

**ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА**  
**МЕХАНІКО–МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**  
**КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ, ЕКОНОМЕТРІЇ,**  
**ФІНАНСОВОЇ ТА СТРАХОВОЇ МАТЕМАТИКИ**

**Пояснювальна записка**

до магістерської роботи

на тему

**Ефективні часові горизонти оптимальності фондового портфеля**

**Виконала: студентка групи**  
**МТЕФ-21с**  
**спеціальності 111**  
**математика**  
**спеціалізації актуарна**  
**та фінансова математика**  
**Палюх О. І.**  
**Керівник:**  
**доц. Червінка К. А.**

**Львів 2021**

## Зміст

Розділ 1. Теоретичні передумови формування фондового портфелю.....	4
1.1. Поняття про цінні папери.....	4
1.2. Формування портфеля цінних паперів .....	9
1.3. Моделі формування портфеля .....	14
1.4. Ефективна множина портфелів .....	18
Розділ 2. Оптимальність структури портфеля у часі.....	21
2.1 Процедура дослідження та вибір даних .....	21
2.2 Розрахунок дохідностей і аналіз поведінки вибраних акцій за допомогою Excel .....	22
2.3 Оптимізація портфелю за різні проміжки часу.....	28
Висновок .....	33
Список використаної літератури .....	34

## Вступ

Математичні моделі знаходять широке застосування у різноманітних областях, у тому числі й у економіці та фінансах. Так, у області інвестиційного менеджменту модель оптимального портфеля дозволяє інвестору здійснити обґрунтоване економічне рішення щодо вкладення власних коштів. Упродовж останніх декад значного поширення набули декілька моделей оптимального портфеля; історично однією з перших була модель Гаррі Марковіца. Це модель базується на спробі диверсифікувати ризики у портфельному інвестуванні. При цьому ризик окремого цінного паперу ототожнюється із стандартним відхиленням або дисперсією його дохідності. Дохідністю портфелю є середньозважена дохідність його компонент, а для оцінки ризику використовують більш складну формулу із залученням взаємної кореляції дохідності складових портфелю. У рамках прямої задачі намагаються максимізувати дохідність при обмеженні на ризик, а у випадку оберненої задачі мінімізують ризик при обмеженні на дохідність.

Практичне застосування теоретичних моделей стикається із низкою нюансів та труднощів, зокрема показники портфеля паперу розраховують на основі історичних даних про котирування паперів, але отримані дані є актуальні у момент розрахунку, а згодом ситуація на ринку змінюється і той портфель, який був оптимальним, перестає бути таким. На сучасних фондових ринках ситуація змінюється динамічно і тому особливої актуальності набувають задачі дослідження проміжку часу, протягом якого портфель залишається оптимальним з погляду обраної моделі.

Метою дослідження у даній роботі є вивчення та оцінка проміжків часу, протягом яких структура портфеля, котрий є оптимальний за Марковіцем, залишається незмінною. Для вирішення цієї задачі слід розв'язати декілька супутніх завдань. У першу чергу слід дослідити усі параметри, які використовують при розрахунку оптимального портфелю, вивчити їх стійкість у часі та здатність динамічно змінюватися. Далі слід з'ясувати що

варто розуміти під терміном суттєва зміна складу портфелю; важливо запропонувати спосіб оцінити відмінність у структурі портфелю. Зрозуміло, що навіть незначні коливання цін акцій на ринку будуть спричиняти деяку переоцінку акцій, а тому важливо спершу визначитися з проміжком, дані за який ідуть в основу розрахунку оптимального портфелю. Далі здійснюється переоцінка портфелю за проміжок, співвимірний із вибраним, та порівнюється структура оновленого портфелю із структурою вихідного.

Для ілюстрації математичних закономірностей динаміки складу оптимального портфелю у різних часових горизонтах слід використати реальні дані про котирування акцій за вибраний проміжок часу.

## Розділ 1. Теоретичні передумови формування фондового портфелю

Найпершим завданням фондового портфеля – це покращити умови інвестування, а саме при мінімальному ризикі гарантувати достатній рівень прибутку. Ризик і прибутковість є головними критеріями, які використовують у створенні портфелю цінних паперів. Однак, важливим є також як приходить дохід, чи завдяки поточним виплатам, чи завдяки зростанням курсової вартості.

### 1.1. Поняття про цінні папери

**Цінний папір** – це документ, який свідчить про участь їх власників у капіталі акціонерного товариства або надані позики. Вони визначають зобов'язання емітентів сплачувати їх власникам доходи, а саме дивіденди або відсотки. Але не всі грошові документи є цінними паперами, а тільки ті, які засвідчують майнове право та деякі інші фінансові зобов'язання [\*01].

Виділяють три групи цінних паперів:

I. *Пайовий цінний папір (акція)* - засвідчує участь у статутному фонді, і дає можливість власнику отримати прибуток у вигляді дивідендів, а також приймати участь у розподіленні прибутку.

Акція – це цінний папір, що свідчить про участь інвестора в діяльності емітента. Тому інвестор має змогу брати участь в управлінні діяльністю фірми-емітента шляхом зібранням акціонерів. На зборах інвестор має змогу голосувати, а також висувати свої кандидатури. Акції видають для того, щоб збільшити власний капітал. Маючи акції особа має можливість брати участь в управлінні акціонерним товариством, і отримувати якусь частину прибутку у формі дивідендів.

Акції можуть бути:

1. іменними;
2. на пред'явника;
3. привілейованими;
4. простими.

Для іменних акцій, потрібно записувати прізвище власника, коли придбав акції, а також скільки акцій у нього є, і реєструвати в спеціальній книзі.

Акції на пред'явника потрібно вказувати лише їх загальну кількість, і також реєструються, в книзі.

Власник привілейованих акцій одержує дивіденди і у випадку руйнування товариства може відшкодувати свою частку капіталу. Прибуток кожного року нараховується за твердим відсотком, зафіксованим на бланку акції. А також власники таких акцій не мають можливість брати участь в управлінні акціонерним товариством.

Прості акції повністю залежать від чистого доходу підприємства та його дивідендної політики.

Грошова форма вартості акції називається ціною акції. За ціноюю ознакою акцій вирізняють:

- номінальну ціну, яка вказується на цінному папері;
- емісійну ціну, за якою акція продається на первинному ринку (емітується);
- курсову (ринкову) ціну, за якою акція котирується (оцінюється) на вторинному ринку цінних паперів;
- балансову ціну, яка являє собою різницю між вартістю майна, що належить акціонерному товариству, і величиною його боргів.

Курсова ціна акції є більшою або меншою за її номінальну ціну. Якщо перевищити курсову ціну, то вона буде називатися лажем або ажіо, а якщо перевищити номінальну ціну над курсовою, то вона називатиметься дизажіо. Курсова ціна акцій прямо залежить від дивідендів по ній і обернено залежить від відсоткової ставки.

Отже дохід акціонера буде залежати від дивідендів на акцію, а також від зміни курсової вартості акцій. Це визначає сукупну дохідність акції.

II. *Борговий цінний папір (облігації)* - засвідчує відносини позики, тому емітент повинен сплатити гроші у визначений термін.

Отже, кожен певно хоч раз у житті брали в борг. Наприклад, просили у друга або оформлювали кредит у банку. І так гроші потрібні не лише людям, а й фірмам, і навіть країнам. Деякі шукають фінанси, для щоб не втратити або

розширити бізнес. Інші - щоб наповнити скарбниці. Якщо вони не можуть дістати потрібну суму звичайним шляхом (наприклад, через банк), альтернативний варіант - випуск облігацій.

Облігація - кредиту, який дається під боргову розписку. Покупець облігації відповідно стає кредитором, а продавець, який випустив облігацію - боржником (емітентом). Отже покупець окрім суми, яку позичив повинен сплатити ще і додаткову. Власнику облігацій стабільно приходить дохід у вигляді відсотків. При цьому він навіть не бере участь в управлінні підприємством.

Виділяють п'ять типів облігацій.

- **Номінал.** Є два види погашення номіналу. Перший, найбільш поширений, це коли номінал погашається один раз у дату погашення номіналу. І другий вид, коли номінал погашається потрохи продовж усього терміну, - **амортизуються облігації (amortizing bond).**

- **Купонні платежі.** Є три головні класи таких облігацій: Це облігації з фіксованим купоном, облігації з плаваючим купоном, а також бескупонні облігації

- **Дата погашення.** В залежно від того, коли погашається номінал, виділяють дві групи: короткострокові (менше одного року до дати погашення) і довгострокові (більше одного року до дати погашення) облігації.

- **Валюта.** Переважно валюта номіналу сходиться з валютою купонних платежів. Облігації, по яких номінал і купонні платежі виплачуються в різних валютах, називаються **мультивалютними (dual-currency bonds).**

- **Наявність або відсутність опціонів, вбудованих в облігацію.** Здебільшого облігації не мають чітких умов по терміну погашення, а також за їх розміром. Однак, на ринку існує доволі великий клас цінних паперів з вбудованими опціонами: відкличні облігації, облігації з можливістю дострокового погашення, конвертовані облігації.

Плюси і мінуси облігації:

Переваги	Недоліки
<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Постійний дохід протягом багатьох років</li> <li>✓ Обсяг прибутку відомий ще до купівлі</li> <li>✓ Безпечніше, ніж акції</li> <li>✓ Великий рівень ліквідності – можна продати в будь-який момент</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Невеликий заробіток</li> <li>- Ймовірність несплати боргу</li> <li>- при купівлі облігацій у компаній з низьким рейтингом</li> </ul>

III. Похідні цінні папери (опціон, ф'ючерс, варанти, ваучери, вексель, казначейські зобов'язання, сертифікати та інші) - це інструмент зниження фінансового ризику інвесторів, учасників фондового ринку.

1. Варант - це сертифікат, який дає можливість його власнику підписатися на деяку кількість цінних паперів наперед визначеною ціною і за певний період.

2. Ф'ючерс - це угода між покупцем і продавцем на постачання продукції або цінних паперів з наперед встановленою датою, і заздалегідь обумовленою ціною. Основною ціллю є зниження ризиків, які стосуються коливанням цін, а також гарантування постачання товару (продукції) за ціною, визначеною наперед.

3. Вексель - цінний папір, який стверджує, що векседавець (той, хто випустив вексель) повинен сплатити кредитору (покупцеві векселі) деяку суму у визначений термін. Векседавця також називають боржником, а сплата грошей - погашенням векселя. Сума боргу, що вказується у векселі, називається номіналом векселя. Розрахунки за векселями відбувається тільки готівкою. В Україні використовуються два види векселів: простий, переказний (тратта).

4. Казначейські зобов'язання держави (зобов'язання скарбниці) – це цінні папери, що свідчать про те, що їх власник вніс деяку кількість грошових



коштів до бюджету і дають можливість власникові отримати деякий дивідендний прибуток.

Відповідно до чинного законодавства України в нашій державі є такі казначейські зобов'язання:

- довготермінові – від 5 до 10 років;
- середньо термінові – від 1 до 5 років;
- короткотермінові – до одного року.

5. Опціон - похідний цінний папір, який дає право, покупцеві (утримувач) купити або продати деяку кількість цінностей, що належать опціону, за наперед домовленою ціною на протязі певного часу.

6. Ваучер - цей цінний папір, що дає право його власнику придбати будь яку акцію по номінальній вартості (позначеній на акції).

## 1.2. Формування портфеля цінних паперів

Портфель цінних паперів вміщає в себе усі типи різних цінних паперів, які придбав інвестором для того, щоб отримати дохід. А також він повинен відповідати деяким вимогам по співвідношенні розмірів дохідності і ризику.

Якщо більше паперів вкладати в дохід з більшою дохідність, тоді ми отримаємо більш дохідний портфель, але такі папери зазвичай є високо ризиковані.

Портфель складається з цінних паперів одного виду або різні фінансові цінності (облігації, акції, ощадні сертифікати і т. ін.).

Структура портфеля - це поєднання певних видів цінних паперів у портфелі. Інвестор, формуючи портфель, має вимогу мати кошти в такій формі місці, щоб вони були безпечними, високоприбутковими і ліквідними.

Головною метою у формуванні портфелів цінних паперів є зменшити ризик до певного рівня, щоб забезпечити собі необхідну прибутковість. Проте, кожне підприємство має різне поняття про необхідну прибутковість і про допустимий рівень ризику. Він є індивідуальним і залежать від того, яку стратегії поведження на ринку вибрали, а також від основної діяльності, ролі і «ваги» фінансових вкладень у сумі активів. Через це структура портфеля визначається підприємством самостійно, дивлячись на конкретні задачі, що появляються перед ним.

Формування портфеля повинно залежати від таких факторів:

- прибутковість,
- ступінь ризику,
- тип цінного папера.
- термін вкладення,

Під час формування інвестиційного портфеля потрібно звернути увагу на такі характеристики:

- стабільність отримання доходу;
- безпека вкладень;

- ліквідність вкладень, а саме негайне придбання товару (робіт, послуг), або швидко і без втрат в ціні перетворюватися в готівкові гроші.

Ні одна з інвестиційних цінностей не відповідає всім переліченими вище критеріями. Тому, в такій ситуації компроміс неминучий. Якщо цінний папір надійний, то дохідність буде досить низькою, а ті, хто вважають, що краще надійність, будуть ставити високу ціну і зменшать прибутковість. Основне при формуванні портфеля це досягнути найбільш оптимального співвідношення між ризиком і доходом для інвестора. Тобто, потрібний набір інвестиційних інструментів, який повинен знизити ризик вкладника до мінімуму, а також збільшити його дохід до максимуму.

Головним завданням при веденні портфеля - це визначити співвідношення між цінними паперами з різними властивостями. Таким чином, основними принципами для побудови класичного консервативного (мало ризикового) портфеля є:

- принцип консервативності,
- принцип диверсифікації,
- принцип достатньої ліквідності.

*Принцип консервативності.*

Це співвідношення між високонадійними і ризикованими частками. Вони доповнюють один одного так, щоб можливі втрати від ризикованої частки покривалися доходами від надійних активів. Це означає, що "надійних" паперів повинно бути не менше половини.

Таким чином інвестиційний ризик залежить не від втрати основної суми, а від надходження недостатньо високого доходу.

До того ж, досить часта зміна структура портфеля не дуже вигідна, оскільки для його постійного форматування потрібні додаткові витрати, які у класичних моделях не враховуються. Моделі, які враховують витрати на зміну структури портфелю (витрати на послуги біржових посередників) деколи називають "моделями із тертям".

Відомо, що якщо не ризикувати, то не потрібно розраховувати на досить високі доходи. Проте, як показує практика, що переважно більша частина

клієнтів задоволені своїми доходами, що вимірюється в межах від однієї до двох депозитних ставок банків вищої категорії надійності, тому збільшувати свої доходи завдяки більш високого ступеня ризику вони не бажають.

#### *Принцип диверсифікації.*

Диверсифікація - це процес покупки кілька різних акцій, які перебувають в одному і тому ж портфелі акцій, з метою допомогти збалансувати прибутки і збитки. Наприклад, якщо одна акція працює погано, портфель акцій може бути прибутковим, тому що інші акції можуть працювати добре.

Диверсифікація свого портфеля - це гарантія того, що він не попаде під загальний ризик. Якщо, наприклад, портфель акцій даної людини містить декілька акцій однієї і тієї ж компанії, то він постійно буде залежати від результатів діяльності цієї компанії, щоб отримати прибуток. Отже він буде абсолютно залежати від роботи цієї компанії, і якщо з багатьох причин ціни на акції почнуть падати, то це приведе до великих втрат.

Оптимальною величиною диверсифікованого портфелю є приблизно від 8 до 20 різних видів цінних паперів.

Якщо у портфелі достатньо коштів, тоді можна проводити галузеву і регіональну диверсифікації.

Галузева диверсифікація полягає в тому, щоб не вкладати активи підприємств однієї галузі. Оскільки катаклізм може спіткати галузь в цілому. Наприклад, якщо на світовому ринку падають ціни на нафту то це призводить до того, що на всіх нафтопереробних підприємств падає ціна акцій, і не важливо те, що вони розподілені на різних підприємствах. Так само це стосується і підприємств одного регіону. Тому що зниження цін акцій одночасно, може відбутися через політичну нестабільності, стихійні лиха, страйки, введення в дію нових транспортних магістралей.

Тому надмірна диверсифікація може призвести до негативних результатів.

Адже відбуваються великі витрати під час купівлі невеликих партій цінних паперів, неможливо якісно управляти портфелем, здійснюється купівля недостатньо дохідних, надійних, ліквідних цінних паперів, а також

зростають витрати, які пов'язані з пошуком цінних паперів (витрати на попередній аналіз)

*Принцип достатньої ліквідності.*

Його завдання полягає у тому, щоб утримувати якусь частину активів у портфелі до такого рівня, щоб задовольнялися вимоги клієнтів і проводилися високоприбуткові угоди. Тому, як показує практика, краще тримати деяку частину коштів у більш ліквідних (нехай навіть менш дохідних) цінних паперах, проте мати змогу швидко діяти на зміни кон'юнктури ринку і деякі не менш вигідні пропозиції.

Оскільки в Україні нерозвинений ринок цінних паперів і фінансовий ринок, то інвестори під час створення портфеля цінних паперів ставлять собі за мету:

- купити цінні папери, які за умовами обігу зможуть замінити готівку;
- зберегти приріст капіталу;
- створити холдингові і ланцюгові структури, розширити сфери впливу і перерозподілити власності;
- купити цінні папери і отримати доступ до майнових і немайнових прав, дефіцитної продукції і послуг;
- спекулятивну гру на коливаннях курсів у випадку нестабільного ринку цінних паперів.

Згідно з інвестиційною метою інвестор створює портфель визначеного типу. Існують різні види інвестиційних портфелів.

Вкладник може змінювати свої інвестиційні цілі можуть, тому відповідно змінюється і складу портфеля.

Отже, коли йде зниження процентної ставки Національного банку, то краще купувати довгострокові облігації з низьким доходом за купонами, їх курс досить швидко підвищується коли відсоткова ставки падає. При цьому доречно продати короткострокові облігації з високою прибутковістю за купонами, затим що їхній курс у даній ситуації буде падати. Врешті-решт, якщо динаміка процентної ставки показує повну невизначеність, то керуючий перетворить суттєву частину портфеля цінних паперів в активи підвищеної ліквідності.

Ліквідність вивчається як одна з найважливіших властивостей портфеля цінних паперів і має можливість швидко перетворювати цінні папери у гроші. Можливість інвестиційної компанії залежить від рівня ліквідності або фонду вчасно здійснити свої зобов'язання перед кредиторами й акціонерами.

Якщо змінюється структури портфеля цінних паперів, то змінюється також і вартість цінних паперів. Внаслідок цього виникають додаткові проблеми, пов'язані зі збільшенням або зменшенням капіталу. Якщо є чисте перевищення вартості придбання цінних паперів над їх продажем, то появляється деякий приріст капіталу. Ці кошти доречно знову вкласти в цінні папери. При цьому потрібно стежити за якістю портфеля цінних паперів і його структурою. Ця робота проводиться портфельним менеджером або депозитарієм.

Отже, при реалізації інвестиційної стратегії на ринку цінних паперів можна бути зорієнтованим на різні цільові настанови: на зростання вартості цінних паперів, тобто на збільшення вкладеного капіталу або на одержання більш-менш стабільного і високого поточного доходу (дивідендів).

### 1.3. Моделі формування портфеля

На даний момент в світі найбільш поширені є дві моделі, які визначають характеристику портфеля. Це модель Марковіца та модель Шарпа. Ці моделі вже створені і ефективно використовуються у вже сформованих, стабільних фондових ринків.

Модель Марковіца основана на тому, щоб показники прибутку деяких цінних паперів були взаємопов'язані. Наприклад, якщо зростає прибутковість одних паперів, тоді розглядається одночасне зростання по інших паперах, треті залишаються без змін, а для четвертих прибутковість зменшується. Такий тип залежності не є детермінованим, тобто однозначно визначеним, а стохастичним, і називається кореляцією.

Модель Марковіца має такі загальні припущення [\*02]:

- за ризик цінних паперів вважається середнє квадратичне відхилення доходності;
- дані за минулий період, яким користуються під час розрахунку доходності і ризику абсолютно точно показує майбутні значення доходності;
- за доходність цінних паперів вважається математичне очікування доходності;
- характер і ступінь взаємовідношенням між цінними паперами визначається коефіцієнтом лінійної кореляції.

Доходність портфеля цінних паперів за моделлю Марковіца - це доходність паперів та його складових, яка рахується за формулою:

$$R_P = \sum_{i=1}^N W_i \cdot r_i \quad (1.1)$$

де:

$W_i$  - процентна частка заданого паперу в портфелі;

$r_i$  - доходність даного паперу;

$N$  - кількість цінних паперів, що розглядаються.

Ризик портфеля цінних паперів розраховується за функцією:

$$\sqrt{\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N (W_{\alpha} \cdot \sigma_{\alpha} \cdot W_{\beta} \cdot \sigma_{\beta} \cdot \rho_{\alpha\beta})} \quad (1.2)$$

де:

$W_i$  - процентна частка паперів, які задані у портфелі;

$\sigma_{\alpha} \sigma_{\beta}$  - ризик заданих паперів (середньоквадратичне відхилення);

$\rho_{\alpha\beta}$  - коефіцієнт лінійної кореляції.

Отже, ми шукаємо так, щоб дохідність була якомога більшою, а ризик якомога меншим. Зазвичай на одну з цих функцій накладаємо обмеження, а іншу відповідно досліджуємо на екстремум. Якщо накладати обмеження на ризик і спрямовувати на максимум дохідність, тоді ми отримаємо пряму задачу, а якщо навпаки, то отримаємо обернену.

За використанням моделі Марковіца для визначення характеристик портфеля пряма задача має такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N W_i \cdot r_i \rightarrow \max; \\ \sqrt{\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N (W_{\alpha} \cdot \sigma_{\alpha} \cdot W_{\beta} \cdot \sigma_{\beta} \cdot \rho_{\alpha\beta})} \leq \sigma_{\text{req}}; \\ W_i \geq 0; \\ \sum W_i = 1 \end{array} \right. \quad (1.3)$$



Обернена задача визначається аналогічно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N W_i \cdot r_i \geq R_{\text{req}i} \\ \sqrt{\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N (W_{\alpha} \cdot \sigma_{\alpha} \cdot W_{\beta} \cdot \sigma_{\beta} \cdot \rho_{\alpha\beta})} \rightarrow \min; \\ W_i \geq 0; \\ \sum W_i = 1 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Якщо застосувати моделі Марковіца на практиці, то для оптимізації фондового портфеля використовуються такі формули:

1) доходність цінних паперів

$$\frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T r_{it} \quad (1.5)$$

де  $T$  - кількість минулих спостережень доходності даних цінних паперів;

2) ризик цінного паперу:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{it} - r_i)^2} \quad (1.6)$$

3) коефіцієнт кореляції між двома цінними паперами:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{(T-1)\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}} \cdot \sum_{t=1}^T [(r_{\alpha t} - r_{\alpha})(r_{\beta t} - r_{\beta})] \quad (1.7)$$

де:

$r_{\alpha t}, r_{\beta t}$  - доходність цінних паперів  $\alpha$  та  $\beta$  в період  $t$

Звичайно, що для  $N$  цінних паперів потрібно порахувати  $N(N-1)/2$  коефіцієнтів кореляції.

Отже, моделлю Марковіца доцільно користуватися, коли стан фондового ринку незмінний, а також коли потрібно створити портфель з цінних паперів з різних галузів і різним характером. Модель Марковіца має також свої

недоліки серед яких найчастіше називають те, що майбутні виплати прогнозують на попередній історії, тобто приймають, що ситуація на ринку не змінюється, а також за дохідність цінних паперів приймають середню дохідність за минулий період; ризик ж приймають симетричним стосовно відхилень відносно середнього, тоді як зрозуміло, що відхилення вгору є позитивною ознакою – відхилення вгору свідчить про ріст паперу, тоді як відхилення вниз – про падіння. Міра ризику сігма ж цю особливість ігнорує.

## 1.4. Ефективна множина портфельів

Інвесторів потрібно аналізувати лише підмножину можливих портфельів, пояснення цьому знаходиться в теоремі про ефективну множину портфельів або ефективний кордон портфельів. Ця теорема має таке формулювання:

Інвестор обирає собі оптимальний портфель з множини портфельів, які:

- 1) забезпечує досить велику прибутковість при деякому рівні ризику
- 2) забезпечує мінімальний ризик для деякої ймовірної прибутковості.

Множина портфельів, що слідує таким умовам, називається ефективною множиною або ефективним кордоном (*efficient boundary*).

Розглянемо нижче наведений рисунок:

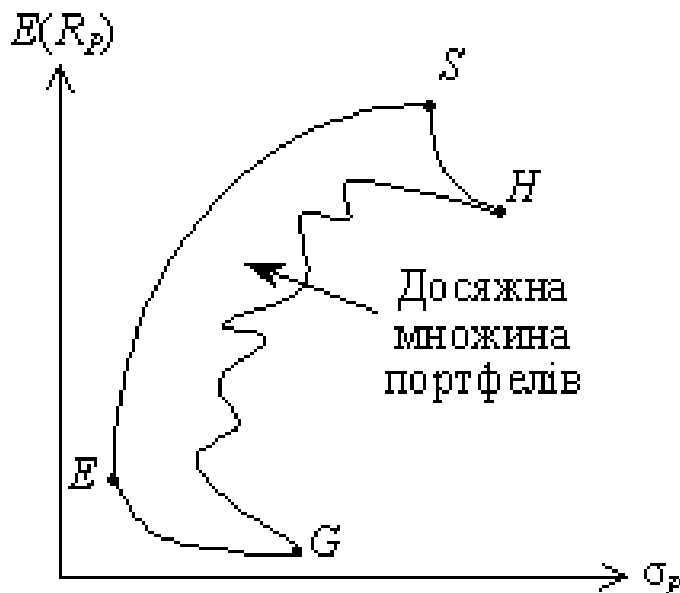


Рис. 1.1 Досяжна та допустима множини

Що таке досяжна множина? Наприклад, якщо на ринку є папери з дохідністю 5% і 7%, то якби ми не комбінували, ми ніколи не досягнемо папір із дохідністю 8%.

Досяжна множина показує всі портфелі, які можна сформувати з  $N$  паперів. Тому, можна вважати, що всі допустимі портфелі, які можна сформувати з  $N$  паперів, знаходяться на кордонах досяжної множини, або всередині його (точки  $E$ ,  $G$ ,  $S$  і  $H$  є прикладами таких портфельів). Переважно досяжні множини портфельів мають форму парасольки, хоча можуть бути вужчими і ширшими, а також розташовуватися вище й нижче.

Скористаємося теоремою про ефективну множину до досяжної множини портфельів, яка є зображена на рисунку 1.1. За результатами аналізу можна отримати такі висновки:

1) Лише портфель  $S$  може забезпечити найбільш ймовірну прибутковість. Якщо через точку  $S$  провести горизонтальну пряму, то вище цієї прямої не буде ніякої точки.

2) Лише портфель  $E$  має найменший ризик. Це можна побачити, якщо через точку  $E$  провести вертикальну пряму, то лівіше від цієї прямої не має ніякої точки

3) Лише портфель  $G$  може забезпечити найменш ймовірну прибутковість. Якщо через точку  $G$  провести горизонтальну пряму, то нижче від цієї прямої не буде ніякої точки..

4) Лише портфель  $H$  є з найбільшим ризиком. Якщо через точку  $H$  провести вертикальну пряму, то правіше від цієї прямої не має ніякої точки.

Отже, множина портфельів, що забезпечує найбільш ймовірну прибутковість, рівень ризику якої є змінним, це частина верхньої межі досяжної множини між точками  $E$  і  $H$ . Множина портфельів, що забезпечує найменший ризик рівень прибутку якої є змінним, це частина лівого кордону досяжної множини між точками  $S$  і  $G$ .

Можемо зазначити, що до уваги беруться лише портфелі, які розташовані на верхньому і лівому кордоні досяжної множини, точніше на кривій між точками  $E$  і  $S$ . Вони складають ефективну множину портфельів з даної досяжної множини. Тому інвестор обирає для себе оптимальний портфель з множини ефективних портфельів. А інші портфелі, які не знаходяться на кривій  $ES$ , є непродуктивними й у майбутньому не розбирається.

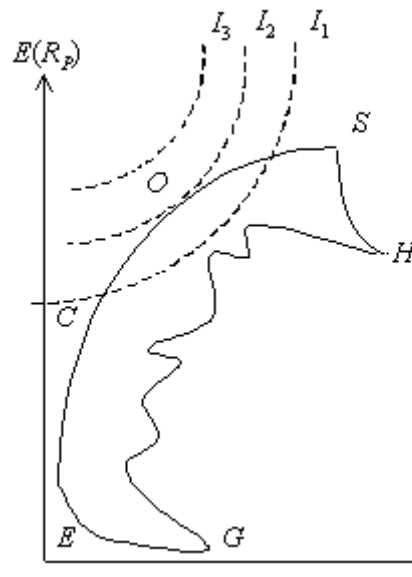


Рис.1.2. Модель вибору інвестора

Отже, щоб вибрати оптимальний портфель, інвесторові потрібно намалювати одночасно на одному рисунку криву байдужості і ефективну множину портфелів, і тоді обирати оптимальний портфель, який розташований на кривій байдужості вище й лівіше від інших.

Оптимальний портфель буде відповідати точці, в якій крива байдужості дотикається до ефективного кордону портфелів (рис 1.2). Дивлячись на рисунок 2 т. О, що розташована на кривій байдужості  $I_2$  має багато кривих байдужості, а на кривій байдужості  $I_3$  портфелів не має.

А якщо подивитися на криву байдужості  $I_1$  то там існує декілька портфелів, які інвестор може обрати, наприклад, портфель С. Але є ще портфель О і він буде кращим, оскільки він на кривій байдужості, розташованій вище й лівіше.

## Розділ 2. Оптимальність структури портфеля у часі

Згідно існуючих практик вибору оптимального портфелю, інвестор повинен спостерігати за поведінкою паперів на ринку, і пізніше вибрати ті, які на його думку є перспективними. Папери, які були обрані в деякий момент часу, через місяць (тиждень, день) можуть змінитися, оскільки ситуація на ринку є нестабільною. Попробуємо дослідити, як змінюється оптимальний портфель у часі. За основу досліджень візьмемо реальні дані про котирування обраних акцій.

### 2.1 Процедура дослідження та вибір даних

Дослідження оптимального портфеля проводиться в декілька етапів. Спершу потрібно вибрати цінні папери та проміжок на якому будемо їх розглядати.

Дані про котирування акцій можна отримати з сайту [www.finam.ru](http://www.finam.ru).  
Обираємо шість компаній за 1 рік (01.10.20 – 01.10.21):

1. Aspen Technology, Inc (US1.AZPN);
2. Black Knight, Inc (US1.BKI);
3. Calavo Growers, Inc (US1.CVGW);
4. Evercore, Inc (US1.EVR);
5. First Solar, Inc (US1.FSLR);
6. Kinder Morgan, Inc (US1.KMI).

Всього даних за цей період є 173, по кожній акції, тобто  $173 \cdot 6 = 1038$  значень звичайної дохідності. За період вважаємо щоденні дані за винятком днів, коли торги не проводились.

Далі рахуємо оптимальний портфель.

Щоб оптимізувати портфель потрібно дотримуватися такого алгоритму:

- Задаємо вхідні дані;
- Рахуємо дохідність паперів за період і за весь час;
- Розв'язуємо пряму задачу Марковіца для рівномірно розподілених значень.
- Проводимо розрахунок для різних часових інтервалів

- Порівнюємо отримані дані та аналізуємо відмінності;

## 2.2 Розрахунок дохідностей і аналіз поведінки вибраних акцій за допомогою Excel

На даний момент є багато програмок, за допомогою яких ми можемо розв'язувати прикладні задачі. Однією з таких програмок є Excel, його часто використовують для розв'язання задач з економіки, фінансів та статистики.

Отже, для оптимізації портфеля цінних паперів достатньо використовувати можливості Excel.

Дані акцій ми скачуємо у txt форматі і потім імпортуємо у Excel. Для того, щоб імпортувати дані в меню натискаємо Дані → Отримати зовнішні дані → Із текста → Готово.

Імпортувавши всі дані, потрібно порахувати дохідність. Дохідність можна порахувати за однією з таких формул:

$$1. R_n = \frac{C_n - C_1}{C_1};$$

$$2. R_n = \frac{C_n - C_{n-1}}{C_{n-1}};$$

$$3. R_n = \ln \frac{C_n}{C_{n-1}};$$

де С – ціна котирування.

Перша формула – це дохідність в момент часу n, друга – відносний приріст поділений на стару ціну, а третя формула – це різниця логарифмів, вона краща тим, що якщо ми маємо дохідність за два проміжки, то ми з двох даних можемо отримати нову дохідність.

Потім за допомогою функцій СРЗНАЧ() та СТАНДАРТОТКЛОН() шукаємо середнє значення (Return) і стандартне відхилення (Risk) за весь період.

Таблиця 2.1. Дані про дохідність та ризик акцій за період з 01.10.20 по 01.10.21

	US1.AZPN	US1.BKI	US1.CVGW	US1.EVR	US1.FSLR	US1.KMI
Return	0.07%	-0.10%	0.03%	0.47%	0.16%	0.29%
Risk	2.17%	1.63%	2.10%	2.04%	3.48%	1.89%

Отже, з таблиці 2.1 ми можемо побачити, що дохідність по US1.BKI є найгіршою, а найкраща дохідність за весь рік є по US1.EVR.

Можемо подивитися за допомогою діаграми, як поведуть себе графіки окремого підприємства, порівнюючи дохідності розраховані за формулою 1:

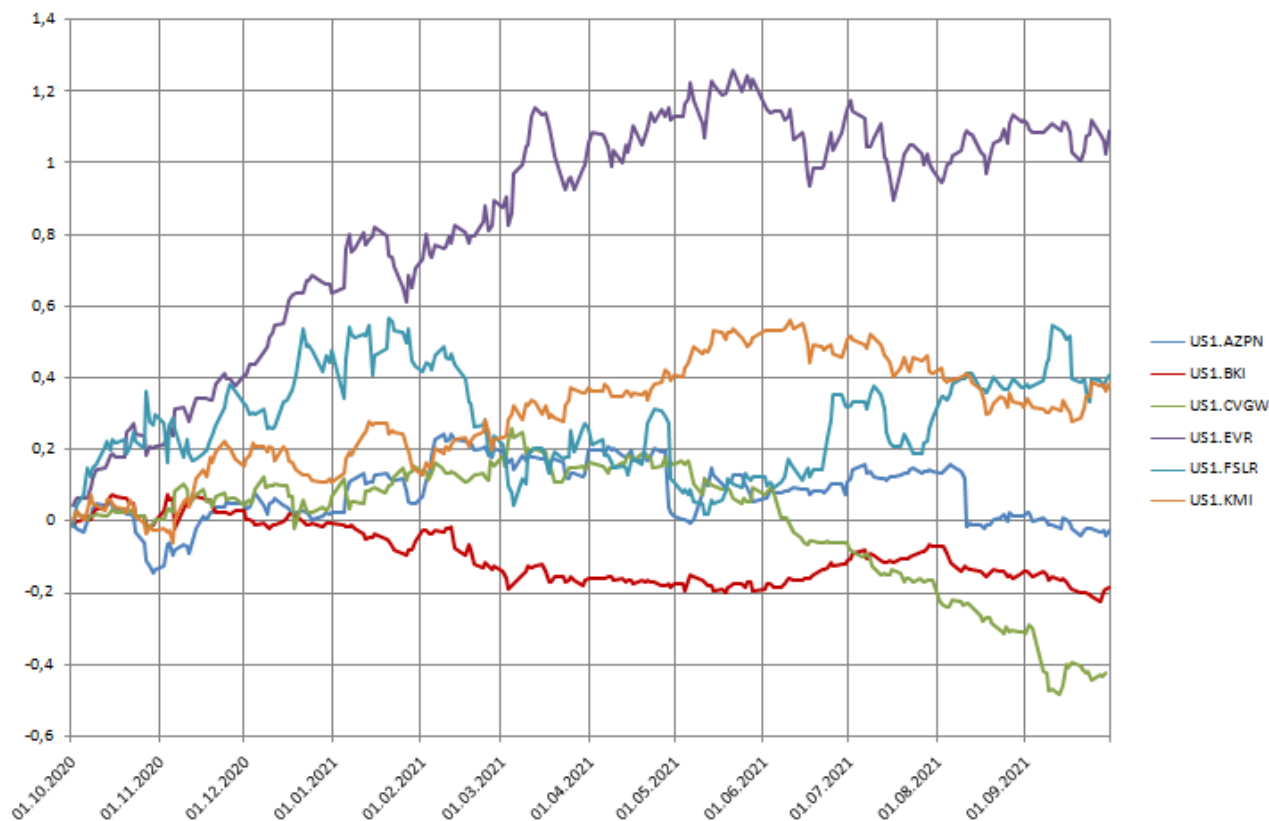


Рис 2.1. Графіки дохідності 6-ти компаній

З рис 2.1 бачимо, що US1.EVR є найкращим, також непогано веде себе US1.AZPN, але він дуже ризиковий і також позитивний результат буде по US1.KMI. Найгіршим є US1.BKI, оскільки він майже не змінюється, а це означає, що він не дає прибутку.

Наступним кроком буде знаходження кореляції між дохідностями вибраних паперів. Для цього нам потрібно використати надбудови Excel. Натискаємо Головне меню → Дані → Аналіз даних → Кореляція, вибігає діалогове вікно (див. рис.2.2).



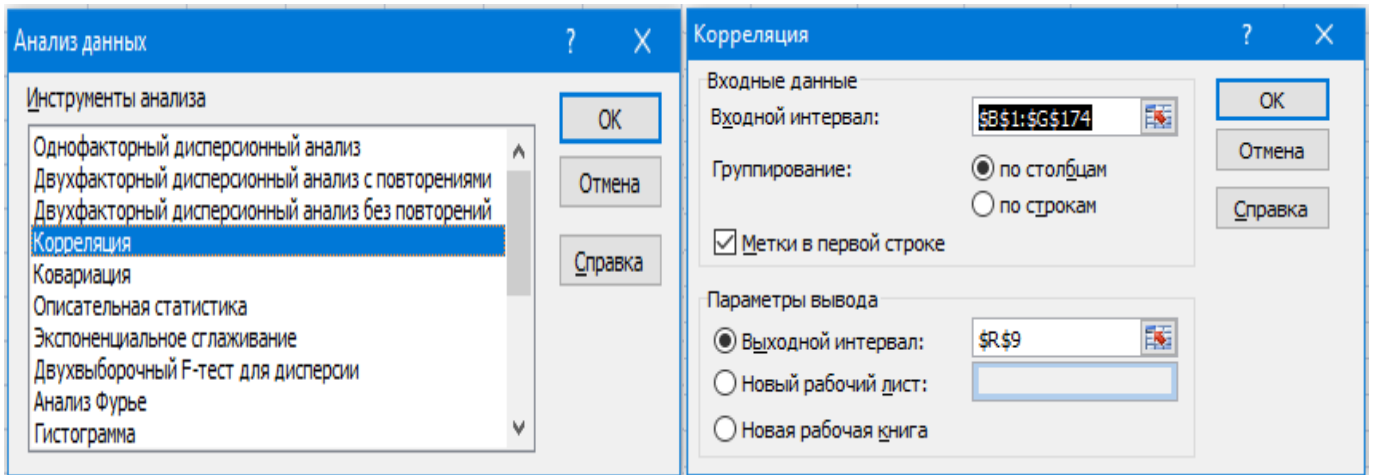


Рис 2.2 Діалогове вікно “Аналіз даних” та вікно налаштувань

В ньому вибираємо вхідний інтервал, в групування вибираємо по стовпцях, вказуємо вихідний інтервал і натискаємо ОК. Отриманий результат за весь проміжок часу показано у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2. Кореляція даних

	<i>US1.AZPN</i>	<i>US1.BKI</i>	<i>US1.CVGW</i>	<i>US1.EVR</i>	<i>US1.FSLR</i>	<i>US1.KMI</i>
<i>US1.AZPN</i>	1					
<i>US1.BKI</i>	0.2178495	1				
<i>US1.CVGW</i>	-0.012017	-0.044425	1			
<i>US1.EVR</i>	0.1649532	0.0405136	0.4125848	1		
<i>US1.FSLR</i>	0.1263285	0.073691	-0.157375	0.1067707	1	
<i>US1.KMI</i>	0.2858911	-0.096453	0.2870101	0.3508914	0.0288747	1

Оскільки згенерована таблиця містить тільки нижню половину матриці коваріації, то для того, що доповнити верхню половину, ми копіюємо нашу матрицю на нове місце і вибираємо Спеціальна ставка → транспонувати → скласти, і потім замінемо на діагоналі двійки на одинички, і отримаємо таку матрицю кореляції:

Таблиця 2.3 Кореляційна матриця

	<i>US1.AZPN</i>	<i>US1.BKI</i>	<i>US1.CVGW</i>	<i>US1.EVR</i>	<i>US1.FSLR</i>	<i>US1.KMI</i>
<i>US1.AZPN</i>	1	0.2178495	-0.012017	0.1649532	0.1263285	0.2858911
<i>US1.BKI</i>	0.2178495	1	-0.044425	0.0405136	0.073691	-0.096453
<i>US1.CVGW</i>	-0.012017	-0.044425	1	0.4125848	-0.157375	0.2870101
<i>US1.EVR</i>	0.1649532	0.0405136	0.4125848	1	0.1067707	0.3508914
<i>US1.FSLR</i>	0.1263285	0.073691	-0.157375	0.1067707	1	0.0288747
<i>US1.KMI</i>	0.2858911	-0.096453	0.2870101	0.3508914	0.0288747	1

На основі аналізу таблиці 2.3 ми бачимо, що кореляція між акціями є досить слабка, але є групи компаній, які мають порівняно високу кореляцію. Найвища кореляція акцій спостерігається між *US1.CVGW* і *US1.EVR* і дорівнює 0.41. Від’ємних є відносно не багато.

Наступним нашим завданням буде формування початкових даних для оптимізації:

- частки усіх паперів рівні нулю;
- рахуємо дохідність портфелю як добуток часток на дохідність паперів;
- рахуємо рівень ризикованості портфелю.

Після отримання всіх даних можна формувати портфель. Для цього нам потрібно використати надбудову “Пошук розв’язку”. В діалоговому вікні вказуємо адресу цільової комірки, потім потрібно вказати, що ми мінімізуємо значення і також вибрати діапазон комірок, які змінюються.

Далі потрібно накласти обмеження, а саме:

1. Коефіцієнти портфеля мають бути  $\geq 0$ ;
2. Сума коефіцієнтів повинна дорівнювати 1;
3. Ризик портфеля не повинен перевищувати вказаного значення.

Після того, як ми вказали всі параметри натискаємо кнопку “Виконати” і зберігаємо результат, а саме множину значень дохідності та ризику (сигма). Оптимізувавши наш портфель декілька разів, ми отримаємо деяку множину значень дохідності і ризику (сигма).

Таблиця 2.4. Дані після оптимізації портфелю для 6-ти акцій

R	0.00%	0.05%	0.10%	0.15%	0.20%	0.25%	0.30%	0.35%	0.40%	0.45%	0.50%
$\sigma$	0.0102	0.0102	0.0102	0.0106	0.0112	0.0121	0.0133	0.0147	0.0156	0.0188	0.0204
US1.AZPN	8.24%	8.24%	7.56%	6.26%	4.97%	3.67%	2.29%	0.88%	0.70%	0.00%	0.00%
US1.BKI	38.33%	38.33%	35.94%	31.40%	26.83%	22.27%	14.75%	6.54%	0.00%	0.00%	0.00%
US1.CVGW	19.09%	19.09%	16.42%	11.25%	6.12%	0.98%	0.00%	0.00%	0.52%	0.00%	0.00%
US1.EVR	5.94%	5.94%	10.39%	18.93%	27.46%	35.98%	44.38%	52.74%	55.77%	87.88%	100.00%
US1.FSLR	7.67%	7.67%	7.50%	7.17%	6.85%	6.52%	6.53%	6.62%	7.81%	0.00%	0.00%
US1.KMI	20.73%	20.73%	22.19%	24.98%	27.77%	30.58%	32.05%	33.22%	35.20%	12.12%	0.00%

Візьмемо дані для 11 різних обмежень, і це є низка точок, котрі будуть лежати на ефективній множині, і за допомогою графіка на рис.2 порівняємо дохідність і ризик:

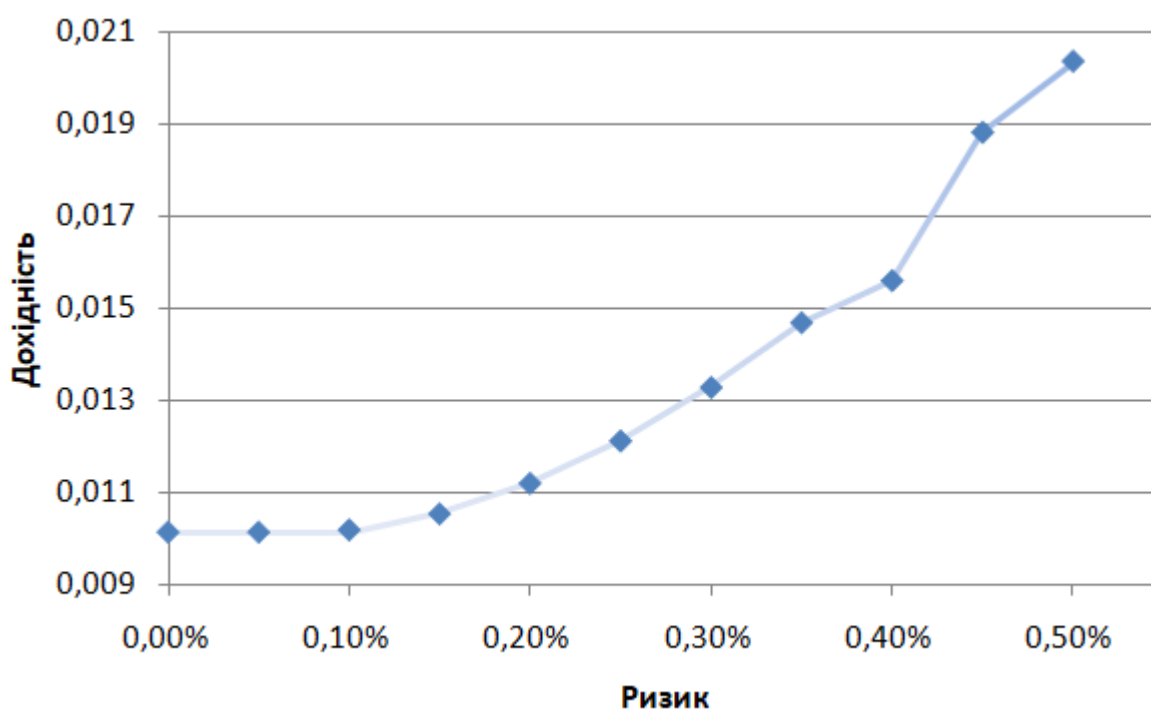


Рис 2.3. Графік залежності дохідності і ризику. Точки відповідають характеристикам портфелю, оптимального за Марковіцем.

З рис 2.3 ми бачимо, що зазвичай папери, які мають вищий ризик, матимуть вищу дохідність і навпаки. Хоча в перших трьох дохідність значно відрізняється, а ризик в них приблизно однаковий.

За допомогою діаграми з областями можемо подивитися як змінюються відповідна структура портфелів (коефіцієнти), виведені у таблиці 2.4:

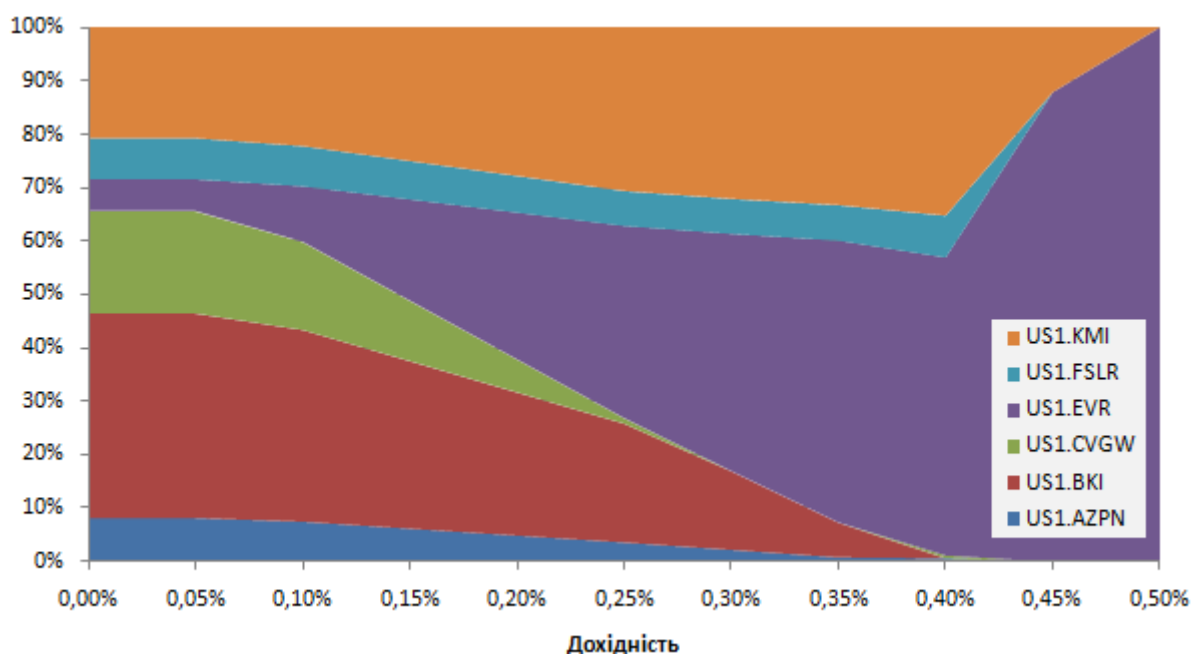


Рис 2.4. Кумулятивна діаграма коефіцієнтів

Отже з рис 2.4 видно, що якщо ми хочемо, щоб дохідність перевищувала 0,30%, то більше половини портфелю має належати паперу US1.EVR. Для низьких часток портфелів значно зростає частка US1.BKI і стабільною залишається частка US1.KMI. Частки портфелів US1.FSLR і US1.AZPN в цілому є доволі низькі, такі папери переважно домінуються іншими.

## 2.3 Оптимізація портфелю за різні проміжки часу

Попробуємо показати як оцінювати різницю двох векторів за відсотком зміни. Візьмемо скалярний добуток двох портфелів: чим менший скалярний добуток, тим більша різниця. Запишемо таку формулу:  $1 - \text{СУМПРОИЗВ}() * 2$ , і можемо порахувати на скільки зміниться структура портфеля. Розглянемо таблицю 2.5. Бачимо, що перший портфель змінився повністю, тобто він змінився на 100%, другий портфель змінився тільки на половину компонентів, то відповідно портфель змінився на 50%, і третій портфель змінився на 6%. Можемо сказати, що якщо структура змінилася більше ніж на 10%, то портфель змінився суттєво, і потрібно вже здійснювати переоцінку, тобто переходити до нового.

Таблиця 2.5 Структури портфелів

I портфель		II портфель		III портфель	
0%	50%	100%	50%	45%	50%
0%	50%	0%	50%	49%	50%
20%	0%	0%	0%	1%	0%
60%	0%	0%	0%	6%	0%
20%	0%	0%	0%	0%	0%
0%	0%	0%	0%	0%	0%

Проведемо дослідження того, як змінюється структура оптимального портфелю, якщо за вихідні дані для розрахунків вибрати дані про котирування за різні проміжки часу. Нехай основою для розрахунку оптимального портфелю є дані щодо доходностей за 42 періодів поспіль із змінною початковою точкою відліку 21 період, а саме вибираємо дані за перший і другий період (02.10.20 – 02.12.20) і за другий і третій період (02.11.20 – 04.01.21) визначаємо оптимальні портфелі, порівнюємо. Потім візьмемо за пізніший проміжок часу, наприклад за п'ятий і шостий період (02.02.21 – 01.04.21) і також обчислюємо, оскільки дані оновилися, виникає питання на скільки оновиться портфель.

Отже, обчислюємо дохідність і ризик за цих три проміжки.

Таблиця 2.6 Дані про дохідність та ризик акцій за три періоди

02.10.20 - 02.12.20	US1.AZPN	US1.BKI	US1.CVGW	US1.EVR	US1.FSLR	US1.KMI
Return	0.10%	0.01%	0.12%	0.87%	0.78%	0.47%
Risk	2.27%	2.09%	1.78%	2.07%	3.98%	2.53%
02.11.20 - 04.01.21	US1.AZPN	US1.BKI	US1.CVGW	US1.EVR	US1.FSLR	US1.KMI
Return	0.44%	0.00%	0.15%	0.78%	0.45%	0.39%
Risk	1.97%	1.96%	2.61%	1.59%	3.39%	2.30%
02.02.21 - 02.04.21	US1.AZPN	US1.BKI	US1.CVGW	US1.EVR	US1.FSLR	US1.KMI
Return	0.33%	-0.26%	0.03%	0.47%	-0.26%	0.46%
Risk	2.01%	2.02%	2.03%	2.29%	3.37%	1.98%

З таблиці 2.6 бачимо, що за перший і другий період максимальна дохідність відповідно дорівнює 0.87% і 0.78%, а мінімальна 0.01% і 0.00%, значення їх є досить близькими. Що не скажеш про дані за третій період. Максимальна дохідність рівна 0.47%, що майже на половину менша за перших два періоди, а мінімальна дохідність взагалі від’ємна і дорівнює - 0.26%.

Потім знаходимо кореляцію між дохідностями.

Таблиця 2.7 Кореляційні матриці

	<i>US1.AZPN</i>	<i>US1.BKI</i>	<i>US1.CVGW</i>	<i>US1.EVR</i>	<i>US1.FSLR</i>	<i>US1.KMI</i>
US1.AZPN	1	0.3664206	0.537138	0.4402712	-0.207237	0.4952604
US1.BKI	0.3664206	1	-0.007776	-0.142133	-0.192089	-0.091609
US1.CVGW	0.537138	-0.007776	1	0.7134843	-0.36245	0.6176639
US1.EVR	0.4402712	-0.142133	0.7134843	1	-0.37498	0.4550104
US1.FSLR	-0.207237	-0.192089	-0.36245	-0.37498	1	-0.109803
US1.KMI	0.4952604	-0.091609	0.6176639	0.4550104	-0.109803	1
	<i>US1.AZPN</i>	<i>US1.BKI</i>	<i>US1.CVGW</i>	<i>US1.EVR</i>	<i>US1.FSLR</i>	<i>US1.KMI</i>
US1.AZPN	1	0.1984607	0.1702095	0.2948572	-0.196995	0.4210332
US1.BKI	0.1984607	1	-0.067749	-0.327357	-0.244819	-0.170019
US1.CVGW	0.1702095	-0.067749	1	0.5100809	-0.388375	0.3883627
US1.EVR	0.2948572	-0.327357	0.5100809	1	-0.199853	0.4100346
US1.FSLR	-0.196995	-0.244819	-0.388375	-0.199853	1	-0.017783
US1.KMI	0.4210332	-0.170019	0.3883627	0.4100346	-0.017783	1
	<i>US1.AZPN</i>	<i>US1.BKI</i>	<i>US1.CVGW</i>	<i>US1.EVR</i>	<i>US1.FSLR</i>	<i>US1.KMI</i>
US1.AZPN	1	0.4657476	-0.132728	0.2085535	0.4774778	0.0668187
US1.BKI	0.4657476	1	-0.018456	0.1548946	0.4150868	-0.116169
US1.CVGW	-0.132728	-0.018456	1	0.4755301	-0.033147	0.2346621
US1.EVR	0.2085535	0.1548946	0.4755301	1	0.3139468	0.3508499
US1.FSLR	0.4774778	0.4150868	-0.033147	0.3139468	1	0.0654025
US1.KMI	0.0668187	-0.116169	0.2346621	0.3508499	0.0654025	1

За перший період найвища кореляція є між US1.EVR і US1.CVGW і дорівнює 0.71, за другий період між US1.EVR і US1.CVGW і рівна 0.51. І за третій період найвища кореляція також між US1.EVR і US1.CVGW, але дорівнює вже 0.47.

І тепер формуємо портфелі за алгоритмом наведеним у розділі 2.2.

Таблиця 2.8 Дані після оптимізації портфеля

	02.10.20 - 02.12.20	02.11.20 - 04.01.21	02.02.21 - 02.04.21
	0.40%	0.40%	0.40%
$\sigma$	0.009801	0.0079789	0.0137747
US1.AZPN	0.00%	3.44%	35.06%
US1.BKI	32.33%	33.74%	0.00%
US1.CVGW	22.69%	6.09%	3.70%
US1.EVR	25.73%	37.89%	19.63%
US1.FSLR	18.14%	16.10%	0.00%
US1.KMI	1.11%	2.75%	41.61%

Після цього отримаємо портфелі за три проміжки часу (таблиця 2.8). З таблиці можемо побачити, що дані першого і другого стовпчика частково перекриваються, тоді коли третій стовпчик зовсім інший. Щоб краще побачити як змінюються коефіцієнти, проілюструємо це на графіку.

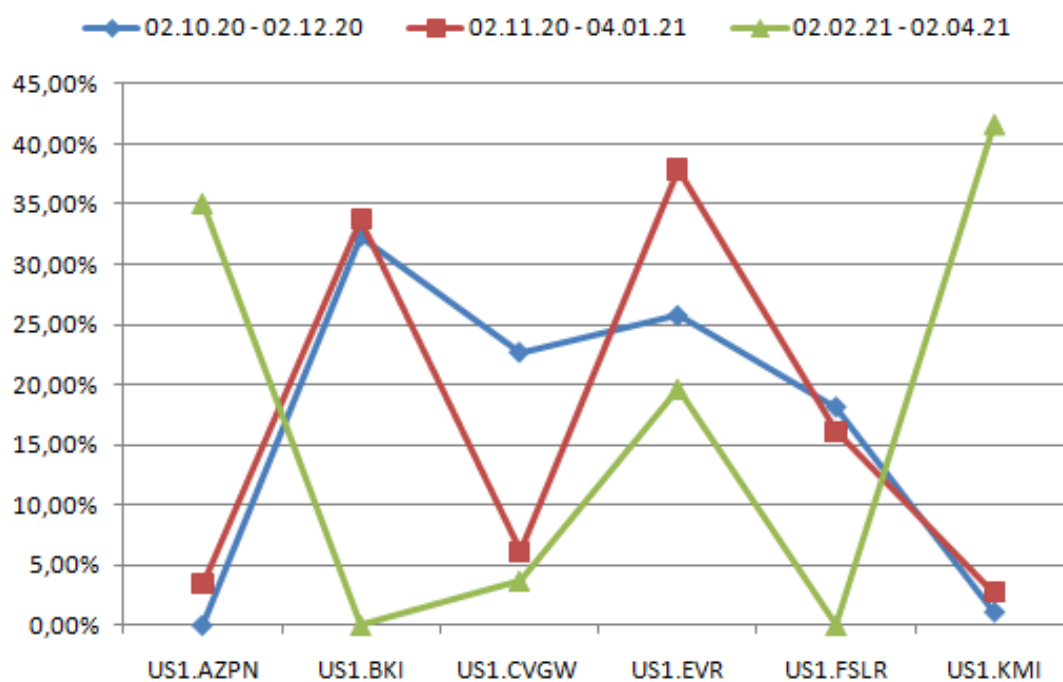


Рис 2.5 Графік

На цьому графіку ми можемо побачити, що дані за перший і другий період майже накладаються один на одного, тільки в двох компаніях є велика



різниця, по US1.CVGW та по US1.EVR. Якщо брати до уваги дані за третій період, то ми бачимо, що він є зовсім інший.

Отже, можна зробити висновок, що оновлювати дані при використанні моделі Марковіца потрібно достатньо часто, тому що для нестійкого ринку, структура оптимального портфеля швидко змінюється.

## Висновок

У даній роботі досліджуючи оптимальний фондовий портфель з метою вивчення його поведінки у часі я познайомилася із основними поняттями фондового ринку, такими як цінні папери, портфель цінних паперів, характеристики цінних паперів, дохідність та ризик портфелю, ефективна множина, пряма та обернена задачі Марковіца. Я опанувала методику чисельної оптимізації портфелю цінних паперів у середовищі Excel.

На основі реальних даних мною проведено порівняння структури портфелів, котрі оптимальні у різні проміжки часу. Як і слід очікувати, при виборі близьких проміжків часу за розрахункові, структура оптимальних портфелів є близькою; якщо ж дані для розрахунку вибирають за суттєво відмінні проміжки часу, то структура портфеля може докорінно змінитися.

Важливим чинником, котрий впливає на швидкість зміни структури портфелю є поведінка ринку, що легко простежується на основі даних про котирування акцій, котрі враховують при розрахунку характеристик портфелю.

У якості міри, що дозволяє оцінювати чисельно зміну структури портфелю, можна використати лінійну функцію від скалярного добутку векторів, котрі представляють структуру портфелів. Критерій, який варто застосовувати для прийняття рішення про переформування портфелю, повинен також враховувати потенційну зміну доходності та ризику нового портфелю порівняно із попереднім.

## Список використаної літератури

1. Цінні папери //Словник фінансово-правових термінів / за заг. ред. д. ю.н., проф. Л. К. Воронової. – 2-ге вид., переробл. і доповн. – К.: Алерта, 2011–558 с.
2. Цінні папери та їх види / [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://buklib.net/books/28943/>
3. Шклярчук С.Г. Фондові портфелі. Теорія та практика / К.: Нора-принт, 2000;
4. Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1997
5. Савчук В. П., Дудка В. Оптимізація фондового портфелю [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.management.com.ua/finance/fin013.html>.
6. Шклярчук С.Г. Фондові портфелі. Теорія та практика / К.: Нора-принт, 2000
7. Пересада А.А., Шувченко О.Г. Портфельне інвестування. – С. 318–328
8. База даних ринкових досліджень інвестиційної компанії Finam.ru : [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.finam.ru/analysis/export/default.asp>.