Міністерство освіти та науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра математичної економіки, економетрики, фінансової та актуарної математики

Магістерська кваліфікаційна робота

Властивості вибіркової оцінки відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією

Виконав
студент групи МТФ – 51
спеціальності 111 – Актуарна
та фінансова математика
Самогольський Володимир

Науковий керівник
д. ф.-м. н., проф. Заболоцький М. В.

Львів – 2021

Зміст

Вступ

В процесі інвестування, тобто вкладання коштів у ті чи інші фінансові активи, інвестор стикається з двома типами ризиків, систематичним та несистематичним. Якщо систематичний ризик, який викликаний загальноринковими факторами, такими як, наприклад, економічний спад, війна, політична криза, тощо, неможливо усунути, то несистематичний ризик, тобто ризик притаманний кожному активу, можна зменшити. Загальним способом зниження ризику інвестицій є диверсифікація. Диверсифікація це процес розподілу коштів інвестора між різними фінансовими активами. В той час як одні активи втрачатимуть в ціні, інші будуть компенсувати це падіння. Зрозуміло, що підхід до диверсифікації не може бути випадковим, а повинен грунтуватися на певних критеріях. Тобто, інвестор повинен керуватися певними критеріями щодо прийняття рішення стосовно наявності того чи іншого фінансового активу в стратегії інвестування, а також частки коштів, вкладеної в цей актив. В результаті інвестор отримує вектор часток коштів вкладених у кожен актив. Цей вектор прийнято називати портфелем фінансових активів. Отже, реалізацією диверсифікації є побудова портфеля фінансових активів. Зауважимо, що навіть при наявності двох активів, множина все можливих портфелів є досить велика, а у випадку використання стандартного припущення про нескінченну подільність активів, взагалі нескінчена. Тому необхідним є застосування науково обґрунтованих критеріїв побудови портфеля фінансових активів. Це дозволить, по-перше, знизити ризик портфеля до потрібного (допустимого) рівня, а, по-друге, отримати сподівану дохідність портфеля не нижче потрібного рівня.

Важливу роль в процесі вибору раціональної структури портфеля відіграють зокрема два показники, відношення Шарпа та дисперсія портфеля. Зауважимо, що відношення Шарпа є більш практичним показником, натомість дисперсія більше використовується на практиці. На основі цих показників формуються такі портфелі як портфель з найменшою дисперсією та портфель з максимальним відношенням Шарпа. Зважаючи на важливість відношення Шарпа з практичної точки зору, виникає питання, наскільки відрізняються відношення Шарпа двох вищезгаданих портфелів. Можливо різниця між цими показниками не є істотною і інвестор може використовувати портфель з меншим ризиком без істотної втрати у величині відношення Шарпа? Також, в цьому випадку, для планування своєї діяльності, інвестор матиме можливість використовувати характеристики портфеля з найменшою дисперсією, властивості яких є набагато кращими ніж у характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа.

Метою даної роботи є дослідження властивостей відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією.

Для досягнення мети дослідження поставлено наступні завдання:

1. Ознайомитися з теорією портфеля та основними методами вибору раціональної структури портфеля.

2. Опрацювати літературу, що стосується дослідження статистичних властивостей оцінок ваг та характеристик основних портфелів з раціональною структурою.

3. Дослідити асимптотичний розподіл вибіркової оцінки відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією за припущення, що дохідності активів, які включені у портфель поводяться як нормально розподілені незалежні в часі випадкові величини.

4. Побудувати інтервал довіри для відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією та на основі історичних даних протестувати на істотність відмінності між значеннями відношень Шарпа портфелів з найменшою дисперсією та максимальним відношенням Шарпа.

5. На основі імітаційного моделювання, дослідити швидкість збіжності емпіричних розподілів оцінки відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією до знайденого асимптотичного у випадку нормально розподілених і незалежних в часі дохідностей активів включених у портфель.

6. Узагальнити отримані результати на випадок еліптично розподілених і незалежних в часі дохідностей активів включених у портфель.

1. Основні відомості з теорії портфеля

Вибір раціональної структури портфеля фінансових активів на науково обгрунтованому рівні було описано Марковіцем в [1]. В цій роботі пропонується на основі двох характеристик портфеля, його сподіваній дохідності та ризику, вибирати структуру портфеля так, щоб сподівана дохідність була максимальною при обмеженому зверху ризику, чи, щоб ризик був мінімальним при обмеженій знизу сподіваній дохідності. Зауважимо, що за сподівану дохідність Марковіц вибрав математичне сподівання дохідності портфеля, а за ризик – дисперсію дохідності портфеля. В результаті застосування методу Марковіца вибору раціональної структури доволі просто можна отримати результати, які мають зрозумілу інтерпретацію. Завдяки цьому даний підхід став надзвичайно популярним не лише серед фінансистів науковців, але й серед практиків фінансового ринку. Проте, даній схемі вибору раціональної структури портфеля фінансових активів притаманні деякі недоліки. Першим недоліком є вибір дисперсії як міри ризику. Такий вибір зазнає критики протягом останніх декількох десятиліть, проте з точки зору фінансової математики для отримання теоретичних результатів такий вибір є обгрунтованим. Гіршим є інший недолік, а саме, вибір мінімально допустимого рівня сподіваної дохідності та максимально допустимого рівня дисперсії. Зрозуміло, що вибір цих показників впливає на структуру портфеля. Змінюючи мінімальний допустимий рівень сподіваної дохідності від мінімально можливого до $+\infty$, або еквівалентно змінюючи максимальний допустимий рівень дисперсії від мінімально можливого до $+\infty$, отримаємо цілу множину портфелів, відому під назвою ефективної множини [2]. Тому, серед іншого, Марковіц розглянув задачу вибору структури портфеля на основі мінімізації дисперсії безумовно стосовно сподіваної дохідності. Результатом такого підходу є портфель з найменшою дисперсією, який відіграє надзвичайно важливу роль в теорії портфеля та є основним об’єктом нашого дослідження. Ще одним недоліком методу Марковіца є те, що оптимізується лише одна з характеристик портфеля в той час як інша є фіксованою. Для уникнення цього недоліку було розроблено декілька модифікацій методу вибору раціональної структури портфеля фінансових активів. Розглянемо деякі з них.

Одним з узагальнень методу вибору раціональної структури портфеля фінансових активів Марковіца є метод максимізації сподіваної квадратичної корисності портфеля. Сподівана квадратична корисність портфеля визначається як функція від сподіваної дохідності та дисперсії портфеля [3]. Причому вплив дисперсії регулюється на основі вибору коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику. Чим більшим є значення цього коефіцієнта тим менше інвестор схильний до ризику. Якщо значення коефіцієнта, що описує ставлення до ризику дорівнює $+\infty$, то інвестор обирає портфель з найменшою дисперсією. Даний метод розглянуто зокрема в [4]. В цій роботі досліджено розподіли ваг портфеля з максимальною за припущення, що дохідності активів є незалежними в часі нормально розподіленими величинами та, що значення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику є відомим та незмінним. Перше припущення доволі часто використовується у науковій літературі для отримання теоретичних результатів та у випадку використання дохідностей з частотою вищою за тижневу, а у випадку дохідностей фінансових активів з розвинутих ринків, то і щоденної. Натомість друге припущення щодо сталості коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику виглядає доволі неправдоподібно. В низці праць, які присвячені визначенню цього коефіцієнта вказано, що вплив на нього мають не лише об'єктивні, але й суб'єктивні фактори [5]. Інший спосіб визначення цього коефіцієнта грунтується на характеристиках уже сформованого портфеля [6]. Також можна оцінити значення коефіцієнта, що описує ставлення до ризику на основі параметрів дохідностей активів, які будуть включатися в портфель та рівні довіри до Value-at-Risk [7]. В будь-якому випадку, оцінка значення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику повинна розглядатися як випадкова величина, а тому обгрунтованіші результати будуть отримані у випадку використання інтервальної оцінки замість точкової. Зауважимо, що вибір функції корисності також не є єдиним. На практиці часто розглядаються також експоненційна [8] функція корисності. Портфелі отримані на основі максимізації розглянутих функцій корисності є математично, проте не стохастично, еквівалентні [9]. Метод визначення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику у випадку експоненційної функції корисності може бути знайдений у [10].

Іншим популярним способом вибору раціональної структури портфеля на основі двох його характеристик є максимізація відношення Шарпа портфеля. Відношення Шарпа визначається як відношення сподіваної дохідності до середньоквадратичного відхилення (кореня з дисперсії) дохідності портфеля. Дане відношення розглядається як показник ефективності інвестицій та є важливим інструментом оцінки якості портфеля. Відношення Шарпа часто використовується на практиці як одна з характеристик портфеля разом зі сподіваною дохідністю та ризиком [11]. Зрозуміло, що чим вищим є цей показник тим кращим є портфель. Природньо виникає оптимізаційна задача максимізації відношення Шарпа портфеля як метод вибору раціональної структури портфеля. Використовуючи цей метод отримаємо портфель з максимальним відношенням Шарпа. Ваги та характеристики цього портфеля досліджувалися в [4], [12]. Зазначимо, що використання портфеля з максимальним відношенням Шарпа вимагає обережності як в інтерпретації отриманих результатів так і у використанні їх для планування діяльності. Зважаючи на недоліки портфеля з максимальним відношенням Шарпа в літературі представлені певні штучні способи уникнути їх [13]-[14].

Наведемо основні відомості з теорії портфеля та основні результати, які стосуються даного дослідження.

Нехай P_{it} ціна активу i в момент часу t. Визначимо логарифмічну, чи неперервну, дохідність цього активу X_i, наступним чином

$$X_i = 100 \ln (P_{it} / P_{it-1}).$$

Нехай в портфель ми включаємо k активів. Загалом кількість активів в портфелі теж можна розглядати як оцінку, проте ми приспустимо, що k є відомим і не змінюється. Позначимо $\mathbf{X}_t = (X_1, X_2, \ldots, X_k)'$ вектор дохідностей активів, включених у портфель, в момент часу t. Портфелем назвемо вектор часток коштів вкладених у кожен з k активів $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k)'$. Дохідність портфеля визначаємо з простого співвідношення

$$X_{\mathbf{w}}(t)=\sum_{i=1}^{k} w_i X_{it}\ .$$

Зазначимо, що так визначена дохідність портфеля є випадковою величиною. Ми будемо будувати критерії вибору раціональної структури портфеля фінансових активів опираючись на певні характеристики цієї випадкової величини. Зокрема, припустивши, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ поводиться як k-вимірна нормально розподілена величина з k-вимірним вектором середніх $\boldsymbol{\mu}$ та $k\times k$ матрицею коваріації $\boldsymbol{\Sigma}$, отримаємо:

$$\text{сподівана дохідність портфеля: } R_{\mathbf{w}}=\mathrm{M}(X_{\mathbf{w}}(t))=\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}=\sum_{i=1}^{k} w_i \mu_i\ ,$$

$$\text{дисперсія портфеля: } V_{\mathbf{w}}=\mathrm{D}(X_{\mathbf{w}}(t))=\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sigma_{ij} w_i w_j\ ,$$

де

$$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1, \mu_2,\ldots, \mu_k)',\ \boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{1k} & \sigma_{2k} & \cdots & \sigma_k^2 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що припущення про нормальність вектора дохідностей активів, включених у портфель, зазнає критики на практиці. Так, для дохідностей з частотою вищою за денну для розвинутих ринків, та з частотою вищою за тижневу для ринків, що розвиваються, дане припущення не виконується. Проте для дохідностей з частотою вищою за денну для розвинутих ринків, та з частотою вищою за тижневу для ринків, що розвиваються, спостерігається добре наближення саме нормальним розподілом [15, с. 26-30]. Крім того, зроблене припущення є основним в теорії CAPM і є по суті, наріжним каменем більшості теоретичних результатів.

Розглянемо два підходи до раціонального вибору структури портфеля, простіше кажучи, вектора $\mathbf{w}$: безумовна мінімізація дисперсії портфеля та максимізація відношення Шарпа портфеля.

Метод безумовної, відносно сподіваної дохідності, мінімізації дисперсії портфеля було запропоновано в [1]. В наших позначеннях оптимізаційна задача може бути записана у вигляді

$$V_{\mathbf{w}}=\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}\rightarrow\min \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \qquad (1)$$

Зауважимо, що у формулюванні (1) ми не використовуємо умову, що ваги портфеля повинні бути додатні, ми вимагаємо лише, щоб їх сума дорівнювала 1. Додавши умову невід'ємності ваг портфеля ми отримаємо більш практично орієнтований портфель, проте не отримаємо аналітичний розв'язок оптимізаційної задачі, що є критично важливим для дослідження статистичних властивостей характеристик портфеля. Якщо нам потрібно отримати всі додатні ваги, то можемо використати наступний підхід:

Крок 1. Розв'язуємо задачу (1) для всіх w_k.

Крок 2. Якщо в результаті всі ваги додатні, то кінець, якщо ж ні, то можемо застосувати два різні підходи: прирівняти до нуля всі ваги, які не є додатніми і повернутися до Кроку 1, тільки тепер кількість активів є меншою; або прирівняти до нуля якусь одну з від'ємних ваг, наприклад, найменшу, чи випадково вибрану і знову повернутися до Кроку 1. Продовжуємо поки не отримаємо всі додатні ваги.

Використовуючи вищенаведений алгоритм ми звичайно повинні змінити початкове значення кількості активів k, проте якщо використання від'ємних ваг заборонене, а інвестор зацікавлений в статистичних властивостях характеристик портфеля, такий підхід є обгрунтований.

Розв'язком задачі оптимізаційної задачі (1) буде портфель зі структурою

$$\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}, \qquad (2)$$

де $\mathbf{1}$ – k-вимірний вектор, що складається з одиниць.

Характеристики портфеля з найменшою дисперсією, структура $\mathbf{w}_{GMV}$ якого задана в (2), матимуть вигляд

$$R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \text{ – сподівана дохідність,} \qquad (3)$$

$$V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \text{ – дисперсія.} \tag{4}$$

Зауважимо, що три параметри $\{R_{GMV}, V_{GMV}, s\}$, де $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$ з $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$ повністю визначають ефективну множину портфелів [16], тобто будь-який портфель з ефективної множини може бути представлений як функція цих трьох параметрів.

Відношення Шарпа це частка дохідності на одиницю середньоквадратичного відхилення і у випадку припущення про відсутність безризикового активу визначається наступним чином

$$SR_{\mathrm{w}} = \frac{R_{\mathrm{w}}}{\sqrt{V_{\mathrm{w}}}} \tag{5}$$

Як було заначено вище портфель фінансових активів з більшим відношенням Шарпа вважається кращим, тому природно виникає наступна оптимізаційна задача вибору раціональної структури портфеля фінансових активів

$$SR_{\mathrm{w}} \to \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1, \tag{6}$$

де SR_{w} задано в (6). Аналогічно, як і у випадку задачі (1), ми не накладаємо умови додатності ваг портфеля, натомість можемо використати наведений вище алгоритм скорочення кількості активів з метою отримання портфеля з додатніми вагами. Розв’язок задачі (6), тобто структура портфеля з максимальним відношенням Шарпа $\mathbf{w}_{SR}$, може бути заданий у вигляді

$$\mathbf{w}_{SR} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}} \tag{7}$$

Характеристики портфеля з максимальним відношенням Шарпа визначаються з

$$R_{SR} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}, \tag{8}$$

$$V_{SR} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\left(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2}. \tag{9}$$

Зауважимо, що на практиці параметри розподілу вектора дохідностей, включених у портфель $\mathbf{X}_t$, $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ є, як правило, невідомими. Тому використати безпосередньо результати (2)-(4) та (7)-(9) на практиці неможливо. Спочатку потрібно оцінити невідомі параметри розподілу вектора $\mathbf{X}_t$. Одним з найпоширеніших методів оцінювання невідомих параметрів розподілу на практиці є історичний метод. Оцінки параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ отримуються на основі вибірки n попередніх (історичних) значень вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$, $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, …, $\mathbf{X}_n$ наступним чином

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\,,\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'. \tag{10}$$

Так побудовані оцінки називаються вибірковими. Властивості оцінок (10) наведено у [17, с. 154-156], зокрема зазначено, що за нашого припущення щодо нормальності та незалежності в часі вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$, вони є незалежними між собою, консистентними та незміщеними, а у [18, с. 359] вказано, що ці оцінки є випадковими величинами. Замінивши у (2)-(4) та (7)-(9) невідомі параметри $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ на їх вибіркові оцінки (10), отримаємо вибіркові оцінки ваг та характеристик відповідних портфелів, які позначатимемо, використовуючи символ $\hat{\cdot}$, тобто вибіркові оцінки ваг та характеристик портфеля з найменшою дисперсією матимуть вигляд

$$\hat{\mathbf{w}}_{GMV} = \frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}},\ \hat{R}_{GMV} = \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}},\ \hat{V}_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}.$$

Враховуючи вищенаведений факт про те, що вибіркові оцінки параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ є випадковими величинами, випадковими величинами будуть також і вибіркові оцінки ваг та характеристик портфелів. Дослідженню властивостей цих випадкових величин присвячено ряд публікацій. Так, наприклад, точний розподіл ваг портфелів з найменшою дисперсією та максимальним відношенням Шарпа знайдено у [4] та показано, що для ваг портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа не існує математичного сподівання. Цей результат узагальнено у [12], де доведено, що неможливо побудувати незміщену оцінку для ваг цього портфеля. Ці два зауваження мають негативний вплив на практичне застосування портфеля з максимальним відношенням Шарпа, оскільки і для вибіркових оцінок характеристик цього портфеля теж не існує математичного сподівання, що значно ускладнює інтерпретацію цих оцінок. Більше того, у [13] та [19] показано, що цей портфель має високий рівень ризику. Натомість властивості вибіркових оцінок характеристик портфеля з найменшою дисперсією досліджено у [16] для еліптично розподілених дохідностей активів та [20]-[22] для більш загальних припущень щодо поведінки вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$.

У зв'язку з вищенаведеними недоліками вибіркових оцінок ваг та характеристик портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа, виникає питання, чи істотною є різниця між значеннями відношень Шарпа портфелів з найменшою дисперсією та максимальним відношенням Шарпа. Якщо різниця не є статистично істотною, то інвестор зможе замість портфеля з максимальним відношенням Шарпа використовувати портфель з найменшою дисперсією, що призведе, по-перше, до незначного зниження у значенні відношення Шарпа, а, по-друге, у покращенні інтерпретованості результатів та зниженні ризику. Ми не вказуємо, чи значним (статистично істотним) буде зниження ризику, оскільки відповідь на це питання не є метою даною роботи. З іншого боку, зважаючи на результати отримані в [13], [19], існує підозра, що зниження в ступені ризику буде істотним. Для відповіді на поставлене питання необхідно дослідити властивості оцінки відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією. Цьому буде присвячено наступний розділ.

2. Асимптотичний розподіл вибіркової оцінки відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією за припущення нормальності розподілу дохідностей активів, включених у портфель

З означення, відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією може бути обчислене як

$$SR_{GMV} = \frac{R_{GMV}}{\sqrt{V_{GMV}}},$$

а вибіркова оцінка цього параметра

$$\widehat{SR}_{GMV} = \frac{\hat{R}_{GMV}}{\sqrt{\hat{V}_{GMV}}}. \tag{11}$$

Для дослідження асимптотичного розподілу вибіркової оцінки відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією, потрібними будуть наступні твердження.

Твердження 1. (дельта-метод [23, с. 211]). *Нехай випадковий вектор* $\mathbf{X}_n$ *асимптотично нормально розподілений з середнім* $\boldsymbol{\mu}$ *та коваріаційною матрицею* $c_n^2\boldsymbol{\Sigma}$, *де* $\boldsymbol{\Sigma}$ *симетрична невідємно визначена матриця і* $c_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Якщо* $\mathbf{g}(\mathbf{X})=(g_1(\mathbf{X}),\ldots, g_m(\mathbf{X}))'$ *відображення з* $\mathbb{R}^k$ *в* $\mathbb{R}^m$ *таке, що всі* $g_i(\cdot)$ *неперервно диференційовані в околі* $\boldsymbol{\mu}$, *і якщо всі діагональні елементи матриці* $\mathbf{D\Sigma D}'$ *є ненульові, де* $m \times k$ *матриця складена з часткових похідних* $(\partial g_i/\partial x_j)(\boldsymbol{\mu})$, *то випадковий вектор* $\mathbf{g}(\mathbf{X}_n)$ *є асимптотично нормально розподіленим з середнім* $\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})$ *та коваріаційною матрицею* $c_n^2\mathbf{D\Sigma D}'$.

Твердження 2. ([16]). *Нехай ми формуємо портфель з* k *фінансових активів. Позначимо* $\mathbf{X}_t$ – k*-вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу* t. *Припустимо, що* $\mathbf{X}_t$ *поводиться як* k*-вимірна нормально розподілена випадкова величина з параметрами* $\boldsymbol{\mu}$ *та* $\boldsymbol{\Sigma}$. *Нехай* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ *є незалежними реалізаціями* $\mathbf{X}_t$ і $n>k$. *Тоді*

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\hat{R}_{GMV}\\ \hat{V}_{GMV}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}R_{GMV}\\ V_{GMV}\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{d} N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}V_{GMV}(1+s) & 0\\ 0 & 2V_{GMV}^2\end{pmatrix}\right),$$

де символ $\xrightarrow{d}$ *означає збіжність за розподілом.*

В наступній теоремі знайдено асимптотичний розподіл вибіркової відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією.

Теорема 1. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо* $\mathbf{X}_t$ *– k-вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу t. Припустимо, що* $\mathbf{X}_t$ *поводиться як k-вимірна нормально розподілена випадкова величина з параметрами* $\boldsymbol{\mu}$ *та* $\boldsymbol{\Sigma}$. *Нехай* $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, …, $\mathbf{X}_n$ *є незалежними реалізаціями* $\mathbf{X}_t$ і $n>k$. *Тоді*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, 1 + s + \frac{R_{GMV}^2}{2V_{GMV}}\right)$$

Доведення. Маємо

$$SR_{GMV} = \frac{R_{GMV}}{\sqrt{V_{GMV}}}.$$

Легко бачити, що

$$\frac{\partial SR_{GMV}}{\partial R_{GMV}} = \frac{\partial\left(R_{GMV} \big/ \sqrt{V_{GMV}}\right)}{\partial R_{GMV}} = \frac{1}{\sqrt{V_{GMV}}},$$

$$\frac{\partial SR_{GMV}}{\partial V_{GMV}} = \frac{\partial\left(R_{GMV} \big/ \sqrt{V_{GMV}}\right)}{\partial V_{GMV}} = -\frac{R_{GMV}}{2\left(V_{GMV}\right)^{3/2}}.$$

З твердження 1, отримуємо, що $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma_{GMV,SR}^2\right)$, де, з твердження 2, отримуємо

$$\sigma_{GMV,SR}^2 = \left(\frac{\partial SR_{GMV}}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial SR_{GMV}}{\partial V_{GMV}}\right)\begin{pmatrix} V_{GMV}(1+s) & 0 \\ 0 & 2V_{GMV}^2 \end{pmatrix}\left(\frac{\partial SR_{GMV}}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial SR_{GMV}}{\partial V_{GMV}}\right)'$$

Маємо

$$\sigma_{GMV,SR}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{V_{GMV}}}, -\frac{R_{GMV}}{2\left(V_{GMV}\right)^{3/2}}\right)\begin{pmatrix} V_{GMV}(1+s) & 0 \\ 0 & 2V_{GMV}^2 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{V_{GMV}}}, -\frac{R_{GMV}}{2\left(V_{GMV}\right)^{3/2}}\right)' =$$

$$= \left((1+s)\sqrt{V_{GMV}}, -R_{GMV}\sqrt{V_{GMV}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{V_{GMV}}}, -\frac{R_{GMV}}{2\left(V_{GMV}\right)^{3/2}}\right)' = 1 + s + \frac{R_{GMV}^2}{2V_{GMV}}$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що асимптотична дисперсія, знайдена в теоремі 1, залежить від невідомих параметрів R_{GMV}, V_{GMV}, s. Відповідно, на практиці, ми змушені використовувати вибіркову оцінку цієї величини. Проте такий підхід є цілком виправданий, оскільки з доведення теореми 1 та з теореми 1.14 в [24, с. 8] випливає, що вибіркова оцінка асимптотичної дисперсії $\sigma_{GMV,\,SR}$ є консистентна, тобто при $n\to\infty$ $\hat{\sigma}^2_{GMV,SR}\to\sigma^2_{GMV,SR}$.

На основі отриманих результатів можемо побудувати $(1–\beta)$-інтервали довіри (односторонні та двосторонні) для значень відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією наступним чином

$$\left[\widehat{SR}_{GMV}-\frac{\widehat{\sigma}_{GMV,SR}}{\sqrt{n}}z_{1-\beta/2},\widehat{SR}_{GMV}+\frac{\widehat{\sigma}_{GMV,SR}}{\sqrt{n}}z_{1-\beta/2}\right]$$ – двосторонній інтервал,

$$\left[-\infty,\widehat{SR}_{GMV}+\frac{\widehat{\sigma}_{GMV,SR}}{\sqrt{n}}z_{1-\beta}\right]$$– односторонній інтервал

Використовуючи ці інтервали довіри, можемо перевірити, чи істотно відрізняються відношення Шарпа портфелів портфелів з найменшою дисперсією та з максимальним відношенням Шарпа. Якщо вибіркова оцінка відношення Шарпа портфеля з максимальним відношенням Шарпа попадає у $(1–\beta)$-інтервал довіри для значень відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією, то можемо стверджувати, що при рівні довіри β відношення Шарпа розглянутих портфелів статистично однакові.

Продемонструємо отримані результати на реальних даних. Використаємо для цього щоденні дохідності 30 акцій включених до індексу Dow Jones за період часу з 01.07.2019 по 31.06.2021, загалом 504 дохідності. Застосуємо метод біжучого вікна шириною 250 спостережень для побудови інтервалів довіри та оцінки відношення Шарпа портфеля з максимальним відношенням Шарпа та зобразимо отримані результати графічно. Розглянемо 6 портфелів, які складаються з k={5, 10, 15, 20, 25, 30} перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку, тобто {3M, AmericanExpress, Amgen, Apple, Boeing, Caterpillar, Chevron, CiscoSystems, Coca-Cola, Disney, Dow, GoldmanSachs, HomeDepot, HoneywellInternational, IBM, Intel, Johnson&Johnson, JPMorganChase, McDonalds, Merck,Microsoft, NIKE, Procter&Gamble,

Salesforce.com, Travelers, UnitedHealthGroup, VerizonCommunications, Visa, WalgreensBootsAlliance, Walmart}. Результати представлено на рис. 1 – 6.

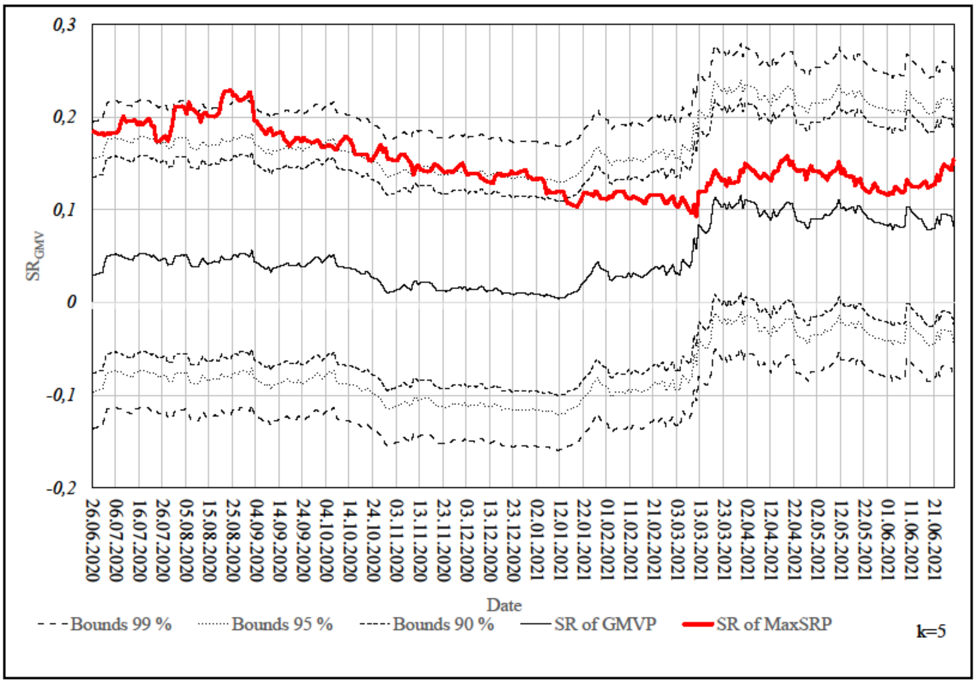

Рис. 1. Вибіркова оцінка відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією разом з межами довірчих 90 %, 95 % та 99 % інтервалів отриманих методом біжучого вікна шириною 250 днів на основі даних про дохідності перших 5 акції з переліку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021.

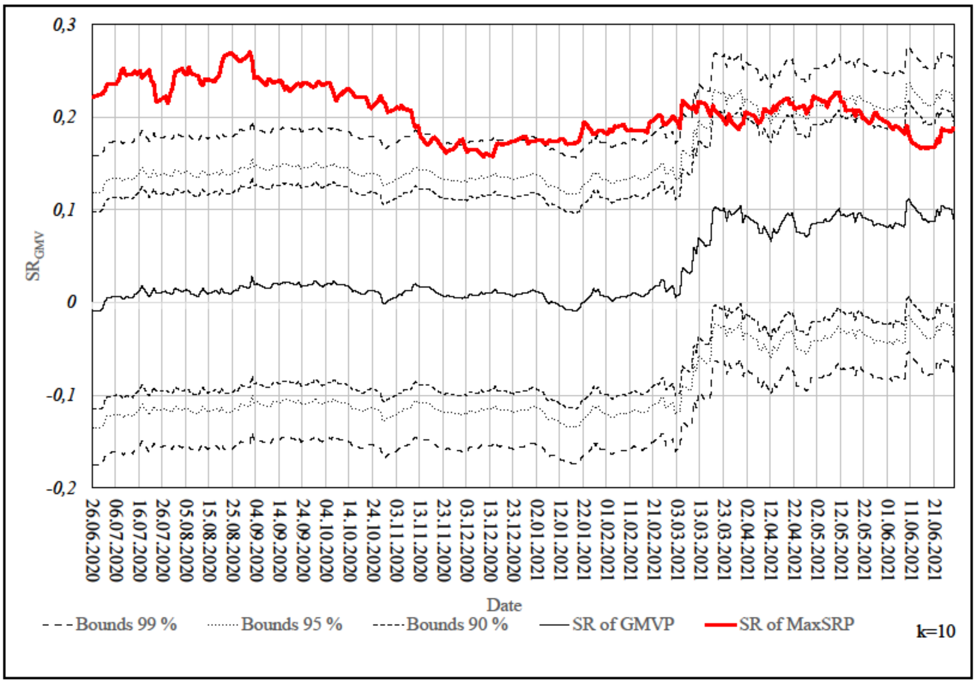

Рис. 2. Вибіркова оцінка відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією разом з межами довірчих 90 %, 95 % та 99 % інтервалів отриманих методом біжучого вікна шириною 250 днів на основі даних про дохідності перших 10 акції з переліку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021.

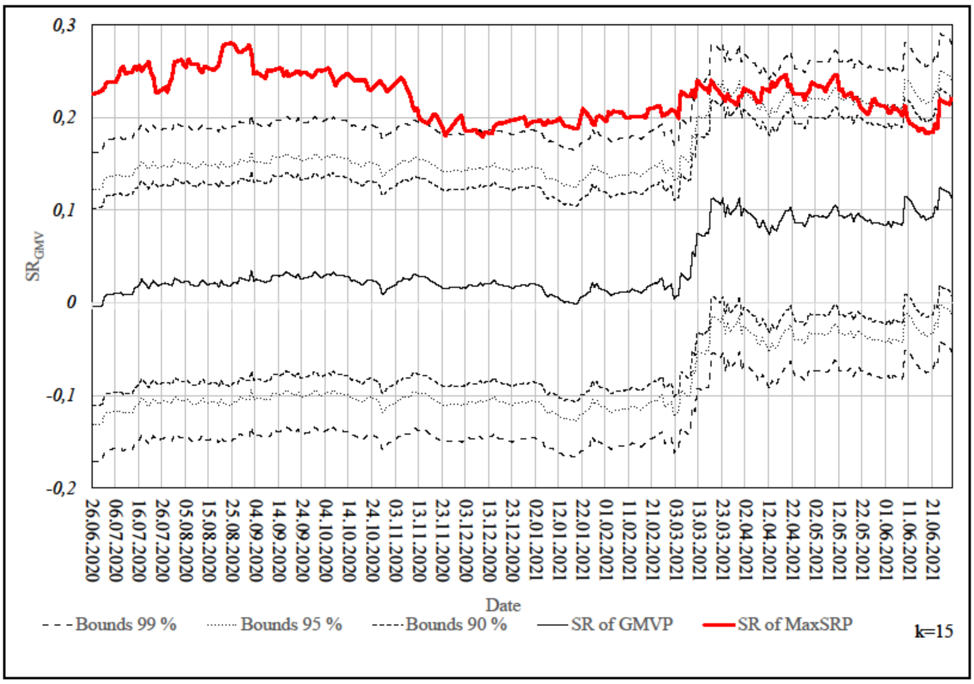

Рис. 3. Вибіркова оцінка відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією разом з межами довірчих 90 %, 95 % та 99 % інтервалів отриманих методом біжучого вікна шириною 250 днів на основі даних про дохідності перших 15 акції з переліку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021.

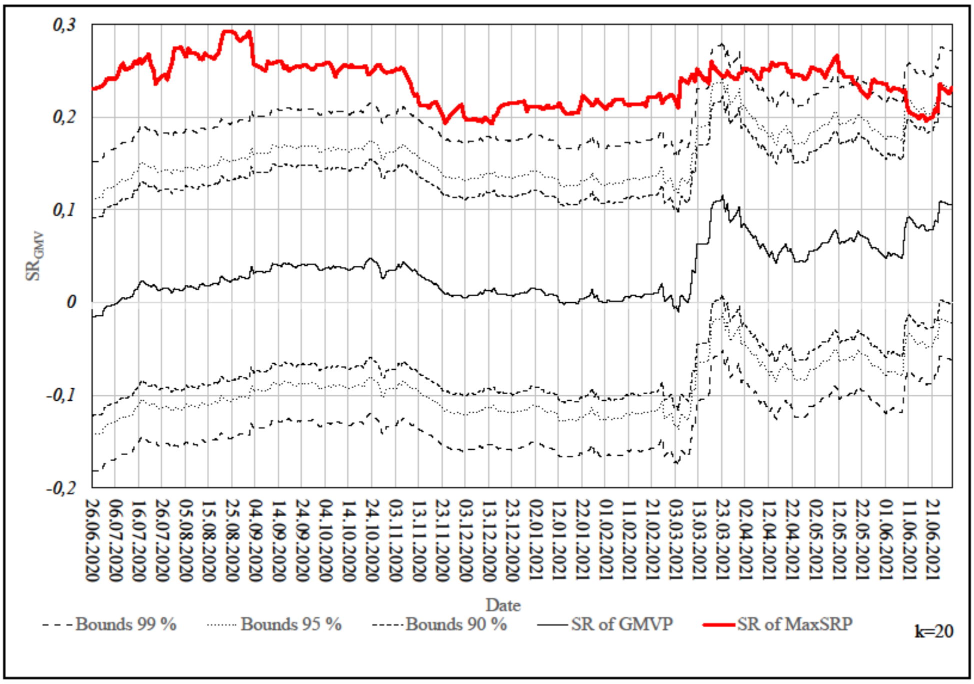

Рис. 4. Вибіркова оцінка відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією разом з межами довірчих 90 %, 95 % та 99 % інтервалів отриманих методом біжучого вікна шириною 250 днів на основі даних про дохідності перших 20 акції з переліку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021.

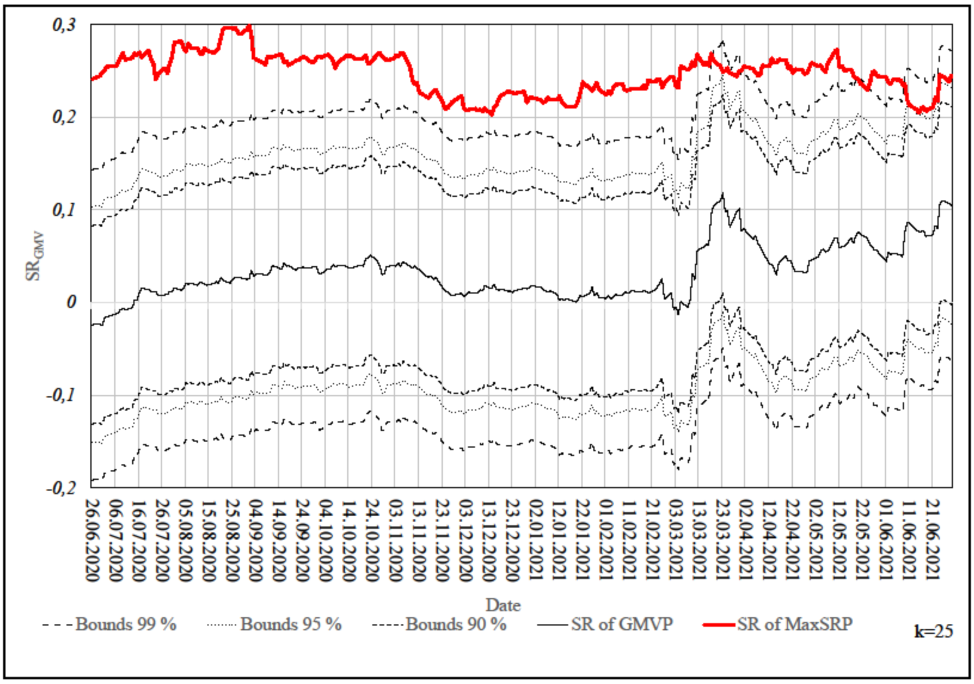

Рис. 5. Вибіркова оцінка відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією разом з межами довірчих 90 %, 95 % та 99 % інтервалів отриманих методом біжучого вікна шириною 250 днів на основі даних про дохідності перших 25 акції з переліку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021.

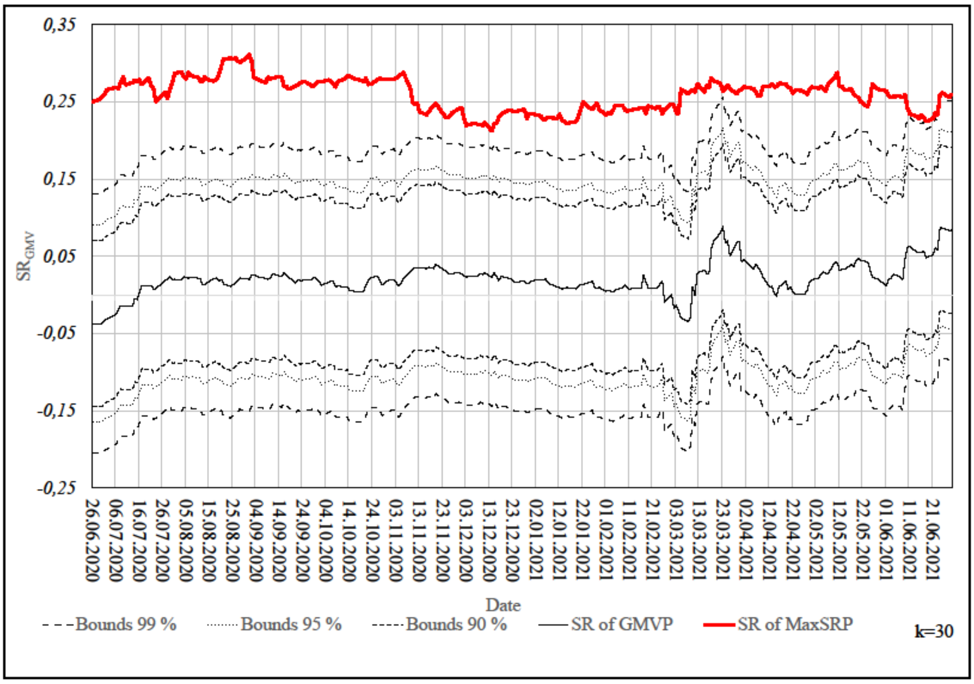

Рис. 6. Вибіркова оцінка відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією разом з межами довірчих 90 %, 95 % та 99 % інтервалів отриманих методом біжучого вікна шириною 250 днів на основі даних про дохідності перших 30 акції з переліку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021.

Бачимо, що при кількості активів k=5 в портфелі, значення відношення Шарпа портфеля з максимальним відношенням Шарпа майже для всіх дат міститься в межах інтервалу довіри для значення відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією. Отже, в цьому випадку немає істотної різниці між значеннями відношень Шарпа. Проте зі зростанням кількості активів, значення відношення Шарпа портфеля з максимальним відношенням Шарпа все рідше попадають в інтервал довіри для значення відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією, аж поки для k=30 жодного разу за 254 дні максимальне відношення Шарпа не попадає у інтервал довіри. Це говорить про те, що для портфелів з великою кількістю активів значення відношень Шарпа розглянутих портфелів істотно відрізняються. Також така ситуація може бути наслідком пандемії коронавірусу, оскільки бачимо з рисунків, що до кінця терміну спостережень у всіх випадках крім k=30 максимальне відношення Шарпа міститься у відповідному довірчому інтервалі, а у випадку k=30 є близьким до верхньої межі.

Зауважимо, що ми можемо дещо послабити припущення про нормальність розподілу вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$. Припустимо, що $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний еліптичний розподіл. Нагадаємо означення багатовимірної еліптично розподіленої випадкової величини з [25]. k-вимірний випадковий вектор $\mathbf{Y}$ має багатовимірний еліптичний розподіл, якщо його характеристична функція має вигляд:

$$\mathrm{M}(\exp(i\mathbf{x}'\mathbf{Y}))=\exp(i\boldsymbol{\mu}'\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}) \text{ для } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^k,$$

де $\mathbf{D}=\boldsymbol{\Sigma}/\gamma^2$, $\gamma^2=(-2\psi'(0))$ та функція ψ називається характеристичним генератором еліптичного розподілу. Цей клас розподілів включає в себе, зокрема багатовимірний нормальний розподіл, багатовимірний t-розподіл та багатовимірний розподіл Лапласа. За такого припущення, маємо наступне твердження [19].

Твердження 3. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо $\mathbf{X}_t$ – k-вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t. Припустимо, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний еліптичний розподіл та дохідності не є автокорельованими. Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена. Тоді при $n\to\infty$*

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\hat{R}_{GMV}\\ \hat{V}_{GMV}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}R_{GMV}\\ V_{GMV}\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{d}N\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}V_{GMV}(1+\lambda s) & 0\\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^{2}\end{pmatrix}\right),$$

де $\lambda=\psi''(0)/(\psi'(0))^2$.

З твердження 1 та твердження 3, використовуючи аналогічні міркування як при доведенні теореми 1, отримаємо наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай ми формуємо портфель з* k *фінансових активів. Позначимо* $\mathbf{X}_t$ *–* k*-вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу* t*. Припустимо, що вектор дохідностей* $\mathbf{X}_t$ *має багатовимірний еліптичний розподіл та дохідності не є автокорельованими. Нехай* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ *є незалежними реалізаціями* $\mathbf{X}_t$ і $n>k$*. Тоді*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV}-SR_{GMV}\right)\xrightarrow{d}N\left(0, 1+\lambda s+\frac{\lambda R_{GMV}^2}{2V_{GMV}}\right).$$

3. Імітаційне моделювання

Використання асимптотичних розподілів на практиці у випадку коли неможливо отримати точні розподіли обгрунтовано в [26]. Проте використання асимптотичних розподілів повинне проводитися акуратно, оскільки невідомо, за якого обсягу вибірки історичних значень буде досягнуто достатнього наближення. Для дослідження результатів отриманих в теоремах 1 та 2, ми проведемо імітаційне моделювання. Ми припустимо, що параметри вектора дохідностей є відомими. Їх ми оцінимо з даних про дохідності акцій з переліку Dow Jones за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021 та приймемо ці оцінки за точні значення. Далі згенеруємо вибірку розміру n={250, 500, 1000, 2000} з нормального та t-розподілу з 5 ступенями свободи та на основі цих значень оцінимо відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією. Повторимо цю процедуру 100000 разів та на основі вибірки оцінок відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією побудуємо емпіричні густини розподілів та порівняємо їх з асимптотичним. Також обчислимо емпіричні середні значення та дисперсії та порівняємо їх з асимптотичними. Побудуємо 6 портфелів, що складаються з k={5, 10, 15, 20, 25, 30} перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку. Дані про емпіричні середні та дисперсії разом з відповідними асимптотичними значеннями наведено в табл. 1 за припущення нормальності розподілу вектора $\mathbf{X}_t$ та в табл. 2 за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний еліптичний розподіл. На рис. 7-12 представлено емпіричні та відповідну асимптотичну густину за припущення нормальності розподілу вектора $\mathbf{X}_t$ та на рис. 13-18 – за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний еліптичний розподіл.

За результатами наведеними в табл. 1-2 робимо висновок, що емпіричні середні та дисперсії доволі швидко збігаються до відповідних асимптотичних значень у випадку портфелів з невеликою кількістю активів (до 10 активів) та для портфелів з більшою розмірністю збіжність дещо уповільнюється, проте при обсягу вибірки n=2000 у всіх випадках досягнуто доброго наближення. Більш детальна інформація щодо збіжності відображена на рис. 7-18. Бачимо, що при розмірі вибірки історичних значень n>1000 емпіричні густини є близькими до відповідних асимптотичних. Зазначимо, що використання вибірок історичних значень обсягом 2000 спостережень є звичною практикою на сьогодні. Отже, отримані результати можуть бути використані на практиці для побудови інтервальних оцінок відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією та для порівняння відношення Шарпа цього портфеля з іншими значеннями.

Таблиця 1.

Емпіричні та відповідні асимптотичні значення випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right)$ для портфелів з найменшою дисперсією складених з *k*={5, 10, 15, 20, 25, 30} перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки *n*={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей X_t має багатовимірний нормальний розподіл.

		n = 250	n = 500	n = 1000	n = 2000	Асимпт.
k = 5	Середнє	– 0.0016	0.0011	0.0030	–0.0029	0
	Дисперсія	1.0528	1.0298	1.0261	1.0186	1.0116
k = 10	Середнє	0.0068	0.0044	0.0056	–0.0064	0
	Дисперсія	1.1153	1.0572	1.0465	1.0356	1.0203
k = 15	Середнє	0.0091	0.00799	0.0078	0.0076	0
	Дисперсія	1.1576	1.0899	1.0489	1.0462	1.0228
k = 20	Середнє	0.0153	0.0154	0.0100	0.0042	0
	Дисперсія	1.2067	1.1107	1.0670	1.0468	1.0250
k = 25	Середнє	0.0137	0.0065	0.0084	0.0042	0
	Дисперсія	1.2661	1.1427	1.0768	1.0519	1.0282
k = 30	Середнє	0.0027	0.0039	0.0023	0.0006	0
	Дисперсія	1.3345	1.1674	1.0932	1.0534	1.0290

Таблиця 2.

Емпіричні та відповідні асимптотичні значення випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right)$ для портфелів з найменшою дисперсією складених з *k*={5, 10, 15, 20, 25, 30} перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки *n*={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей X_t має багатовимірний *t*-розподіл з 5 ступенями свободи.

		n = 250	n = 500	n = 1000	n = 2000	Асимпт.
k = 5	Середнє	0.0132	0.0134	0.0083	0.0179	0
	Дисперсія	1.0808	1.0551	1.0320	1.0381	1.0347
k = 10	Середнє	0.0150	0.0161	0.0121	0.0055	0
	Дисперсія	1.1282	1.0904	1.0728	1.0654	1.0609
k = 15	Середнє	0.0292	0.0265	0.0136	0.0092	0
	Дисперсія	1.1825	1.1135	1.0834	1.0640	1.0683
k = 20	Середнє	0.0261	0.0257	0.0198	0.0095	0
	Дисперсія	1.2284	1.1435	1.1041	1.0743	1.0750
k = 25	Середнє	0.0347	0.0226	0.0152	0.0090	0
	Дисперсія	1.3048	1.1742	1.1205	1.0913	1.0845
k = 30	Середнє	0.0126	0.0034	0.0063	0.0074	0
	Дисперсія	1.3650	1.1957	1.1222	1.0975	1.0871

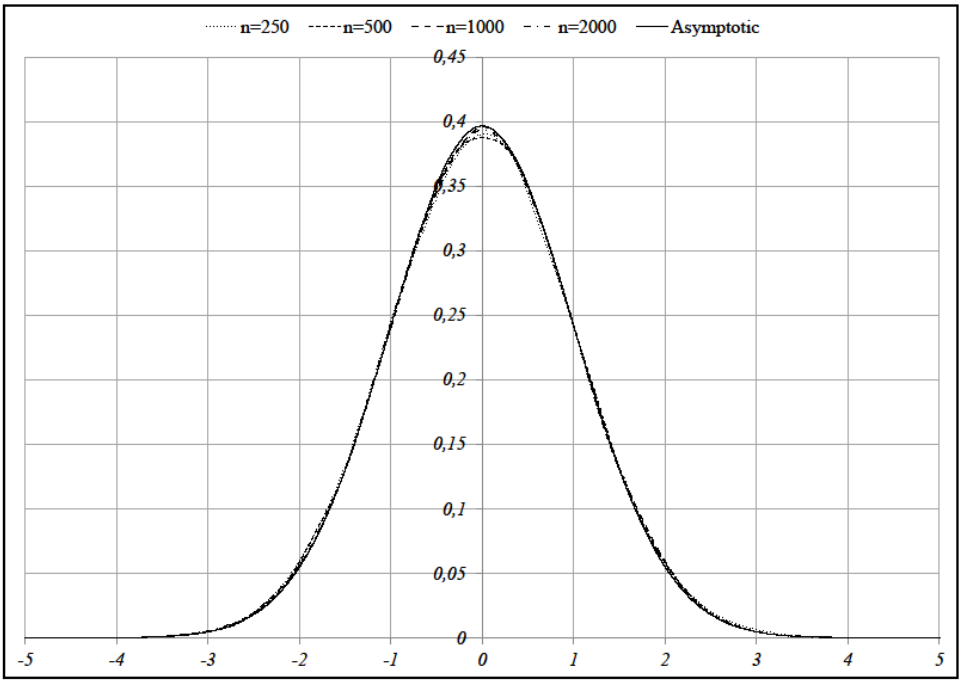

Рис. 7. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=5 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний нормальний розподіл.

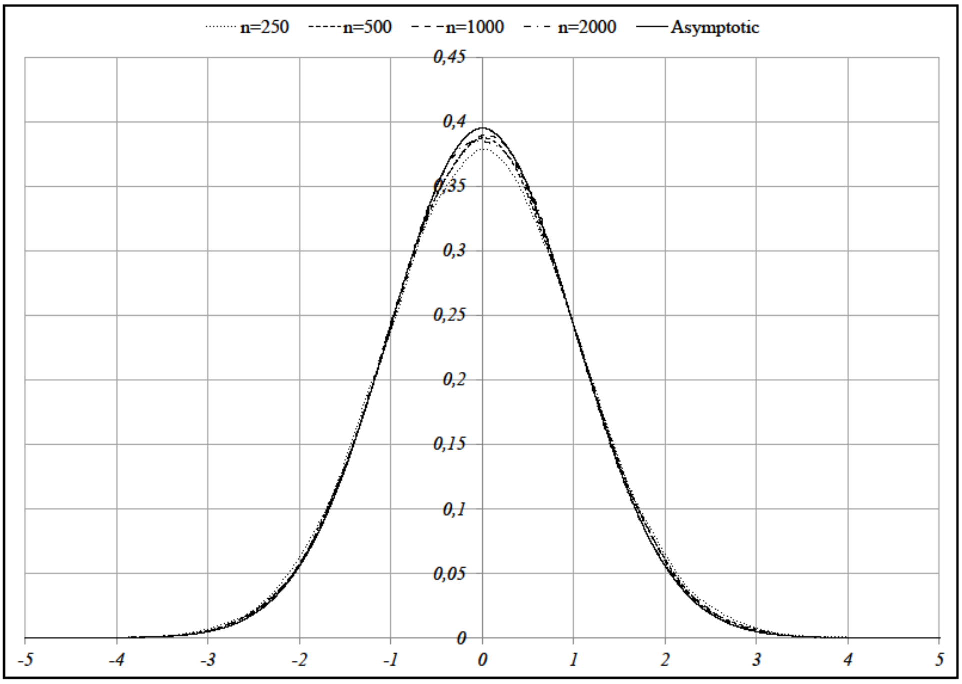

Рис. 8. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=10 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний нормальний розподіл.

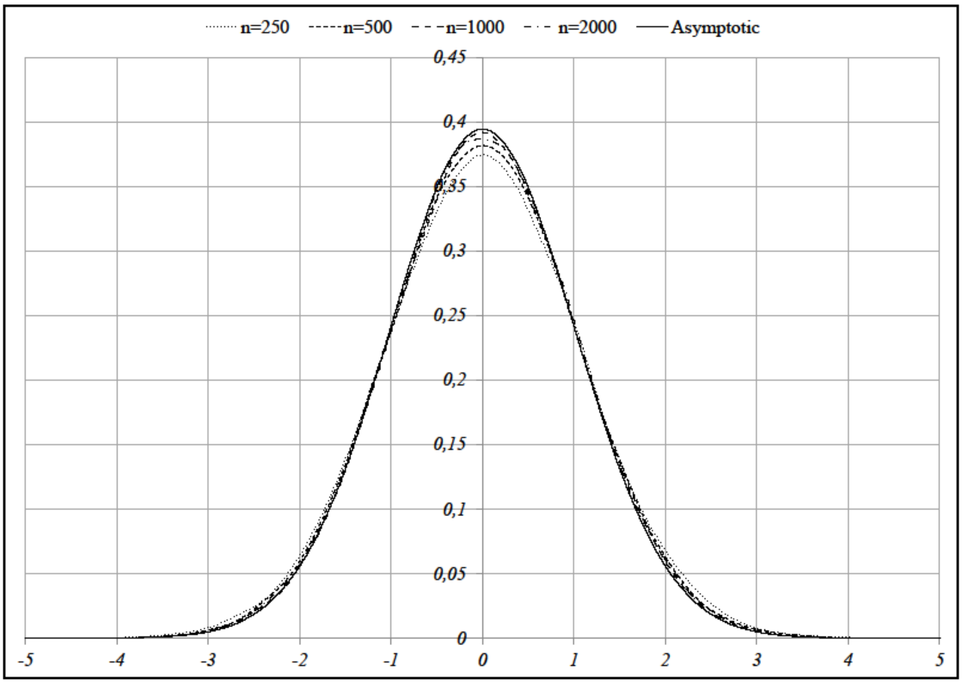

Рис. 9. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV})$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=15 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний нормальний розподіл.

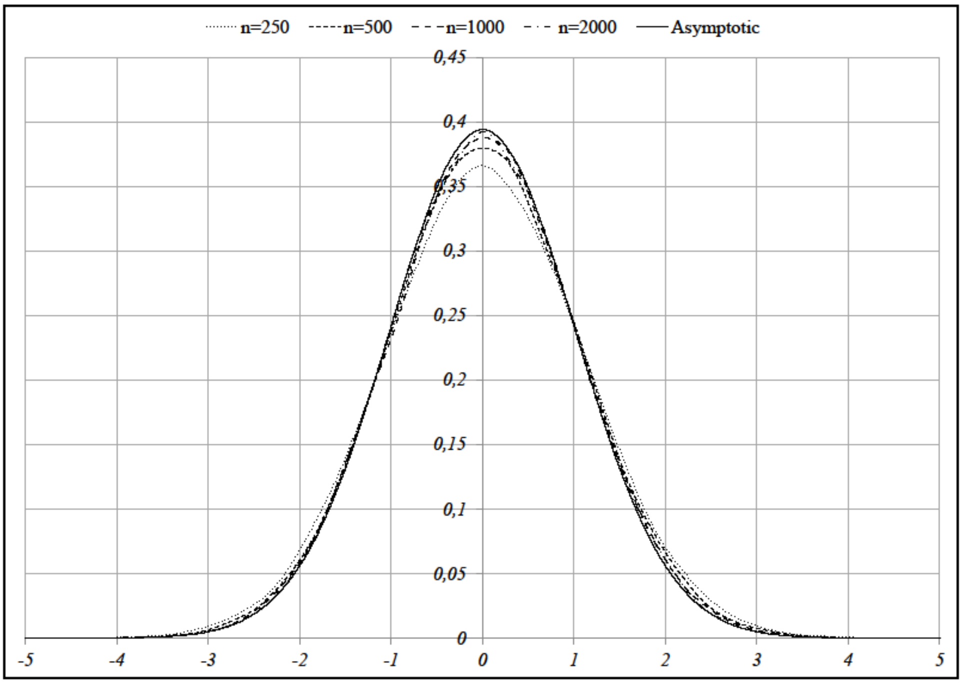

Рис. 10. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV})$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=20 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний нормальний розподіл.

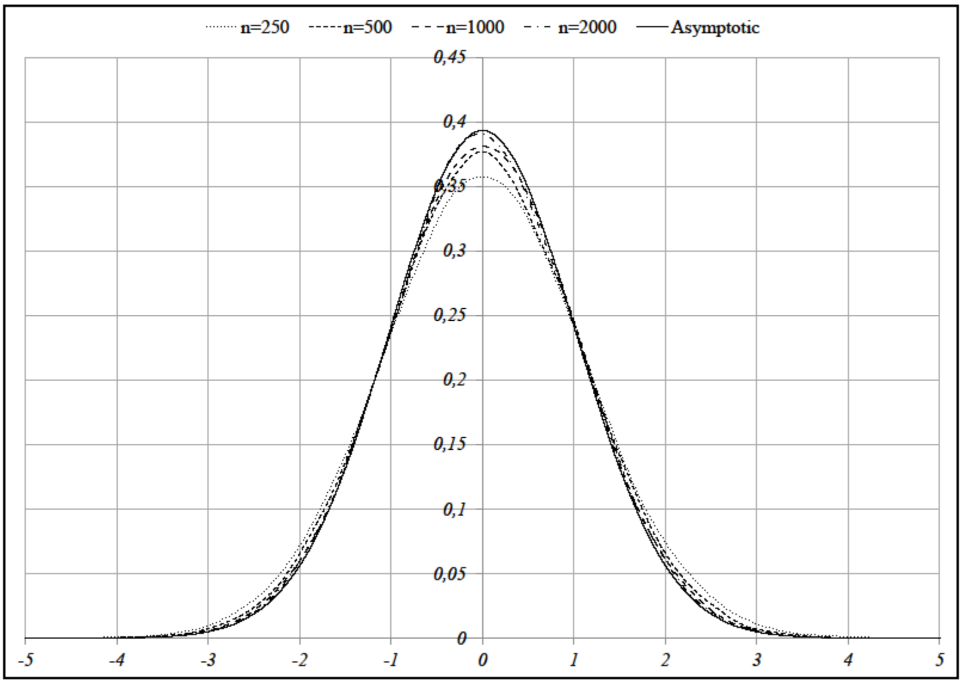

Рис. 11. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=25 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний нормальний розподіл.

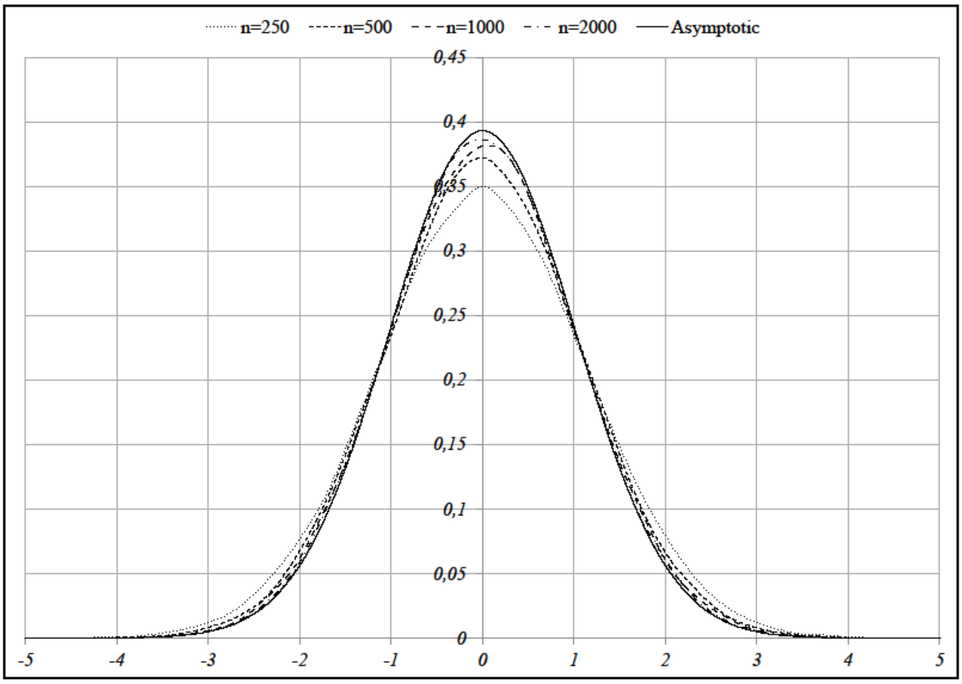

Рис. 12. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=30 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний нормальний розподіл.

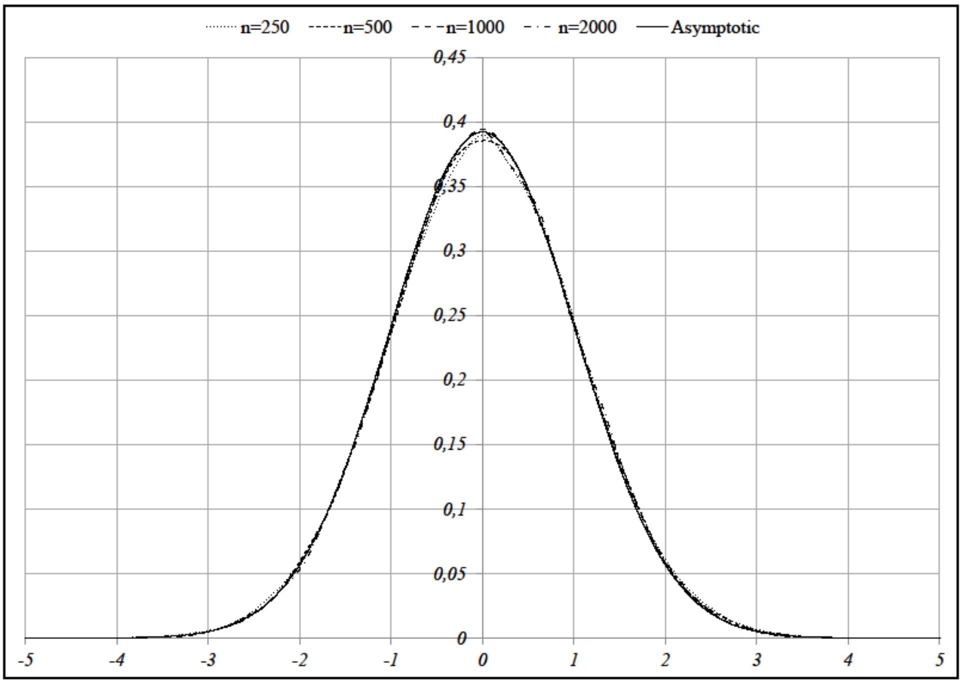

Рис. 13. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=5 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний t-розподіл з 5 ступенями свободи.

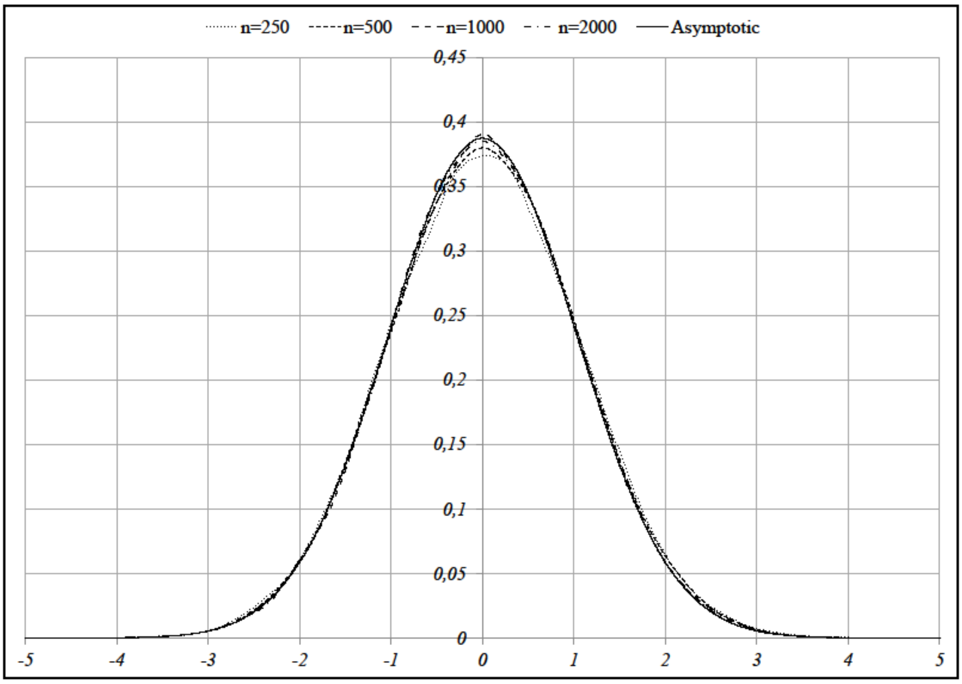

Рис. 14. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=10 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний t-розподіл з 5 ступенями свободи.

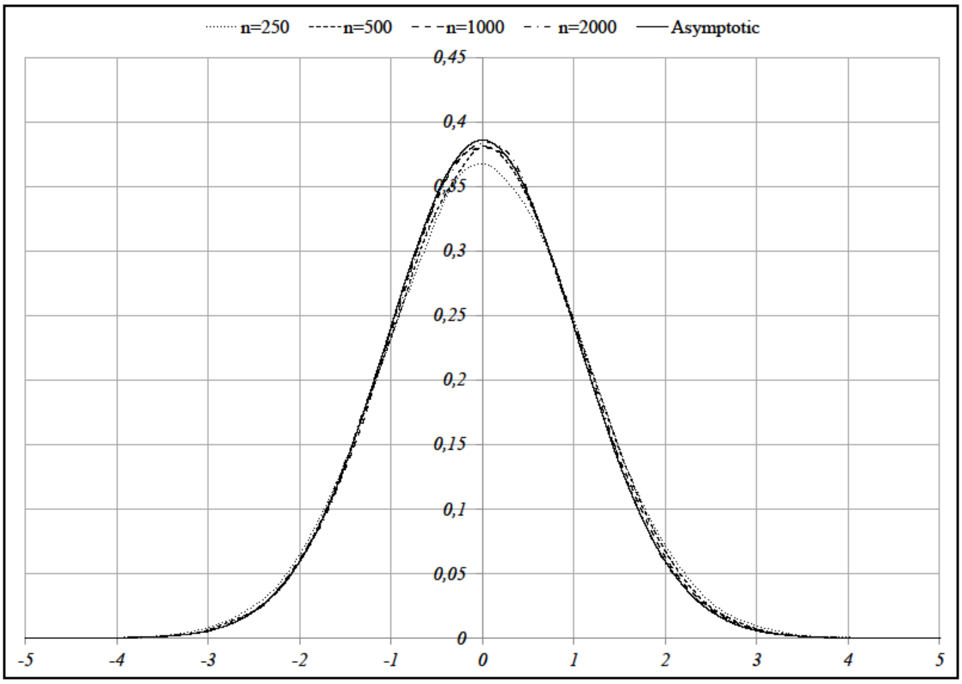

Рис. 15. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=15 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний t-розподіл з 5 ступенями свободи.

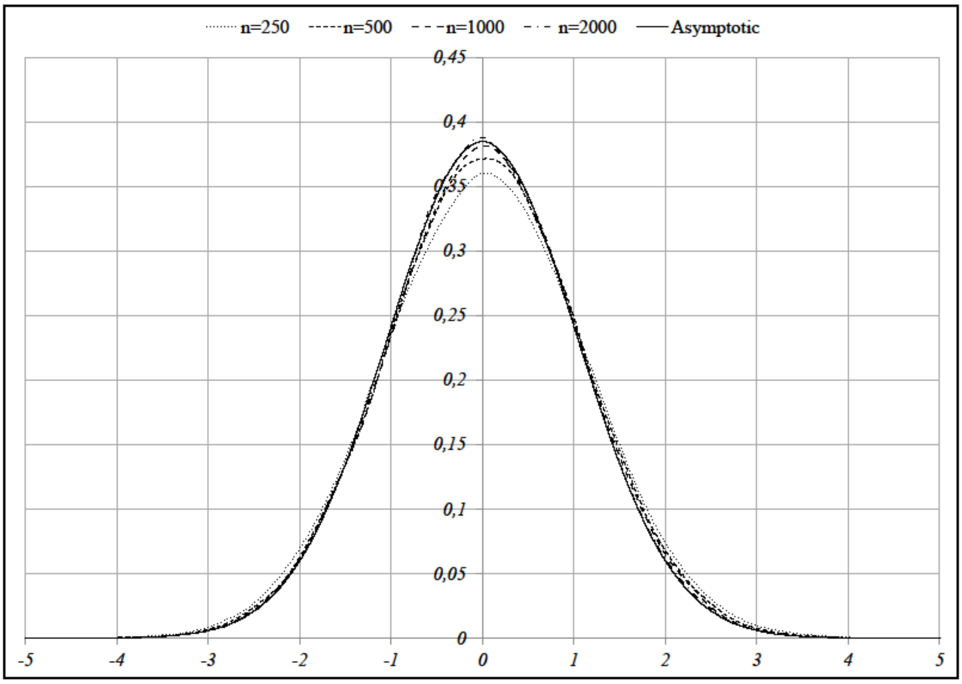

Рис. 16. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=20 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний t-розподіл з 5 ступенями свободи.

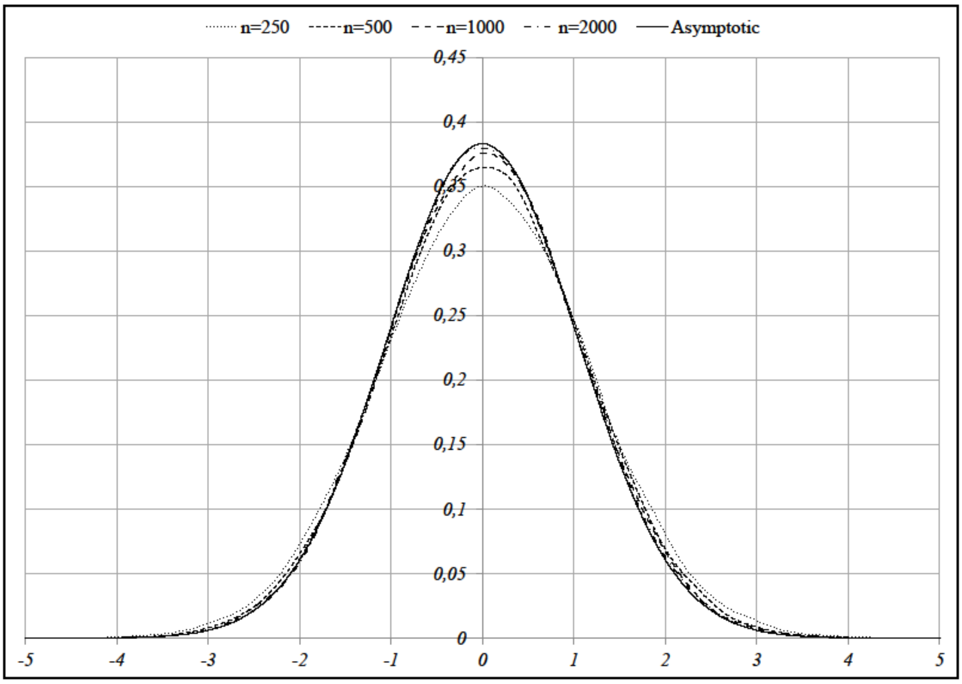

Рис. 17. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=25 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний t-розподіл з 5 ступенями свободи.

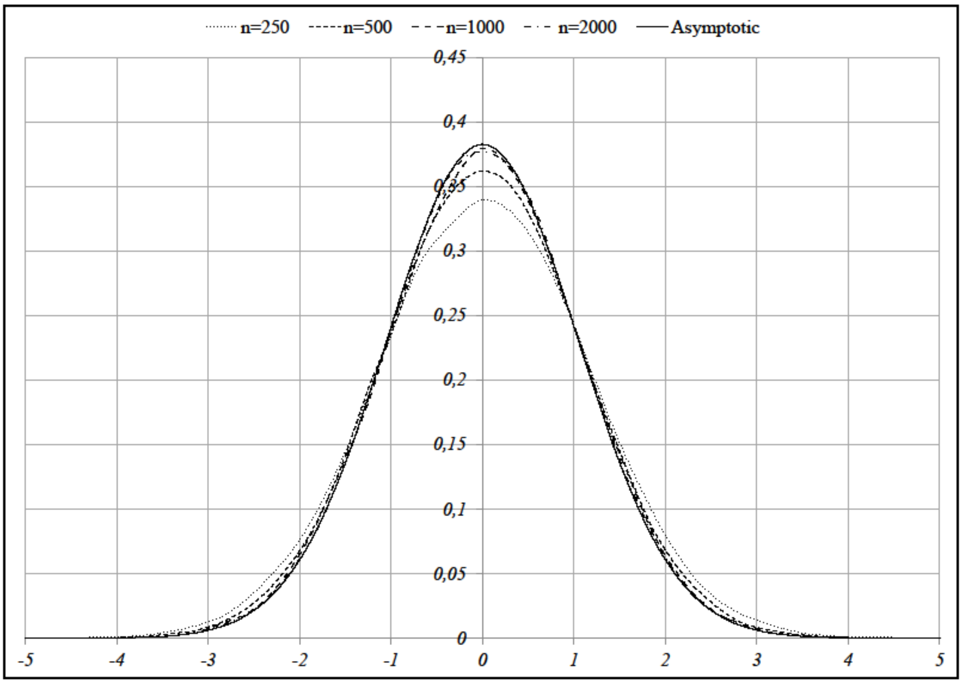

Рис. 18. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=30 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний t-розподіл з 5 ступенями свободи.

Висновки

Магістерська робота присвячена дослідженню статистичних властивостей вибіркової оцінки відношення Шарпа портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією. Зважаючи на популярність портфеля з найменшою дисперсією та на добре досліджені властивості його характеристик, а також на популярність відношення Шарпа як міри якості портфеля фінансових активів та на незадовільні властивості вибіркових оцінок характеристик портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа, дане дослідження є актуальним в контексті порівняння відношень Шарпа двох вищезгаданих портфелів. Якщо розглянуті характеристики не істотно відрізняються між собою, то інвестор може замість портфеля з максимальним відношенням Шарпа використати портфель з найменшою дисперсією в процесі планування своєї діяльності. Зважаючи на це, в роботі проведено аналіз вибіркової оцінки відношення Шарпа портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією. За припущення, що вектор дохідностей активів, включених у портфель, поводиться як багатовимірна нормально розподілена випадкова величина, знайдено асимтотичний розподіл вибіркової оцінки відношення Шарпа портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією. На основі цього побудовано інтервал довіри та проаналізовано методом біжучого вікна шириною 250, використовуючи дані про дохідності акцій з переліку Dow Jones за період з 01.07.2019 по 30.06.2021, істотність відмінності відношень Шарпа портфелів з найменшою дисперсією та з максимальним відношенням Шарпа. Отримано, що на протязі розглянутого часу для портфеля складеного з k=5 перших акцій зі списку Dow Jones посортованого в алфавітному порядку розглянуті відношення Шарпа істотно не відрізнялися, натомість для портфеля складеного k=30 акцій зі списку Dow Jones обидва значення відрізнялися істотно. Використовуючи імітаційне моделювання досліджено швидкість збіжності емпіричних густин до відповідної асимптотичної. Дойдено висновку, що при використанні вибірки історичних значень обсягу більше 1000 досягається достатнє наближення точних результатів асимптотичними. Отримані результати розширено на випадок припущення, що вектор дохідностей активів, включених у портфель, поводиться як багатовимірний *t*-розподіл з 5 ступенями свободи. В цьому випадку результати імітаційного моделювання є подібними до випадку нормально розподілених дохідностей. Зважаючи на те, що на сьогодні використання вибірок обсягом більше 1000 спостережень є звичним явищем, можемо відзначити також можливість практичного застосування отриманих результатів.

Література

1. Markowitz H. Portfolio selection / H. Markowitz // Journal of finance. – 1952. – №7. – P. 77 – 91.

2. Merton R. C. An analytical derivation of the efficient frontier / R. C. Merton // Journal of financial and quantitative analysis – 1972. – №7. – P. 1851 – 1872.

3. Levy H. Approximating expected utility by a function of mean and variance / H. Levy, H. Markowitz // American economic review. – 1979. – № 69. – P. 308–317.

4. Okhrin Y. Distributional properties of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // Journal of econometrics. – 2006. – № 134. – P. 235 – 256.

5. Вітлінський В. В. Урахування об’єктивно-суб’єктивної структури ризику в моделюванні економічних систем / В. В. Вітлінський // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – 2010. – Вип. 81. – С. 12–21.

6. Alexander G. J. Portfolio selection with mental accounts and delegation / G. J. Alexander, A. M. Baptista // Journal of banking and finance. – 2011. – № 35. – P. 2637–2656.

7. Заболоцький Т. М. Моделювання коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику / Т. М. Заболоцький// Актуальні проблеми економіки. – 2017. – № 4 (190). – С. 215-225.

8. Celikyurt E Portfolio selection in stochastic markets with exponential utility functions / E. Celikyurt, S. Ozekici // Annals of operations research. – 2009. – № 166. – P. 281-297.

9. Bodnar T. On the equivalence of quadratic optimization problems commonly used in portfolio theory / T. Bodnar, N. Parolya, W. Schmid // European journal of operational research. – 2013. – № 229. – P. 637–644.

10. Bodnar T. Determination and estimation of risk aversion coefficients / T. Bodnar, Y. Okhrin, V. Vitlinskyy, T. Zabolotskyy // Computational management science. – 2018. – № 15 (2). – P. 297-317.

11. Bohdalova M. Portfolio optimization and sharpe ratio based on copula approach / M. Bohdalova, M. Gregus // Research journal of economics. – 2012. – Vol. 6. – P. 6-10.

12. Schmid W. On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the sharpe ratio / W. Schmid, T. Zabolotskyy // ASTA - Advances in statistical analysis. – 2008.- №92. – P. 29 – 34.

13. Заболоцький М. В. Емпіричний аналіз вибіркової оцінки коефіцієнта ризику інвестора портфеля з максимальним відношенням Шарпа / М. В. Заболоцький, Т. М. Заболоцький, Т. В. Байбула // Вісник Львівського університету, серія економічна. – 2019. – Вип. 56. – С. 207-217.

14. Заболоцький М. В. Тестування еквівалентності портфелів з максимальним відношенням Шарпа та з максимальною очікуваною корисністю / М. В. Заболоцький, Т. М. Заболоцький // Вісник Львівського університету, серія мех.-мат. – 2019. – Вип. 88. – С. 128-133.

15. Fama E. F. Foundations of finance / E. F. Fama. – New York : Basic Books. 1976. – 391 p.

16. Bodnar T. Econometrical analysis of the sample efficient frontier. / T. Bodnar, W. Schmid // The European journal of finance. – 2009. – № 15. – P. 317 – 335.

17. Руденко В. М. Математична статистика. Навч. посіб. / В. М. Руденко. – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 304 с.

18. Сеньо П. С.Теорія ймовірностей та математична статистика. Підручник. / П. С. Сеньо. – К. : Знання, 2007. – 556 с.

19. Bodnar T. How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio? / T. Bodnar, T. Zabolotskyy // ASTA – Advances in statistical analysis. – 2017. – № 101 (1). – P. 1-28.

20. Bodnar T. Distributions of the weights of sample optimal portfolios in multivariate conditionally heteroscedastic elliptical models / T. Bodnar, T. Zabolotskyy // Journal of money, investment and banking. – 2008. – №1. – P. 5 - 23.

21. Bodnar T. Statistical inference of the efficient frontier for dependent asset returns / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotskyy // Statistical papers. – 2009. – №50. – P. 593-604.

22. Bodnar T. Sample efficient frontier in multivariate conditionally heteroscedastic elliptical models / T. Bodnar, T. Zabolotskyy // Statistics. – 2010. – V. 44, Issue 1. – P. 1-15.

23. Brockwell P. J. Time series: theory and methods / P. J. Brockwell, R. A. Davis. – New York : Springer Science+Business Media. 2006. – 600 p.

24. DasGupta A. Asymptotic theory of statistics and probability / A. DasGupta. – New York : Springer. 2008. – 722 p.

25. Fang K. T. Symmetric multivariate and related distributions / K. T. Fang, S. Kotz, K. W. Ng. – London : Chapman and Hall. 1990. – 220 p.