Міністерство освіти та науки України

Львівський національний університет імені Івана Франка

Механіко-математичний факультет

Кафедра математичної економіки, економетрики, фінансової та актуарної математики

Магістерська кваліфікаційна робота

Властивості вибіркової оцінки Value-at-Risk портфеля з найменшою дисперсією

Виконала

студентка групи МТФ – 51

спеціальності 111 – Актуарна

та фінансова математика

Лемко Катерина

Науковий керівник

д. ф.-м. н., проф. Заболоцький М. В.

Львів – 2021

Вступ

Поняття «ризик» не має єдиного строгого означення у фінансовій математиці. Проте, інтуїтивно зрозуміло, що щоб не вкладалося в це поняття, інвестиції, які при тому ж рівні дохідності мають менший показник ризику є кращими. Загалом, найкращою інвестицією є та, ризик якої є найменшим, а рівень дохідності – найбільшим серед всіх альтернатив. Очевидно, що існування, навіть в теорії, такої інвестиції викликає питання, оскільки зі зростанням дохідності, як правило, зростає і ризик. Тому при виборі раціональної інвестиції, чи інакше кажучи, раціонального розміщення коштів, відшукується певний баланс між цими показниками. Наприклад, пошук інвестиційної можливості з мінімальним ризиком при заданому рівні дохідності. Виявляється, що вирішення цієї проблеми досягається за допомогою розподілу коштів між різними фінансовими активами. Цей процес називається диверсифікацією, а результатом диверсифікації є портфель. Ми розглядатимемо портфель фінансових активів та досліджуватимемо властивості його певних характеристик. Виникає питання, що ми будемо розуміти під поняттями «рівень дохідності» та «ризик». Зрозуміло, що основним показником якості того чи іншого портфеля фінансових активів є його дохідність, тобто відносна зміна ціни між двома послідовними періодами. Чим більшою є ця величина тим кращим є портфель. Причому в цьому випадку ми можемо не звертати увагу на ризик, оскільки ми оперуємо абсолютним показником. Проте, загалом неможливо точно знати ціну портфеля фінансових активів у наступному періоді. На цю величину впливає багато різних факторів, визначити всі ці фактори неможливо. Причому навіть якщо можна було б визначити всю множину факторів, що впливають на ціну портфеля фінансових активів, то це б все-одно не дозволило визначити точну ціну портфеля, оскільки, по-перше, невідомим є функціональний вигляд залежності між ціною портфеля та факторами впливу, а по-друге, невідомим є функціональний вигляд залежності між різними факторами впливу. Тому ціну фінансового активу, його дохідність, як функцію від ціни, а також дохідність портфеля фінансових активів розглядають як випадкову величину. За такого підходу обидві вищенаведені характеристики портфеля визначаються через певні параметри випадкової величини. Зокрема, майбутній рівень дохідності оцінюють як математичне сподівання дохідності портфеля та називають очікуваною дохідністю. Загалом це загальноприйнята практика, яка не викликає серйозних застережень. Натомість визначення ризику портфеля фінансових активів, навіть у термінах параметрів випадкової величини не є єдиним. Так, наприклад, одним з перших розглянутих показників ризику була дисперсія дохідності портфеля фінансових активів. Цей показник слугує мірою розсіювання значень випадкової величини відносно математичного сподівання. Тобто, за такого визначення ризику, чим більшою є міра розсіювання значень дохідності відносно сподіваної дохідності тим ризиковішим є портфель. Зрозуміло, що з теоретичної точки зору такий вибір міри ризику є цілком зрозумілим, проте на практиці він зазнає критики через його неоднозначну інтерпретацію. Тому було запропоновано використати за міру ризику показник Value-at-Risk (надалі VaR), що вказує на мінімальні втрати за певної імовірності (рівень довіри до VaR). З точки зору фінансової математики в цьому випадку йдеться про квантиль розподілу дохідності портфеля фінансових активів. Такий підхід є ближчим до практики та, попри критику, на сьогодні є одним з найвідоміших методів оцінки ризику портфеля фінансових активів. Зазначимо, що серед методів вибору раціональної структури портфеля важливу роль відіграють методи мінімізації ризику. Використовуючи ці методи та обидві згадані міри ризику ми отримаємо портфель з найменшою дисперсією та портфель з найменшим рівнем VaR. Зауважимо, що портфель з найменшою дисперсією є особливо популярним серед науковців теорії портфеля та, разом з цим, може розглядатися як портфель з найменшим рівнем VaR при рівні довіри, що дорівнює 1. Тобто за такої інтерпретації портфеля з найменшою дисперсією ми нічого не можемо сказати про його VaR. Натомість цікавим є питання дослідження показника VaR портфеля з найменшою дисперсією. Результатом цього дослідження, зокрема, буде тест на істотність різниці портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR за певного рівня довіри та портфеля з найменшою дисперсією. Це слугуватиме додатковим відносним показником ризиковості портфеля з найменшим рівнем VaR.

Метою даної роботи є дослідження властивостей показника VaR портфеля з найменшою дисперсією.

Для досягнення мети дослідження поставлено наступні завдання:

1. Ознайомитися з теорією портфеля та основними методами вибору раціональної структури портфеля.

2. Опрацювати літературу, що стосується дослідження статистичних властивостей оцінок ваг та характеристик основних портфелів з раціональною структурою.

3. Дослідити асимптотичний розподіл вибіркової оцінки VaR портфеля з найменшою дисперсією за припущення, що дохідності активів, які включені у портфель поводяться як нормально розподілені незалежні в часі випадкові величини.

4. Побудувати інтервал довіри для VaR портфеля з найменшою дисперсією та на основі історичних даних протестувати за якого рівня довіри VaR портфелів з найменшою дисперсією та з найменшим рівнем VaR істотно не відрізнятимуться.

5. На основі імітаційного моделювання, дослідити швидкість збіжності емпіричних розподілів оцінки VaR портфеля з найменшою дисперсією до знайденого асимптотичного у випадку нормально розподілених і незалежних в часі дохідностей активів включених у портфель.

6. Узагальнити отримані результати на випадок еліптично розподілених і незалежних в часі дохідностей активів включених у портфель.

1. Портфелі фінансових активів з найменшою дисперсією та найменшим рівнем VaR.

Даний розділ присвячений опису методів вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі мінімізації дисперсії та VaR, методу оцінювання характеристик портфелів з найменшою дисперсією та з найменшим рівнем VaR, властивостей побудованих оцінок.

Позначимо P_t ціна фінансового активу в момент часу t. Визначимо дохідність цього активу в момент часу t наступним чином

$$X_t = 100 \ln(P_t / P_{t-1}). \tag{1}$$

Дохідність визначена за правилом (1) називається неперервна чи логарифмічна дохідність. Властивості цієї дохідності можна знайти, наприклад, в [1, с. 7-15]. Зазначимо, що так визначена дохідність більше використовується в теоретичних дослідженнях. Натомість в практичних дослідженнях частіше можна зустріти просту дохідність. Означення, основні властивості простої дохідності, а також порівняння з неперервною дохідністю можна знайти в[2, с. 5-12]-[3, с. 18-20]. Ми будемо використовувати неперервну дохідність, яку надалі називатимемо дохідністю.

Припустимо, що ми формуємо портфель на основі k активів. Позначимо $\mathbf{X}_t = (X_1, X_2, \ldots, X_k)'$ вектор дохідностей цих активів в момент часу t, а вектор часток коштів вкладених у кожен з активів $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k)'$ назвемо портфелем фінансових активів. Зазначимо, що сума елементів вектора $\mathbf{w}$ дорівнює одиниці. За таких позначень дохідність портфеля в момент часу t з вагами $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k)'$ визначаємо як зважену відносно вектора $\mathbf{w}$ суму дохідностей активів, включених у портфель, тобто

$$X_{\mathrm{w}}(t) = \sum_{i=1}^{k} w_i X_{it} \, . \tag{2}$$

Як зазначено вище, дохідність портфеля є випадковою величиною, оскільки випадковими величинами є дохідності складових портфеля. Тому при оцінці якості портфеля керуються певними параметрами його дохідності (2). З теорії ймовірності та математичною статистики відомо, що одними з основних характеристик випадкової величини є її математичне сподівання та дисперсія. Перенісши ці характеристики на портфель, отримаємо

сподівана дохідність портфеля: $R_{\mathbf{w}}(t)=\mathrm{M}(X_{\mathbf{w}}(t))$,

дисперсія (ризик) портфеля: $V_{\mathbf{w}}(t)=\mathrm{D}(X_{\mathbf{w}}(t))$,

тобто серед множини всіх портфелів він повинен мати найвищу сподівану дохідність та найменшу дисперсію в певний момент часу t. Зауважимо, що середнє значення та дисперсія дохідності портфеля не обов'язково є незалежними від часу. Надалі ми використаємо припущення про поведінку випадкового вектора $\mathbf{X}_t$ за якої ці характеристики не залежатимуть від часу, але в загальному випадку потрібно враховувати залежність від часу параметрів розподілу випадкового вектора $\mathbf{X}_t$. Зрозуміло, що існування такого портфеля викликає певні запитання. Тому вибір раціональної структури портфеля фінансових активів здійснюють на основі дещо інших критеріїв.

Вперше питання вибору раціональної структури портфеля з наукової точки зору було розглянуто в роботі Марковіца [4]. В цій роботі запропоновано формувати портфель на основі одного з двох наступних критеріїв

$$R_{\mathbf{w}}(t) \to \max, \text{ за умови } V_{\mathbf{w}}(t)= V_0,\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1, \tag{3}$$

$$V_{\mathbf{w}}(t) \to \min, \text{ за умови } R_{\mathbf{w}}(t)= R_0,\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \tag{4}$$

Тобто, запропоновано вибирати портфель з найбільшою сподіваною дохідністю серед портфелів з однаковим ризиком (оптимізаційна задача (3)), чи портфель з найменшим ризиком серед портфелів з однаковою сподіваною дохідністю (оптимізаційна задача (4)). В [4] також доведено, що існують такі значення V_0 та R_0 за яких розв'язки задач (3)-(4) співпадатимуть. Змінюючи значення V_0 в оптимізаційній задачі (3), чи R_0 в оптимізаційній задачі (4) від найменшого можливого до $+\infty$ можна побудувати множину портфелів з раціональною за Марковіцем структурою. Ця множина називається ефективною множиною, а портфелі, які їй належать – ефективними за Марковіцем. З означення ефективної множини випливає питання, які значення для V_0 та R_0 є найменшими. Їх ми можемо отримати з задачі безумовної відносно сподіваної дохідності мінімізації дисперсії портфеля. Портфель зі структурою отриманою з цієї задачі оптимізації називається портфелем з найменшою дисперсією. Для того, щоб більш детально розглянути цей портфель необхідно ввести наступні припущення та позначення.

Позначимо вектор середніх випадкового вектора $\mathbf{X}_t$ в момент часу t через $\boldsymbol{\mu}_t=(\mu_{1t}, \mu_{2t},..., \mu_{kt})'$, а матрицю коваріацій

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \begin{pmatrix} \sigma_{1t}^2 & \sigma_{12t} & \cdots & \sigma_{1kt} \\ \sigma_{12t} & \sigma_{2t}^2 & \cdots & \sigma_{2kt} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{1kt} & \sigma_{2kt} & \cdots & \sigma_{kt}^2 \end{pmatrix}.$$

Припущення 1. Припустимо, що випадковий вектор $\mathbf{X}_t$ поводиться як слабко стаціонарний процес, тобто його математичне сподівання та коваріації не залежать від часу, а коваріації залежать лише від зміщення h.

За припущення 1 та з введених позначень, можемо перевизначити сподівану дохідність портфеля та його дисперсію наступним чином

$$\text{сподівана дохідність портфеля: } R_{\mathbf{w}}=\mathrm{M}(X_{\mathbf{w}}(t))=\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}=\sum_{i=1}^{k} w_i \mu_i \,,$$

$$\text{дисперсія (ризик) портфеля: } V_{\mathbf{w}}=\mathrm{D}(X_{\mathbf{w}}(t))=\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sigma_{ij} w_i w_j \,.$$

Оптимізаційні задачі (3)-(4) набудуть вигляду

$$R_{\mathbf{w}} \to \max, \text{ за умови } V_{\mathbf{w}}= V_0,\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1, \tag{5}$$

$$V_{\mathbf{w}} \to \min, \text{ за умови } R_{\mathbf{w}}= R_0,\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \tag{6}$$

Зауважимо, що з припущення 1 також випливає незалежність розв'язку задач (5)-(6) від часу, тобто раціональна структура портфеля фінансових активів в цьому випадку залежатиме лише від вибраних значень V_0 чи R_0 та параметрів розподілу випадкового вектора $\mathbf{X}_t$ $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$.

Повернемося тепер до вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі безумовної відносно сподіваної дохідності мінімізації дисперсії портфеля

$$V_{\mathbf{w}}=\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}\rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \tag{7}$$

Позначимо 1 – k-вимірний вектор всі елементи якого однакові і дорівнюють 1. Тоді розв'язок задачі (7) може бути записаний у наступному вигляді.

$$\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \tag{8}$$

Портфель фінансових активів зі структурою $\mathbf{w}_{GMV}$ заданою у (8) називається портфелем з найменшою дисперсією. Крім того, сподівана дохідність і дисперсія цього портфеля є найменшими серед множини ефективних за Марковіцем портфелів та в наших позначеннях мають вигляд

$$R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \text{ – сподівана дохідність,} \tag{9}$$

$$V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \text{ – дисперсія.} \tag{10}$$

Портфель фінансових активів з найменшою дисперсією та його характеристики відіграють важливу роль в теорії портфеля. Як показано в [5], ефективна множина портфелів у просторі сподівана дохідність-дисперсія є верхньою віткою параболи, причому вершиною цієї параболи є портфель з найменшою дисперсією. Тому і характеристики портфеля з найменшою дисперсією разом з параметром s = $\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$, де $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$, визначають ефективну множину портфелів [6].

Описаному вище методу Марковіца вибору раціональної структури портфеля фінансових активів притаманні певні недоліки. Першим недоліком є те, що вибір структури портфеля відбувається лише за одною його характеристикою, в той час як інша є фіксована. Другий недолік полягає у виборі міри ризику, а саме – дисперсії.

Для вирішення першого недоліку запропоновано цілий ряд модифікацій підходу Марковіца до вибору раціональної структури портфеля фінансових активів. Розглянемо коротко дві з них, а саме: максимізація сподіваної корисності портфеля та максимізація відношення Шарпа.

Відношення Шарпа визначається як відношення сподіваної дохідності портфеля до кореня з дисперсії портфеля. Іншими словами, відношення Шарпа визначається величину сподіваної дохідності на одиницю ризику у портфелі. Очевидно, що чим більше значення цього показника для портфеля тим кращим є цей портфель. Відношення Шарпа є надзвичайно популярною мірою якості портфеля фінансових активів [3, ст. 49]. Зважаючи на це, природно виникає метод вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі максимізації відношення Шарпа портфеля. Цей метод, а також властивості ваг та характеристик цього портфеля розглянуто в [7-10]. Зауважимо, що портфель фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа належить ефективній за Марковіцем множині портфелів.

Другий згаданий вище метод вибору раціональної структури портфеля фінансових активів грунтується на понятті функції корисності. Існує декілька визначень функції корисності. Найбільш розповсюдженими є квадратична та експоненційна функції корисності. В [11] порівняно портфелі отримані на основі максимізації різних функцій корисності, натомість у [12] доведено математичну еквівалентність портфелів зі структурами отриманими на основі максимізації квадратичної та експоненційної функцій корисності та зазначено, що стохастично ці портфелі не є еквівалентними. Зауважимо, що для всіх функцій корисності притаманною є залежність від коефіцієнта, що описує ставлення до ризику. В багатьох працях припускається, що цей коефіцієнт є відомий та не залежить від часу. З іншого боку дане припущення зазнає нищівної критики. Так в [13] обгрунтовано необхідність врахування як об'єктивних так і суб'єктивних факторів при оцінюванні значення коефіцієнта, що описує ставлення до ризику. В [14]-[15] наведено способи оцінювання цього коефіцієнта на основі характеристик сформованого портфеля та на основі активів, які включаються в портфель. Взаємозв'язок між коефіцієнтами, що описують ставлення інвестора до ризику у випадку квадратичної та експоненційної функцій корисності знайдено у [16]. Зауважимо, що змінюючи значення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику від 0 до $+\infty$ та максимізуючи відповідну функцію корисності ми можемо отримати всі портфелі ефективної за Марковіцем множини. Причому портфель з найменшою дисперсією відповідатиме значенню коефіцієнта, що описує ставлення до ризику, що дорівнює $+\infty$. Отже можемо зробити висновок, що метод Марковіца вибору раціональної структури портфеля фінансових активів є еквівалентний методу максимізації корисності портфеля.

Відносно вибору дисперсії як міри ризику портфеля, то з теоретичної точки зору, такий вибір є цілком обґрунтований. Проте з практичної точки зору, такий метод вимірювання ризику має ряд недоліків. По-перше, дисперсія відображає двостороннє відхилення від сподіваної дохідності, тобто зростання ймовірності, що дохідність портфеля прийматиме значення більші за математичне сподівання призведе до зростання ризику. По-друга, дисперсія не враховує суб’єктивної складової ризику. Тому на практиці частіше використовуються інші міри ризику і однією з найпоширеніших є Value-at-Risk. Дана міра ризику відображає мінімальні втрати з певною імовірністю, тобто по-суті є квантиллю розподілу дохідності портфеля. Формально VaR для дохідності X_t визначається наступним чином

$$VaR_\alpha(X_t) = -\sup(x \in \mathbb{R} : P\{X_t < x\} \leq 1-\alpha),$$

де α – рівень довіри до VaR. За припущення 1 щодо слабкої стаціонарності вектора дохідностей активів, включених у портфель, $\mathbf{X}_t$ випливає, що значення VaR не залежатиме від часу. На відміну від дисперсії, обчислення VaR залежить від розподілу випадкового вектора $\mathbf{X}_t$ тому ми використаємо наступне припущення.

Припущення 2. Нехай випадковий вектор дохідностей активів, включених у портфель, $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 1 та поводиться як k-вимірна нормально розподілена випадкова величина з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$.

За припущення 2 VaR портфеля фінансових активів за рівня довіри α у наших позначеннях може бути обчислене наступним чином:

$$VaR_\alpha(\mathbf{w}) = z_\alpha\sqrt{V_{\mathrm{w}}} - R_{\mathrm{w}} = z_\alpha\sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}} - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu},$$

де z_α – α квантиль стандартного нормального розподілу. Очевидно, що чим меншим є значення VaR портфеля фінансових активів тим кращим є портфель, тому природно виникає наступний метод вибору раціональної структури портфеля фінансових активів

$$VaR_\alpha(\mathbf{w}) = z_\alpha\sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}} - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \to \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \quad (11)$$

Розв’язок задачі (11) може бути записаний у вигляді [17]-[18]

$$\text{ваги портфеля} - \mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \quad (12)$$

$$\text{сподівана дохідність} - R_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\,\boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\sqrt{V_{GMV}}, \quad (13)$$

$$\text{дисперсія} - V_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\,\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{VaR} = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s}V_{GMV}, \quad (14)$$

$$VaR \text{ за рівня довіри } \alpha - M_{VaR} = \sqrt{z_\alpha^2 - s}\sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}, \quad (15)$$

Як і у випадку портфеля з максимальною сподіваною квадратичною корисністю, змінюючи значення рівня довіри від мінімально можливого до 1, отримаємо ефективну за Марковіцем множину портфелів. Цікаво, що портфель з найменшою дисперсією відповідає портфелю з найменшим рівнем VaR при рівні довіри, що дорівнює 1. Тобто, розглядаючи портфель з найменшою дисперсією як портфель з найменшим рівнем VaR, ми нічого не можемо сказати про його VaR. Ми, натомість, з означення VaR визначимо цей показник для портфеля з найменшою дисперсією. За заданого рівня довіри для VaR – α, отримаємо

$$VaR_\alpha(\mathbf{w}_{GMV}) = z_\alpha\sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV} = z_\alpha\sqrt{\frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}} - \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}. \quad (16)$$

Зауважимо, що всі вищенаведені результати залежать від параметрів розподілу вектора дохідностей активів, включених у портфель, $\mathbf{X}_t$ – $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Ці параметри на практиці є невідомими. Тому ми у своїх дослідженнях повинні використати їхні оцінки. Ми використаємо вибіркові оцінки цих параметрів, оскільки такі оцінки є найпопулярнішими на практиці на сьогодні. Припустимо, що нам задано вибірку попередніх значень вектора дохідностей активів, включених у портфель, $\mathbf{X}_t$ обсягом n – $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Вибіркові оцінки параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ визначаються наступним чином

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i \, , \; \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' . \quad (17)$$

Підставляючи оцінки (17) у (8)-(10), отримаємо оцінки ваг та характеристик портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією, у (12)-(15) – оцінки ваг та характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR, у (16) – оцінку VaR портфеля з найменшою дисперсією. Для позначення оцінок, використаємо символ $\hat{\cdot}$. Отже, оцінка VaR портфеля з найменшою дисперсією матиме вигляд

$$\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV}) = z_\alpha\sqrt{\hat{V}_{GMV}} - \hat{R}_{GMV} = z_\alpha\sqrt{\frac{1}{\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}} - \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}. \quad (18)$$

Зважаючи на те, що оцінки (17) є випадковими величинами [19, с. 359], то і всі інші побудовані нами оцінки теж будуть випадковими величинами і, зокрема, оцінка VaR портфеля з найменшою дисперсією (18). Тому для отримання коректних результатів необхідно дослідити поведінку випадкової величини (18). У наступному розділі, за припущення 2, ми знайдемо точний та асимптотичний розподіли оцінки VaR портфеля з найменшою дисперсією, на основі асимптотичного розподілу побудуємо інтервал довіри для VaR портфеля з найменшою дисперсією та дослідимо за яких рівнів довіри VaR портфелів з найменшим рівнем VaR істотно не відрізняється від VaR портфеля з найменшою дисперсією. Також ми послабимо умови накладені на вектор дохідностей активів у припущенні 2, а саме, знайдемо асимптотичний розподіл оцінки VaR портфеля з найменшою дисперсією за припущення, що вектор дохідностей активів поводиться як багатовимірна еліптично розподілена випадкова величина.

2. Розподіл вибіркової оцінки VaR портфеля з найменшою дисперсією

Знайдемо спочатку точний розподіл вибіркової оцінки VaR портфеля з найменшою дисперсією за виконання припущення 2 щодо поведінки вектора дохідностей активів включених у портфель. Використаємо алгоритм подібний до алгоритму дослідження точного розподілу вибіркових оцінок характеристик портфеля з найменшим рівнем VaR, наведеного у [18]. Тобто, спочатку знайдемо стохастичне представлення оцінки (18), на його основі знайдемо умовний розподіл цієї оцінки, який потім узагальнимо до безумовного. Для цього нам потрібні дві наступні леми.

Лема 1 ([6]). *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів і нехай вектор дохідностей* $\mathbf{X}_t$ *цих активів задовольняє припущення 2. Нехай* $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, …, $\mathbf{X}_n$ *є незалежними реалізаціями* $\mathbf{X}_t$ *і* $n>k$*. Тоді:*

1. $\hat{V}_{GMV}$ незалежна від $\left(\hat{R}_{GMV}, \hat{s}\right)$.

2. $(n-1)\hat{V}_{GMV} \big/ V_{GMV} \sim \chi^2_{n-k}$

3. $\left(n(n-k+1) \big/ (n-1)(k-1) \right) \hat{s} \sim F_{k-1,\, n-k+1,\, ns}$

4. $\hat{R}_{GMV} \mid \hat{s} = y \sim N\left(R_{GMV}, \left(\left(1 + n/(n-1)y\right) \big/ n \right) V_{GMV} \right)$

Лема 2 ([18]). *Нехай випадкові величини* ξ_1 *та* ξ_2 *є незалежні,* $\xi_1 \sim N(0,1)$ *та* $\xi_2 \sim \chi^2_{n-k}$*. Тоді для довільних дійсних чисел a,* b_1 *та довільного додатного дійсного числа* b_2*, густина випадкової величини* $\xi = a + b_1\xi_1 + b_2\sqrt{\xi_2}$ *має вигляд*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2^{\frac{m-2}{2}} b_2^m \Gamma(m/2)} \exp\left\{ -\frac{(x-a)^2}{2(b_1^2 + b_2^2)} \right\} M(x; m, a, b_1, b_2),$$

де

$$M(x; m, a, b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b_1|} \int_0^\infty t^{m-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2}\right)\left(t - (x-a)\frac{b_2^2}{b_2^2 + b_1^2}\right)^2 \right\} dt .$$

Лема 3 ([18]). *Нехай X та Y є абсолютно неперервні випадкові величини з густинами* $f_X(\cdot)$*та* $f_Y(\cdot)$ *відповідно. Тоді:*

$$f_{X|Y\le y}(x\,|\,y)=\frac{1}{F_Y(y)}\int_{-\infty}^{y} f_{X|Y=t}(x\,|\,t)\,f_Y(t)dt\,,$$

де $F_Y(\cdot)$ є функцією розподілу випадкової величини Y.

З леми 1 отримуємо стохастичне представлення випадкової величини (18).

Твердження 1. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо* $\mathbf{X}_t$ *– k-вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу t. Припустимо, що* $\mathbf{X}_t$ *задовольняє припущення 2. Нехай* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ *є незалежними реалізаціями* $\mathbf{X}_t$ *і n>k. Тоді*

$$\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV})|s=s^* \overset{d}{=} -R_{GMV}-\sqrt{\frac{1+n/(n-1)s^*}{n}V_{GMV}}\,\xi_1+z_\alpha\sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}\sqrt{\xi_2}$$

де символ $\overset{d}{=}$ *означає рівність за розподілом, а випадкові величини* $\xi_1 \sim N(0,1)$ *та* $\xi_2 \sim \chi^2_{n-k}$ *є незалежними.*

З твердження 1 та леми 2 можемо знайти густину розподілу випадкової величини $\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV})|s=s^*$. Сформулюємо цей результат у вигляді твердження.

Твердження 2. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо* $\mathbf{X}_t$ *– k-вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу t. Припустимо, що* $\mathbf{X}_t$ *задовольняє припущення 2. Нехай* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ *є незалежними реалізаціями* $\mathbf{X}_t$ *і n>k. Тоді*

$$f_{\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV})|s=s^*}(x|s=s^*)=\frac{1}{2^{\frac{n-k-2}{2}}a(\alpha)^{n-k}\Gamma((n-k)/2)}\exp\left\{-\frac{(x+R_{GMV})^2}{2(a(\alpha)^2+\tilde{s}^*)}\right\}\cdot$$

$$\cdot M(x;n-k,-R_{GMV},-\sqrt{\tilde{s}^*},a(\alpha)),$$

де

$$a(\alpha)=z_\alpha\sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}\,,\ \tilde{s}^*=\frac{1+n/(n-1)s^*}{n}V_{GMV}\,.$$

Тепер, з леми 3 та твердження 2, можемо знайти безумовну густину розподілу випадкової величини $\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV})$. Сформулюємо цей результат у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо* $\mathbf{X}_t$ *– k-вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується* *портфель в момент часу t. Припустимо, що $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями $\mathbf{X}_t$ і $n>k$. Тоді*

$$f_{\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV})}(x) = \int_0^{+\infty} f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right) f_{\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV})|s=s^*}(x|s=s^*)ds^*.$$

Зазначимо, що доведення тверджень 1-2 та теореми 2 є аналогічне до доведень теорем 1-3 у [18] і тому тут ми їх не наводимо. Зауважимо також, що густина вибіркової оцінки VaR портфеля з найменшою дисперсією залежить від невідомих параметрів R_{GMV}, V_{GMV}, s. Оскільки ми розглядаємо точний розподіл, то замінити ці параметри на їх вибіркові оцінки некоректно. Тому ми використаємо цей результат для дослідження швидкості збіжності точних розподілів до асимптотичного.

Наступним кроком нашого дослідження є аналіз асимптотичної поведінки вибіркової оцінки VaR портфеля з найменшою дисперсією. Нам необхідними будуть наступні дві леми.

Лема 4. (дельта-метод [20, с. 211]). *Нехай випадковий вектор $\mathbf{X}_n$ асимптотично нормально розподілений з середнім $\boldsymbol{\mu}$ та коваріаційною матрицею $c_n^2\boldsymbol{\Sigma}$, де $\boldsymbol{\Sigma}$ симетрична невідємно визначена матриця і $c_n \to 0$ при $n\to\infty$. Якщо $\mathbf{g}(\mathbf{X})=(g_1(\mathbf{X}),\ldots, g_m(\mathbf{X}))'$ відображення з $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$ таке, що всі $g_i(\cdot)$ неперервно диференційовані в околі $\boldsymbol{\mu}$, і якщо всі діагональні елементи матриці $\mathbf{D\Sigma D}'$ є ненульові, де $m\times k$ матриця складена з часткових похідних $(\partial g_i/\partial x_j)(\boldsymbol{\mu})$, то випадковий вектор $\mathbf{g}(\mathbf{X}_n)$ є асимптотично нормально розподіленим з середнім $\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})$ та коваріаційною матрицею $c_n^2\mathbf{D\Sigma D}'$.*

Лема 5. ([6]). *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо $\mathbf{X}_t$ – k-вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель в момент часу t. Припустимо, що $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями $\mathbf{X}_t$* і *$n>k$. Тоді*

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\hat{R}_{GMV}\\ \hat{V}_{GMV}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}R_{GMV}\\ V_{GMV}\end{pmatrix}\right) \xrightarrow{d} N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}V_{GMV}(1+s) & 0\\ 0 & 2V_{GMV}^2\end{pmatrix}\right),$$

де символ $\xrightarrow{d}$ означає збіжність за розподілом.

В наступній теоремі знайдено асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})-VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$, де $VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})$ точне значення VaR портфеля з найменшою дисперсією.

Теорема 2. *Нехай ми формуємо портфель з* k *фінансових активів. Позначимо* $\mathbf{X}_t$ – k*-вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу* t*. Припустимо, що* $\mathbf{X}_t$ *задовольняє припущення 2. Нехай* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ *є незалежними реалізаціями* $\mathbf{X}_t$ і $n>k$*. Тоді*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})-VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)\xrightarrow{d}N(0,\sigma^2_{\alpha,GMV}),$$

де

$$\sigma^2_{\alpha,GMV}=V_{GMV}(1+s)+z^2_{\alpha}V_{GMV}/2. \tag{19}$$

Доведення. Розглянемо VaR портфеля з найменшою дисперсією як функцію від R_{GMV} та V_{GMV}, тобто

$$VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})=f(R_{GMV},V_{GMV})=z_{\alpha}\sqrt{V_{GMV}}-R_{GMV}.$$

З твердження леми 5 випливає, що ми можемо використати твердження леми 4, тобто, що $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})-VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)\xrightarrow{d}N(0,\sigma^2_{\alpha,GMV})$, де

$$\sigma^2_{\alpha,GMV}=\left(\frac{\partial VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})}{\partial R_{GMV}},\frac{\partial VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})}{\partial V_{GMV}}\right)\begin{pmatrix}V_{GMV}(1+s) & 0\\ 0 & 2V^2_{GMV}\end{pmatrix}\left(\frac{\partial VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})}{\partial R_{GMV}},\frac{\partial VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})}{\partial V_{GMV}}\right)' \tag{20}$$

Маємо

$$\frac{\partial VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})}{\partial R_{GMV}}=\frac{\partial\left(z_{\alpha}\sqrt{V_{GMV}}-R_{GMV}\right)}{\partial R_{GMV}}=-1 \tag{21}$$

$$\frac{\partial VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})}{\partial V_{GMV}}=\frac{\partial\left(z_{\alpha}\sqrt{V_{GMV}}-R_{GMV}\right)}{\partial V_{GMV}}=\frac{z_{\alpha}}{2\sqrt{V_{GMV}}} \tag{22}$$

Підставивши (21)-(22) в (20), отримаємо твердження теореми.

Зауважимо, що як і у випадку точного розподілу, асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})-VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ залежить від невідомих параметрів V_{GMV}, s. Проте. на відміну від точного розподілу, у даному випадку коректною є заміна невідомих параметрів на їх вибіркові оцінки. Завдяки твердженню теореми 1.14 в [21, с. 8] в результаті такої заміни ми отримаємо консистентну оцінку асимптотичної дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_\alpha(\mathbf{w}_{GMV})\right)$.

Використаємо результати теореми 2 для побудови (1 – β) інтервалів довіри для VaR портфеля з найменшою дисперсією. Отримаємо

$$\left[\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV}) - \frac{\hat{\sigma}_{\alpha,GMV}}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\beta}{2}}, \widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV}) + \frac{\hat{\sigma}_{\alpha,GMV}}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2}\right]$$ – двосторонній інтервал,

$$\left[-\infty, \widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV}) + \frac{\hat{\sigma}_{\alpha,GMV}}{\sqrt{n}} z_{1-\beta}\right]$$– односторонній інтервал

Проаналізуємо отримані результати на прикладі даних про щоденні дохідності акцій компаній з переліку DAX, замінивши Siemens Energy на Beiersdorf AG (22.03.2021 компанію Beiersdorf AG в списку DAX було замінено на Siemens Energy), оскільки немає в наявності достатньо даних про дохідності акцій Siemens Energy (дані наявні лише з 23.09.2020), за період з 01.07.2019 по 30.06.2021 (504 спостереження). Використовуючи метод біжучого вікна шириною 250 спостережень зобразимо графічно (рис. 1-6) вибіркову оцінку VaR портфеля з найменшою дисперсією та межі двосторонніх 90 %, 95 % та 99 % інтервалів довіри. Також додамо на графіки значення VaR портфелів з найменшим рівнем VaR при рівнях довіри для VaR 0.9 та 0.95. Розглянемо шість різних портфелів складених з перших k = {5, 10, 15, 20, 25, 30} акцій з переліку DAX посортованого в алфавітному порядку: Allianz, BASF, Bayer, Beiersdorf, BMWST, ContinentalAG, Covestro, Daimler, DeliveryHero, DeutscheBankAG, DeutscheBoerse, DeutschePost, DeutscheTelekomAG, DeutscheWohnen, EONSE, FreseniusMedicalCare, FreseniusSE, Heidelbergcement, HenkelVZO, Infineon, LindePLC, Merck, MTUAero, MuenchRueckvers, RWEAGST, SAP, SiemensAG, VolkswagenVZO, Vonovia. Зазначимо, що VaR за рівня довіри 95 % портфеля з найменшою дисперсією відповідає VaR за трохи вищого рівня портфеля з найменшим рівнем VaR. Так, при k = 5, значення рівня довіри для VaR за якого VaR портфеля з найменшою дисперсією співпадає з VaR портфеля з найменшим рівнем VaR знаходиться в межах від 0,9500129 до 0,9506464; при k = 10 – від 0,950506 до 0,9516704; при k = 15 – від 0,9506561 до 0,952127; при k = 20 – від 0,9507952 до 0,9523237; при k = 25 – від 0,9509488 до 0,9526289; при k = 30 – від 0,9511303 до 0,9528951. З рис. 1-6 також бачимо, що всі інтервали довіри для

VaR портфеля з найменшою дисперсією повністю вкладаються в межі VaR за рівня довіри 90 % портфеля з найменшим рівнем VaR, VaR за рівня довіри 99 % портфеля з найменшим рівнем VaR

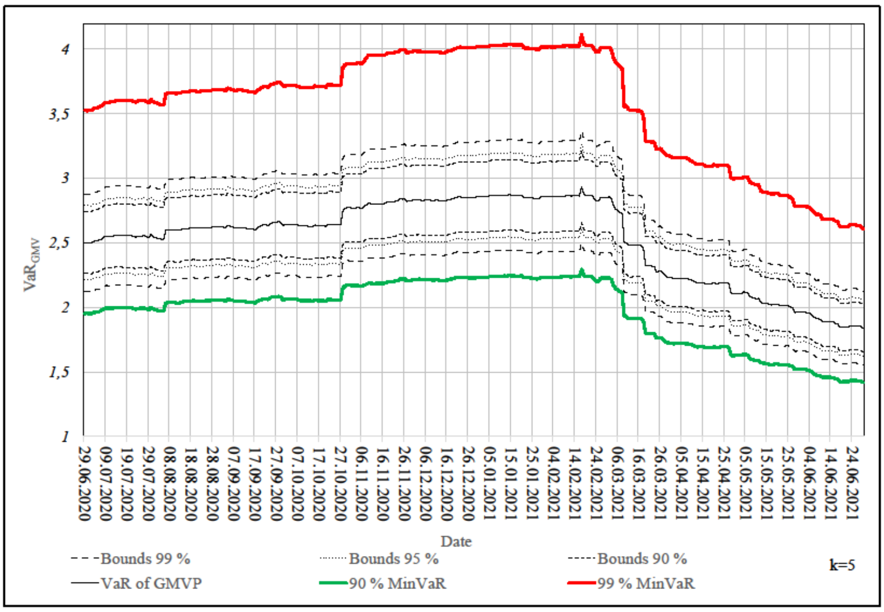

Рис. 1. Вибіркова оцінка VaR портфеля з найменшою дисперсією разом з межами довірчих 90 %, 95 % та 99 % інтервалів отриманих методом біжучого вікна шириною 250 днів на основі даних про дохідності перших 5 акції з переліку DAX посортованого в алфавітному порядку за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021 та вибіркові оцінки VaR за рівня довіри 90 % та 95 % портфеля з найменшим рівнем VaR.

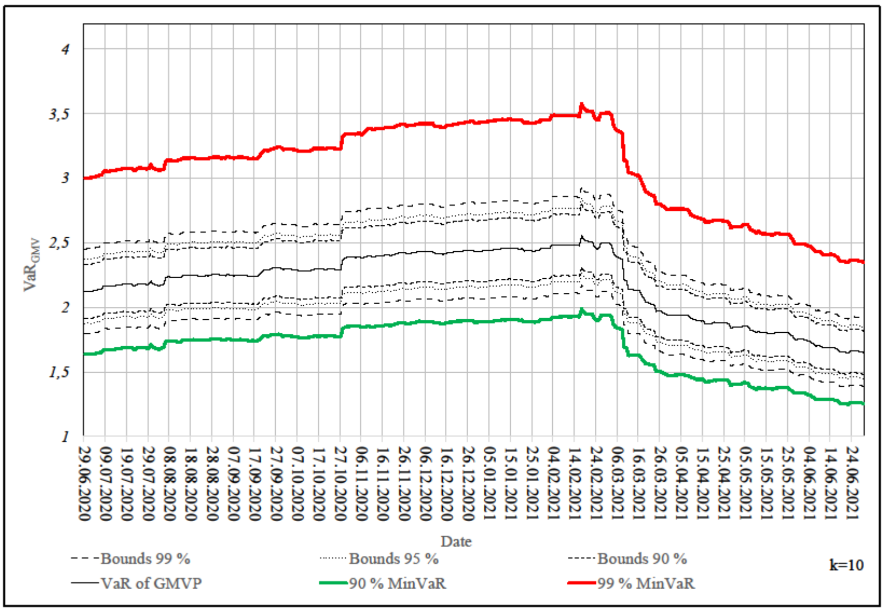

Рис. 2. Вибіркова оцінка VaR портфеля з найменшою дисперсією разом з межами довірчих 90 %, 95 % та 99 % інтервалів отриманих методом біжучого вікна шириною 250 днів на основі даних про дохідності перших 10 акції з переліку DAX посортованого в алфавітному порядку за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021 та вибіркові оцінки VaR за рівня довіри 90 % та 95 % портфеля з найменшим рівнем VaR.

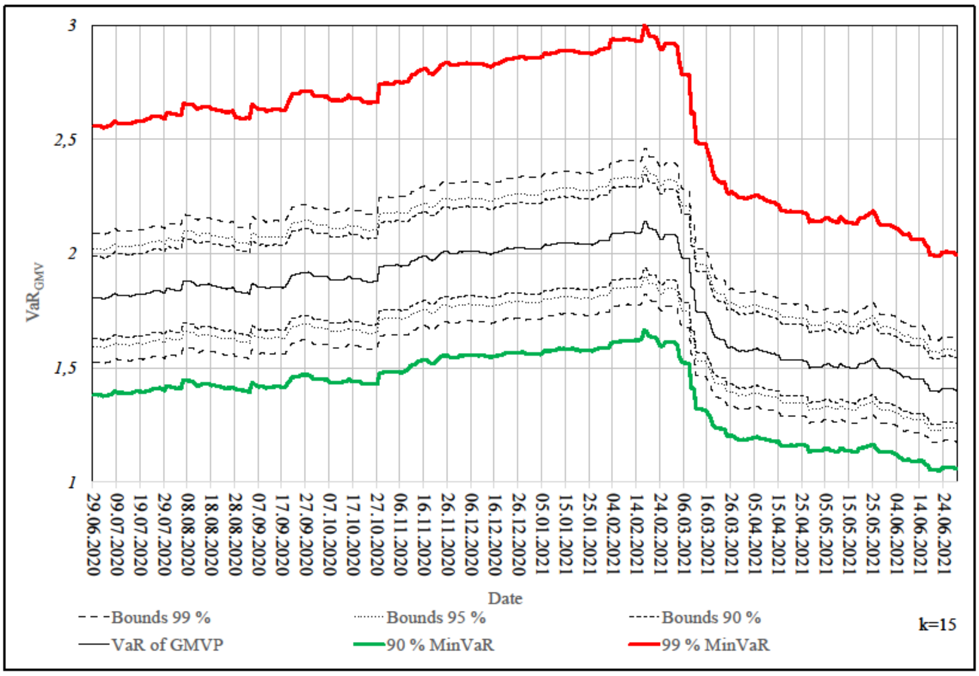

Рис. 3. Вибіркова оцінка VaR портфеля з найменшою дисперсією разом з межами довірчих 90 %, 95 % та 99 % інтервалів отриманих методом біжучого вікна шириною 250 днів на основі даних про дохідності перших 15 акції з переліку DAX посортованого в алфавітному порядку за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021 та вибіркові оцінки VaR за рівня довіри 90 % та 95 % портфеля з найменшим рівнем VaR.

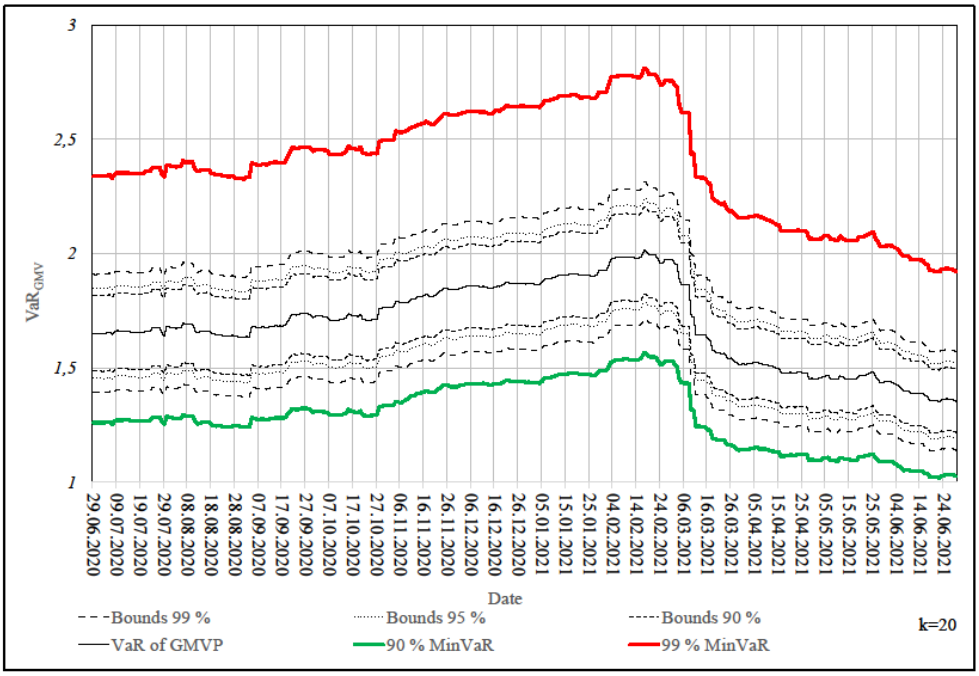

Рис. 4. Вибіркова оцінка VaR портфеля з найменшою дисперсією разом з межами довірчих 90 %, 95 % та 99 % інтервалів отриманих методом біжучого вікна шириною 250 днів на основі даних про дохідності перших 20 акції з переліку DAX посортованого в алфавітному порядку за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021 та вибіркові оцінки VaR за рівня довіри 90 % та 95 % портфеля з найменшим рівнем VaR.

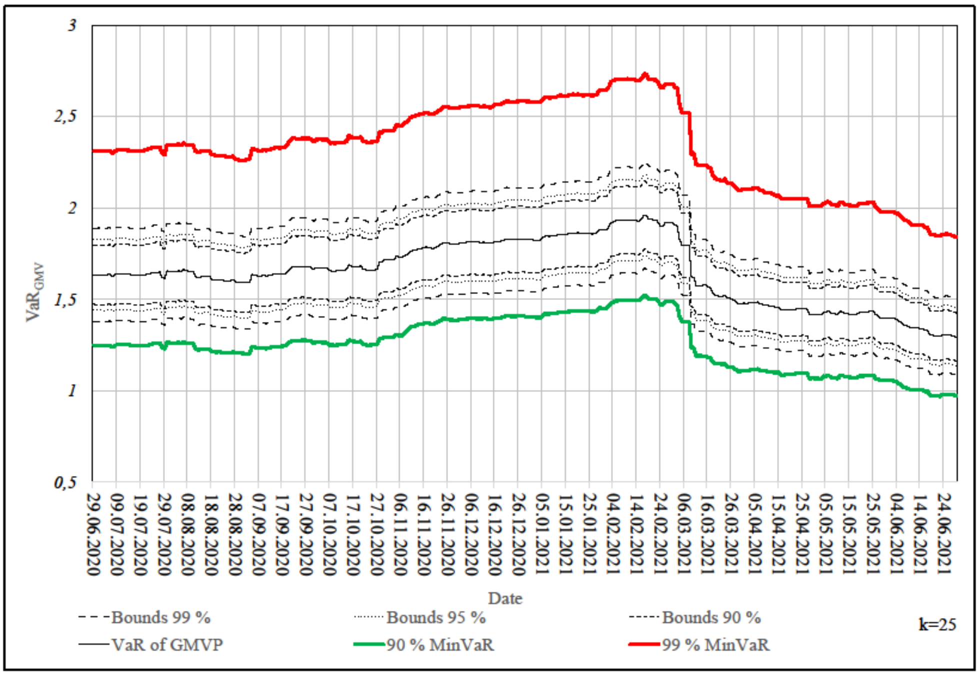

Рис. 5. Вибіркова оцінка VaR портфеля з найменшою дисперсією разом з межами довірчих 90 %, 95 % та 99 % інтервалів отриманих методом біжучого вікна шириною 250 днів на основі даних про дохідності перших 25 акції з переліку DAX посортованого в алфавітному порядку за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021 та вибіркові оцінки VaR за рівня довіри 90 % та 95 % портфеля з найменшим рівнем VaR.

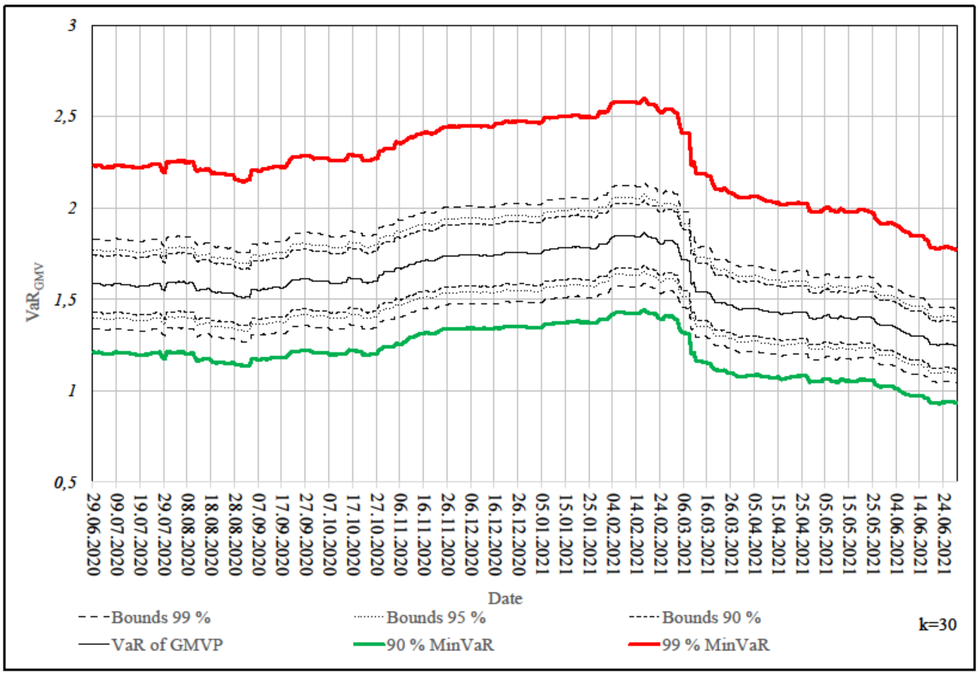

Рис. 6. Вибіркова оцінка VaR портфеля з найменшою дисперсією разом з межами довірчих 90 %, 95 % та 99 % інтервалів отриманих методом біжучого вікна шириною 250 днів на основі даних про дохідності всіх 30 акції з переліку DAX посортованого в алфавітному порядку за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2021 та вибіркові оцінки VaR за рівня довіри 90 % та 95 % портфеля з найменшим рівнем VaR.

Зауважимо, що використовуючи наступну лему може послабити припущення 2 до припущення 3, а саме

Припущення 3. Нехай випадковий вектор дохідностей активів, включених у портфель, $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 1 та поводиться як k-вимірна еліптично розподілена випадкова величина.

Наведемо означення багатовимірною еліптично розподіленої випадкової величини з [22]. k-вимірний випадковий вектор $\mathbf{Y}$ має багатовимірний еліптичний розподіл, якщо його характеристична функція має вигляд:

$$\mathrm{M}(\exp(i\mathbf{x}'\mathbf{Y}))=\exp(i\boldsymbol{\mu}'\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}) \text{ для } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^k,$$

де $\mathbf{D}=\boldsymbol{\Sigma}/\gamma^2$, $\gamma^2=(-2\psi'(0))$ та функція ψ називається характеристичним генератором еліптичного розподілу. Цей клас розподілів включає в себе, зокрема багатовимірний нормальний розподіл, багатовимірний t-розподіл та багатовимірний розподіл Лапласа. Наведемо лему з [23].

Лема 6. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо* $\mathbf{X}_t$ *– k-вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t. Припустимо, що вектор дохідностей* $\mathbf{X}_t$ *задовольняє припущення 3. Припустимо, що* $\boldsymbol{\Sigma}$ *є додатно визначена. Тоді при* $n\to\infty$

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\hat{R}_{GMV}\\ \hat{V}_{GMV}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}R_{GMV}\\ V_{GMV}\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{d}N\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}V_{GMV}(1+\lambda s) & 0\\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2\end{pmatrix}\right),$$

де $\lambda=\psi''(0)/(\psi'(0))^2$.

Використовуючи лему 4 та лему 6, аналогічно до доведення теореми 2, можемо довести наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо* $\mathbf{X}_t$ *– k-вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу t. Припустимо, що вектор дохідностей* $\mathbf{X}_t$ *задовольняє припущення 3. Нехай* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ *є незалежними реалізаціями* $\mathbf{X}_t$ і $n>k$. *Тоді*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV})-VaR_\alpha(\mathbf{w}_{GMV})\right)\xrightarrow{d}N(0,\sigma^2_{\alpha,GMV,el}),$$

де

$$\sigma^2_{\alpha,GMV,el}=V_{GMV}(1+\lambda s)+z_\alpha^2\lambda V_{GMV}/2.$$

3. Дослідження швидкості збіжності густин вибіркових оцінок VaR портфеля з найменшою дисперсією до асимптотичної густини.

Оскільки використання асимптотичних властивостей тих чи інших параметрів на практиці, хоча й є рекомендованим за певних умов [24], проте вимагає обережності. Важливим питанням в цьому випадку є обсяг вибірки історичних значень за якого досягатиметься достатнє наближення до асимптотичних результатів. Зрозуміло, що чим меншим є потрібний обсяг вибірки тим краще. Використаємо імітаційне моделювання для дослідження швидкості збіжності густин вибіркових оцінок VaR портфеля з найменшою дисперсією до асимптотичної густини. Як і в попередньому розділі розглянемо шість портфелів з $k = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ акцій з переліку DAX посортованого в алфавітному порядку. Припустимо, що вектор дохідностей активів, включених у портфель задовольняє припущення 2, тобто поводиться як багатовимірна нормально розподілена випадкова величина з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Припустимо, що значення параметрів є відомі. Для цього ми з історичних даних про щоденні дохідності акцій компаній з переліку DAX за період з 01.07.2019 по 30.06.2021 обчислимо відповідні вибіркові оцінки та приймемо їх за точні значення. Далі згенеруємо вибірку обсягу $n = \{250, 500, 1000, 2000\}$ з k-вимірного нормального розподілу з відповідними параметрами та на основі вибірки оцінимо VaR портфеля з найменшою дисперсією. Повторимо цю процедуру 100000 раз для кожного n і k та побудуємо оцінки функцій густин (емпіричні густини). Зобразимо графічно (рис. 7-12) емпіричні густини для різних значень n та фіксованого значення k разом з відповідною асимптотичною густиною. З графіків бачимо, що емпіричним густинам притаманне яскраво виражене зміщення, яке хоча й зменшується зі зростанням n, проте доволі повільно. В табл. 1 наведено емпіричні середні значення та дисперсії разом з відповідними асимптотичними значеннями. Бачимо, що емпіричні дисперсії є близькими до асимптотичного значення навіть при n=1000 та k=30 проте емпіричні середні збігаються до 0 дуже повільно (при n=1000 та k=30 емпіричне середнє становить –0.73, при точному значенні VaR портфеля з найменшою дисперсією, що дорівнює 1.537498).

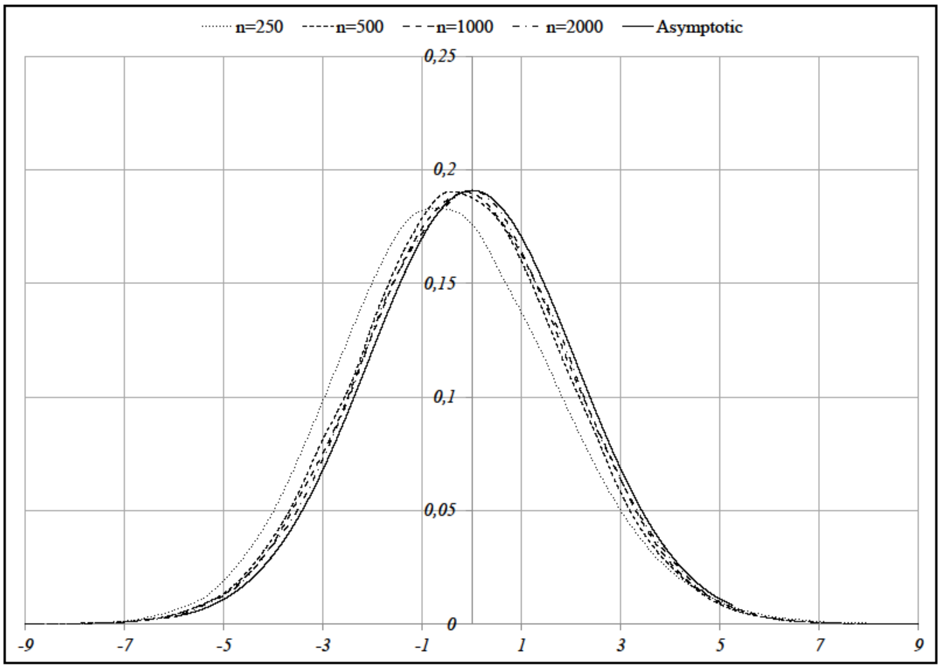

Рис. 7. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=5 перших акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки історичних значень n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

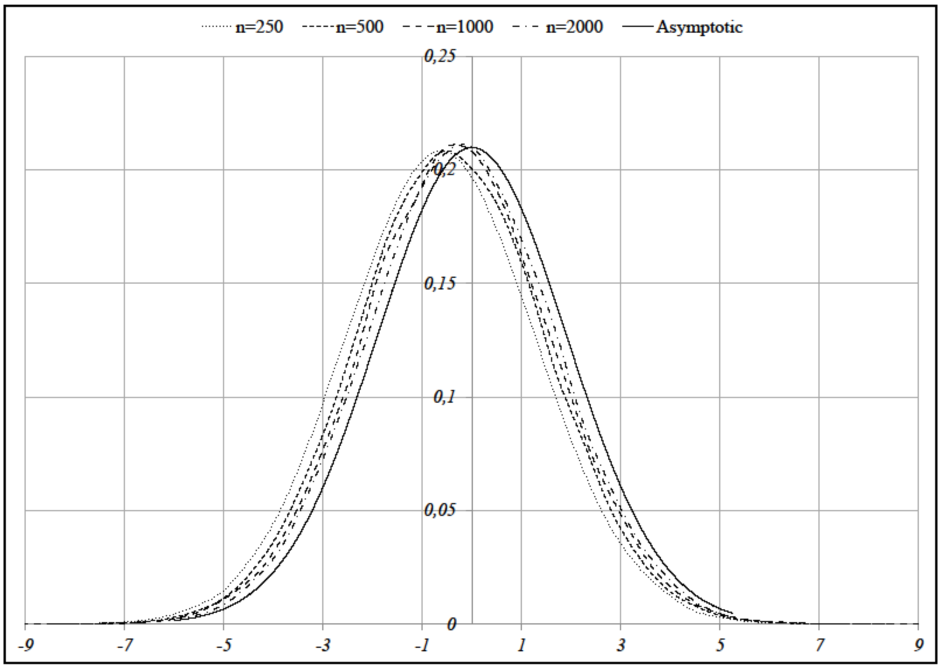

Рис. 8. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=10 перших акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки історичних значень n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

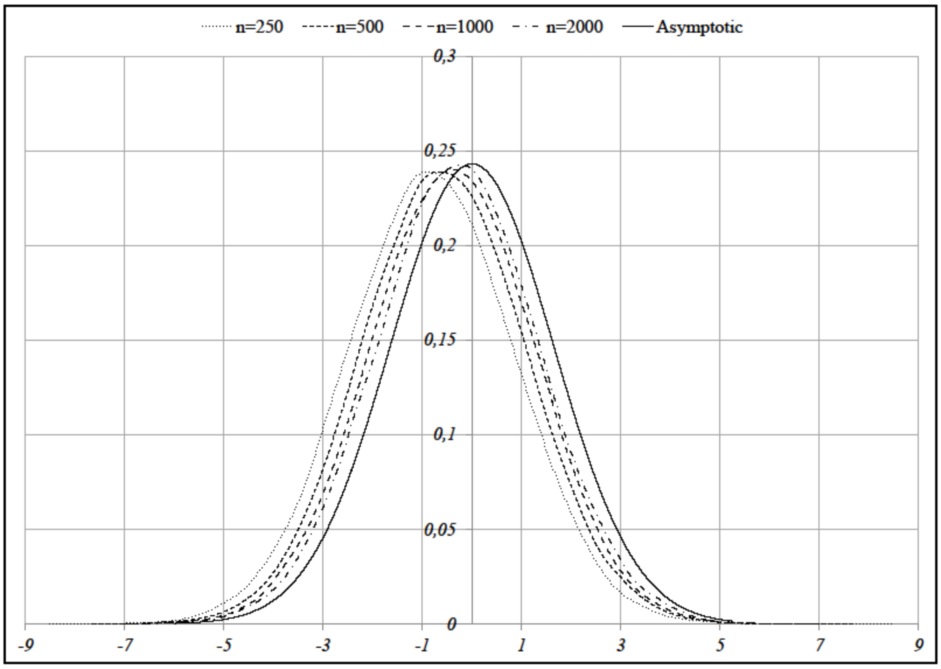

Рис. 9. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=15 перших акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки історичних значень n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

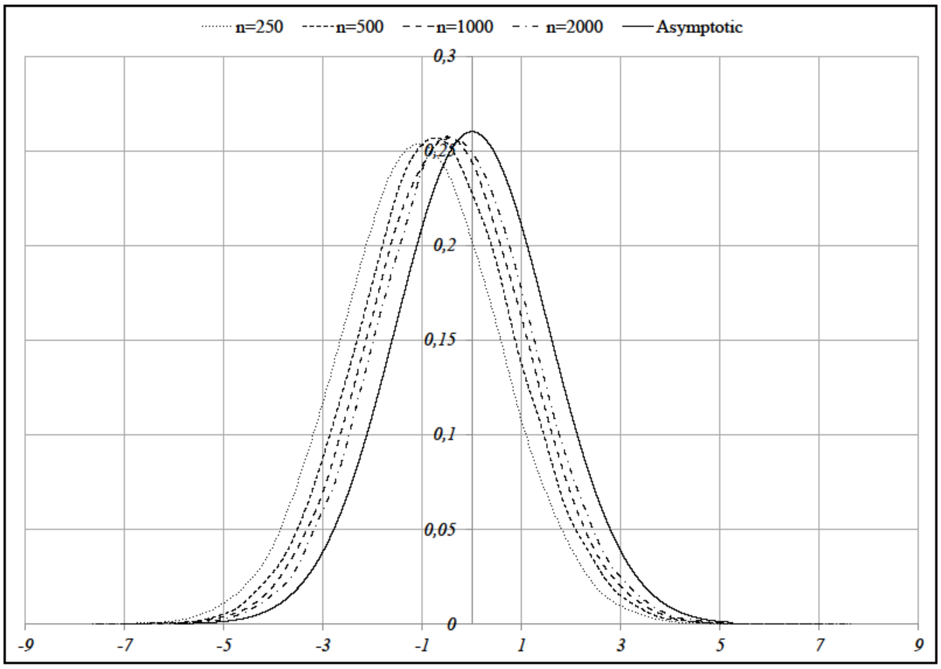

Рис. 10. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=20 перших акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки історичних значень n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

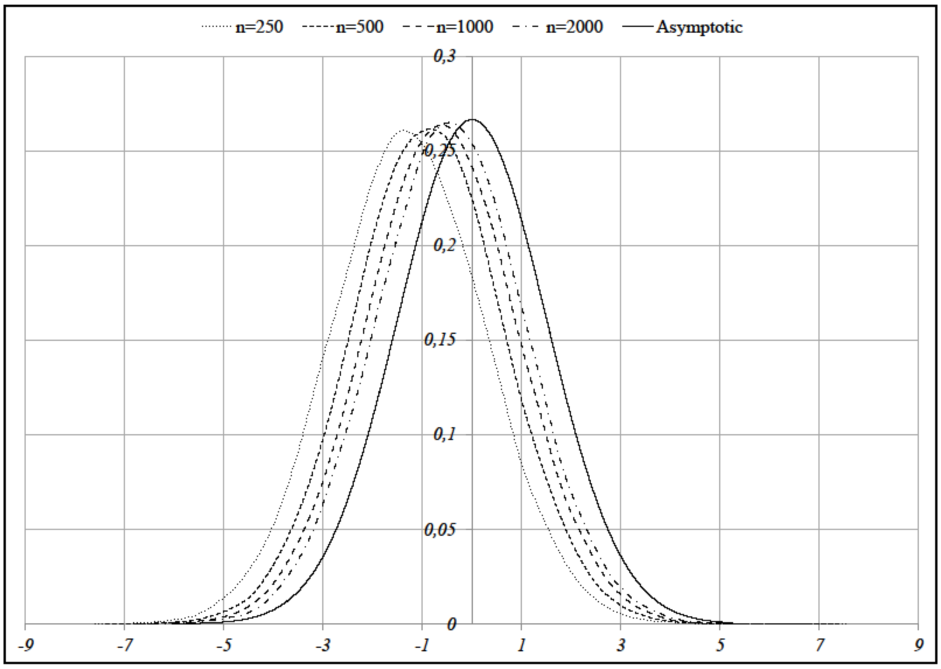

Рис. 11. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_\alpha(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=25 перших акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки історичних значень n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

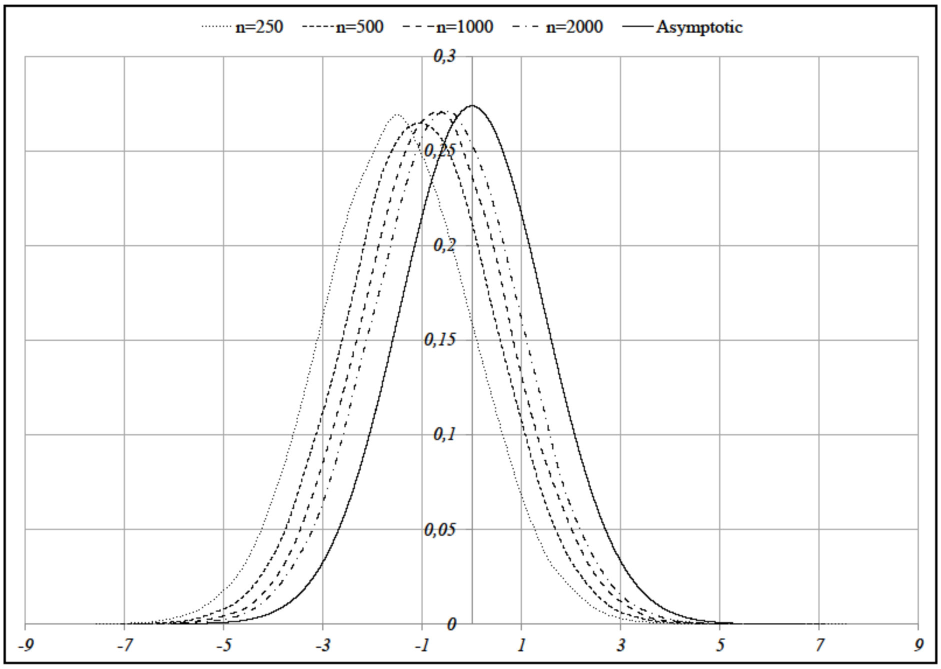

Рис. 12. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_\alpha(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=30 акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки історичних значень n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

Таблиця 1.

Емпіричні та відповідні асимптотичні значення випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_\alpha(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфелів з найменшою дисперсією складених з *k*={5, 10, 15, 20, 25, 30} перших акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки *n*={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

		n = 250	n = 500	n = 1000	n = 2000	Асимпт.
k = 5	Середнє	–0.31717	–0.22550	–0.14598	–0.11190	0
	Дисперсія	4.42507	4.38157	4.37942	4.37109	4.36710
k = 10	Середнє	–0.62760	–0.42763	–0.30913	–0.21743	0
	Дисперсія	3.68339	3.63158	3.62127	3.60548	3.61792
k = 15	Середнє	–0.82027	–0.56851	–0.39663	–0.28014	0
	Дисперсія	2.77958	2.72876	2.70143	2.69412	2.69222
k = 20	Середнє	–1.04271	–0.71431	–0.51436	–0.35724	0
	Дисперсія	2.45040	2.39852	2.37487	2.36541	2.35174
k = 25	Середнє	–1.27520	–0.88453	–0.61877	–0.44231	0
	Дисперсія	2.34259	2.25728	2.25642	2.24466	2.24007
k = 30	Середнє	–1.50064	–1.038188	–0.736211	–0.5161444	0
	Дисперсія	2.24899	2.19158	2.16981	2.14586	2.12427

Зауважимо, що отриманий результат є очікуваним за рахунок того, що за виконання припущення 2 щодо поведінки вектора дохідностей активів, включених у портфель $\mathbf{X}_t$ з леми 1 маємо

$$(n-1)\hat{V}_{GMV}\big/V_{GMV} \sim \chi^2_{n-k}\,.$$

Тобто математичне сподівання вибіркової оцінки дисперсії портфеля з найменшою дисперсією дорівнює

$$M\left(\hat{V}_{GMV}\right) = \frac{n-k}{n-1}V_{GMV}\,.$$

Отже, вибіркова оцінка дисперсії портфеля з найменшою дисперсією є зміщеною, хоча й асимптотично незміщеною. Враховуючи це, розглянемо виправлену оцінку VaR портфеля з найменшою дисперсією, яка має вигляд

$$\widehat{VaR}_{\alpha,adj}(\mathbf{w}_{GMV}) = z_\alpha\sqrt{\frac{n-1}{n-k}\hat{V}_{GMV}} - \hat{R}_{GMV}. \tag{23}$$

Зауважимо, що асимптотичні властивості виправленої оцінки (23) є такими, що й звичайної вибіркової оцінки. Проведемо аналіз цієї оцінки за попередньо використаною схемою. Зобразимо графічно (рис. 13-18) емпіричні та відповідні асимптотичні густини та в табл. 2 наведемо емпіричні середні та дисперсії разом з відповідними асимптотичними значеннями.

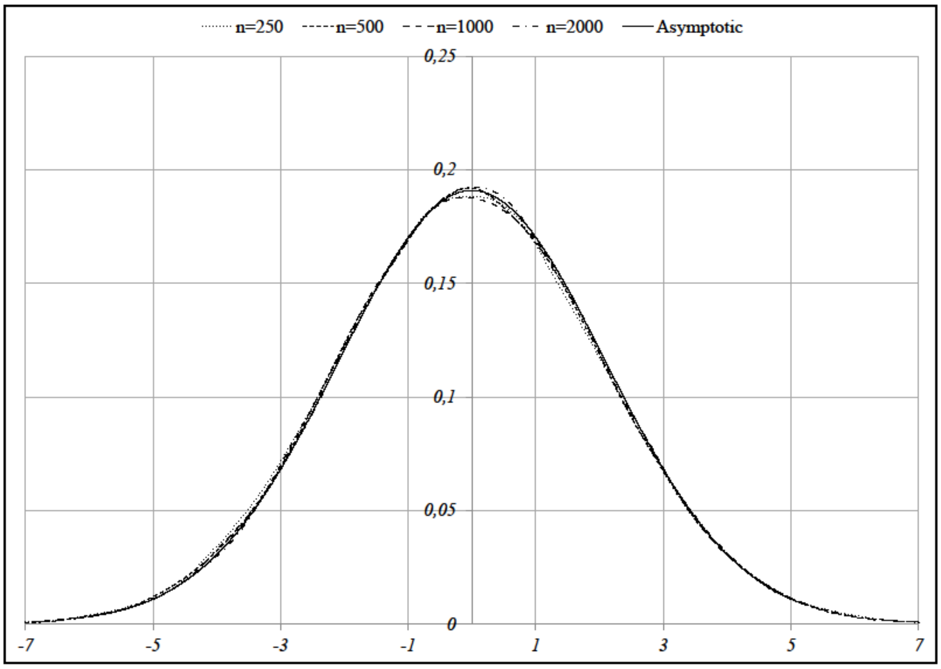

Рис. 13. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha,adj}(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=5 перших акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки історичних значень n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

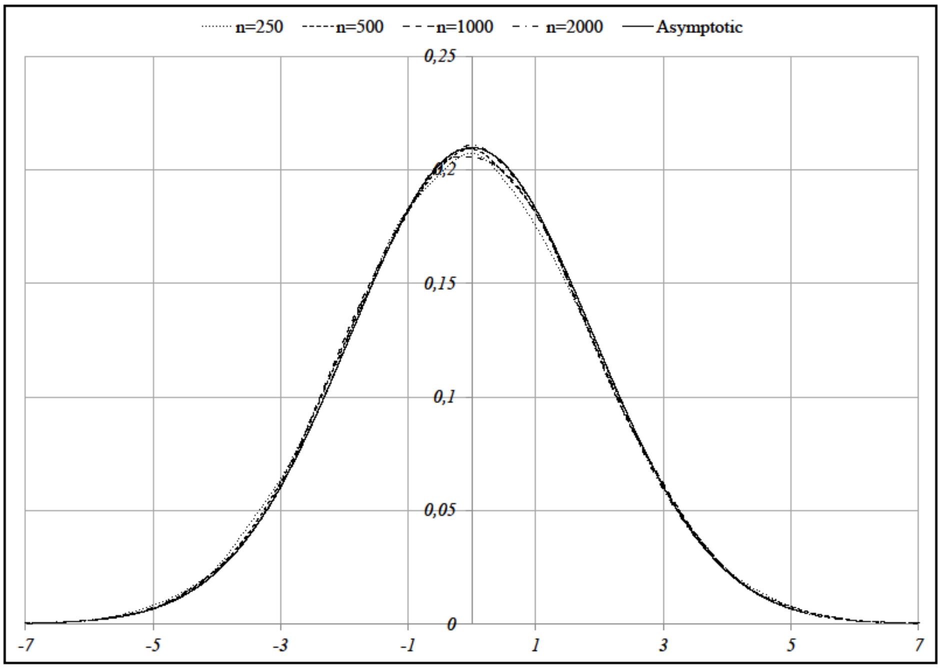

Рис. 14. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha,adj}(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=10 перших акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки історичних значень n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

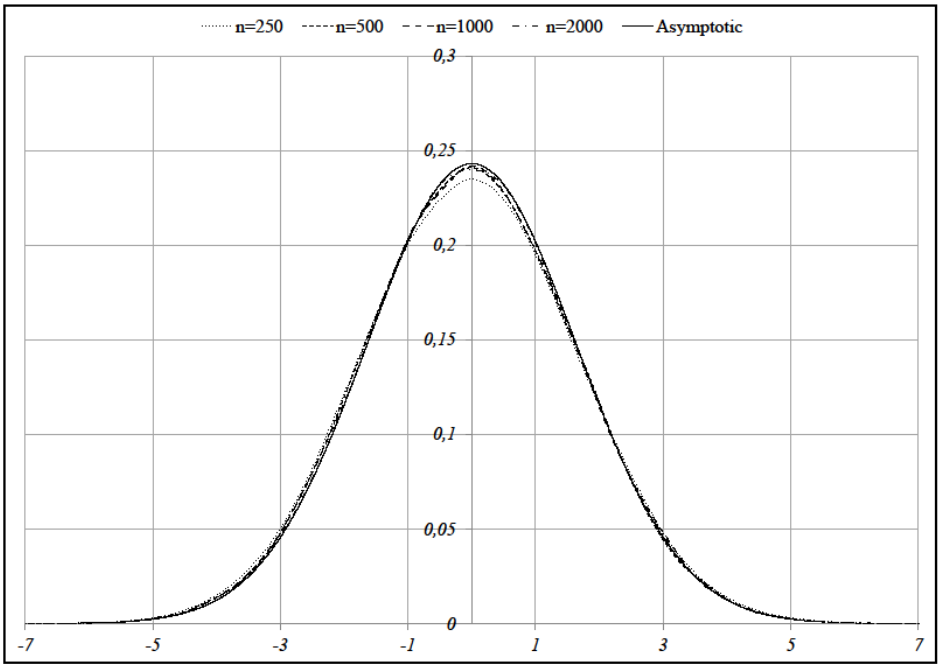

Рис. 15. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha,adj}(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=15 перших акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки історичних значень n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

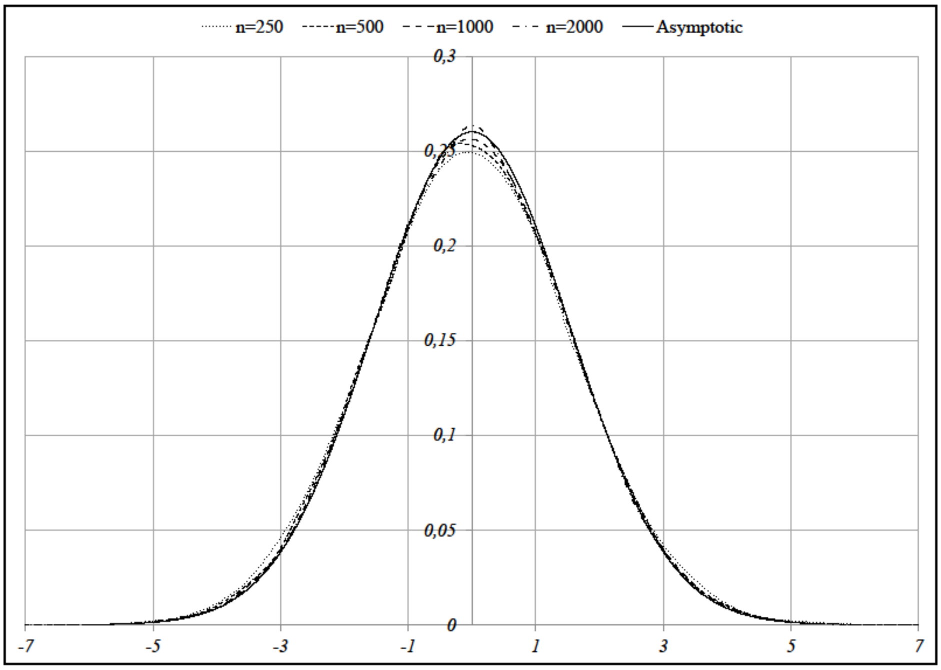

Рис. 16. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha,adj}(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=20 перших акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки історичних значень n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

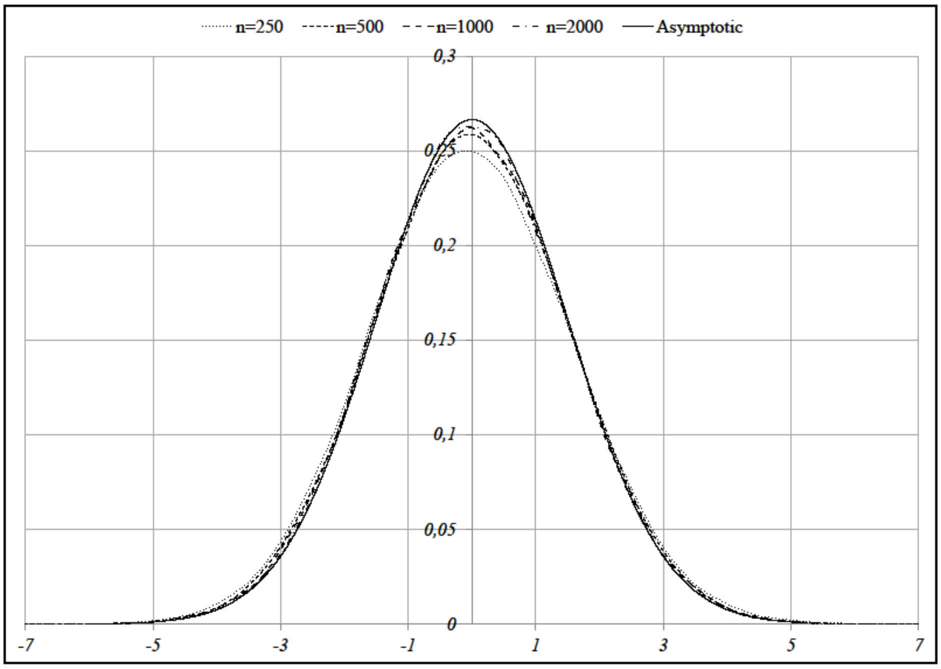

Рис. 17. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha,adj}(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=25 перших акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки історичних значень n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

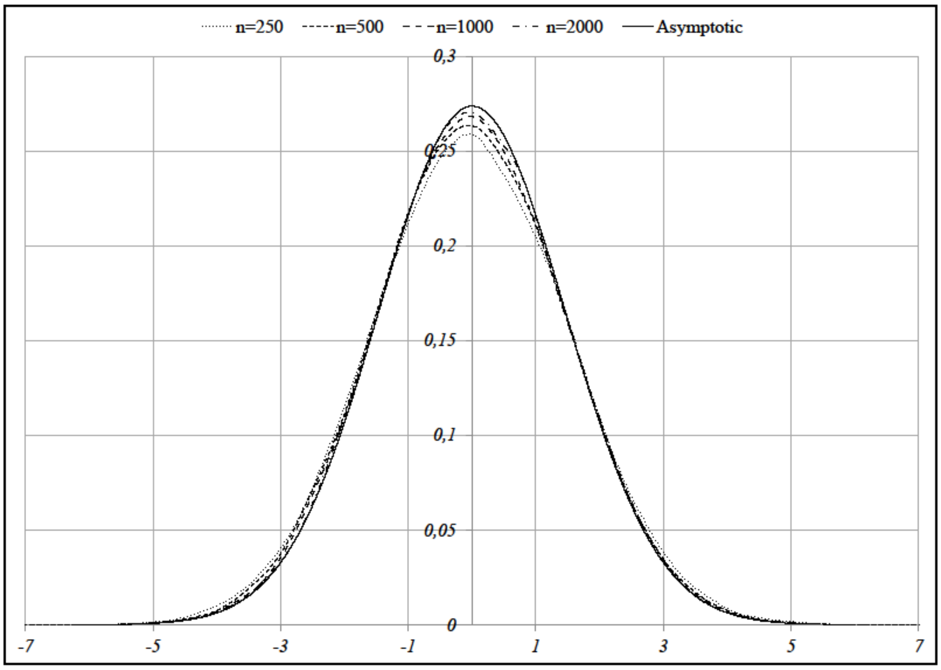

Рис. 18. Емпіричні та відповідна асимптотична густини розподілів випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha,adj}(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфеля з найменшою дисперсією складеного з k=30 акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки історичних значень n={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

Таблиця 2.

Емпіричні та відповідні асимптотичні значення випадкової величини $\sqrt{n}\left(\widehat{VaR}_{\alpha,adj}(\mathbf{w}_{GMV}) - VaR_{\alpha}(\mathbf{w}_{GMV})\right)$ для портфелів з найменшою дисперсією складених з *k*={5, 10, 15, 20, 25, 30} перших акцій зі списку DAX посортованого в алфавітному порядку при обсягах вибірки *n*={250, 500, 1000, 2000} за припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ задовольняє припущення 2.

		n = 250	n = 500	n = 1000	n = 2000	Асимпт.
k = 5	Середнє	–0.04037	–0.02575	–0.01998	–0.00070	0
	Дисперсія	4.45825	4.39632	4.40686	4.34366	4.36710
k = 10	Середнє	–0.03696	–0.01886	–0.01660	–0.01858	0
	Дисперсія	3.76680	3.69529	3.65123	3.60620	3.61792
k = 15	Середнє	–0.02848	–0.02568	–0.01864	–0.00749	0
	Дисперсія	2.85879	2.73900	2.74485	2.69700	2.69222
k = 20	Середнє	–0.02363	–0.01465	–0.00668	–0.00902	0
	Дисперсія	2.55502	2.44243	2.40960	2.37353	2.35174
k = 25	Середнє	–0.03233	–0.01547	–0.01577	–0.01398	0
	Дисперсія	2.49408	2.35559	2.31711	2.25350	2.24007
k = 30	Середнє	–0.02807	–0.03103	–0.01118	–0.00560	0
	Дисперсія	2.39600	2.25513	2.19963	2.15452	2.12427

Отримані результати є кращими ніж у випадку звичайної вибіркової оцінки. З табл. 2 бачимо, що оцінка є незміщена та емпіричні дисперсії збігаються до асимптотичної досить швидко. У всіх розглянутих випадках при обсязі вибірки n = 1000 досягнуто достатнього рівня точності для використання отриманих результатів на практиці.

Висновки

В роботі досліджуються статистичні властивості оцінки VaR портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією. Зважаючи на важливість портфеля з найменшою дисперсією в теорії та на його поширеність на практиці, доцільно дослідити також інші його характеристики (не лише ваги, сподівану дохідність та дисперсію), зокрема VaR цього портфеля. На основі припущення, що вектор дохідностей активів, включених у портфель, задовольняє два припущення: поводиться як слабко стаціонарний процес та в кожен момент часу поводиться як багатовимірні нормально розподілена випадкова величина; знайдено точний розподіл вибіркової оцінки VaR портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією. На жаль, адаптувати цей результат для використання на практиці не вдалося, оскільки знайдена точна густина залежить від невідомих параметрів, то потрібно замінити ці параметри на відповідні оцінки та знову дослідити розподіл такої величини. Даний результат може бути використаний за припущення, що параметри розподілу вектора дохідностей є відомі, наприклад, у випадку аналізу різних ситуацій, які визначаються значеннями параметрів розподілу вектора дохідностей. Оскільки не вдалося адаптувати точний розподіл для використання на практиці, то наступним кроком стало дослідження асимптотичних результатів вибіркової оцінки VaR портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією. В роботі знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки VaR портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією. На його основі побудовано інтервал довіри та, використовуючи дані про щоденні дохідності акцій компаній включених до переліку DAX за період часу з 01.07.2019 по 30.06.2020 методом біжучого вікна шириною 250 спостережень, досліджено відмінність між значеннями VaR портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією та VaR портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR. Також, на основі імітаційного моделювання досліджено збіжність емпіричних розподілів вибіркової оцінки VaR портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією до асимптотичного розподілу. Виявляється, що вибірковій оцінці притаманне істотне зміщення. Тому в роботі запропоновано виправлену оцінку. Показано, що властивості виправленої оцінки є кращими ніж звичайної вибіркової оцінки, зокрема виправлена оцінка є незміщеною (на відміну від вибіркової оцінки, яка є асимптотично незміщена) та швидкість збіжності емпіричних густин до відповідної асимптотичної є такою ж як і для вибіркової оцінки. Показано, що навіть для портфеля з $k = 30$ активів при обсязі вибірки $n = 1000$ досягається добре наближення емпіричних густин асимптотичною, що робить отримані асимптотичні результати придатними до використання на практиці. В роботі також отримані асимптотичні результати у випадку слабшого припущення щодо поведінки вектора дохідностей активів, включених у портфель, а саме на випадок коли вектора дохідностей активів, включених у портфель поводиться як слабко стаціонарний процес та в кожен момент часу має багатовимірний еліптичний розподіл.

Література

1. Fan J. The elements of financial econometrics / J. Fan, Q. Yao. – Beijing : Science Press, 2015. – 383 p.

2. Заболоцький М. В. Статистика портфелів: навч. посібник / М. В. Заболоцький, Т. М. Заболоцький. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2015. – 109 с.

3. Хохлов В. Ю. Математичні методи в управлінні портфелем цінних паперів : монографія / В. Ю. Хохлов. — К. : Кондор-Видавництво, 2017. — 298 с.

4. Markowitz H. Portfolio selection / H. Markowitz // Journal of finance. – 1952. – №7. – P. 77 – 91.

5. Merton R. C. An analytical derivation of the efficient frontier / R. C. Merton // Journal of financial and quantitative analysis – 1972. – №7. – P. 1851 – 1872.

6. Bodnar T. Econometrical analysis of the sample efficient frontier. / T. Bodnar, W. Schmid // The European journal of finance. – 2009. – № 15. – P. 317 – 335.

7. Okhrin Y. Distributional properties of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // Journal of econometrics. – 2006. – № 134. – P. 235 – 256.

8. Schmid W. On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the sharpe ratio / W. Schmid, T. Zabolotskyy // ASTA - Advances in statistical analysis. – 2008.- №92. – P. 29 – 34.

9. Заболоцький М. В. Емпіричний аналіз вибіркової оцінки коефіцієнта ризику інвестора портфеля з максимальним відношенням Шарпа / М. В. Заболоцький, Т. М. Заболоцький, Т. В. Байбула // Вісник Львівського університету, серія економічна. – 2019. – Вип. 56. – С. 207-217.

10. Заболоцький М. В. Тестування еквівалентності портфелів з максимальним відношенням Шарпа та з максимальною очікуваною корисністю / М. В. Заболоцький, Т. М. Заболоцький // Вісник Львівського університету, серія мех.-мат. – 2019. – Вип. 88. – С. 128-133.

11. Yu B. W. T. Objective comparisons of the optimal portfolios corresponding to different utility functions / B. W. T. Yu, W. K. Pang, M. D. Troutt, S. H. Hou // European journal of operational research. – 2009. – № 199. – P. 604-610.

12. Bodnar T. On the equivalence of quadratic optimization problems commonly used in portfolio theory / T. Bodnar, N. Parolya, W. Schmid // European journal of operational research. – 2013. – № 229. – P. 637–644.

13. Вітлінський В. В. Урахування об’єктивно-суб’єктивної структури ризику в моделюванні економічних систем / В. В. Вітлінський // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – 2010. – Вип. 81. – С. 12–21.

14. Alexander G. J. Portfolio selection with mental accounts and delegation / G. J. Alexander, A. M. Baptista // Journal of banking and finance. – 2011. – № 35. – P. 2637–2656.

15. Заболоцький Т. М. Моделювання коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику / Т. М. Заболоцький// Актуальні проблеми економіки. – 2017. – № 4 (190). – С. 215-225.

16. Bodnar T. Determination and estimation of risk aversion coefficients / T. Bodnar, Y. Okhrin, V. Vitlinskyy, T. Zabolotskyy // Computational management science. – 2018. – № 15 (2). – P. 297-317.

17. Alexander G. J. Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis / G. J. Alexander, M. A. Baptista // Journal of economic dynamics & control. – 2002. – № 26. – P. 1159–1193.

18. Zabolotskyy T. Minimum VaR and Minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotskyy // Statistics & Risk Modeling. – 2012. – №29. – P. 281-314.

19. Сеньо П. С.Теорія ймовірностей та математична статистика. Підручник. / П. С. Сеньо. – К. : Знання, 2007. – 556 с.

20. Brockwell P. J. Time series: theory and methods / P. J. Brockwell, R. A. Davis. – New York : Springer Science+Business Media. 2006. – 600 p.

21. DasGupta A. Asymptotic theory of statistics and probability / A. DasGupta. – New York : Springer. 2008. – 722 p.

22. Fang K. T. Symmetric multivariate and related distributions / K. T. Fang, S. Kotz, K. W. Ng. – London : Chapman and Hall. 1990. – 220 p.

23. Bodnar T. How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio? / T. Bodnar, T. Zabolotskyy // ASTA – Advances in statistical analysis. – 2017. – № 101 (1). – P. 1-28.

24. Ling S. Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model / S. Ling, M. McAleer // Econometric theory. – 2003. – № 19. – P. 280 – 310.