МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра математичної економіки, економетрії,
фінансової та страхової математики

Пояснювальна записка
до кваліфікаційної роботи магістра

на тему:

Розрахунок показника Value at Risk з урахуванням скосу та ексцесу

Виконала:
студентка групи МТФМ-21с
спеціальності 111 Математика
Саварин Зоряна Михайлівна
Керівник**:**
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Прокопишин І. А.

Рецензент:

Львів – 2021

Зміст

Вступ

У магістерській роботі розглядається актуальна проблема фінансового ризик-менеджменту – оцінка вартості під ризиком.

У першому розділі розглядаються поняття вартості під ризиком Value-at-Risk, скорочено – VaR. Дано означення міри ризику та показано, що за нормального розподілу втрат ця міра лінійно залежить від математичного сподівання та середньоквадратичного відхилення втрат.

У другому розділі, поряд з класичними моделями для розрахунку VaR, дельта-нормальною та історичною, досліджується квадратично-нормальна модель. Для цієї моделі методом оцінюючих функцій отримано аналітичні формули для верхньої та нижньої оцінки VaR.

У третьому розділі розглянута реалізація запропонованої моделі засобами електронних таблиць. Досліджується відповідність моделі означенню, а також її ефективність у порівнянні з дельта-нормальною та емпіричною моделями.

1. РИЗИК ТА ЙОГО ВИМІРЮВАННЯ

1.1 Поняття вартості під ризиком VaR

Діяльність будь-якої людини, організації, підприємства, компанії так чи інакше пов’язана із ризиком. Термін "ризик" у сучасній економічній теорії є дуже багатогранним, його оскільки конкретне визначення буде одностороннім.

В загальному розумінні – це несприятлива подія, невизначена та випадкова за характером, та зумовлені нею реальні чи потенційні втрати, тобто подія, яка може відбутися чи не відбутися, відбутися у різний спосіб.

Ризик в фінансовій діяльності розглядається як негативне явище, яке призводить до значних втрат або недоотримання бажаного прибутку.

Поширеною на сьогодні методикою оцінки ринкових ризиків є Вартість під Ризиком (Value-at-Risk – VaR) [1, 2, 7]. VaR є сумарною мірою ризику, що дозволяє проводити порівняння ризику по різних портфелях (наприклад, по портфелях з облігацій та акцій) і по різних фінансових інструментах (наприклад, форварди і опціони).

В останні десятиріччя показник VaR став дуже популярним засобом управління й контролю ризику у компаніях різного типу [3, 4, 7]. Зумовлено це такими трьома причинами.

У 1994 році одна з найбільших інвестиційних компаній США J. P. Morgan розкрила свою систему для оцінки ризику RiskMetrics, а також базу даних для неї. Методологія VaR, реалізована у системі RiskMetrics [13], навіть сьогодні є одним з стандартів для оцінювання VaR.

В кінці 90-х років була сильна інвестиційна криза, зокрема на ринках деривативів. Фінансову компанії отримали значні збитки.

Третьою причиною було рішення органів, що регулюють фінансову діяльність, використовувати методологію RiskMetrics для розрахунку резервного капіталу.

VaR, Value at Risk, або Вартість під Ризиком, як міра оцінки ризику є одним з найуживаніших інструментів для аналізу ризику в теоретичних розробках та у практичних дослідженнях.

Методологія оцінювання ризику на основі VaR цілий ряд позитивних моментів:

1) адекватний опис ризику, як можливих втрат з високою ймовірністю;

2) відносна простота розрахунку, зокрема для випадку нормального розподілу втрат або використання емпіричних даних;

3) просте тлумачення для бізнесменів.

Обчислення величини VaR проводиться з метою затвердження висновку подібного типу: "ми упевнені з ймовірністю α, що втрати за деякий період не перевищать суми Z грошових одиниць". Величина Z якраз і є мірою ризику Value at Risk. Ця величина залежить від рівня довіри α, а також тривалості часого періоду Вона є функцією 2-х параметрів: N – часового горизонту і α – довірчого рівня.

Методологія Value at Risk, була вперше запропонована у 1993 році групою G30 (Global Derivatives Study Group). Банк міжнародних розрахунків (м. Базель, Швейцарія) у 1994 році зробив рекомендацію банкам розкрити свої показники вартості під ризиком.

Пізніше, у 1995 році, Basle Committee on Banking Supervision (BCBS), який функціонує при згаданому банку, запропонував банкам розробити свої методи розрахунку резервного капіталу на основі власних моделей VaR. За рекомендаціями цього комітету, вимоги до розміру резервного капіталу V розраховуються як максимум двох величин: поточного значення VaR (VaR_t) і середнього VaR за попередні 60 днів, помноженого на коефіцієнт із значенням між 3 і 4:

$$V = \lambda \max \left\{ VAR_t, \quad \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VAR_{t-i} \right\}, \quad 3 \le \lambda \le 4 \tag{1.1}$$

Значення показника λ залежить від точності прогнозу на один день за попередній проміжок часу. Так, якщо позначити через Δ_0 – число разів, коли одноденні втрати перевершували передбачене значення VaR за попередній рік (або останні 250 операційних днів), то в BCBS розрізняють такі 3 зони: "зелена" зона (Δ_0 менше або рівно 4), "жовта" зона (Δ_0 в діапазоні від 5 до 9), "червона" зона (Δ_0 більше або рівно 10). Якщо Δо лежить в "зеленій" зоні, то $\lambda = 3$, якщо в "жовтій" зоні, то $3 < \lambda < 4$, якщо в "червоній" зоні – тоді $\lambda = 4$.

1.2. Означення вартості під ризиком VaR

На основі праці [1,2,7] дамо основні поняття міри ризику VaR.

Розглянемо випадкову величину (в. в.) втрат ξ за деякий проміжок часу, наприклад місяць, квартал, рік. Вартістю під ризиком для рівня значущості $0 \le \alpha \le 1$ називають максимальні втрати за цей проміжок часу, які не будуть перевищені з ймовірністю α:

$$VaR_\alpha = \sup\{x \mid P\{\xi < x\} \le \alpha\}. \tag{1.2}$$

Можна сказати так [1]: "з ймовірністю α втрати за період не перевищать величини VaR_α або лише з ймовірністю $1-\alpha$ втрати будуть більшими за VaR_α ".

Розглянемо функцію розподілу в.в втрат:

$$F(x) = P\{\xi < x\}. \tag{1.3}$$

На основі (1.3) визначення вартості під ризиком подаємо у більш зрозумілій формі так:

$$VaR_\alpha = \sup\{x \mid F(x) \le \alpha\}. \tag{1.4}$$

Розглянемо різні випадки поведінки функції розподілу втрат, яка може мати розриви та бути сталою на деяких проміжках (рис. 1.1). Для цих випадків розглянемо нашу означену величину (1.4).

Нехай на деякій ділянці X функція розподілу $F(x)$ строго зростає, є неперервною та має множину значень Y. Для випадку, показаному на нашому рисунку, вказані ділянки є такі: $X = (x_1, x_2]$, $Y = (y_2, y_3]$. На множині Y означимо обернену функцію $F^{-1}(y)$, існування якої випливає з неперервності та строгого зростання $F(x)$ [5].

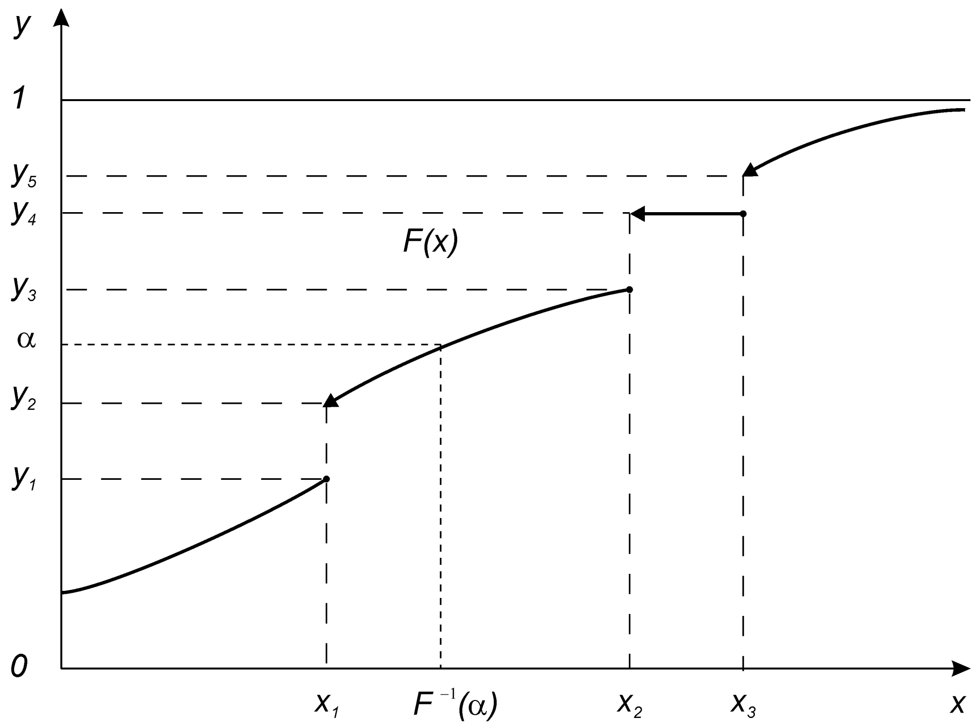

Рис. 1.1. Трактування VaR для різних випадків поведінки функції $F(x)$.

Припустимо, що α є з множини Y. У цьому випадку $x_\alpha = F^{-1}(\alpha) \in X$. Тому, можна довести, що досліджуваний показник буде квантилем функції розподілу $F(x)$:

$$VaR_\alpha = x_\alpha = F^{-1}(\alpha). \qquad (1.5)$$

З означення верхньої грані [5] випливає, що необхідно і достатньо повинні виконуватися такі умови:

1) $\forall x \in R \;\; F(x) \le \alpha \Rightarrow x \le VaR_\alpha$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x' \in R \;\; \left(F\left(x'\right) \le \alpha\right) \wedge \left(x' > VaR_\alpha - \varepsilon\right).$

Спочатку доведемо нерівність $F(VaR_\alpha) \le \alpha$. Це легко зробити за допомогою другої умови, означивши послідовність $x_n' \xrightarrow[n \to \infty]{} VaR_\alpha$, таку що $F\left(x_n'\right) \le \alpha$. Здійснивши граничний перехід при n прямуючому до нескінченості в останній нерівності, отримаємо потрібний результат.

Далі, методом від супротивного доведено строгу рівність $F(VaR_\alpha) = \alpha$. Припустимо протилежне – $F(VaR_\alpha) < \alpha$. У цьому випадку з строгого зростання і неперервності функції $F(x)$ випливає існування $x^* > VaR_\alpha$ для якої виконується нерівність $F(VaR_\alpha) < F\left(x^*\right) < \alpha$. Отримали суперечність до першої умови.

Легко встановити, що коли параметр α належить ділянці розриву то величина вартості під ризиком VaR_α буде дорівнювати відповідній абсцисі.

Для прикладу, розглянемо випадок $y_3 \le \alpha \le y_4$ з рис. 1.1. Тоді $VaR_\alpha = x_2$.

Цікавим є випадок, коли функція розподілу є сталою на деякому проміжку X . Тоді, для відповідного $\alpha = y_c$ вартість під ризиком буде рівна крайній правій точці цього проміжку. Так, для нашого рисунку, коли $\alpha = y_4$, тоді $VaR_\alpha = x_3$.

Аналіз ситуації, коли нестрогу нерівність в означенні (1.4) замінити на строгу, детально розглянуто у праці [1]. Там також вивчений випадок заміни в означенні функції розподілу строгої нерівності на нестрогу.

1.3 Випадок нормального розподілу втрат

Нехай в. в. втрат має нормальний розподіл. Її математичне сподівання позначимо m, а дисперсію – дисперсією σ^2. Тоді можна записати:

$$F(x) = N\left(\frac{x - m}{\sigma}\right), \tag{1.6}$$

де $\mathrm{N(x)}$ функція стандартного нормального розподілу [3, 6]:

$$\mathrm{N(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt.$$

Тоді з рівності $\mathrm{F(x_\alpha)} = \alpha$

отримаємо

$$\mathrm{x}_\alpha = \sigma N^{-1}(\alpha) + m, \tag{1.7}$$

або

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \sigma N^{-1}(\alpha) + m. \tag{1.8}$$

Отож, для випадку нормального розподілу в.в. втрат міра ризику VaR_α лінійно виражається через середнє квадратичне відхилення.

Знайдемо величину VaR_α для суми двох в. в. Нехай (X_1, X_2) система двох неперервних випадкових величин з сукупною щільністю $f(x_1, x_2)$. Розглянемо функцію двох випадкових величин $Y = \varphi(X_1, X_2)$. Тоді функція розподілу випадкової величини Y рівна [8]:

$$G(y) = \iint\limits_{\varphi(x_1, x_2) < y} f(x_1, x_2)dx_1 dx_2, \tag{1.9}$$

а щільність $g(y) = \dfrac{dG(y)}{dy}$.

Нехай $Y = X_1 + X_2$ оскільки X_1 та X_2 незалежні випадкові величини тоді маємо:

$$G(y) = \iint\limits_{\varphi(x_1, x_2) < y} f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{y - x_1} f(x_1, x_2)dx_2\right)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)F_2(y - x_2)dx_1.$$

Для щільності отримаємо

$$g(y)=\frac{dG(y)}{dy}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y-x_1)dx_1=\int_{-\infty}^{\infty} f(y-x_2, x_2)dx_2 . \qquad (1.10)$$

Нехай x_1, x_2 – нормально розподілені випадкові величини з параметрами $m_1, \sigma_1, m_2, \sigma_2$ – відповідно. Тоді лінійна комбінація цих величин:

$$y=a_1x_1+a_2x_2+b \qquad (1.11)$$

є нормально розподіленою в. в. з параметрами

$$m=a_1m_1+a_2m_1+b, \qquad (1.12)$$

$$\sigma^2=\sigma_1^2a_1^2+2a_1a_2r_{12}\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2a_2 \qquad (1.13)$$

де r_{12} – коефіцієнт кореляції, $|r_{12}|\le 1$.

При $a_1=a_2=1, b=0$ для квантилів рівня α отримаємо

$$\text{x}_{1,\alpha}=\sigma_1N^{-1}(\alpha)+m_1 \qquad (1.14)$$

$$\text{x}_{2,\alpha}=\sigma_2N^{-1}(\alpha)+m_2 \qquad (1.15)$$

$$\text{y}_{\alpha}=\sigma N^{-1}(\alpha)+m=(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2r_{12}\sigma_1\sigma_2)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.16)$$

Отже

$$\text{x}_{1,\alpha}+\text{x}_{2,\alpha}\ge y_{\alpha} . \qquad (1.17)$$

Ми довели, що в цьому випадку міра ризику *VaR* є субадитивною мірою ризику [8]. Тобто ризик портфеля ніколи не перевищує суми ризиків окремих активів.

2. ОЦІНКА VAR З УРАХУВАННЯМ МОМЕНТІВ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

2.1 Методи розрахунку VaR

Найбільшого поширення на сьогодні отримали такі моделі розрахунку VaR [2,4,7]:

1) моделі варіацій-коваріацій:
   - дельта-нормальний метод,
   - метод експонентного згладжування,
   - GARCH-моделі,
   - напівпараметричні моделі;
2) непараметричні моделі, зокрема історичного моделювання;
3) моделі, які використовують теорію екстремальних значень.

Метод варіацій-коваріацій ґрунтується на гіпотезі про багатовимірний нормальний розподіл випадкових величин втрат. В методології RiskMatrics [13] приймають, що відносні повернення мають умовний нормальний розподіл. Позначимо ряд надходжень X_t, t = 1,2,…n, а мінливість ряду повернень є σ_t, t=1,2,…n. Змінна x_t – не є нормально розподілена, але відношення повернень до мінливості $\frac{X_t}{\sigma_t}$ має стандартний нормальний розподіл.

$$f\left(x_t\right)=\frac{x_t}{\sigma_t}$$

Методи варіацій-коваріацій знайшли широке застосування через свою простоту та можливість отримати вираз для ризику в аналітичному вигляді.

Непараметричні моделі не використовують ніяких припущень про характер розподілу, а базуються на емпіричній функції розподілу.

Теорія екстремальних значень використовує спеціальні функції розподілу для екстремальних значень.

Приведемо формули історичного методу. Це метод не використовує припущення про нормальний розподіл і полягає у побудові емпіричної функції розподілу прибутків. Прогнозуючи ціну активу на $T+1$ використовують наступний алгоритм:

1) Знаходимо логарифмічні прирости $r_i = \ln\left(\frac{k_i}{k_{i-1}}\right)$, для кожного дня i = 1..T;
2) Впорядковуючи значення r_i по зростанню будуємо варіаційний ряд – $\{\hat{r}_i\}$, i=1..T;
3) Будуємо емпіричну функцію розподілу прибутків $F^*(x)$:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \le \hat{x}_1 \\ \frac{i}{n}, & \hat{x}_i < x \le \hat{x}_{i+1} \\ 1, & x > \hat{x}_n \end{cases} \tag{2.1}$$

4) Для заданого довірчого рівня знаходимо квантиль, який і є шуканим значенням VaR_α:

$$VaR_\alpha = \hat{x}_{\lceil \alpha n \rceil}. \tag{2.2}$$

2.2. Функція розподілу для функції випадкової величини

Розглянемо неперервно розподілену на відрізку $[a,b]$ випадкову величину ξ . Використаємо стандартні позначення для її функції розподілу і щільності – $F(x)$ та $f(x)$. Припустимо, що функція розподілу – диференційовна:

$$f(x) = F'(x) \tag{2.3}$$

Нехай η деяка функція від вихідної в. в. ξ:

$$\eta = \varphi(\xi) \tag{2.4}$$

Припустимо, що $\varphi(x)$ – монотонно зростаюча і неперервно диференційовна.

Вираз для функції розподілу випадкової величини η легко отримати з геометричного трактування ймовірності [6]:

$$G(y) = P\{\eta < y\} = P\{a < \xi < x\} = F(x). \tag{2.5}$$

Формулу (2.5) запишемо так:

$$G(y) = F(\varphi^{-1}(y)) = F(\psi(y)) \tag{2.6}$$

де

$$\psi(y) = \varphi^{-1}(y) \tag{2.7}$$

Квантиля рівня α знаходимо з рівняння:

$$G(y) = F(\varphi^{-1}(y)) = \alpha\ , \tag{2.8}$$

З цього рівняння матимемо:

$$y_\alpha = G^{-1}(\alpha) = \varphi(x_\alpha) \tag{2.9}$$

Щільність розподілу випадкової величини η знайдемо за означенням:

$$g(y) = G'(y) = F'(\varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1}(y))' = f(\psi(y))\varphi'(y). \tag{2.10}$$

Аналогічно досліджуємо випадок, коли монотонного спадання функції.

Для випадку, коли функція $\varphi(x)$ – монотонно спадна і неперервно диференційовна:

$$G(y) = P\{\eta < y\} = P\{x \le \xi \le b\} = 1 - F(x) = 1 - F\big(\psi(y)\big) \tag{2.11}$$

За означенням щільності, при необхідних припущеннях, матимемо:

$$g(y) = -f(\psi(y))\psi'(y). \tag{2.12}$$

Формули (2.10)-(2.13) подаємо однією формулою так:

$$g(y) = f(\psi(y))|\psi'(y)|. \tag{2.13}$$

В загальному випадку, коли функція не є монотонна, потрібно розглянути її різні ділянки, де вона є строго монотонна.

У випадку немонотонних функцій необхідно провести аналіз на ділянках строгої монотонності.

У випадку лінійної функції

$$\varphi(x) = a\,x + b, \tag{2.14}$$

легко знайти

$$g(y)=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Для запису виразу для функції розподілу потрібно дослідити випадки різного знаку параметра a.

Коли $a>0$ тоді знайдемо:

$$G(y)=F\left((y-b)/a\right) \tag{2.15}$$

В іншому випадку при   отримаємо:

$$G(y)=1-F\left((y-b)/a\right). \tag{2.16}$$

2.3 Оцінка вартості ризику VaR напівпараметричним методом з врахуванням скосу та ексцесу.

В ряді робіт [4,12] для використання переваг дельта-нормального методу запропоновано напівпараметричний метод, який полягає у нелінійному перетворенні вихідної величин втрат до випадкової величини з розподілом, близьким до нормального стандартного розподілу, з подальшим оберненим перетворенням для розрахунку VaR.

Розглянемо такий метод розрахунку VaR, з використанням квадратичної апроксимації та теорії оцінюючих функцій [10,11] для оцінки параметрів. За такого підходу отримано аналітичні формули для VaR з врахуванням скосу та ексцесу. Отриману модель будемо подавати квадратично нормальною.

Скіс або асиметрія (або коефіцієнт асиметрії), (skewness) випадкової величини X визначають як третій стандартний момент

$$\gamma_1=\frac{\mu_3}{\sigma^3}, \tag{2.17}$$

де $\mu_3=E\left(X-E\left(X\right)\right)^3$ – третій центрований момент, σ – стандартне відхилення.

Скіс показує несиметрію розподілу математичного сподівання. Позитивний скіс вказує на те що розподіл відхилений вліво від середнього, а негативний – вправо.

Незміщену вибіркову оцінку асиметрії знаходять за формулою

$$G_1 = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3, \tag{2.18}$$

де $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ – середнє вибіркове, $S = \left(\frac{\sum (X_i - \overline{X})}{n-1} \right)^{\frac{1}{2}}$ – вибіркове стандартне відхилення.

Для нормального розподілу асиметрія дорівнює нулю.

Ексцес або коефіцієнт ексцесу (kurtosis) випадкової величини визначають як четвертий стандартний момент мінус три:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \tag{2.19}$$

де $\mu_4 = E(X - E(X))^4$ – четвертий центральний момент, σ – стандартне відхилення.

Ексцес характеризує відносну загостреність чи залежність щільності розподілу порівняно з нормальним розподілом. Випадкові величини з гострішою щільністю мають додатній ексцес, а з більш гладкою щільністю – від’ємний.

Так, для логістичного розподілу з щільністю $f(x) = \exp(-(X-\mu)/s)/s(1+\exp(-(X-\mu)/s))^2$ ексцес дорівнює $\gamma_2 = 1{,}2$, а для рівномірного розподілу $\gamma_2 = -1{,}2$. Для нормального розподілу коефіцієнт ексцесу дорівнює нулю.

Незмінну оцінку ексцесу знаходяться за формулою

$$G_2 = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum \left(\frac{X_i - \overline{X}}{S} \right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}.$$

Припустимо, що ми маємо випадкову величину втрат X , її середнє дисперсія, скіс, ексцес визначені так :

$$\mu = E(X), \tag{2.20}$$

$$\sigma^2 = Var(X), \tag{2.21}$$

$$\gamma_1 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} \ , \tag{2.22}$$

$$\gamma_2 = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} - 3. \tag{2.23}$$

Приведені величини розраховують за вибіркою так:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \ , \tag{2.24}$$

$$s = \frac{1}{n-1}\sum \left(X_j - \overline{X}\right)^2 , \tag{2.25}$$

$$\gamma_1 = \frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{X_j - \overline{X}}{s}\right)^3 , \tag{2.26}$$

$$\gamma_2 = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{X_j - \overline{X}}{s}\right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}. \tag{2.27}$$

Для побудови квадратичного перетворення випадкової величини X найближчого до нормально розподіленої випадкової величини використаємо теорію оцінюючих функцій у статистиці [10,11]. Для перших двох моментів з умов рівності нулю математичного сподівання ми маємо дві основні оцінюючі функції

$$h_1 = X - \mu, \tag{2.28}$$

$$h_2 = (X-\mu)^2 - \sigma^2 \ . \tag{2.29}$$

Але h_1 і h_2 не є ортогональні одна одній. Розглянемо їх лінійну комбінацію $h_3 = h_2 + ah_1$. З умови $E(h_1;\ h_3) = 0$ знаходимо невідоме a. Тоді отримаємо:

$$h_3 = (X-\mu)^2 - \sigma^2 - \gamma_1\sigma(X-\mu). \tag{2.30}$$

Потрібно знайти оптимальну лінійну комбінацію оцінюючих функції h_1 та h_3 найближчу до нормально розподіленої випадкової величини:

$$l_\mu = \alpha h_1 + \beta h_3 . \qquad (2.31)$$

Godambe і Thompson [10] показали, що оптимальні коефіцієнти α і β такі:

$$\alpha^* = \frac{E\left(\frac{\partial h_1}{\partial \mu}\right)}{E\left(h_1^2\right)} = -\frac{1}{\sigma^2} , \qquad (2.32)$$

$$\beta^* = \frac{E\left(\frac{\partial h_3}{\partial \mu}\right)}{E\left(h_3^2\right)} = \frac{\gamma_1 \sigma}{\sigma^4\left(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2\right)} . \qquad (2.33)$$

Загалом, $\frac{l_\mu}{\sqrt{Var\left(l_\mu^*\right)}}$ може бути наближене стандартним нормальним розподілом. Отже, $\left(1-\alpha\right)$ відсотковий інтервал надійності для $\frac{l_\mu^*}{\sqrt{Var\left(l_\mu^*\right)}}$ буде

$$\left|\frac{l_\mu^*}{\sqrt{Var\left(l_\mu^*\right)}}\right| < C_\alpha \qquad (2.34)$$

де $C_\alpha = N^{-1}(\alpha)$ – критичне значення відповідно до рівня надійності α,

$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t2}{2}} dt$ - функція стандартного нормального розподілу.

Наприклад, якщо $\alpha = 0.05$, $C_\alpha = 1.96$. Із нерівності (2.34) ми можемо порахувати інтервал надійності для X, якщо всі моменти відомі

$$X_L \le X \le X_U . \qquad (2.35)$$

Для визначення величин X_L та X_U з виразу (2.34) проведемо деякі розрахунки. Насамперед, встановимо, що

$$E\left(h_1\right) = 0 , \quad Var\left(h_1\right) = \sigma^2 ,$$

$$E\left(h_1^2\right) = \sigma^2 , \quad Var\left(h_1^2\right) = 0 .$$

Аналогічно для функції h_3:

$$E(h_3) = 0,$$

$$Var(h_3) = E\left((X-\mu)^2 - \sigma^2 - \gamma_1\sigma(X-\mu)\right)^2 =$$
$$= E\left[(X-\mu)^4 - 2\sigma^2(X-\mu)^2 + \sigma^4 - 2\left((X-\mu)^2 - \sigma^2\right)\gamma_1\sigma(X-\mu) + \gamma_1^2\sigma^2(X-\mu)^2\right] =$$
$$= \left(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2\right)\sigma^4$$

Отож

$$E\left(h_3^2\right) = \left(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2\right)\sigma^4 \geq 0.$$

Тепер знайдемо $Var\left(l_\mu^*\right)$. Насамперед, зауважимо, що $E\left(l_\mu\right) = 0$. Далі знаходимо:

$$Var\left(l_\mu^*\right) = E\left(\alpha^{*2}h_1^2 + 2\alpha^*\beta^*h_1h_2 + \beta^{*2}h_3^2\right) =$$
$$= \alpha^{*2}\sigma^2 + 2\alpha^*\beta^*E\left(h_1h_3\right) + \beta^{*2}\left(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2\right)\sigma^4 = \qquad (2.36)$$
$$= \frac{1}{\sigma^2} + \frac{\gamma_1^2\sigma^2}{\sigma^8\left(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2\right)^2}\left(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2\right)\sigma^4 = \frac{1}{\sigma^2}\frac{\gamma_2 + 2}{\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2} \geq 0$$

Тепер перетворимо l_μ^*:

$$l_\mu^* = \alpha^*h_1 + \beta^*h_3 =$$
$$= -\frac{1}{\sigma^2}(X-\mu) + \frac{\gamma_1\sigma}{\sigma^4\left(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2\right)}\left[(X-\mu)^2 - \sigma^2 - \gamma_1\sigma(X-\mu)\right] =$$
$$= \frac{\gamma_1}{\sigma^3\left(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2\right)}\left\{(X-\mu)^2 - \left[\gamma_1\sigma + \frac{\sigma\left(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2\right)}{\gamma_1}\right](X-\mu) - \sigma^2\right\} = \qquad (2.37)$$
$$= \frac{\gamma_1}{\sigma^3\left(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2\right)}\left\{\left[X - \mu - \frac{\sigma(\gamma_2 + 2)}{2\gamma_1}\right]^2 - \frac{\sigma^2(\gamma_2 + 2)^2}{4\gamma_1^2} - \sigma^2\right\}$$

З нерівності (2.34) отримаємо

$$-C_\alpha\sqrt{Varl_\mu^*} < l_\mu^* < C_\alpha\sqrt{Varl_\mu^*},$$ або

$$-\frac{\sigma^3\left(\gamma_2+2-\gamma_1^2\right)}{|\gamma_1|}C_\alpha\sqrt{Varl_\mu^*}<$$

$$<\left[X-\mu-\frac{\sigma\left(\gamma_2+2\right)}{2\gamma_1}\right]^2-\frac{\sigma^2\left(\gamma_2+2\right)^2}{4\gamma_1^2}-\sigma^2< \qquad (2.38)$$

$$<\frac{\sigma^3\left(\gamma_2+2-\gamma_1^2\right)}{|\gamma_1|}C_\alpha\sqrt{Varl_\mu^*}$$

Якщо $\gamma_1=0$,то $l_\mu^*=\frac{-1}{\sigma^2}(X-\mu)$, $Var\left(l_\mu^*\right)=\frac{1}{\sigma^2}$, тому отримаємо випадок нормального розподілу

$$-\sigma C_\alpha \le X-\mu \le \sigma C_\alpha \, .$$

В загальному випадку отримаємо:

$$-C_\alpha\frac{1}{\sigma}\le-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)\le C_\alpha\frac{1}{\sigma}$$

$$-\sigma^2\frac{C_\alpha\sqrt{\left(\gamma_2+2\right)\left(\gamma_2+2-\gamma_1^2\right)}}{|\gamma_1|}\le\left[X-\mu-\frac{\sigma\left(\gamma_2+2\right)}{2\gamma_1}\right]^2-\frac{\sigma^2(\gamma_2+2)^2}{4\gamma_1^2}-\sigma^2\le \qquad (2.39)$$

$$\le\sigma^2\frac{C_\alpha\sqrt{\left(\gamma_2+2\right)\left(\gamma_2+2-\gamma_1^2\right)}}{|\gamma_1|}$$

Перепишемо (2.39) у вигляді

$$-C\le[X-\mu-A]^2-B\le C \, , \qquad (2.40)$$

де

$$A=\frac{\sigma(\gamma_2+2)}{2\gamma_1}$$

$$B=\frac{\sigma^2(\gamma_2+2)^2}{4\gamma_1^2}+\sigma^2>0$$

$$C=C_\alpha\frac{\sigma^2}{|\gamma_1|}\sqrt{(\gamma_2+2)(\gamma_2+2-\gamma_1^2)}>0$$

Знайдемо розв’язок квадратної нерівності (2.40) ? припустимо, що $B-C>0$ і розглянемо випадок $\gamma_1>0(A>0)$ та $\gamma_1<0(A<0)$.

В першому випадку центр параболи $Y(X-\mu)=[X-\mu-A]^2$ є зміщеним вправо від нуля (Рис. 2.2). Величина $X-\mu$ приймає ? в околі нуля, тому розв’язок нерівності (2.40) потрібно шукати для лівої вітки, для якої

$X-\mu-A<0$

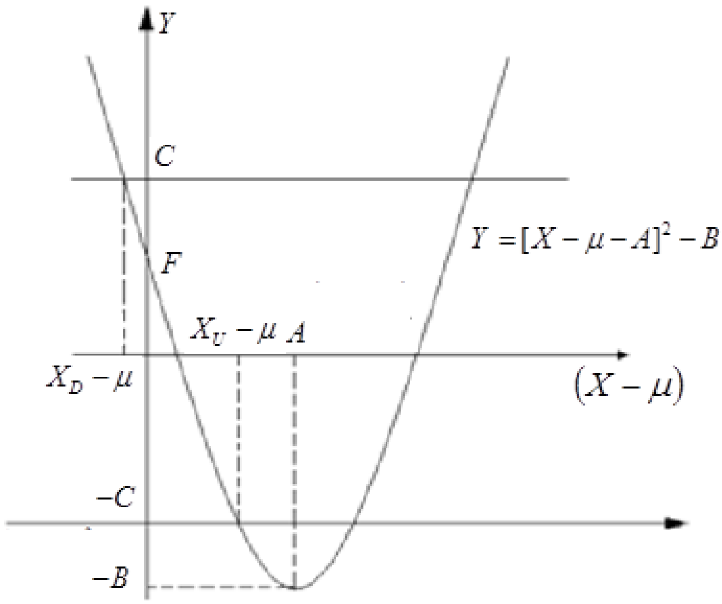

Рис. 2.2. Дослідження інтервалу довіри для випадку $\gamma_1>0(A>0)$.

Тому отримаємо

$-\sqrt{B+C}\le X-\mu-A\le-\sqrt{B-C}$.

Звідси отримаємо

$\mu+A-\sqrt{B+C}\le X\le\mu+A-\sqrt{B-C}$,

$X_D=\mu+A-\sqrt{B+C}$

$X_U=\mu+A-\sqrt{B-C}$.

Тому розрахункові формули можна записати так:

$$X_L=\mu+\left\{\frac{\gamma_2+2}{2\gamma_1}-\left[\left(\frac{\gamma_2+2}{2\gamma_1}\right)^2+1+\frac{C_\alpha}{\gamma_1}\sqrt{(\gamma_2+2)(\gamma_2+2-\gamma_1^2)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\sigma \qquad (2.41)$$

$$X_U = \mu + \left\{ \frac{\gamma_2 + 2}{2\gamma_1} - \left[\left(\frac{\gamma_2 + 2}{2\gamma_1} \right)^2 + 1 - \frac{C_\alpha}{\gamma_1} \sqrt{(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \sigma \qquad (2.42)$$

Аналогічно, якщо $\gamma_1 < 0 (A < 0)$ - центр параболи $[X - \mu - A]^2$ є зміщений вліво від нуля (Рис. 2.3). Тому розв’язки шукаємо для правої вітки, для якої $X - \mu - A > 0$.

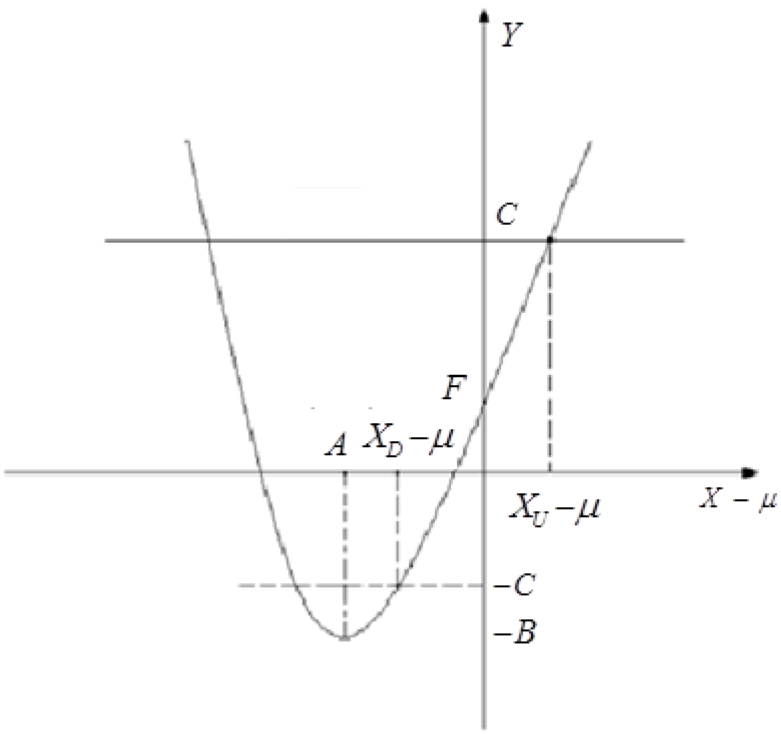

Рис. 2.3. Дослідження інтервалу довіри для випадку $\gamma_1 < 0 (A < 0)$.

Тому отримаємо:

$\sqrt{B - C} \le X - \mu - A \le \sqrt{B + C}$

$\mu + A + \sqrt{B - C} \le X \le \mu + A + \sqrt{B + C}$

$X_D = \mu + A + \sqrt{B - C}$

$X_U = \mu + A + \sqrt{B + C}$

Кінцеві розрахункові формули будуть такі:

$$X_L = \mu + \left\{ \frac{\gamma_2 + 2}{2\gamma_1} + \left[\left(\frac{\gamma_2 + 2}{2\gamma_1} \right)^2 + 1 + \frac{C_\alpha}{\gamma_1} \sqrt{(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \sigma \qquad (2.43)$$

$$X_U = \mu + \left\{ \frac{\gamma_2 + 2}{2\gamma_1} + \left[\left(\frac{\gamma_2 + 2}{2\gamma_1} \right)^2 + 1 - \frac{C_\alpha}{\gamma_1} \sqrt{(\gamma_2 + 2)(\gamma_2 + 2 - \gamma_1^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \sigma \qquad (2.44)$$

Для випадку $C > B$ здійснюємо лінійні наближення дотичною в точці F (Рис. 2.1, 2.2).

У випадку $\gamma_1 > 0$ досліджуємо дотичну до функції $f(y) = (y - A)^2 - B$ в точці $y = X - \mu = 0$. Знайдемо $f'(y) = 2(y - A)$, $y'(0) = -2A < 0$.

Рівняння дотичної

$$Y = -2Ay + A^2 - B$$

Знаходимо точку перетину її з прямою $Y = -C$

$$-2Ay + A^2 - B = -C$$

Отримаємо $y = \frac{1}{2A}(A^2 - B + C)$, тому

$$X_U = \mu + \frac{1}{2A}(A^2 - B + C).$$

Аналогічно для $\gamma_1 < 0$ знайдемо

$$X_D = \mu - \frac{1}{2A}(A^2 - B + C).$$

3. ОЦІНКА ВАЛЮТНОГО РИЗИКУ

3.1. Тестування моделей VaR

Критерії оцінки і методи порівняння різних моделей VaR поділяють на дві групи [4,7]:

- оцінка точність моделі
- оцінка ефективність моделі.

До першої групи відносять тести на відповідність досліджуваної моделі визначення VaR самому означенню VaR.

Так, наприклад, випадковий процес, який приймає значення "нуль" у випадку коли реальна змінна відносності портфеля не перевищує прогнозованого VaR, і значення "один" – в протилежному випадку, є процесом Бернуллі. Для нього подія "один" відбувається з ймовірністю α. Цю гіпотезу можна перевірити стандартними статистичними методами.

Другою групою критеріїв є ефективність моделі. На основі оцінки VaR фінансовий менеджер будує стратегію управління ризиками, зокрема величини ризикових капіталів. Невідповідно реальних значень портфеля змін прогнозу величині втрат. На основі цього можна описати можливі витрати. Їх абсолютна або відносна величина для деякого історичного горизонту і буде оцінкою ефективності VaR.

Тестування здійснюють шляхом прогонки (backtesting) за деякою тестовою вибіркою історичних (або змодельованих) даних.

Для візуального аналізу використовують графіки арифметичних (логарифмічних дохідностей) за даний історичний період, та оцінки $VaR_{\propto}$ За такими графіками можна стверджувати про якісний характер моделей VaR, чутливість моделей до зміни кластерів волатильності.

Для параметричних моделей важливим моментом є перевірка гіпотези про розподіл. Найпростіші методи – побудова квантиль-квантиль графіків, розрахунок скосу та ексцесу.

Для побудови статистики точності та ефективності моделей використовують так звані функції втрат.

Позначимо:

$\Delta \mathrm{P}_{t+1}$ - дохідність портфеля, за період $[t, t+1]$,

$VaR_{t+1}(\alpha)^{\pm}$ – прогнозована $VaR(\alpha)$ на цей період.

Тоді функцію втрат (General Loss Function) визначають так:

$$L_{t+1}(\triangle P_{t+1,} VaR_{t+1}) = \begin{cases} f^{+}(\triangle P_{t+1,} VaR_{t+1}), \triangle P_{t+1} > VaR^{-}; \\ f^{0}(\triangle P_{t+1,} VaR_{t+1}), VaR^{-} < \triangle P_{t+1} < VaR^{+}; \\ f^{-}(\triangle P_{t+1,} VaR_{t+1}), \triangle P_{t+1} < VaR^{+}. \end{cases}$$

де $f^{0}, f^{\pm}$ – деякі функції.

Найпростішою функцією втрат є бінарна функція втрат. Запишемо її у найпростішому випадку, коли $VaR^{-} = -\infty$.

$$L_{t+1} = \begin{cases} 1, & LP_{t+1} > VaR_{t+1}; \\ 0, & LP_{t+1} < VaR_{t+1}. \end{cases}$$

Таж функція враховує лише сам факт перевищення без врахування її величини. За статистику беруть середнє значення бінарної функції втрат на тестовій вибірці з N спроб:

$$\overline{L_N} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} L_i \qquad (3.1)$$

За рівнем достовірності α статистика має бути близькою до $1 - \alpha$.

BIS рекомендує часовий горизонт N=250 операційних днів. За рекомендацією BIS визначено три зони:

- зелена зона: якщо при $\alpha = 99\%$ було не більше 4 перевищень цього рівня (1,6%);

- жовта зона: за цих же умов $5 \div 8$;

- червона зона: 9 та більше перевищень.

Якщо модель попадає в зелену зону, то її використання нормуючими і регулюючими органами дозволяється.

При "активному" управлінні ризиком міру VaR використовують для визначення величини ризикового капіталу, тобто засоби для покриття можливих збитків.

Як перевищення так і недооцінка VaR в цій ситуації є економічно неефективними. Недооцінку VaR враховують за допомогою функції непокритого ризику (недооцінки ризику):

$$L_{t+1}^{-} = \begin{cases} \dfrac{\Delta P_{t+1} - VaR_{t+1}}{VaR_{t+1}}, \Delta P_{t+1} > VaR_{t+1} \\ 0, \Delta P_{t+1} \le VaR_{t+1} \end{cases}$$

Середнє значення цієї функції

$$\overline{L}^{-} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} L_t^{-} \qquad (3.2)$$

характеризує середню недооцінку ризику.

Переоцінку VaR враховують за допомогою функції перевищення ризику

$$L_{t+1}^{+} = \begin{cases} \dfrac{VaR_{t+1} - \Delta P_{t+1}}{VaR_{t+1}}, \Delta P_{t+1} < VaR_{t+1} \\ 0, \Delta P_{t+1} \ge VaR_{t+1} \end{cases}$$

Середнє значення цієї функції

$$\overline{L}^{+} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} L_t^{+} \qquad (3.3)$$

характеризує середню переоцінку ризику.

Як правило, попередні два критерії аналізують разом, розміщуючи на площині відповідні точки. Тоді можна визначити паретто-оптимальні моделі, коли вважати, що модель заміщує іншу, якщо має непокритий та невикористаний ризик.

Простим тестом є розрахунок кореляції VaR та приросту вартості портфеля.

3.3. Валютний ризик

Валютний ризик, насамперед, пов'язаний зі втратами в операціях купівлі-продажу валют, які можуть виникнути при зміні валютних курсів [2,4,7]. Іншими словами, валютний ризик це є ризиком отримання прямих грошових втрат або зменшення вартості капіталу за несприятливої зміни курсів валюти.

Міра схильності до валютного ризику визначається: відкритою валютною позицією банку за різними іноземними валютами та динамікою валютних курсів.

Валютний ризик, великою мірою, зумовлений розширенням міжнародного ринку банківських послуг, розвитком транснаціональних компаній та банків та розширенням сфери їх діяльності.

Для виникнення валютного ризику важливим "валютна позиція", яка визначається співвідношенням активів та пасивів у конкретній валюті.

Якщо активи і пасиви по деякій валюті співпадають, то позицію по цій валюті вважають "закритою". У цьому випадку ризику не виникає, оскільки можливі збитки при купівлі валюти будуть перекриті при її продажу.

Позицію називають "відкритою", коли суми вимог та зобов'язань за деякою валютою є різними.

Коли сума пасивів за деякою валютою перевищує суму активів, то говорять про "коротку позицію" за цією валютою. В такій ситуації банку доведеться в майбутньому купувати валюту за новим курсом. Збитки виникнуть коли курс валюти зріс.

Якщо сума вимог перевищує суму зобов’язань банку – "довга позиція", то збитки виникнуть при зменшенні курсу іноземної валюти щодо національної.

Нехай V_x – валютна позиція банку по деякій валюті x , k_{xH} – курс цієї валюти в гривнях (UAH). Тоді вартість цієї позиції в гривнях буде дорівнювати:

$$V_H = V_x \cdot k_{xH} \tag{3.1}$$

Зміна вартості валютної позиції за один період буде рівна

$$V_H^{(1)} - V_H^{(0)} = V_x^{(0)}\left(k_{xH}^{(1)} - k_{xH}^{(0)}\right) = V_x^{(0)} k_{xH}^{(0)} \left(\frac{k_{xH}^{(1)} - k_{xH}^{(0)}}{k_{xH}^{(0)}}\right) = V_H^{(0)} R_{xH}^{(1)} . \tag{3.2}$$

Отже отримали, що відносна зміна вартості валютної позиції рівна відносному приросту курсу валюти.

$$\frac{V_H^{(1)} - V_H^{(0)}}{V_H^{(0)}} = R_{xH}^{(1)} , \tag{3.3}$$

Якщо $V_H^{(0)} < 0$ (пасиви перевищують активи), то $R_{xH}^{(1)}$ є відносною величиною втрат, $V_H^{(0)} > 0$, то $R_{xH}^{(1)}$ – відносна величина прибутків.

Зазвичай, на практиці використовують логарифмічні прирости, які приблизно рівні арифметичним:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = R_t - \frac{R_t^2}{2} + \frac{R_t^3}{3} - ... \approx R_t . \tag{3.4}$$

3.3. Числовий аналіз засобами електронних таблиць

Підрахунки проводили в середовищі MS EXCEL [9] для валютних позицій PLN / UAH, SEK/UAH та CAD / UAH за даними про курси з 29.02.2020 по 30.09.2021. На рис. 3.1. показана динаміка курсів цих валют за розглядуваний період. Відповідно до рекомендацій Risk Metrics Group [13] часовий горизонт задавали $H = 60$, тривалість тестування – N = 365 днів (250 операційних днів).

Для розрахунку VaR використовували три моделі: класичні дельта-нормальну та історичну, а також запропоновану у параграфі 2.3 квадратично-нормальну модель. Якісне співвідношення цих моделей дають діаграми VaR у порівнянні з відносними приростами курсу, які показані на рис.3.2, 3.5, 3.8.

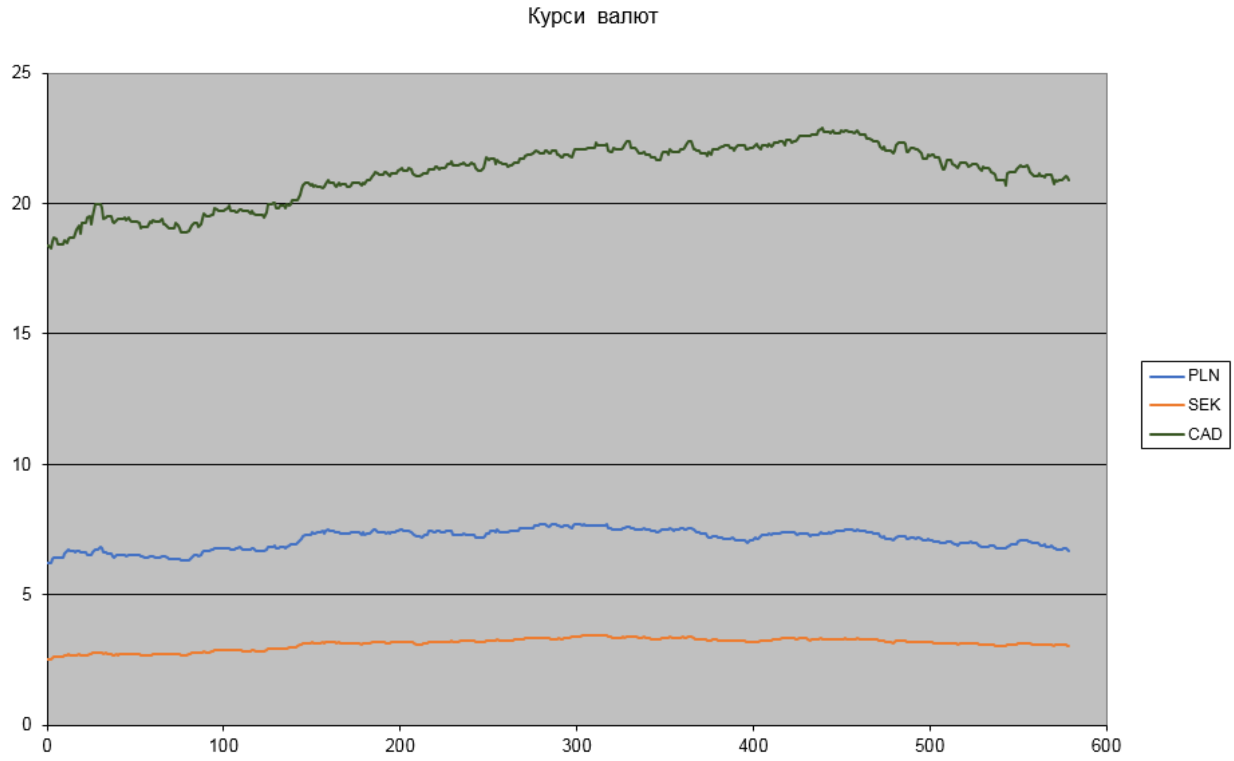

Рис.3.1 Графіки курсів валют

Відповідність моделей означено VaR показують графіки відносних перевищень, розрахованих за формулою (3.1). Середня кількість перевищень віднесена до теоретичної ймовірності перевищень $(1-\alpha)$. Аналізуючи відповідні діаграми За графіками рис.3.3, 3.6, 3.9 легко встановити бачити, що за цим показником найкращим є історичний метод, а пропонований – квадратично-нормальний – найгіршим.

За графіками показників VaR легко бачити, що переважно ціна ризику, обчислена за історичною моделлю є найбільшою, а обчислена за квадратично-нормальною моделлю – найменшою.

Для порівняння ефективності моделей розраховували середню відносну недооцінку ризику

$$L^{-} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} L_t^{-}, \quad L_t^{-} = \begin{cases} \dfrac{\Delta P_t - VaR_t}{VaR_t}, \Delta P_t > VaR_t \\ 0, \Delta P_t < VaR_t \end{cases} \quad (3.4)$$

Та середню відносну переоцінку ризику

$$L^{+} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} L_t^{+}, \quad L_t^{+} = \begin{cases} \dfrac{VaR_t - \Delta P_t}{VaR_t}, 0 < \Delta P_t < VaR_t \\ 0, \Delta P_t \le 0 \end{cases}. \quad (3.5)$$

За графіками рис. 3.4., 3.7, 3.10 видно, що найбільш переоцінює ризик історична модель, а найменш – квадратично-нормальна модель.

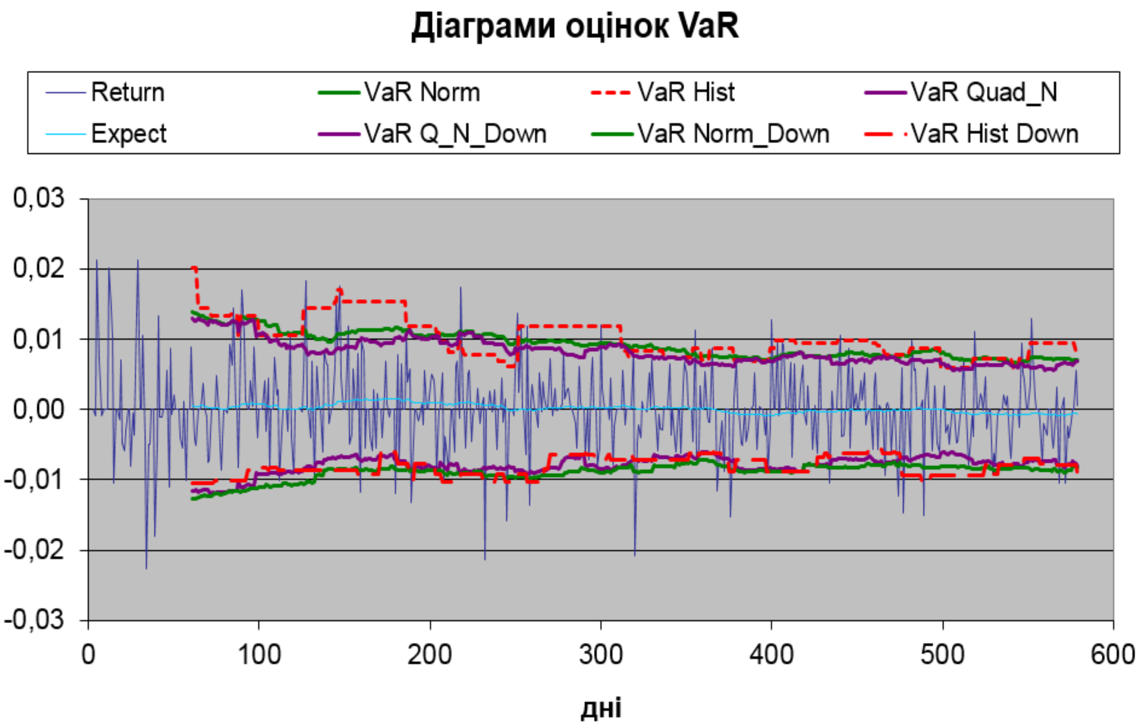

Рис. 3.2. Діаграма оцінок VaR для курсу PLN / UAH.

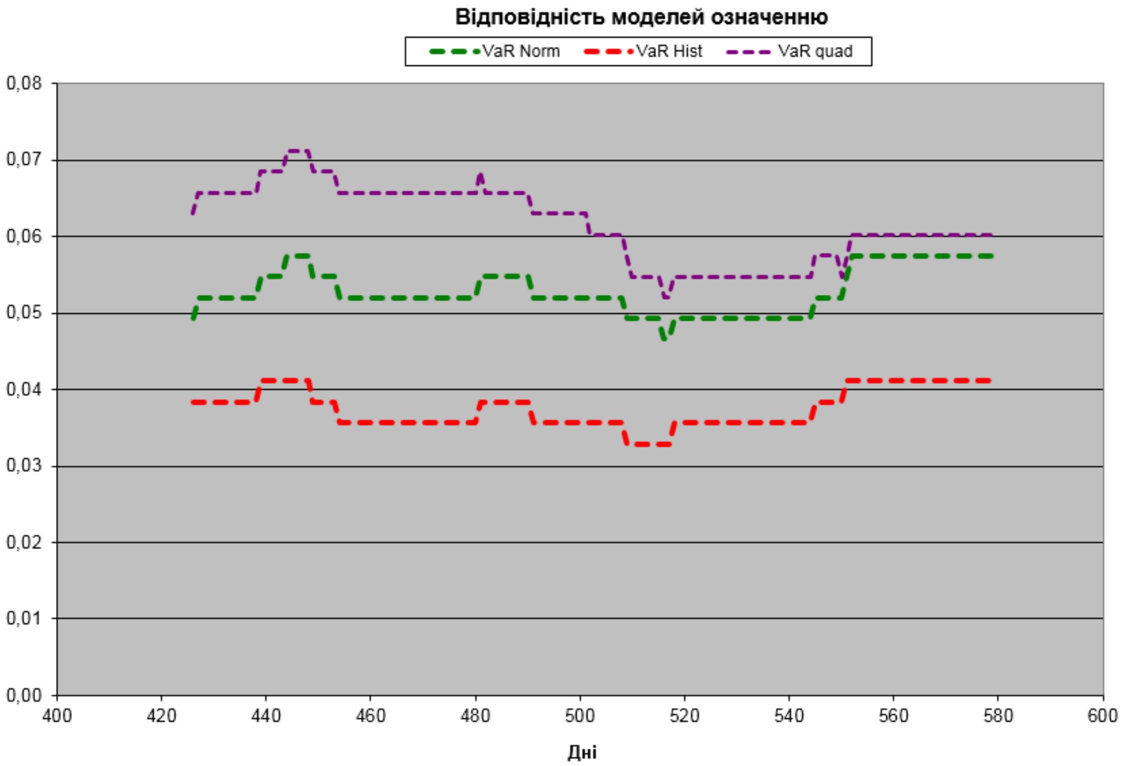

Рис. 3.3. Моделі дельта-нормальна, історична, квадратично-нормальна для PLN/ UAH.

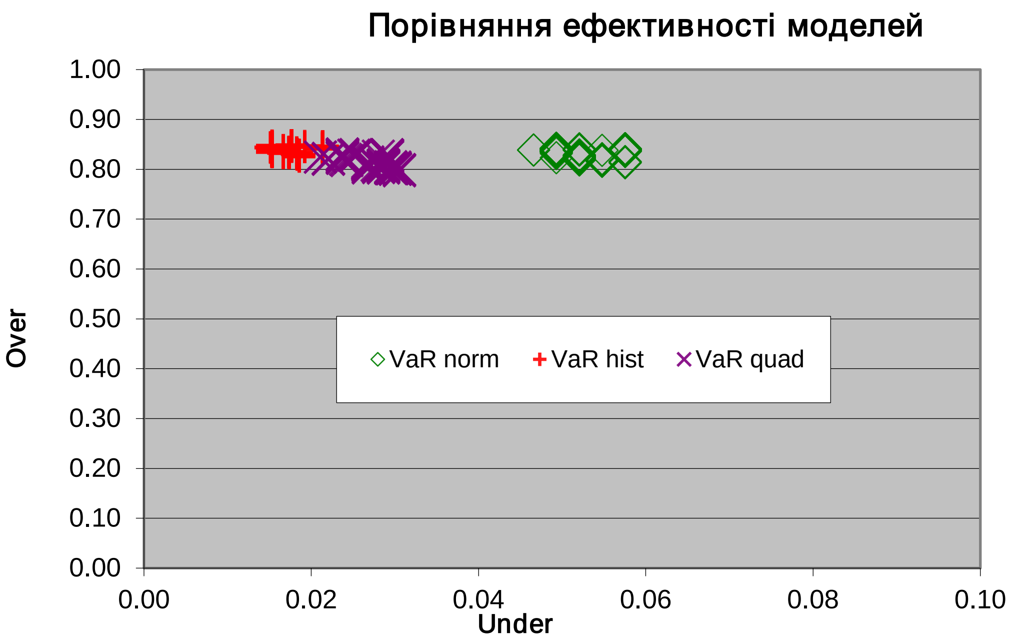

Рис. 3.4. Діаграма порівняльної ефективності моделей для PLN/ UAH.

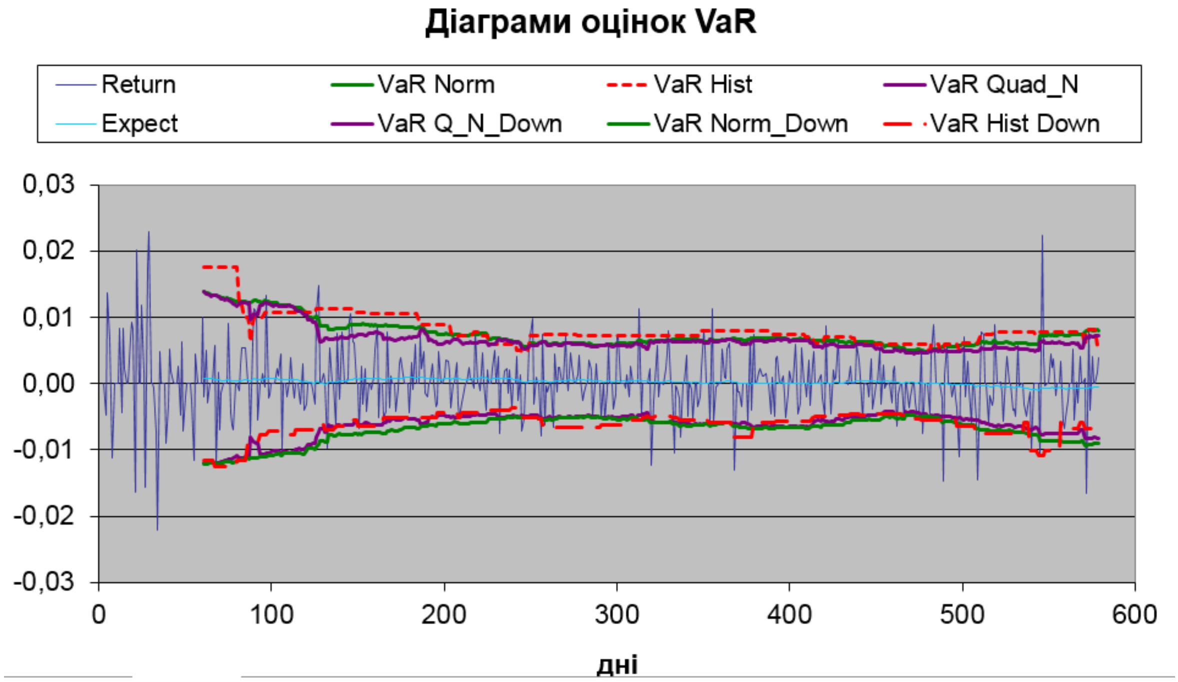

Рис. 3.5. Діаграма оцінки VaR для курсу CAD / UAH.

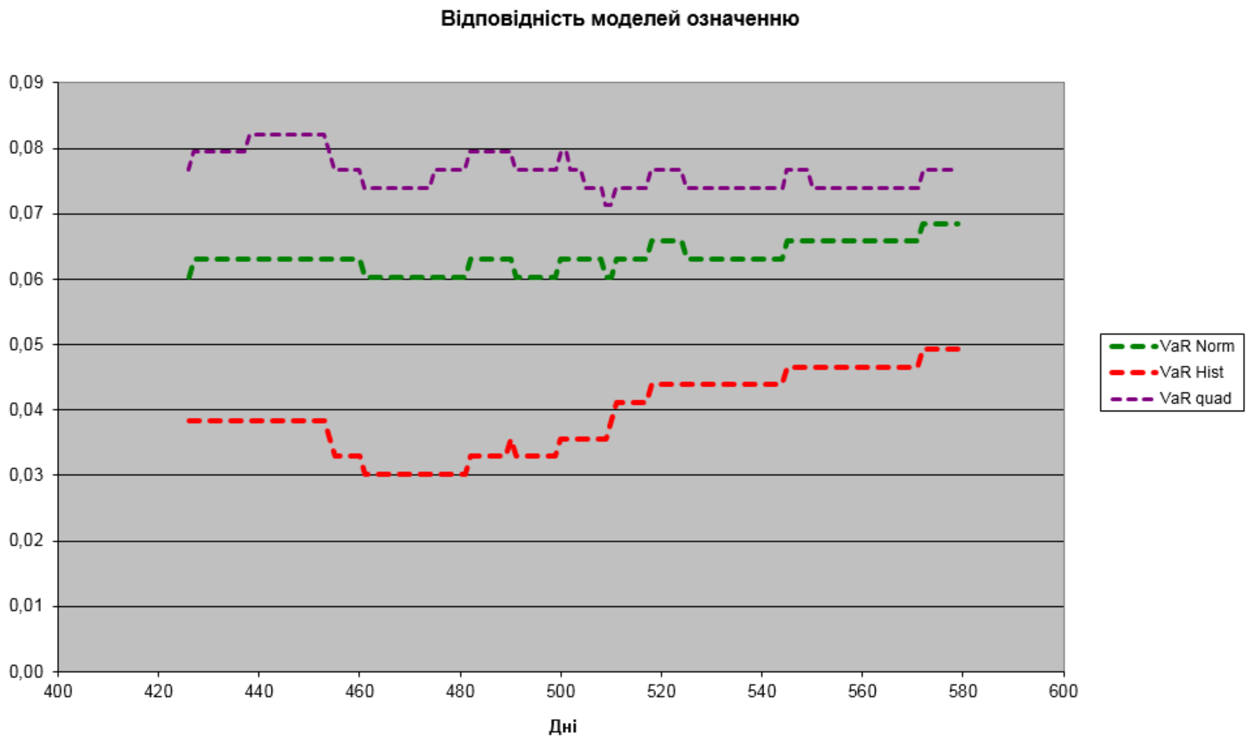

Рис. 3.6. Моделі дельта-нормальна, історична, квадратично-нормальна для курсу CAD / UAH.

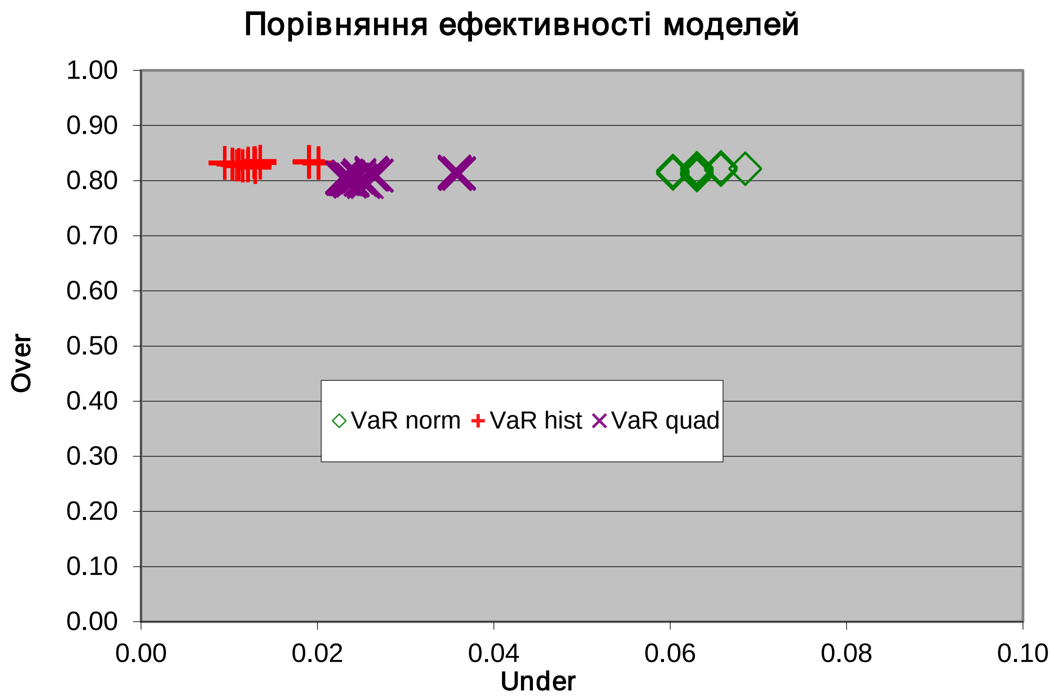

Рис. 3.7. Діаграма порівняльної ефективності моделей для курсу CAD// UAH.

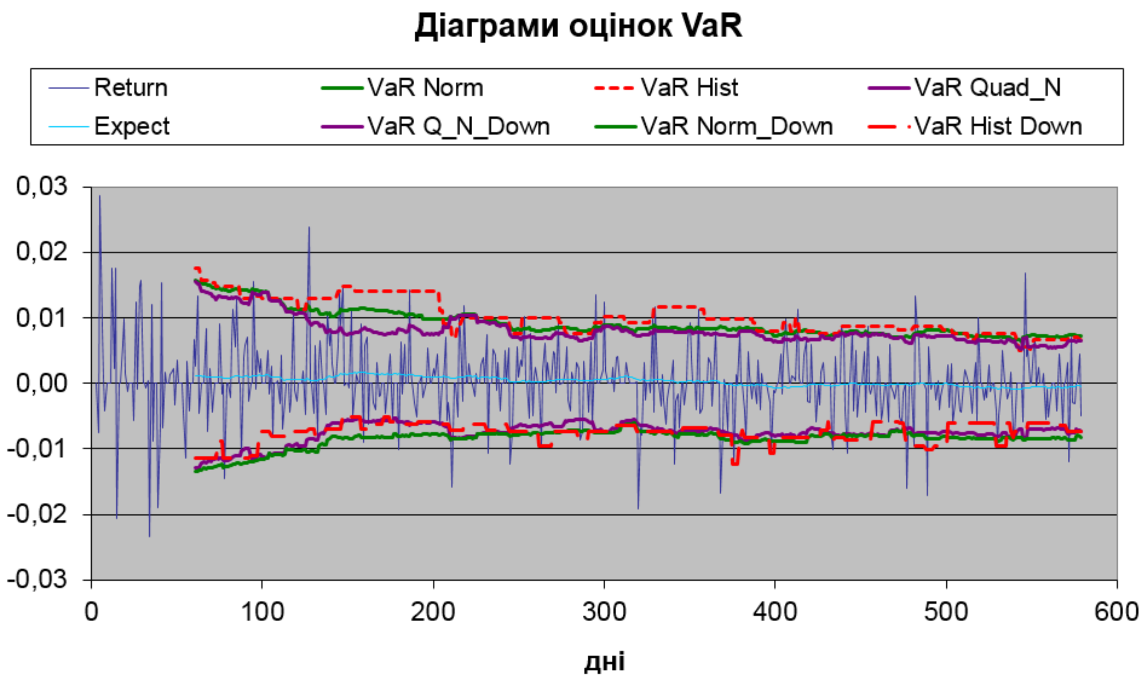

Рис. 3.8. Діаграма оцінки VaR для курсу SEK / UAH.

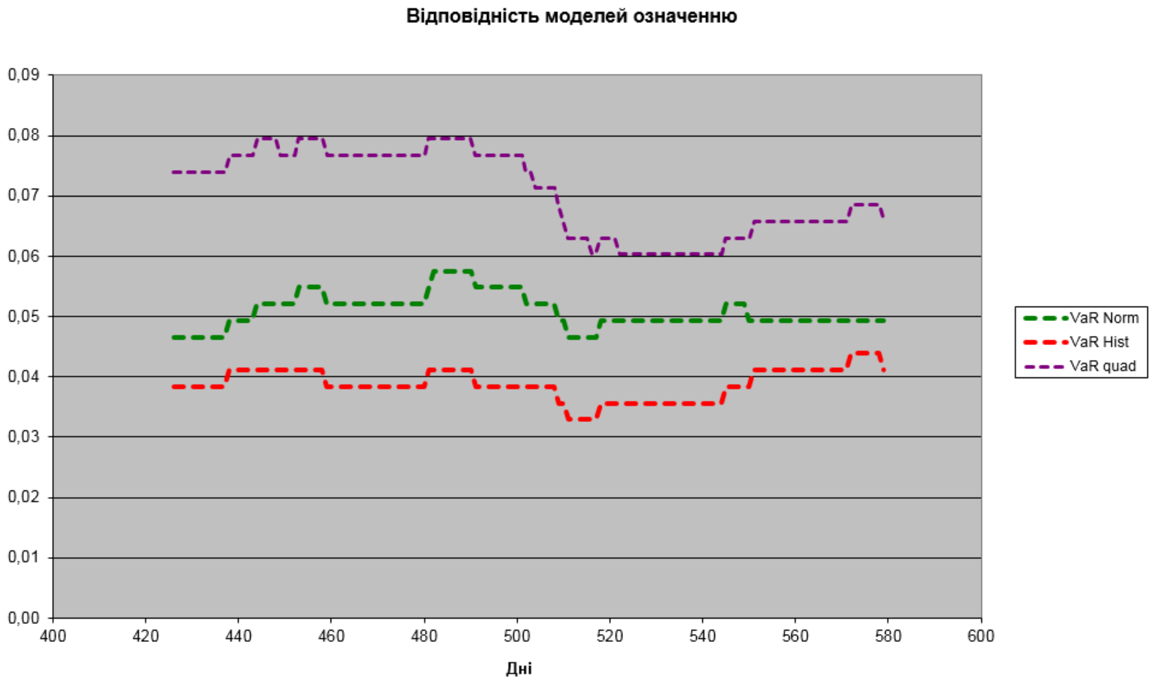

Рис. 3.9. Моделі дельта-нормальна, історична, квадратично-нормальна для курсу SEK / UAH.

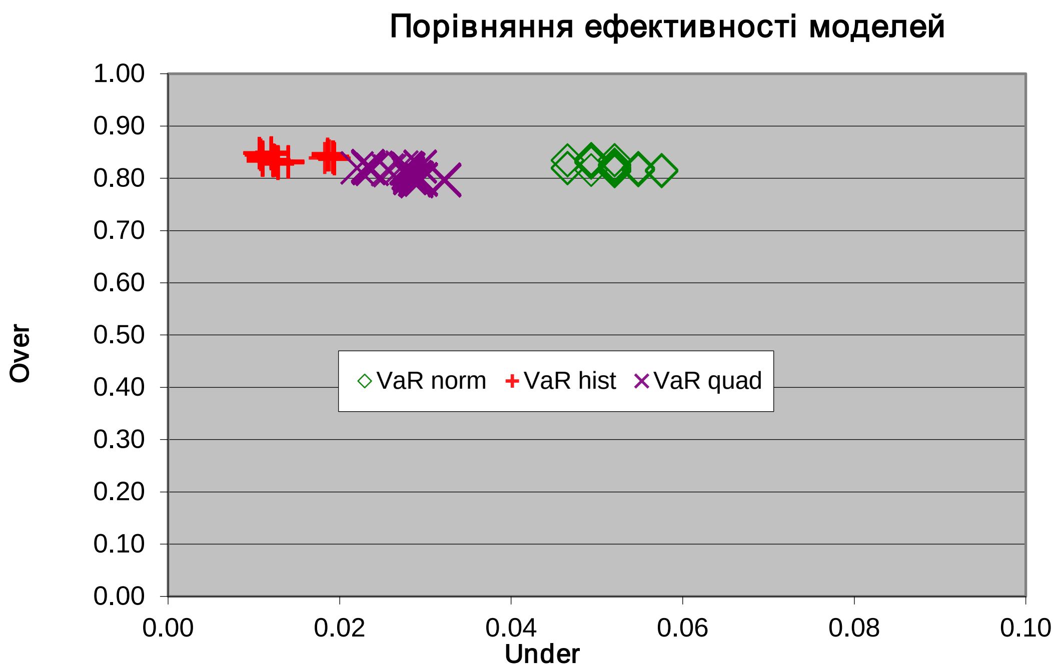

Рис. 3.10. Діаграма порівняльної ефективності моделей для курсу SEK / UAH, 55 тестів.

ВИСНОВОК

У магістерській роботі досліджено напівпараметричний метод оцінки вартості під ризиком Value at Risk, який полягає у квадратичному перетворенні вихідної величин втрат до випадкової величини з розподілом, близьким до нормального, з подальшим оберненим перетворенням для розрахунку VaR.

У першому розділі роботи розглянуто поняття вартості під ризиком VaR. Дано означення цієї міри ризику, розглянуто її властивості, досліджено випадок нормального розподілу втрат.

У другому розділі поряд з класичними моделями для розрахунку VaR – дельта-нормальною та історичною досліджується напівпараметрична квадратично-нормальна модель. Параметри моделі визначено методом оцінюючих функцій. Основним результатом розділу є аналітичні формули для верхньої та нижньої оцінки VaR.

В третьому розділі на прикладі одноденного валютного ризику для валютних позицій в злотому, шведській кроні та канадському доларі в середовищі MS EXCEL проведено тестування запропонованої моделі методом прогонки у порівнянні з класичним. Досліджено відповідність моделі означенню VaR, а також її ефективність.

Показано, що для стабільного валютного ринку всі моделі дають близькі результати, а досліджувана квадратично-нормальна модель, у порівнянні з дельта-нормальною та історичною найменше переоцінює ризик.

Список літератури

1. Дудикевич Я.В., Прокопишин І.А. Вартість ризику для систем захисту інформації // Захист інформації. – 2009. – № 2. – С. 81-85.
2. Энциклопедия финансового риск-менеджмента / Под ред. А. А. Лобанова, А.В. Чугунова. – 3-е изд. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2007. – 878 с.
3. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика. – Київ: Київський університет, 2007. – 494 с.
4. Меньшиков И.С., Шелагин Д.А. Рыночные риски: модели и методы. – М.: ВЦ РАН, 2000. – 55с.
5. Підкуйко С.І. Математичний аналіз. Т.1 – Львів: Галицька видавнича спілка, 2004. – 544 с.
6. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник. – Київ: ЦНЛ, 2004. – 448 с.
7. Alexander, Carol. Market Risk Analysis. – Volume IV: Value at Risk Models. – Wiley, 2008. – 455 p.
8. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent Measures of Risk // Mathematical Finance, 1999. – Vol.9, No.3. – P. 203-228.
9. Benninga S. Financial modeling. – 4th ed. – The MIT Press, 2014. – 1143 p. – The MIT Press, 2014. — 1143 p.
10. Godambe V.P., Thompson M. An Extension of Quasi-Likelihood Estimation. – Journal of Statistical Planning and Inference. – 1989, v.22. – P.137 – 152.
11. Godambe V.P. Estimating functions. – Oxford University Press,1991. – 344 p.
12. Li David X. Value at Risk Based on the Volatility, Skewness and Kurtosis. – RiskMetrics Working Papers, 1999. –15 p.
13. Risk Metrics™ Metrics™ Technical Document – Fourth Edition. – New York: RiskMetrics Group, 1996. – 284 p.