $c=-1$.

Інші значення параметра c знайдемо з ОДЗ: $-6<\frac{2}{c}<-3$, звідки $-\frac{2}{3}\le c<-\frac{1}{3}$.

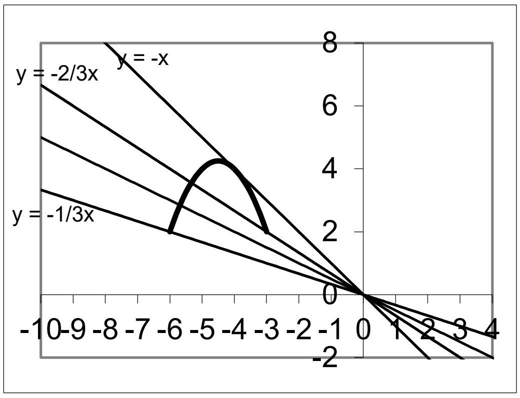

Рис.1.2.8

Відповідь: $c=-1$, $-\frac{2}{3}\le c<-\frac{1}{3}$.

9. Знайти всі значення параметра a, при яких найменше значення функції $f(x) = ax - \left| x^2 + 6x + 8 \right|$ більше 2.

Розв'язання. Переформулюємо задачу: знайти a, при яких нерівність $ax - \left| x^2 + 6x + 8 \right| > 2$ має хоча б один розв'язок.

Перепишемо нерівність у вигляді: $\left| x^2 + 6x + 8 \right| < ax - 2$. Побудуємо графіки функцій $y = \left| x^2 + 6x + 8 \right|$ та $y = ax - 2$.

Положенню I відповідає $a = -\frac{1}{2}$ ($y = -\frac{1}{2}x - 2$ проходить через точку (-4,0)), а положенню II (момент дотику: $x^2 + 6x + 8 = ax - 2$; $x^2 + (6-a)x + 10 = 0$; $D = (6-a)^2 - 40 = 36 - 12a + a^2 - 40 = a^2 - 12a - 4;$) $D = 0$; $a^2 - 12a - 4 = 0;$ $D = 144 + 16 = 160;$ $a_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{160}}{2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{10}}{2} = 6 \pm 2\sqrt{10};$ відповідає $a = 6 + 2\sqrt{10}$. Нерівність буде мати розв'язки, якщо прямі I та II "крутити" відповідно за та проти годинникової стрілки до вертикального положення.

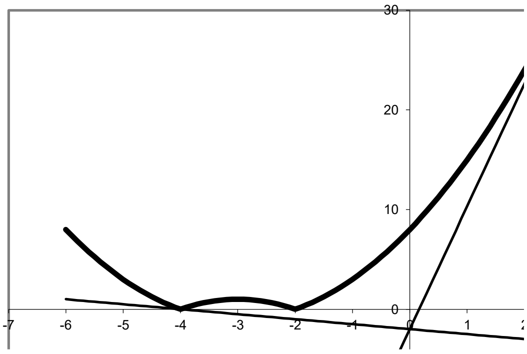

Рис.1.2.9

Відповідь: $a < -\frac{1}{2}$ або $a > 6 + 2\sqrt{10}$.

10. При яких значеннях параметра *a* рівняння $|2x + a| = (a - 2)x - \frac{3}{4}$ не має розв'язків?

Розв'язання. Розглянемо функції $y = |2x + a|$ та $y = (a - 2)x - \frac{3}{4}$, які задають: сукупність "кутів" та сукупність прямих, які проходять через точку $\left(0; -\frac{3}{4}\right)$. Оскільки кожен з графіків функцій знаходиться у "русі", то при пошуку їх спільних точок (або умов їх відсутності) виникають ускладнення. Тому спробуємо застосувати такий метод: "зупинимо" один з рухів за допомогою заміни.

Нехай $2x + a = t$. Тоді $x = \frac{t - a}{2}$ і початкове рівняння приймає вигляд $|t| = \frac{(a - 2)t}{2} - \frac{2a^2 - 4a + 3}{4}$. Всі прямі виду $y = \frac{(a - 2)t}{2} - \frac{2a^2 - 4a + 3}{4}$ проходять через точку $M\left(0; -\frac{2a^2 - 4a + 3}{4}\right)$. Оскільки положення точки *M* не зафіксовано, то поворот не формує сукупність прямих. Однак сама ідея повороту є результативною.

Очевидно ордината точки *M* завжди від'ємна. За допомогою рисунку легко побачити, що якщо прямі сукупність прямих проходять між сторонами кута *AMB* $(\angle AMO = \angle OMB = 45°)$, то в цьому і тільки в цьому випадку початкове рівняння має розв'язки.

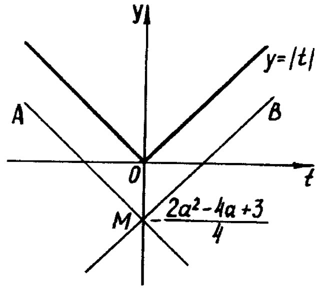

Рис.1.2.10

Таким чином, кутовий коефіцієнт $\frac{a-2}{2}$ прямих задовольняє умові $-1 \le \frac{a-2}{2} \le 1$; $-2 \le a-2 \le 2$; звідси $0 \le a \le 4$.

Відповідь: $0 \le a \le 4$.

1.3 ГОМОТЕТІЯ. СТИСК ДО ПРЯМОЇ

1. Скільки розв'язків в залежності від a має рівняння $x^2 + a|x-3| = 0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $a|x-3| = -x^2$. Побудуємо графіки функцій $y = a|x-3|$ (гомотетичні кути з вершиною в точці (3;0)) та $y = -x^2$. При $a > 0$ графіки наведені на рисунку 1

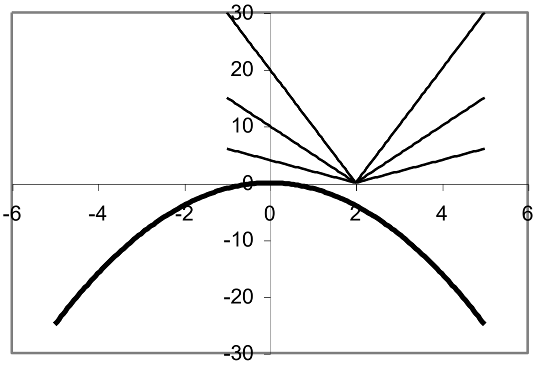

Рис.1

З рис.1 видно, що при $a > 0$ спільних точок графіки не мають, рівняння розв'язків немає.

При $a \le 0$ графіки $y = a|x-2|$ та $y = -x^2$ наведені на рисунку 1.3.1.

З рис.1.3.1 видно, якщо $a = 0$ $y = 0$, то $x = 0$ - 1 розв'язок;

якщо $a \in (-11{,}5;0)$, то 2 точки перетину графіків (2 розв'язки);

якщо $a = -11{,}5$, то 3 точки перетину графіків (3 розв'язки);

якщо $a \in (-\infty;-11{,}5)$, то 4 точки перетину графіків (4 розв'язки).

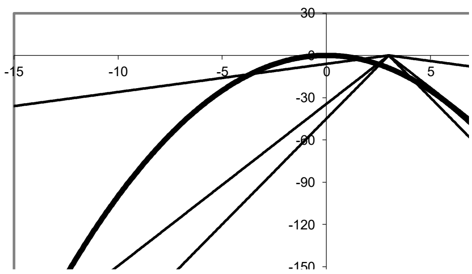

Рис.1.3.1

Відповідь: якщо $a \in (-11{,}5;0)$, то 2 точки перетину графіків (2 розв'язки), якщо $a = -11{,}5$, то 3 точки перетину графіків (3 розв'язки), якщо $a \in (-\infty;-11{,}5)$, то 4 точки перетину графіків (4 розв'язки).

2. При яких значеннях a рівняння $2 + \frac{x^2}{a^3} = 4\sqrt{x}$ має тільки один розв'язок.

Розв'язання. $2 + \frac{x^2}{a^3} = 4\sqrt{x}$; $\frac{x^2}{a^3} = 4\sqrt{x} - 2$.

Побудуємо графіки функцій $y = \frac{x^2}{a^3}$ (гомотетичні вітки парабол з центром гомотетії (0,0)) та $y = 4\sqrt{x} - 1$: ОДЗ рівняння: $x \ge 0$.

Якщо $a < 0$ маємо 1 розв'язок.

Розглянемо випадок дотику двох графіків.

Запишемо рівняння дотичних до кожного з графіків в точці (x_0, y_0):

$$\begin{cases} y - y_0 = \dfrac{2}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) \\ y - y_0 = \dfrac{2x_0}{a^3}(x - x_0) \end{cases}$$, звідси $a = \sqrt{x_0}$.

Підставляємо x_0 в рівняння $\frac{x^2}{a^3} = 4\sqrt{x} - 2$, тоді $2 + \frac{a^4}{a^3} = 4a$, $a = \frac{2}{3}$.

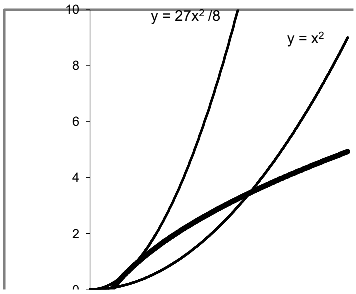

Рис.1.3.2

Відповідь: $a < 0$ або $a = \frac{2}{3}$.

3. При яких значеннях параметра $a > 0$ рівняння $|x + 2| - |2x + 8| = a^x$ має єдиний розв’язок, більше одного розв’язку, немає розв’язків?

Розв’язання. Побудуємо графіки функцій $y = |x + 2| - |2x + 8|$ та $y = a^x$.

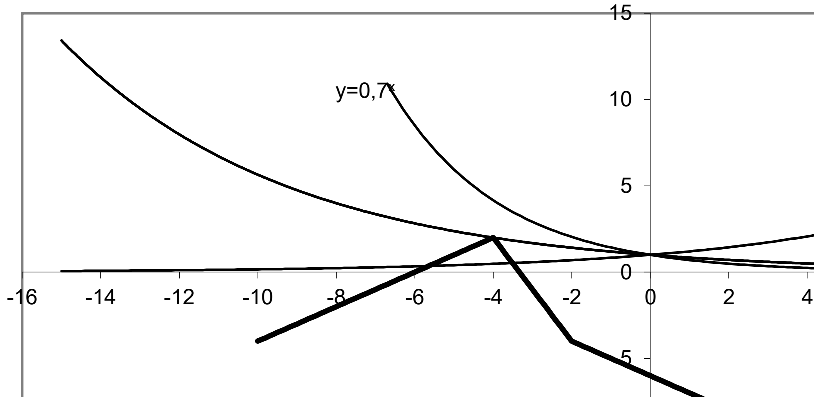

Рис.1.3.3

Розв’яжемо рівняння на проміжку $x \in (-\infty;0)$ для того, щоб знайти точку дотику функцій.

Якщо $x \in (-\infty;-4]$, то $-(x+2)+(2x+8)=a^x$; $x+6=a^x$;

якщо $x=-4$ $a=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Таким чином, якщо $a=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, то 1 розв’язок, якщо $a \in (\frac{1}{\sqrt[4]{2}};\infty)$, то точки перетину графіків є (більше одного розв’язку), якщо $a \in (0;\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$,то немає точок перетину графіків (немає розв’язків).

Відповідь: якщо $a=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$,то 1 розв’язок, якщо $a \in (\frac{1}{\sqrt[4]{2}};\infty)$,то більше одного розв’язку, якщо $a \in (0;\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ немає розв’язків.

4. При кожному фіксованому значенні параметра *a* розв’язати рівняння $|x+3|-a|x-1|=4$.

Розв’язання. $|x+3|-4=a|x-1|$.

Розглянемо функції $y=|x+3|-4$ и $y=a|x-1|$. На рис.1.3.4

побудовані графік першої з них, а також графіки шести представників сукупності прямих $y = a|x - 1|$ відповідно для випадків $a \in (1;\infty)$, $a = 1$, $a \in (0;1)$, $a \in (-1;0)$, $a = -1$, $a \in (-\infty;-1)$. (Для $a = 0$ маємо вісь абсцис).

З графіка видно розв'язання початкового рівняння. Залишилося лише знайти значення x_1 та x_2.

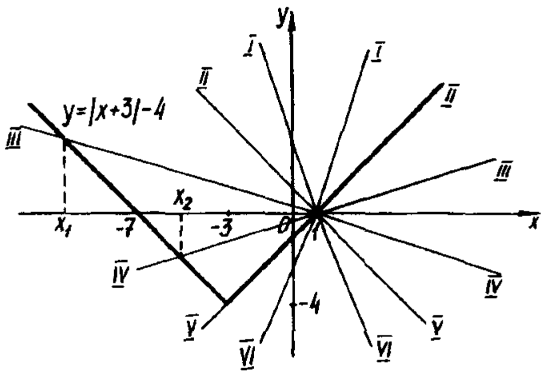

Рис.1.3.4

Очевидно шукані значення відповідно для $a \in (0;1)$ і $a \in (-1;0)$ - це корені рівняння $-(x+3)-4=-a(x-1); -x-3-4=-ax+a; ax-x=7+a$; звідси $x = \dfrac{7+a}{a-1}$.

При запису відповіді необхідно врахувати, що $x = 1$ - корінь початкового рівняння при будь-якому a.

Відповідь: якщо $|a|>1$, то $x = 1$; якщо $|a| < 1$, то $x = 1$ або $x = \dfrac{7+a}{a-1}$; якщо $a = 1$, то $x \in [1;\infty)$; якщо $a = -1$, то $x \in [-3;1]$.

5. Знайти всі натуральні значення b, при кожному з яких вираз $\dfrac{1}{x+y+3}$ має зміст для всіх пар чисел $(x; y)$, де $x < 0$ і $y < 0$, для яких вираз $\lg(xy - b)$ також має зміст.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ для даних виразів $\frac{1}{x+y+3}$ та $\lg(xy-b)$:

$$\begin{cases} x+y+3 \neq 0, \\ xy-b > 0, \\ x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Графіком першої нерівності системи є всі точки координатної площини (*x*; *y*), окрім прямої $y=-x-3$. Інші нерівності задають область, обмежену віткою гіперболи $y=\frac{b}{x}$. (На рис.1.3.5 ця область показана штриховою лінією)

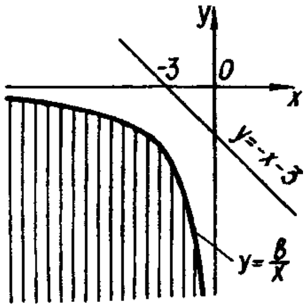

Рис.1.3.5

Система має розв'язки, якщо сукупність гіпербол $y=\frac{b}{x}$ має не більше однієї спільної точки з прямою $y=-x-3$ (одна точка дотична). Для цього достатньо вимагати, щоб рівняння $\frac{b}{x}=-x-3$ мало не більше одного кореня. Оскільки $b \neq 0$, то умова D<0 квадратного рівняння $x^2+3x+b=0$ $D=9-4b$, маємо $9-4b<0$, $b>2{,}25$. І так як b – натуральне число, знаходимо b=3, 4,...

Відповідь: b=3, 4,...

Розділ 2. Координатна площина (x ,a)

Погляд на параметр як на рівноправну змінну знаходить своє відображення в графічних методах. Оскільки параметр "рівний в правах" зі змінною, то йому, природно, можна "виділити" і свою координатну вісь. Таким чином виникає координатна площина $(x;\ a)$.

Відмова від традиційного вибору букв x та y для позначення осей, визначає один з ефективніших методів розв'язку задач з параметрами.

Для того, щоб найбільш повно розкрити можливості цього метода, покажемо його застосування для розв'язування основних типів задач з параметрами.

Дамо загальні ознаки, які, можливо, допоможуть впізнавати задачі, що підходять під цей метод: в задачі фігурують лише один параметр a та одна змінна x, вони конструюють деякі аналітичні вирази $F(x;\ a)$, $G(x;\ a)$ і т.д.; графіки рівнянь $F\ (x;\ a) = 0$, $G\ (x;\ a) = 0$ і т.д. в системі координат $(x;\ a)$ будуються нескладно.

Сам процес розв'язування схематично виглядає так.

Спочатку будується графічний образ, потім, перетинаючи отриманий графік прямими, перпендикулярними параметричній вісі, "знімаємо" потрібну інформацію.

1. При яких значеннях a рівняння $(a+1-|x-2|)(a+x^2-2x)=0$ має рівно три кореня?

Розв'язання. Маємо

$$\left[\begin{array}{l} a+1-|x-2|=0 \\ a+x^2-2x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=|x-2|-1 \\ a=-x^2+2x \end{array}\right.$$

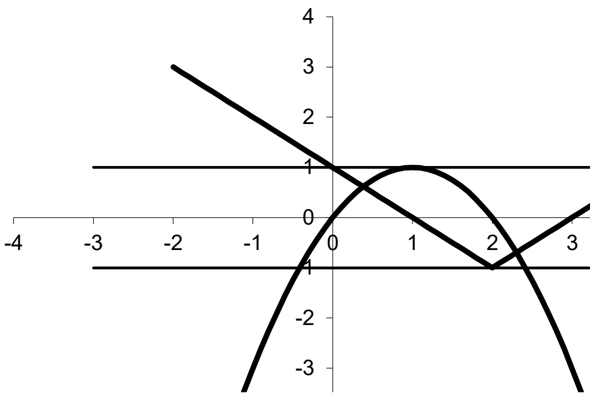

Рис.2.1

Графік цієї сукупності - об’єднання “кута" та параболи.

Лише прямі $a = 1$ та $a = -1$ перетинають знайдене об’єднання в трьох точках.

Відповідь: $a = 1$ та $a = -1$.

2. При яких значеннях a рівняння $(2x^2 - a)^2 - 5x^2 + 2x + 2a = 0$ має рівно три розв’язки?

Розв’язання. Розв’яжемо задане рівняння як квадратне відносно a:

$$4x^4 - 4ax^2 + a^2 - 5x^2 + 2x + 2a = 0$$

$$a^2 + 2a(1 - 2x^2) + 4x^4 - 5x^2 + 2x = 0$$

$$D = 4(1 - 2x^2)^2 - 4(4x^4 - 5x^2 + 2x) = 4(x - 1)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{-2(1-2x^2) + 2(x-1)}{2} = 2x^2 + x - 2 \\ a_2 = \dfrac{-2(1-2x^2) - 2(x-1)}{2} = 2x^2 - x \end{array}\right.$$

Графік цієї сукупності - об’єднання двох парабол.

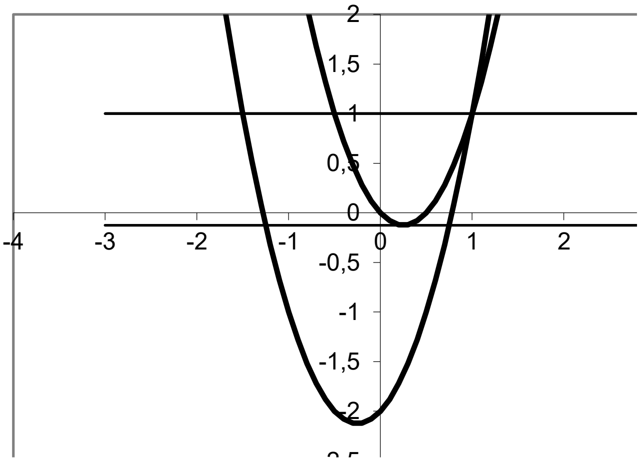

Рис.2.2

Знайдемо точки перетину графіків функцій: $2x^2 + x - 2 = 2x^2 - x$, звідки $x = 1$.

$a_1(1) = 1$ та $a_2(1) = 1$, $a_2(1/4) = -1/8$.

Лише прямі $a = 1$ та $a = -1/8$ перетинають знайдене об'єднання в трьох точках.

Відповідь: $a = 1$ та $a = -1/8$.

3. В залежності від параметра a визначити кількість коренів рівняння

$$x^4 - 10x^3 - 2(a-10)x^2 + 2(5a+8)x + 4a + a^2 = 0$$

Розв'язання. Розв'яжемо задане рівняння як квадратне відносно a:

$$x^4 - 10x^3 - 2(a-10)x^2 + 2(5a+8)x + 4a + a^2 = 0;$$

$$x^4 - 10x^3 - 2ax^2 + 20x^2 + 10ax + 16x + 4a + a^2 = 0;$$

$$a^2 + a(-2x^2 + 10x + 4) + x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 16x = 0;$$

$$D = (-2x^2 + 10x + 4)^2 - 4(x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 16x) = 4x^4 - 20x^3 - 8x^2 -$$
$$-20x^3 + 100x^2 + 40x - 8x^2 + 40x + 16 - 4x^4 + 40x^3 - 80x^2 - 64x =$$
$$= 4x^2 + 16x + 16 = 4(x+2)^2;$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{2x^2 - 10x - 4 + 2(x+2)}{2} = x^2 - 4x \\ a_2 = \dfrac{2x^2 - 10x - 4 - 2(x+2)}{2} = x^2 - 6x - 4 \end{array}\right.$$

Графік цієї сукупності - об’єднання двох парабол.

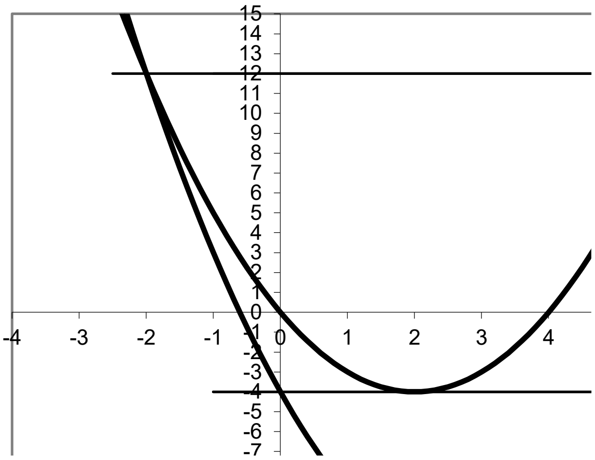

Рис.2.3

Знайдемо координати вершин кожної з парабол:

$$x_в = -\frac{-4}{2} = 2, \quad y_в = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \text{ та}$$

$$x_в = -\frac{-6}{2} = 3, \quad y_в = 3^2 - 6 \cdot 3 - 4 = -13.$$

Знайдемо також точки перетину графіків функцій: $x^2 - 6x - 4 = x^2 - 4x$, звідки $x = -2$, тоді $y = 12$.

Відповідь: якщо $a < -13$, то розв’язків немає; якщо $a = -13$, то 1 розв’язок;

якщо $-13 < a < -4$, то 2 розв'язки;

якщо $a = -4$ або 12, то 3 розв'язки;

якщо $a \geq 12$, то 4 розв'язки.

4. Знайти всі значення a, при яких існує єдине число x, яке задовольняє одночасно наступним умовам: $\sin \pi x = 0$ та $(2x + 14a^2 - 7)(4x - 4a^2 - 15) \leq 0$.

Розв'язання. Перепишемо систему в вигляді:

$$\begin{cases} x = k, \quad k \in Z \\ (2x + 14a^2 - 7)(4x - 4a^2 - 15) \leq 0 \end{cases}$$

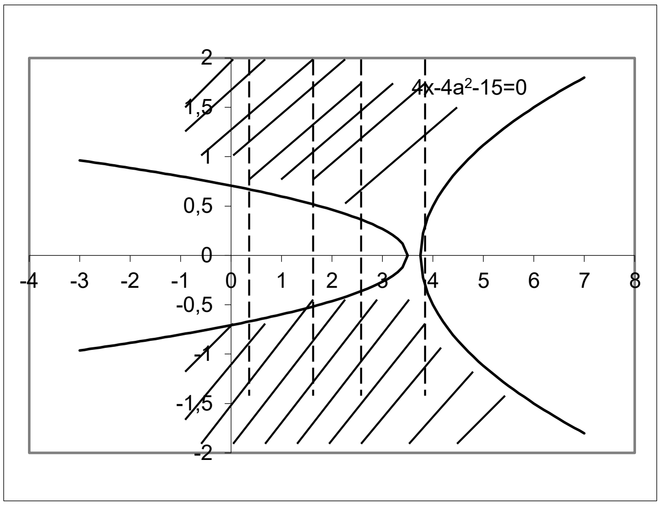

Рис.2.4

На координатній площині (x, a) перше рівняння задає сукупність вертикальних прямих. Параболи $4x - 4a^2 - 15 = 0$ та $2x + 14a^2 - 7 = 0$ розбивають площину на 3 частини. Заштрихована область є розв'язком нерівності системи. Це точки, в яких дотичні будуть горизонтальними:

$$a \in \left(-\frac{\sqrt{42}}{14}; -\frac{\sqrt{14}}{14}\right] \text{ або } a \in \left[-\frac{\sqrt{14}}{14}; \frac{\sqrt{42}}{14}\right).$$

Відповідь: $a \in (-\frac{\sqrt{42}}{14}; -\frac{\sqrt{14}}{14}]$ або $a \in [-\frac{\sqrt{14}}{14}; \frac{\sqrt{42}}{14})$.

5. При яких значеннях *a* рівняння $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$ має рівно три кореня?

Розв'язання. Маємо

$$\left[\begin{array}{l} a + 4x - x^2 - 1 = 0, \\ a + 1 - |x - 2| = 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 4x + 1, \\ a = |x - 2| - 1 \end{array}\right.$$

Графік цієї сукупності - об'єднання "кута" та параболи (рис.2.5).

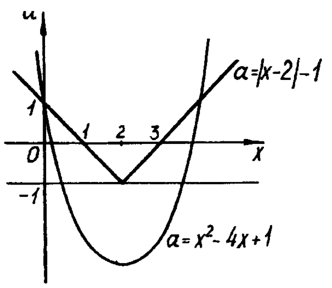

Рис.2.5

Лише пряма $a = -1$ перетинає знайдене об'єднання в трьох точках.

Відповідь: $a = -1$

6. При яких значеннях *a* рівняння $\sqrt{x + a} = x$ має два кореня?

Розв'язання.

$\sqrt{x+a}=x.$

Переходимо до рівносильної системи

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x + a = x^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a = x^2 - x. \end{cases}$$

Ця система на координатній площині $(x;\, a)$ задає криву, наведену на рис.2.6 неперервною лінією. Всі точки цієї дуги параболи (і тільки вони) мають координати $(x;\, a)$, які задовольняють початковому рівнянню. Тому число коренів рівняння при кожному фіксованому значенні параметра a дорівнює кількості точок перетину кривої з горизонтальною прямою, яка відповідає цьому значенню параметра. Очевидно при $a \in (-\frac{1}{4};0]$ прямі перетинають графік в двох точках.

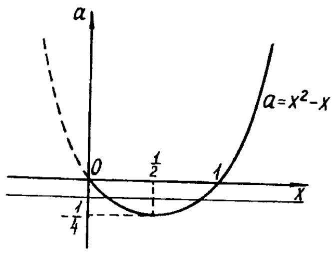

Рис.2.6

Відповідь: $a \in (-\frac{1}{4};0]$

7. Знайти всі значення параметра *a,* при яких рівняння $x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання. Задане рівняння рівносильне сукупності двох систем:

$$\begin{cases} x \ge a, \\ x^2 + 4x - 2(x-a) + 2 - a = 0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < a, \\ x^2 + 4x + 2(x-a) + 2 - a = 0;. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge a, \\ x^2 + 2x + a + 2 = 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x < a, \\ x^2 + 6x - 3a + 2 = 0;. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge a, \\ a = -x^2 - 2x - 2; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x < a, \\ a = \dfrac{x^2 + 6x + 2}{3}. \end{cases}$$

При побудови графіків рівнянь важливо врахувати, що параболи $a = -x^2 - 2x - 2$, $a = \dfrac{x^2 + 6x + 2}{3}$ та пряма $a = x$ мають дві спільні точки.

$$-x^2 - 2x - 2 = \frac{x^2 + 6x + 2}{3}; \; -3x^2 - 6x - 6 = x^2 + 6x + 2;$$

$4x^2 + 12x + 8 = 0; \quad x^2 + 3x + 2 = 0; \quad x_1 = -2; \; x_2 = -1$.Отже, А (-2; - 2), В (-1; - 1), причому точка B - вершина першої з записаних парабол. Вершина другої параболи $D(-3; -\frac{7}{3})$.

Графік даних рівнянь наведено на рис.2.7.

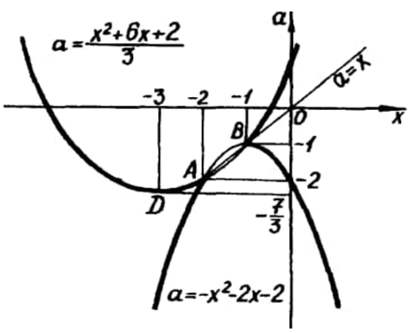

Рис.2.7

Звідси знаходимо $a = -2$ або $a = -1$.

Відповідь: $a=-2$ або $a=-1$.

8. Знайти всі значення параметра b, при яких рівняння $\dfrac{x^2-(3b-1)x+2b-2}{x^2-3x-4}=0$ має один розв'язок.

Розв'язання. Задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-(3b-1)x+2b-2=0, \\ x^2-3x-4\neq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2b-2, \\ x=b+1, \end{array}\right. \\ x^2-3x-4\neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2b-2, \\ x=b+1, \end{array}\right. \\ x_1\neq -1, x_2\neq 4. \end{cases}$$

За допомогою цієї системи будуємо графіки рівнянь (рис.2.8).

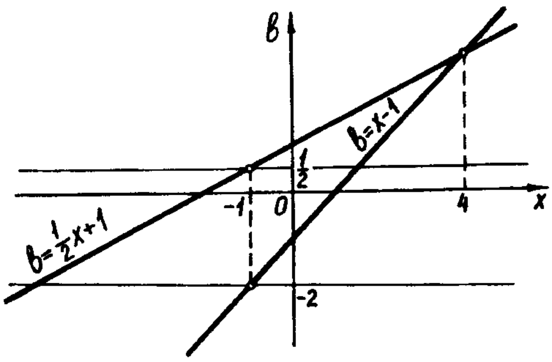

Рис.2.8

Так як $x_1\neq -1, x_2\neq 4$.то при $b=-2$ та $b=\dfrac{1}{2}$ рівняння має єдиний розв'язок.

Відповідь: $b=-2$ або $b=\dfrac{1}{2}$

9. Знайти множину всіх чисел *a*, для кожного з яких рівняння

$\sqrt{x+2a^2}(x^2-(a-1)x-a)=0$ має тільки два різних кореня.

Розв'язання. $\sqrt{x+2a^2}(x^2-(a-1)x-a)=0$;

$\sqrt{x+2a^2}=0, (x^2-(a-1)x-a)=0$;

$x^2-(a-1)x-a=0$;D=$(-(a-1))^2+4a=(a+1)^2$; $x=a, x=-1)$.

Перепишемо задане рівняння в наступному виді: $\sqrt{x+2a^2}(x-a)(x+1)=0$. Тепер важливо що $x=-2a^2$, $x=a$ та $x=-1$ - корені рівняння при умові $x \ge -2a^2$.

Графік заданого рівняння зручно будувати, відводячи змінній x вісь ординат. На рис.2.9 шуканий графік - об'єднання неперервних ліній.

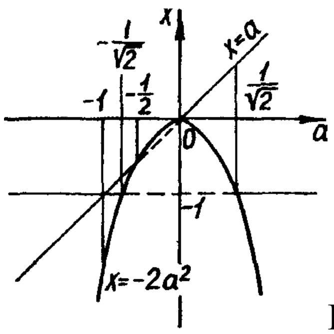

Рис.2.9

Із графіка одержуємо: $a=-1$, або $a\in[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2})$, або $a\in(0;\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Відповідь: $a=-1$, або $a\in[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2})$, або $a\in(0;\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

10. При яких значеннях параметра a рівняння $\log_{\sqrt{ax-6}}(2x^2-3x+2)=2\log_{ax-6}(x^2+2x-4)$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання.

$\log_{\sqrt{ax-6}}(2x^2-3x+2)=2\log_{ax-6}(x^2+2x-4)$;

$\log_{\sqrt{ax-6}}(2x^2-3x+2)=\log_{\sqrt{ax-6}}(x^2+2x-4)$;

Запишемо систему, рівносильну рівнянню:

$$\begin{cases} ax - 6 > 0, \\ ax - 6 \neq 1, \\ 2x^2 - 3x + 2 = x^2 + 2x - 4. \end{cases},$$

$$\begin{cases} ax > 6, \\ ax \neq 7, \\ x^2 - 5x + 6 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax > 6, \\ ax \neq 7, \\ x_1 = 2, x_2 = 3. \end{cases}$$

Перші дві нерівності системи задають множину точок, наведену на рис.2.10 штриховою лінією, причому в цю множину не входять гіперболи $ax = 7$ та $ax = 6$.

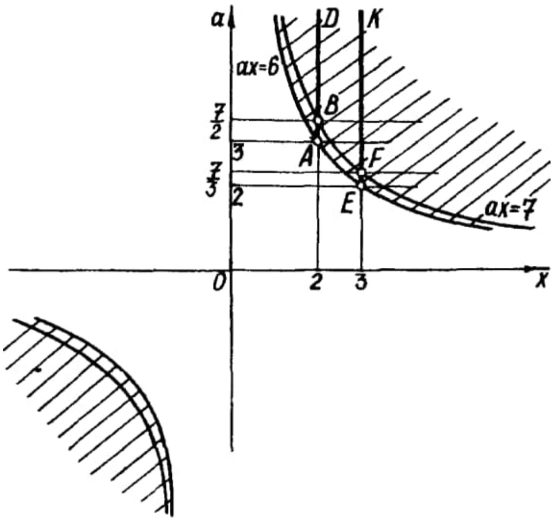

Рис.2.10

Тоді відрізок AB та промінь BD, відрізок EF та промінь FK, які лежать відповідно на прямих $x = 2$ та $x = 3$, є графіком початкового рівняння. Отже, маємо $a \in (2; \frac{7}{3})$, або $a \in (\frac{7}{3}; 3]$, або $a = \frac{7}{2}$.

Відповідь: $a \in (2; \frac{7}{3})$, або $a \in (\frac{7}{3}; 3]$, або $a = \frac{7}{2}$.

Розділ 3. Застосування похідної

В цьому параграфі наведені задачі, для розв'язання яких використовуються наглядно-графічні міркування, причому при побудові необхідного графічного образу використовується апарат похідної.

1. Скільки коренів в залежності від параметра a має рівняння $x^5 + x = a + 2x^3$?

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді: $a = x^5 + x - 2x^3$. Маємо

$a(x) = x^5 + x - 2x^3$, $a'(x) = 5x^4 + 1 - 6x^2$,

$a^{/}(x) = 0$, $5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$,

звідки $5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$, $(x-1)(x+1)(x - \frac{1}{\sqrt{5}})(x + \frac{1}{\sqrt{5}}) = 0$.

x	(-∞, - 1)	-1	(-1; - 1/√5)	-1/√5	(-1/√5; 1/√5)	1/√5	(1/√5; 1)	1	(1; +∞)
$a^{/}$ (x)	+	0	-	0	+	0	-	0	+
a (x)	↑	0	↓	-16√5/125	↑	-16√5/125	↓	0	↑

Побудуємо графік функції $a(x) = x^5 + x - 2x^3$.

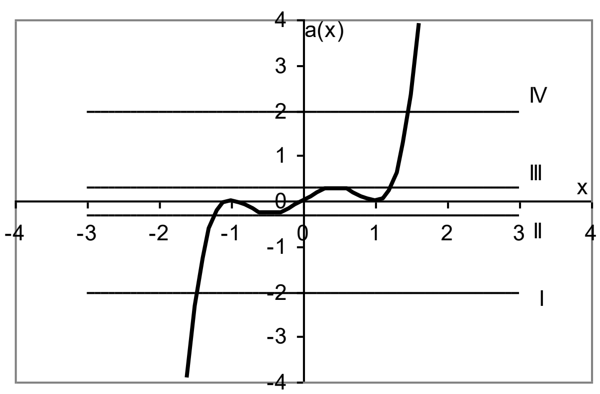

Рис.3.1

Якщо $a < -\frac{16\sqrt{5}}{125}$ або $a > \frac{16\sqrt{5}}{125}$, то рівняння має 1 розв'язок (положення I та IV); якщо $a = \pm\frac{16\sqrt{5}}{125}$ (положення II та III), то рівняння має 2 розв'язки; якщо $-\frac{16\sqrt{5}}{125} < a < \frac{16\sqrt{5}}{125}$, то рівняння має 3 розв'язки (між положеннями II та III). *Відповідь:* якщо $a < -\frac{16\sqrt{5}}{125}$ або $a > \frac{16\sqrt{5}}{125}$, то 1 розв'язок; якщо $a = \pm\frac{16\sqrt{5}}{125}$, то 2 розв'язки; якщо $-\frac{16\sqrt{5}}{125} < a < \frac{16\sqrt{5}}{125}$, то 3 розв'язки.

2. При яких a рівняння $x^4 - ax + 3 = 0$ має два розв'язки?

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді: $ax = x^4 + 3$, $a(x) = x^3 + \frac{3}{x}$. Знаходимо похідну: $a'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$, $a'(x) = 0$, $3x^2 - \frac{3}{x^2} = 0$ звідки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x \neq 0$. Отже,

x	(-∞, -1)	-1	(-1;0)	(0;1)	1	(1; +∞)
a′ (x)	+	0	-	-	0	+
a (x)	↑	-4	↓	↓	4	↑

Побудуємо графік функції $a(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

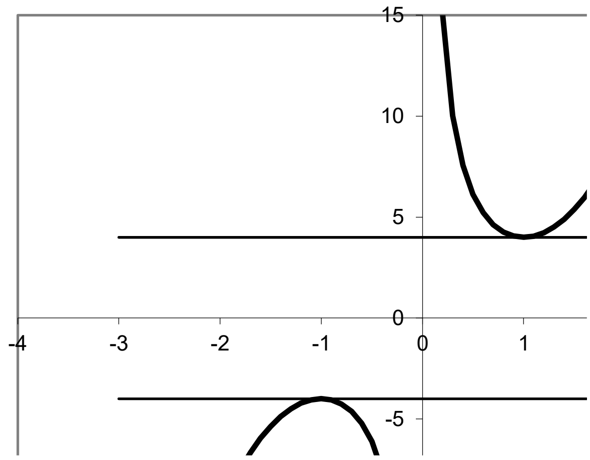

Рис.3.2

Ті значення a, для яких відповідні горизонтальні прямі перетинають побудований графік в двох точках і будуть шуканими. Отже,. $a \in (-\infty;-4)$, $a \in (4;\infty)$.

Відповідь: $a \in (-\infty;-4)$, $a \in (4;\infty)$.

3. При яких a рівняння $\frac{1}{3}x^2e^x = a$ має три розв'язки?

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді: $a(x) = \frac{1}{3}x^2e^x$. Знаходимо похідну:

$$a'(x) = \frac{2}{3}xe^x + \frac{1}{3}x^2e^x = \frac{1}{3}xe^x(2+x), \quad \text{звідки,} \quad \frac{1}{3}xe^x(2+x) = 0 \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -2.$$

Отже,

x	(-∞, - 2)	-2	(-2; 0)	0	(0; +∞)
a' (x)	+	0	-	0	+
a (x)	↑	$4/3e^2$	↓	0	↑

Побудуємо графік функції $a(x) = x^2e^x$.

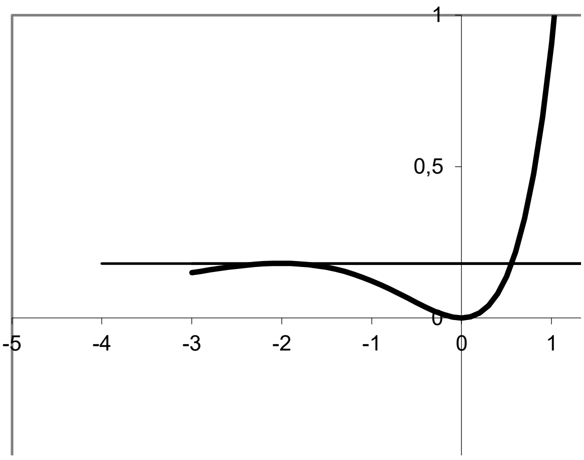

Рис.3.3

Ті значення a, для яких відповідні горизонтальні прямі перетинають побудований графік в трьох точках і будуть шуканими. Отже,. $a \in (0; \frac{4}{3e^2})$

Відповідь: $a \in (0; \frac{4}{3e^2})$.

4. Скільки розв'язків має рівняння $x^2 - 2ax - 1 = 0$ на проміжку $|x| < 2$?

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді: $a(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$, $x \neq 0$.

Знаходимо похідну: $a^{/}(x) = \frac{(2x)^2 - 2(x^2 - 1)}{4x^2} = \frac{2x^2 + 2}{4x^2} = 0$. Побудуємо графік функції $a(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$, $x \neq 0$.

Знайдемо значення функції в граничних точках проміжку $-2 < x < 2$:

$a(-2) = -\frac{3}{4}$, $a(2) = \frac{3}{4}$.

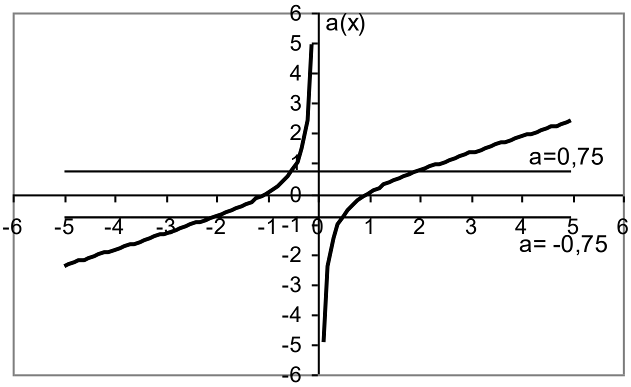

Рис.3.4

З рис.3.4 випливає, що при $a < -\frac{3}{4}$ або $a > \frac{3}{4}$ рівняння має 1 розв'язок; при $-\frac{3}{4} \le a \le \frac{3}{4}$ рівняння має 2 розв'язки.

Відповідь: якщо $a < -\frac{3}{4}$ або $a > \frac{3}{4}$, то 1 розв'язок; якщо $-\frac{3}{4} \le a \le \frac{3}{4}$, то 2 розв'язки.

5. При яких значеннях a всі три корені рівняння $x^3 + a + 10 = 2ax$ дійсні?

Розв'язання. $2ax - a = x^3 + 10$, $a(x) = \dfrac{x^3+10}{2x-1}$ Точка $x = \frac{1}{2}$ не є коренем рівняння при ні яких значеннях a.

$$a'(x) = \frac{3x^2(2x-1) - 2(x^3+10)}{(2x-1)^2},\ a'(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 - 20}{(2x-1)^2},\ a'(x) = \frac{(x-2)(4x^2+5x+10)}{(2x-1)^2}$$

$$\frac{(x-2)(4x^2+5x+10)}{(2x-1)^2} = 0,\quad (x-2)(4x^2+5x+10) = 0,\ x = 2$$

Функція $a(x)$ спадає на проміжку $a \in (-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5; 2)$ та зростає на $a \in (2; \infty)$, причому $x = 2$ - точка мінімуму,.

x	(-∞,0,5)	(0,5;2)	2	(2; +∞)
a/ (x)	-	-	0	+
a (x)	↓	↓	6	↑

Побудуємо графік функції $a(x) = \frac{x^3 + 10}{2x - 1}$.

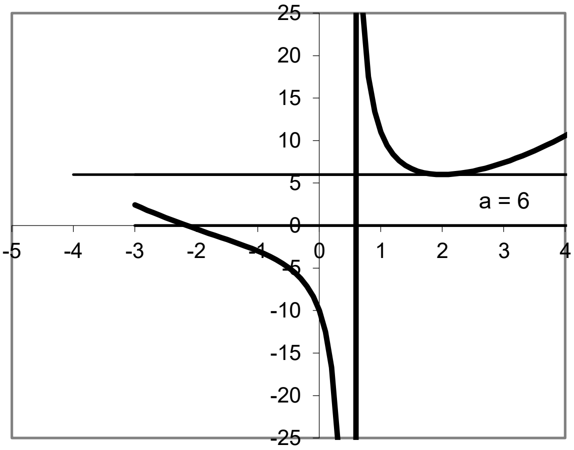

Рис.3.5

Ті значення a, для яких відповідні горизонтальні прямі перетинають побудований графік в трьох точках і будуть шуканими. З рисунка видно, що $a > 6$.

Відповідь: $a > 6$.

6. Розв'язати рівняння $(x + 3a)(x^2 - a^2 + 4a - 4) = 0$. При яких значеннях параметра a добуток коренів менше найменшого кореня цього рівняння?

Розв'язання. Із заданого рівняння одразу знаходимо, $(x + 3a) = 0, x^2 = a^2 - 4a + 4$,. $x = -3a, x^2 = (a - 2)^2$ Розглянемо функції $f_1(x) = -3a$, $f_2(x) = -(a - 2)$, $f_3(x) = (a - 2)$, $f(x) = f_1(x) f_2(x) f_3(x) = 3a(a - 2)^2$. Побудуємо графіки цих функцій.

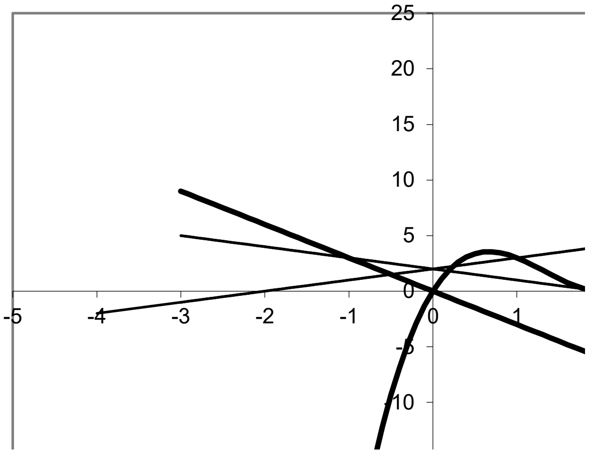

Рис.3.6

Необхідно знайти такі значення параметра, при яких графік $f(a)$ лежить нижче

$\min(f_1(a), f_2(a), f_3(a))$. Шукані значення a - це всі значення, менше a_0, де a_0 найменший корінь рівняння $f(a) = f_3(x)$, $(a-2) = 3a(a-2)^2$, $(a-2)(3a^2-6a-1) = 0$. Звідси знаходимо, що $a_0 = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}$. *Відповідь:* $a_0 \in (-\infty; \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3})$.

7. Визначити як розташовані корені рівняння $ax^2 - 3(a+1)x + 2a + 7 = 0$ відносно відрізка $[-1,4]$.

Розв'язання. Запишемо $a(x^2 - 3x + 2) = 3x - 7$. Точки $x = 1$ та $x = 2$ не є коренями заданого рівняння ні при яких a. Тоді $a(x) = \dfrac{3x-7}{x^2-3x+2}$.

Знайдемо похідну

$$a'(x) = -\frac{3x^2 - 14x + 15}{(x^2 - 3x + 2)^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ або } x = 3.$$

Точка $x=\frac{5}{3}$ - точка мінімуму, $x=3$ - точка максимуму, $a(\frac{5}{3})=9$, $a(3)=1$.

Функція $a(x)$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty,1),\ (1;\frac{5}{3}],\ [3,\infty)$ та зростає на $[\frac{5}{3},2),\ (2,3]$. Графік функції $a(x)=\dfrac{3x-7}{x^2-3x+2}$ наведено на рис.3.7.

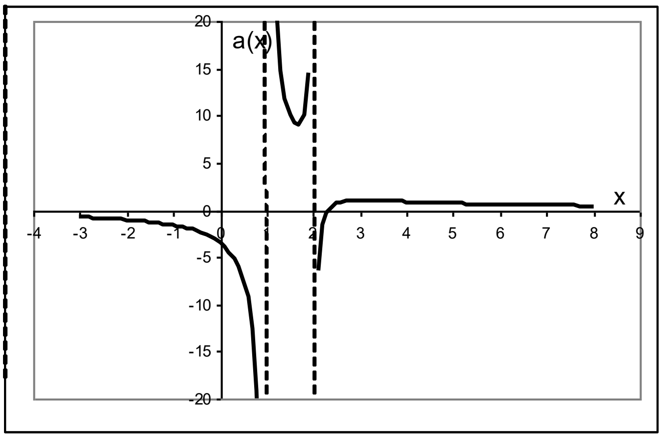

Рис.3.7

Розташування коренів рівняння відносно проміжку $[-1,4]$ можна визначити, перетинаючи побудований графік горизонтальними прямими. Далі через x_1 позначимо менший корінь, а через x_2 - більший.

Якщо $a<-\frac{5}{3}$, то $-1<x_1<x_2<4$; якщо $a=-\frac{5}{3}$, то $-1=x_1<x_2<4$;

якщо $-\frac{5}{3}<a<0$, то $x_1<-1<x_2<4$; якщо $a=0$, то $-1<x=\frac{7}{3}<4$;

якщо $0<a<\frac{5}{6}$, то $-1<x_1<4<x_2$; якщо $a=\frac{5}{6}$, то $-1<x_1<x_2=4$;

якщо $\frac{5}{6} < a < 1$, то $-1 < x_1 < x_2 < 4$; якщо $a = 1$, то $-1 < x_1 = x_2 < 4$;

якщо $1 < a < 9$, то рівняння коренів немає; якщо $a = 9$, то $-1 < x_1 = x_2 < 4$;

якщо $a > 9$, то $-1 < x_1 < x_2 < 4$.

8. При яких значеннях параметра a рівняння $-\cos 2x \cos 4x = a$ має рівно два корені на відрізку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$?

Розв'язання. Запишемо задане рівняння в такому вигляді:

$$-\cos 2x \cos 4x = a, \ -\cos 2x(2\cos^2 2x - 1) = a.$$

Нехай $\cos 2x = t$. Оскільки за умовою $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$, то $-1 \le t \le 0$. Далі, знаходимо

$$-t(2t^2 - 1) = a, \ -2t^3 + t = a, \ f(t) = -2t^3 + t.$$

Побудуємо графік функції $f(t) = -2t^3 + t$ для $-1 \le t \le 0$. Знаходимо похідну $f'(t) = -6t^2 + 1, t_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $t_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

\

x	$(-1; -\frac{1}{\sqrt{6}}))$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{6}}; 0)$
f' (x)	-	0	-
f (x)	↓	$-\frac{2}{3\sqrt{6}}$	↓

функції $f(t) = -2t^3 + t$ для $-1 \le t \le 0$.

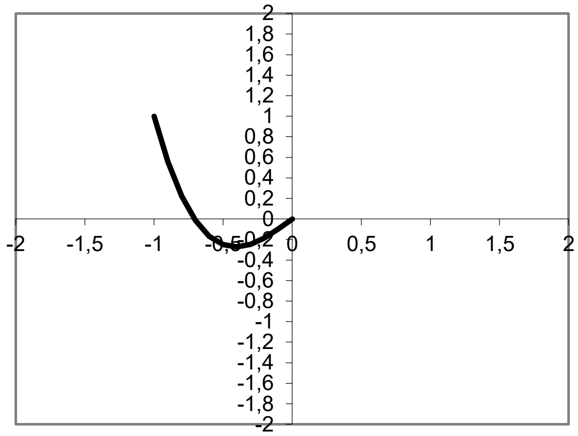

Рис.3.8

Рівняння $f(t) = a$ має рівно два корені, якщо $-\frac{2}{3\sqrt{6}} < a \le 0$. Функція $y = \cos 2x$ монотонна на $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, а значить на цьому відрізку кожне своє значення приймає тільки один раз. *Відповідь:* $-\frac{2}{3\sqrt{6}} < a \le 0$.

9. При яких дійсних a рівняння $2\cos x \cos 2x \cos 3x - a = \cos 2x$ має більше одного кореня на відрізку $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$?

Розв'язання.

Перепишемо рівняння у вигляді

$$2\cos x(2\cos^2 x - 1)(4\cos^3 x - 3\cos x) - a = 2\cos^2 x - 1$$

$$16\cos^6 x - 20\cos^4 x + 6\cos^2 x - 2\cos^2 x + 1 = a$$

$$16\cos^6 x - 20\cos^4 x + 4\cos^2 x + 1 = a$$

Нехай $\cos x = t$, оскільки за умовою $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{3}$, то $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Далі знаходимо, $16t^6 - 20t^4 + 4t^2 + 1 = a$, $a(t) = 16t^6 - 20t^4 + 4t^2 + 1$

Похідна дорівнює

$a'(t) = 96t^5 - 80t^3 + 8t$,

$a'(t) = 8t(12t^4 - 10t^2 + 1)$, $D = 100 - 48 = 52$,

$t_1 = 0$, $t_{1,2} = \dfrac{10 \pm 2\sqrt{13}}{24} = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{12}$;

Побудуємо графік функції $a(t) = 16t^6 - 20t^4 + 4t^2 + 1$ (рис.3.9).

Знайдемо а

$a(0) = 1, a(\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = 0$, $a(0) = 1$.

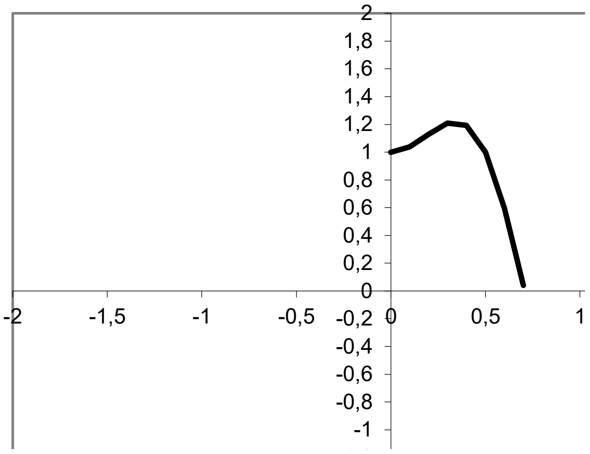

Рис.3.9

Рівняння $a(t) = a$ має більше одного кореня, якщо$1 \le a < 1{,}207$.

Відповідь: $1 \le a < 1{,}207$.

10. При яких a рівняння $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}x^3 + x + 1} + \sqrt[3]{-\dfrac{1}{2}x^3 + x - 1} = \sqrt[3]{ax}$ має рівно чотири корені?

Розв'язання. Побудуємо графіки функцій

$y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}x^3+x+1}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3+x-1}$ та

$y=\sqrt[3]{ax}$.

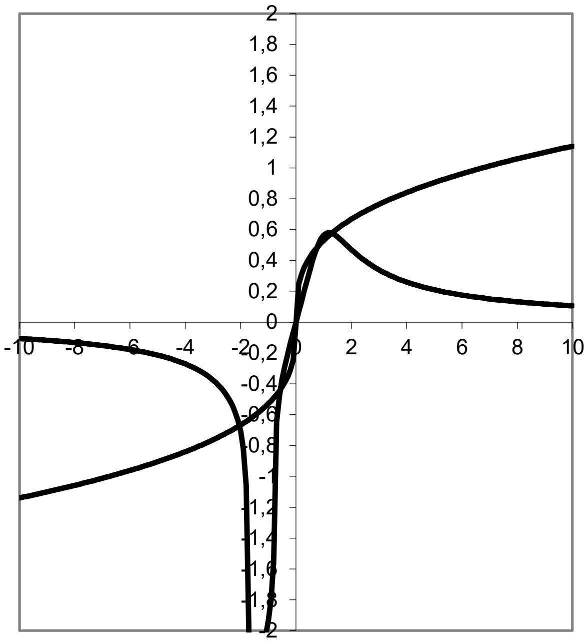

Рис.3.10

Рівняння має чотири розв'язки, коли графік $y=\sqrt[3]{ax}$ перетинає $y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}x^3+x+1}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3+x-1}$ в чотирьох точках (див. рис.3.10)

Відповідь: $a=\frac{(\sqrt[3]{5}-1)^3}{2}$.

Висновок

Основню задачою моєї магістерської роботи було розробка методики викладання теми “Графічні методи розв’язування задач з параметрами” . Задачі з параметрами відіграють дуже важливу роль в сучасній математиці і вміння їх розв’язувати також є важливим навиком.

В своїй магістерській роботі я показав найбільш поширені типи задач і приклади їх розв’язування. Також проаналізував деякі проблеми які можуть виникнути у учнів під час вирішення задач з параметрами. Мною було розглянуто такі методи розв’язування задач з параметрами як: паралельне перенесення, поворот, гомотетія, стиск до прямої, використання координатної площини (x,a) та застосування похідної.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вишенський В.О., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Задачі з математики. - К.: Вища школа, 1985. - 264 с.

2. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. - К.: Євро індекс Лтд, 1995. - 336 с.

3. Горделадзе Ш.Х., Кухарчук М.М., Яремчук Ф.П. Збірник конкурсних задач з математики: Навч. Посібник. - 3-є вид., - К.: Вища школа, 1988. - 328 с.

4. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. - М.: Наука, 1976. - 638 с.

5. Дорофеев Г.В., Затакавай В.В. Решение задач, содержащих параметры. - М.: Перспектива, 1990. - Ч.2. - 38 с.

6. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. - 2-е изд. перераб. и доп. - М.: Наука, 1989. - 576 с.

7. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами. - М.: Просвещение, 1986. - 128 с.