Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет

Кафедра математичної економіки, економетрії,
фінансової та страхової математики

Магістерська робота

# Асимптотичні властивості характеристичних функцій деяких дискретних процесів

Виконав:
студент групи МТФМ-21с
Боднарчук Андрій Юрійович
Науковий керівник:
доктор фіз.-мат. наук, професор
Скасків Олег Богданович

Львів 2021

Зміст

1 Список умовних позначень 2

2 Вступ 3

3 Асимптотичні властивості характеристичних функцій деяких дискретних процесів 6

4 Ряди Діріхле з випадковими коефіцієнтами і показниками 24

5 Випадок нормального розподілу коефіцієнтів характеристичних функцій 36

6 Висновки 41

# 1 Список умовних позначень

$\mathbb{C}$ - множина комплексних чисел;

$\mathbb{N}$ - множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}_+$ - множина цілих невід'ємних чисел;

$\mathbb{R}$ - множина дійсний чисел;

$\Omega$ - множина елементарних подій;

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - ймовірнісний простір;

$F(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)}$, де $z \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega$ - випадковий ряд Діріхле;

$\mathcal{D}$ - клас випадкових рядів Діріхле, які задовольняють умову:

$(\forall \omega \in \Omega)(\exists x_* = x_*(F, \omega) < 0): \ f_k(\omega) e^{x_* \lambda_k(\omega)} \to 0 \ (k \to +\infty)$;

$\Pi_x := \{z \in \mathbb{C} : Re\ z < x\}$ - півплощина комплексної площини $\mathbb{C}$;

$\sigma(F, \omega) := \sup\{x :$ ряд $F(z, \omega)$ є збіжний абсолютно у півплощині $\Pi_x\}$;

$\sigma_{зб}(F, \omega) := \sup\{x :$ ряд $F(z, \omega)$ є збіжний у півплощині $\Pi_x\}$;

$\sigma_\mu(F, \omega) := \sup\{\sigma : \ (\forall x < \sigma : \ f_k(\omega) e^{x\lambda_k(\omega)} \to 0, \ k \to +\infty)\}$ - абсциса існування максимального члена ряду $F(z, \omega)$;

$\mu(x, F) := \sup\{|f_k(\omega)| e^{x\lambda_k(\omega)} : \ k \in \mathbb{Z}_+\}$ - максимальний член ряду $F(z, \omega)$.

$\mathcal{N}(0, 1)$ - сім'я гаусових (стандартних нормальних) випадкових величин.

## 2 Вступ

Сукупність подій, на наслідки яких людина не може дати достовірної відповіді, є дуже широка. З огляду на бажання спрогнозувати наслідки окремої події чи експерименту до точності конкретного рівня, відбувається розвиток такої науки як теорія ймовірностей, зокрема її розділ — математична статистика. У цій магістерській роботі здійснено пошуки оцінок деяких об'єктів випадкового характеру.

Нехай маємо фіксований ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, який сладається з множини елементарних подій $\Omega$, $\sigma-$алгебри $\mathcal{A}$ підмножин $\Omega$, які вважаємо *подіями* та зліченно-адитивної ймовірнісної міри $\mathbb{P}$ визначеної на $\mathcal{A}$ для якої виконується умова $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, тобто ймовірності.

Вслід за проф. О. Б. Скасківим [?], назвемо *випадковою величиною* функцію $\xi(\omega)$, де $\omega \in \Omega$ для якої справджується умова

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ \ \xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A},$$

де символ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ позначає сім'ю борелевих множин на числовій прямій $\mathbb{R}$.

Нехай на числовій прямій виділено деяку нескінченну дискретну множину $I \subset \mathbb{R}$. Якщо для кожного елемента $t$ з множини $I$ визначена дійснозначна випадкова величина $\xi_t(\omega)$, то сім'ю випадкових величин $\{\xi_t(\omega) : t \in I\}$ називаємо *випадковим процесом* на $I$.

З огляду на те, що теорія числових рядів має розвинену систему тверджень, які вказують на взаємозв'язки між явищем збіжності ряду і загальним членом ряду, зручно є означити функцію, яка б деяким чином могла пов'язати випадковий процес із числовим рядом.

Нехай нас цікавить область (абсолютної) збіжності деякого класу числових рядів. Розглянемо випадковий процес $\{\xi_t(\omega) : t \in I\}$ на $I$, де, наприклад, множина $I = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

У такому випадку при фіксованому $t$ для випадкової величини $\xi_t(\omega)$ означена т. зв. *характеристична функція*, яка має наступний вигляд:

$$\varphi_{\xi_t}(s) = M\big(e^{is\xi_t(\omega)}\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(t,\omega)e^{is\lambda_k(t,\omega)}, \quad s \in \mathbb{R},$$

де $p_k(t,\omega) = \mathbb{P}\big\{\omega : \xi_t(\omega) = \lambda_k(t,\omega)\big\}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k(t,\omega) = 1$, $\omega \in \Omega$.

Здійснивши заміну $is = z$, $z \in \mathbb{C}$ отримаємо функцію, яка матиме дещо зручніший вигляд:

$$\varphi_{\xi_t}(-iz) = M\big(e^{z\xi_t(\omega)}\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(t,\omega)e^{z\lambda_k(t,\omega)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Оскільки при фіксованому $t = t_0$ останній ряд залежить тільки від змінних $z$ та $\omega$, то позначимо символом $\tilde{F}(z,\omega)$ ряд

$$\tilde{F}(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)}, \quad z \in \mathbb{C}, \ \omega \in \Omega.$$

Ряд вигляду $\tilde{F}(z,\omega)$ називають *випадковим рядом Діріхле.*

У цій магістерській роботі розглядається загальніший випадок випадкових рядів Діріхле, для яких не накладено умови $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k(\omega) = 1$ на коефіцієнти ряду і в яких ці коефіцієнти не пов'язані з показниками $\lambda_k(\omega)$. Також коефіцієнти $f_k(\omega) = p_k(\omega)$ вважаються тепер комплекснозначними, а показники $\lambda_k(\omega)$ – попарно різними. Такий (загальніший) ряд Діріхле позначимо як

$$F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)}, \quad z \in \mathbb{C}, \ \omega \in \Omega. \tag{1}$$

У своїх працях питання збіжності і асимптотичних властивостей випадкових рядів досліджували проф. О. Б. Скасків, проф. П. В. Філевич, к.ф.-м.н. Н. Ю. Стасів, к.ф.-м.н. А. О. Куриляк, к.ф.-м.н. Л. О. Шаповаловська, к.ф.-м.н. О. Ю. Задорожна, О. В. Зрум, E. Borel, H. Steinhaus, G. Polya, C. Ryll-Nardzewski, D. Blackwell, P. Lévi, M. Steel, J.-P. Kahane, L. Arnold, M. Sodin, A. Nishri, M. Roters, T. Fanji та багато інших.

У цій магістерській роботі досліджуються асимптотичні властивості характеристичних функцій деяких дискретних процесів, які (функції) можна зобразити у вигляді випадкових рядів Діріхле. Серед асимптотичних властивостей таких рядів розглядаються наступні:

- абсциса абсолютної збіжності;
- абсциса існування максимального члена;
- абсциса збіжності.

## 3 Асимптотичні властивості характеристичних функцій деяких дискретних процесів

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ – фіксований ймовірнісний простір, де $\Omega$ - простір елементарних подій $\mathcal{A}$ - $\sigma-$алгебра підмножин $\Omega$, а $\mathbb{P}$ - зліченно-адитивна ймовірнісна міра визначена на $\sigma-$алгебрі $\mathcal{A}$, тобто ймовірність. Нехай також $\mathbf{f} = (f_k(\omega))_{k=0}^{+\infty}$ - послідовність комплекснозначних випадкових величин, $\Lambda = (\lambda_k(\omega))_{k=0}^{+\infty}$ - послідовність невід'ємних дійсних випадкових величин на цьому ймовірнісному просторі, причому попарно різних, тобто таких, що майже напевно (м.н.) $\lambda_s(\omega) \neq \lambda_l(\omega)$, якщо $s \neq l$.

Випадковим рядом Діріхле називатимемо ряд вигляду

$$F(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)},$$

де $z \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega$.

Клас випадкових рядів Діріхле позначатимемо символом $\mathcal{D}$ і вважатимемо, що кожен ряд $F(z, \omega)$ з цього класу задовольняє умову: $(\forall \omega \in \Omega)(\exists x_* = x_*(F, \omega) < 0)$:

$$f_k(\omega) e^{x_* \lambda_k(\omega)} \to 0 \quad (k \to +\infty) \ \text{ м.н.}$$

Нехай

$$\Pi_x := \{z \in \mathbb{C} : Re\ z < x\}$$

позначає півплощину комплексної площини $\mathbb{C}$.

Позначимо абсциси збіжності випадкового ряду Діріхле $F(z, \omega)$:

$\sigma(F, \omega) := \sup\{x :$ ряд $F(z, \omega)$ є збіжний абсолютно в $\Pi_x\}$;

$\sigma_{зб}(F, \omega) := \sup\{x :$ ряд $F(z, \omega)$ є збіжний в $\Pi_x\}$;

$\sigma_\mu(F, \omega) := \sup\{\sigma \colon (\forall x < \sigma)[f_k(\omega) e^{x\lambda_k(\omega)} \to 0,\ k \to +\infty)]\}$ - абсциса існування максимального члена ряду $F(z, \omega)$.

Максимальний член ряду $F(z,\omega)$ позначаємо

$\mu(x,F) := \sup\{|f_k(\omega)|e^{x\lambda_k(\omega)}: \ k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Відомо (див., наприклад, [?, ?, ?, ?]), що у випадку, коли послідовність показників $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) \equiv \lambda_k$ є монотонно зростаючою до нескінченності послідовністю, тобто, $\lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty$, $0 \leq k \uparrow +\infty$ і

$$\tau(\Lambda) := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k(\omega)} = 0,$$

то за теоремою Валірона

$$\sigma(F) = \sigma_\mu(F) = \alpha_0(F) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{\ln|a_k|}{\lambda_k}$$

для ряду Діріхле з детермінованою послідовністю коефіцієнтів $f_k(\omega) \equiv a_k$.

У загальному випадку

$$\sigma(F) \leq \sigma_\mu(F) \leq \sigma(F) + \tau.$$

Існують ряди Діріхле (див., наприклад, [?, ?]), для яких досягаються обидві рівності в останній подвійній нерівності.

У статті [?] доведено таке твердження.

**Лема 1.** *Нехай послідовність* $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$ *така, що*

$$\varliminf_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) > 0 \text{ м.н.} \tag{2}$$

*Якщо* $F \in \mathcal{D}$, *то*

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \quad \text{м.н.}$$

У цьому зв'язку виникає **запитання** наскільки умова (2) є істотною для того, щоб $\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega)$ м.н.?

Зауважимо також, що якщо

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) = 0,$$

то $F \in \mathcal{D} \iff f_k(\omega) \to 0$ $(k \to +\infty)$. З останнього випливає, що

$$\sigma_\mu(F, \omega) = +\infty = \alpha_0(F, \omega).$$

Справджується таке загальніше твердження.

**Твердження 1.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і*

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) < +\infty \text{ м.н.} \tag{3}$$

*Тоді $\sigma_\mu(F, \omega) = +\infty$ м.н.*

*Доведення.* З належності ряду $F$ до класу $\mathcal{D}$ випливає існування $x_* < 0$ такого, що

$$f_k(\omega)e^{x_*\lambda_k(\omega)} \to 0, \ n \to +\infty.$$

З умови (3) маємо, що $\lambda^*(\omega) := \sup\{\lambda_k(\omega) : k \in \mathbb{Z}_+\} \in (0, +\infty)$.

Нехай $x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$f_k(\omega)e^{x\lambda_k(\omega)} = f_k(\omega)e^{x_*\lambda_k(\omega)} \cdot e^{(x-x_*)\lambda_k(\omega)} \leq$$

$$\leq f_k(\omega)e^{x_*\lambda_k(\omega)} \cdot e^{|x-x_*|\lambda^*(\omega)} \to 0, \ n \to +\infty$$

як добуток нескінченно малої послідовності на сталу $C = e^{|x-x_*|\lambda^*(\omega)}$.

Через довільність у виборі числа $x$ отримуємо, що $\sigma_\mu(F, \omega) = +\infty$.

$\square$

**Приклад 1.** *Нехай* $f_k(\omega) = \dfrac{1}{k},\ \lambda_k(\omega) = \dfrac{k-1}{k}$.

*Ряд* $F(z,\omega)$ *матиме вигляд*

$$F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e^{z\frac{k-1}{k}}.$$

*Цей ряд задовольняє умови твердження 1, бо* $F \in \mathcal{D}$ *оскільки* $\exists x_* = -1 < 0:$

$$\frac{1}{k} e^{-1\cdot\frac{k-1}{k}} \to 0,\ k \to +\infty,$$

*а також* $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \frac{k-1}{k} = 1 < +\infty$.

*Нехай тепер* $x \in \mathbb{R}$ *- довільне. Тоді*

$$\frac{1}{k} e^{x\frac{k-1}{k}} \to 0,\ k \to +\infty$$

*тому що послідовність* $\left(\frac{1}{k}\right)$ *- нескінченно мала, а послідовність* $\left(e^{x\frac{k-1}{k}}\right)_k$ *- обмежена* $\forall x \in \mathbb{R}$.

*Тому* $\sigma_\mu(F,\omega) = +\infty$.

**Приклад 2.** *Нехай* $f_k(\omega) = \dfrac{f(\omega)}{\ln k},\ \lambda_k(\omega) = \dfrac{\lambda(k,\omega)}{\ln k}$, *де випадкові величини* $f(\omega)$ *та* $\lambda(k,\omega)$ *визначені так:*

| $f(\omega)$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

| $\lambda(k,\omega)$ | $1$ | $\ln k$ |
|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

*Ряд* $F(z,\omega)$ *матиме вигляд*

$$F(z,\omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f(\omega)}{\ln k} e^{z\frac{\lambda(k,\omega)}{\ln k}}.$$

*Цей ряд задовольняє умови твердження 1, бо* $F \in \mathcal{D}$ *оскільки* $\exists x_* = -1 < 0:$

$$\frac{f(\omega)}{\ln k} e^{-1\cdot\frac{\lambda(k,\omega)}{\ln k}} \to 0,\ k \to +\infty,$$

*бо послідовність* $\left(\frac{1}{\ln k}\right)$ *- нескінченно мала, а послідовність* $\left(f(\omega)e^{-\frac{\lambda(k,\omega)}{\ln k}}\right)_k$ *- обмежена* $\forall\omega \in \Omega$ *позаяк при* $k \to +\infty$ : $e^{-\frac{\lambda(k,\omega)}{\ln k}} \to A < +\infty,\ A = 1 \vee e^{-1}$.

*Границя* $\overline{\lim}_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\ln k} = 1 < +\infty$.

*Нехай тепер* $x \in \mathbb{R}$ *- довільне. Тоді*

$$\frac{f(\omega)}{\ln k} e^{x\frac{\lambda(k,\omega)}{\ln k}} \to 0,\ k \to +\infty,$$

*тому що послідовність* $\left(\frac{1}{\ln k}\right)$ *- нескінченно мала, а послідовність* $\left(f(\omega)e^{x\frac{\lambda(k,\omega)}{\ln k}}\right)_k$ *- обмежена* $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall\omega \in \Omega$.

*Тому* $\sigma_\mu(F,\omega) = +\infty$.

З Леми 1 і Твердження 1 отримуємо наступне твердження, яке вказує на те, що висновок Леми 1 є правильним в класі $\mathcal{D}$ без умови (2). Власне, у ньому отримуэмо вичерпну выдповыдь на сформульоване вище питання про істотність умови (2) для ряду $F \in \mathcal{D}$.

**Твердження 2.** *Нехай* $F \in \mathcal{D}$. *Тоді*

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(\omega) := \underline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \quad \text{м.н.}$$

*Доведення.* Нехай

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1(\omega) := \{k \in \mathbb{Z}_+ \colon \lambda_k(\omega) \le 1\},\ \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_2(\omega) := \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{N}_1.$$

Для $F \in \mathcal{D}$ розглянемо два ряди

$$F_1(z,\omega) = \sum_{k\in\mathcal{N}_1} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)}, \quad F_2(z,\omega) = \sum_{k\in\mathcal{N}_2} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)}.$$

З Леми 1 у випадку $F_2 \in \mathcal{D}$ маємо, що

$$\sigma_\mu(F_2,\omega) = \alpha_0(F_2,\omega) = \underline{\lim}_{k\to+\infty,\ n\in\mathcal{N}_2} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}.$$

З Твердження 1 у випадку $F_1 \in \mathcal{D}$ отримуємо, що

$$\sigma_\mu(F_1, \omega) = \alpha_0(F_1, \omega) = +\infty.$$

Зауважимо тепер, що $F \in \mathcal{D} \Longrightarrow$ або $i)$ $F_1 \in \mathcal{D}$, або ж $ii)$ $F_2 \in \mathcal{D}$.

$i)$ Якщо $F_1 \notin \mathcal{D}$, то або

$$(\forall x)\colon\;\; f_k(\omega)e^{x\lambda_k(\omega)} \not\to 0 \;(k \to +\infty,\; k \in \mathcal{N}_1),$$

що неможливо, або $|\mathcal{N}_1| < +\infty$, що означає, що

$$\mathcal{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \{k\colon 0 \le k \le n_0 < +\infty\}.$$

Тоді, $F_2 \in \mathcal{D}$ і, тому,

$$\sigma_\mu(F, \omega) = \sigma_\mu(F_2, \omega) = \alpha_0(F_2, \omega) = \alpha_0(F, \omega).$$

$ii)$ Якщо $F_2 \notin \mathcal{D}$, то або

$$(\forall x)\colon\;\; f_k(\omega)e^{x\lambda_k(\omega)} \not\to 0 \;(k \to +\infty,\; k \in \mathcal{N}_2),$$

що неможливо, або $|\mathcal{N}_2| < +\infty$, що означає, що

$$\mathcal{N}_2 = \mathbb{N} \setminus \{k\colon 0 \le k \le n_0 < +\infty\}.$$

Тоді, $F_1 \in \mathcal{D}$ і, тому,

$$\sigma_\mu(F, \omega) = \sigma_\mu(F_1, \omega) = \alpha_0(F_1, \omega) = \alpha_0(F, \omega),$$

тобто,

$$\sigma_\mu(F, \omega) = \alpha_0(F, \omega) = +\infty.$$

Залишається розглянути випадок $F_1 \in \mathcal{D}$ і $F_2 \in \mathcal{D}$. Тоді, з одного боку, очевидно, що

$$\sigma_\mu(F, \omega) = \inf\{\sigma_\mu(F_1, \omega),\; \sigma_\mu(F_2, \omega)\} = \inf\{\alpha_0(F_1, \omega),\; \alpha_0(F_2, \omega)\},$$

а з іншого боку,

$$\inf\{\alpha_0(F_1,\omega),\ \alpha_0(F_2,\omega)\} = \alpha_0(F,\omega).$$

Твердження 2 доведено повністю. $\square$

Наступне твердження містить необхідні і достатні умови для виконання належності ряду $F$ до класу $\mathcal{D}$.

**Твердження 3** (Умови належності ряду $F$ до класу $\mathcal{D}$). *Справджуються такі твердження:*

**1.** *Якщо* $\Big(\lim_{n\to+\infty}|f_n(\omega)| = 0\Big)\vee$

$$\vee\Big(\lim_{n\to+\infty}\lambda_n(\omega) = +\infty \wedge \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\ln|f_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} < +\infty\Big) \Longrightarrow F\in\mathcal{D}.$$

**2.** *Якщо* $F\in\mathcal{D}$, *то*

$$\varliminf_{n\to+\infty}|f_n(\omega)| = 0 \vee \lim_{n\to+\infty}\lambda_n(\omega) = +\infty,$$

*або ж*

$$\lim_{n\to+\infty}|f_n(\omega)| = 0 \vee \varlimsup_{n\to+\infty}\lambda_n(\omega) = +\infty.$$

*Доведення.* ($\Longrightarrow$) Якщо $\lim_{n\to+\infty}|f_n(\omega)| = 0$, то при $x = 0$ маємо $|f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)} = |f_n(\omega)| \to 0$ $(n\to+\infty)$. Тому, $F\in\mathcal{D}$.

Якщо ж

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_n(\omega) = +\infty\ \wedge\ \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\ln|f_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} < C < +\infty,$$

то при $x = -2C$ маємо $|f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)} < e^{-C\lambda_n(\omega)} \to 0$ $(n\to+\infty)$. Тому, $F\in\mathcal{D}$.

($\Longleftarrow$) Якщо $F\in\mathcal{D}$,то $\exists x_* < 0 : \ln|f_n(\omega)| + x_*\lambda_n(\omega) \to -\infty$, $n\to+\infty$. Звідки

$$\varlimsup_{n\to+\infty}(\ln|f_n(\omega)| + x_*\lambda_n(\omega)) \geq \varliminf_{n\to+\infty}\ln|f_n(\omega)| + \varlimsup_{n\to+\infty}x_*\lambda_n(\omega).$$

Тому, або

$$\varliminf_{n\to+\infty} \ln|f_n(\omega)| = -\infty \implies \varliminf_{n\to+\infty} |f_n(\omega)| = 0,$$

або ж

$$\varlimsup_{n\to+\infty} x_*\lambda_n(\omega) = x_* \varliminf_{n\to+\infty} \lambda_n(\omega) = -\infty \implies \varliminf_{n\to+\infty} \lambda_n(\omega) = +\infty,$$

тобто, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n(\omega) = +\infty$.

Крім цього,

$$\varlimsup_{n\to+\infty}(\ln|f_n(\omega)| + x_*\lambda_n(\omega)) \geq \varlimsup_{n\to+\infty} \ln|f_n(\omega)| + \varliminf_{n\to+\infty} x_*\lambda_n(\omega).$$

Тому, або

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \ln|f_n(\omega)| = -\infty \implies \lim_{n\to+\infty} |f_n(\omega)| = 0,$$

або ж

$$\varliminf_{n\to+\infty} x_*\lambda_n(\omega) = x_* \varlimsup_{n\to+\infty} \lambda_n(\omega) = -\infty \implies \varlimsup_{n\to+\infty} \lambda_n(\omega) = +\infty.$$

$\square$

За допомогою Твердження 2, міркуючи подібно, як і у статті [?], доводимо наступні твердження, які є повними аналогами тверджень з [?], але за слабших умов на показники $\lambda_k(\omega)$ ряду $F \in \mathcal{D}$, а саме – в них відсутня умова (2)

$$\varliminf_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) > 0 \text{ м.н.}$$

**Твердження 4.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо для довільних функцій $\gamma,\ \delta : \Omega \to \mathbb{R}$, де $\forall\omega \in \Omega : \gamma(\omega) \geq 0$ м.н. виконується умова*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty$$

*тоді м.н.*

$$\sigma(F,\omega) \geq \gamma(\omega)\alpha_0(F,\omega) - \delta(\omega) =$$
$$= \gamma(\omega)\sigma_\mu(F,\omega) - \delta(\omega) \geq \gamma(\omega)\sigma_{зб}(F,\omega) - \delta(\omega).$$

*Доведення.* Дане Твердження 4 у випадку, коли показники $\lambda_k(\omega)$ задовольняють умову $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) > 0$ м.н. доведено у статті [?].

Розглянемо випадок $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) = 0$ м.н. Доведемо, що тоді $\sigma(F,\omega) \geq \gamma(\omega)\sigma_\mu(F,\omega) - \delta(\omega)$ (нерівність $\gamma(\omega)\sigma_\mu(F,\omega) - \delta(\omega) \geq \gamma(\omega)\sigma_{зб}(F,\omega) - \delta(\omega)$ очевидна). Тоді $\sigma_\mu(F,\omega) = +\infty$.

Нехай $\sigma_\mu(F,\omega) \in \mathbb{R}$ – довільне і $\omega \in \Omega$ такі, що $\gamma(\omega) > 0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $k_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\forall k > k_0$

$$|f_k(\omega)|^{\gamma(\omega)} e^{\gamma(\omega)(\sigma_\mu(F,\omega)-\varepsilon)\lambda_k(\omega)} = \left(|f_k(\omega)| e^{(\sigma_\mu(F,\omega)-\varepsilon)\lambda_k(\omega)}\right)^{\gamma(\omega)} \leq 1.$$

Звідси при довільному $\varepsilon > 0$

$$|f_k(\omega)| e^{\left(\gamma(\omega)(\sigma_\mu(F,\omega)-\varepsilon)-\delta(\omega)\right)\lambda_k(\omega)} =$$

$$= |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} \cdot |f_k(\omega)|^{\gamma(\omega)} e^{\gamma(\omega)(\sigma_\mu(F,\omega)-\varepsilon)\lambda_k(\omega)} \leq$$

$$\leq |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} \cdot 1,$$

що, в силу умови $\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty$ і довільності вибору $\varepsilon > 0$ та $\sigma_\mu(F,\omega) \in \mathbb{R}$ стверджує, що $\sigma(F,\omega) = +\infty$ або також $\sigma(F,\omega) \geq \gamma(\omega)\sigma_\mu(F,\omega) - \delta(\omega)$.

Якщо ж $\omega \in \Omega$ такі, що $\gamma(\omega) = 0$, тоді очевидним чином з умови

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty$$

отримуємо, що $\sigma(F,\omega) \geq -\delta(\omega) = \gamma(\omega)\sigma_\mu(F,\omega) - \delta(\omega)$. □

Як наслідки з твердження 4, вслід за [?] можна отримати наступні твердження.

**Твердження 5.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо для деякої функції $\gamma_1(\omega) : \Omega \to (-\infty, 1]$ ряд*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{\gamma_1(\omega)} < +\infty \quad \textit{м.н.}$$

*тоді м.н.*

$$\sigma(F,\omega) \geq (1-\gamma_1(\omega))\alpha_0(F,\omega) = (1-\gamma_1(\omega))\sigma_\mu(F,\omega) \geq (1-\gamma_1(\omega))\sigma_{\textit{зб}}(F,\omega$$

*Доведення.* Отримуємо з твердження 4 при $\delta(\omega) = 0$ та $\gamma(\omega) = 1 - \gamma_1(\omega)$. □

**Твердження 6.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо для деякої функції $\delta : \Omega \to (0, +\infty)$ м.н. виконується*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty$$

*то м.н.*

$$\sigma(F,\omega) \geq \alpha_0(F,\omega) - \delta(\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) - \delta(\omega) \geq \sigma_{\textit{зб}}(F,\omega) - \delta(\omega).$$

*Доведення.* Для доведення покладається $\gamma(\omega) = 1$ у твердженні 4. □

Наступні твердження охоплюють окремі властивості, що виконуються для абсцис існування максимального члена $\sigma_\mu(F,\omega)$ та абсолютної збіжності $\sigma(F,\omega)$ для ряду $F(z,\omega)$.

**Твердження 7.** *Нехай ряд Діріхле $F \in \mathcal{D}$ з коефіцієнтами $\mathbf{f} = (f_k(\omega)) = (a_k\xi_k(\omega))$, де $(\xi_k(\omega))$ – послідовність випадкових величин, що задовольняють умову $(\exists c_1, c_2 \in (0, +\infty))(\forall k) : c_1 \leq |\xi_k(\omega)| \leq c_2$ та показниками $\Lambda = (\lambda_k(\omega)) = (\lambda_k + \delta_k(\omega))$ такими, що $(\forall k) : \lambda_k \geq 0$ і $\delta_k(\omega) \geq 0$. Тоді для ряду $F(z,\omega)$ виконується:*

*1)* $\sigma(F,\omega) > 0 \Longrightarrow \sigma(F,\omega) \leq \sigma(F_4)$*;*

*2)* $\sigma(F_4) \leq 0 \Longrightarrow \sigma(F,\omega) \geq \sigma(F_4)$*,*

*де* $F_4 = F_4(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| e^{x\lambda_k}$*.*

*Доведення.* Нехай символ $F_{|\cdot|}(z)$ позначає ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k \xi_k| e^{z\lambda_k(\omega)}$.

1) Нехай $\sigma(F,\omega) > 0$ і $\varepsilon > 0$ таке, що $x = \sigma(F,\omega) - \varepsilon > 0$.

Для часткової суми ряду $F_4$ виконується:

$$S_n(x, F_4) = \sum_{k=0}^{n} |a_k| e^{x\lambda_k} \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| e^{x(\lambda_k + \delta_k(\omega))} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \frac{|\xi_k(\omega)|}{c_1} e^{x\lambda_k(\omega)} = \frac{1}{c_1} \sum_{k=0}^{n} |a_k \xi_k(\omega)| e^{x\lambda_k(\omega)} =$$

$$= \frac{1}{c_1} S_n(x, F_{|\cdot|}) \leq C(x) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отже, $F_4$ - збіжний у точці $x = \sigma(F,\omega) - \varepsilon > 0$ звідки випливає, що виконується нерівність $\sigma(F,\omega) \leq \sigma(F_4)$.

2) Нехай $\sigma(F_4) \leq 0$. При $x = \sigma(F_4) - \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ мале, маємо, що $x\delta_k(\omega) \leq 0$ і

$$S_n(x, F_{|\cdot|}) = \sum_{k=0}^{n} |a_k| |\xi_k(\omega)| e^{x\lambda_k(\omega)} \leq$$

$$\leq c_2 \sum_{k=0}^{n} |a_k| e^{x\lambda_k} = c_2 S_n(x, F_4) \leq C(x) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тому виконується нерівність $\sigma(F,\omega) \geq \sigma(F_4)$. □

**Приклад 3** (до п. 1 Твердження 7)**.** *Нехай* $a_k = \frac{1}{k^3}$*,* $\xi_k(\omega) = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$*,* $\lambda_k \equiv 1$*,* $\delta_k(\omega) = \ln k$*.*

*Ряд* $F(z,\omega)$ *матиме вигляд*

$$F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k e^{z(1 + \ln k)}.$$

*Цей ряд задовольняє умови твердження 1, бо* $F \in \mathcal{D}$ *оскільки* $\exists x_* = -1 < 0:$

$$\frac{1}{k^3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k e^{-1(1+\ln k)} \to 0,\ k \to +\infty,$$

*бо послідовність* $\left(\frac{1}{k^3}\right)$ *- нескінченно мала, а послідовність* $\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k e^{-(1+\ln k)}\right)$ *- обмежена (зверху числом 1).*

*Окрім цього виконується умова:* $\exists c_1, c_2 \in (0,+\infty) : c_1 \leq |\xi_k(\omega)| \leq c_2$, *де за* $c_1$ *і* $c_2$ *можна покласти* $c_1 = 1,\ c_2 = 3.$

*Нехай тепер* $x = a \in (0,2)$. *Тоді ряд* $F(a)$ *буде збіжний абсолютно, адже за мажорантною ознакою*

$$\left|\frac{1}{k^3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k e^{a(1+\ln k)}\right| \leq \frac{e^{1+a}}{k^{3-a}}\ \ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall a \in (0,2)$$

*і буде розбіжний при всіх* $x \geq 2$, *бо при* $x = 2$

$$\left|\frac{1}{k^3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k e^{2(1+\ln k)}\right| \geq \frac{1}{k}\ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

*У свою чергу, ряд* $F_4(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} e^x$ *абсолютно збіжний для всіх* $x \in \mathbb{R}$.

*Отже,* $\sigma(F_4) \geq \sigma(F,\omega)$.

**Приклад 4** (до п. 2 твердження 7)**.** *Нехай* $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}},\ \lambda_k = \frac{1}{2}\ln k,\ \xi_k(\omega) = 1 + \frac{1}{k},\ \delta_k(\omega) = \frac{1}{2}\ln k.$

*Ряд* $F_4(x)$ *матиме вигляд*

$$F_4(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{x\cdot\frac{1}{2}\ln k}$$

*а ряд* $F(z,\omega)$ *відповідно*

$$F(z,\omega) = F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}\left(1+\frac{1}{k}\right)e^{z\ln k}.$$

*Ряд* $F \in \mathcal{D}$, *бо* $\exists x_* = -1 < 0:$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)e^{-\ln k} = \frac{1}{\sqrt{k}}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)\frac{1}{k} \to 0,\ k \to +\infty.$$

*Також виконується умова:* $\exists c_1, c_2 \in (0, +\infty) : c_1 \le |\xi_k(\omega)| \le c_2$, *де за* $c_1$ *і* $c_2$ *можна покласти* $c_1 = 1,\ c_2 = 2$.

*Абсциса абсолютної збіжності* $\sigma(F_4)$ *ряду* $F_4(x)$ *рівна* $-1$, *оскільки для довільного* $\varepsilon \ge 0$ *виконується:*

$$\left|\frac{1}{\sqrt{k}}e^{(-1+\varepsilon)\frac{1}{2}\ln k}\right| = \left|\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{k^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right| \ge \frac{1}{k},$$

*а при* $x = -\varepsilon$, *де* $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{k}}e^{(-1-\varepsilon)\frac{1}{2}\ln k}\right| = \left|\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right| = \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}.$$

*Натомість абсциса абсолютної збіжності* $\sigma(F, \omega)$ *ряду* $F(z, \omega)$ *дорівнює* $-\frac{1}{2}$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{k}}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)e^{(-\frac{1}{2}-\varepsilon)\ln k}\right| \le 2\left|\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right| = \frac{2}{k^{1+\varepsilon}}$$

*і, для* $\varepsilon \ge 0$, *також правильно*

$$\left|\frac{1}{\sqrt{k}}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)e^{(-\frac{1}{2}+\varepsilon)\ln k}\right| \ge \left|\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right| = \frac{1}{k^{1-\varepsilon}}.$$

*Тому* $\sigma(F, \omega) = -\frac{1}{2} \ge -1 = \sigma(F_4)$.

**Твердження 8.** *Для кожного* $x \in [-\infty, +\infty]$ *існує ряд* $F$ *такий, що*

$$\sigma(F, \omega) = x \quad \textit{м.н.}$$

*Доведення.* 1) Нехай спершу $x = a > 0$. Тоді існує ряд $F_1$ такий, що

$$F_1(z, \omega) = F_1(z) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}e^{z\frac{1}{a}\ln k}$$

і $\sigma(F_1) = a$ м.н. бо для довільного $\varepsilon \geq 0$ виконується:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} e^{(a+\varepsilon)\frac{1}{a}\ln k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} k \cdot k^{\frac{\varepsilon}{a}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1-\frac{\varepsilon}{a}}} = +\infty,$$

а також правильно, що

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} e^{(a-\varepsilon)\frac{1}{a}\ln k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} k \cdot k^{-\frac{\varepsilon}{a}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{\varepsilon}{a}}} < +\infty.$$

2) Якщо $x = b < 0$ тоді існує ряд $F_2$ такий, що

$$F_2(z,\omega) = F_2(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{z\left(-\frac{1}{b}\right)\ln k}$$

для якого $\sigma(F_2) = b$, бо для кожного $\varepsilon \geq 0$ виконується:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{(b+\varepsilon)\left(-\frac{1}{b}\right)\ln k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k^{\frac{\varepsilon}{b}}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{\varepsilon}{b}}} = +\infty$$

та

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{(b-\varepsilon)\left(-\frac{1}{b}\right)\ln k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k^{-\frac{\varepsilon}{b}}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1-\frac{\varepsilon}{b}}} < +\infty$$

оскільки $b < 0$.

3) У випадку, коли $x = 0$ існує ряд

$$F_3(z,\omega) = F_3(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e^{z\ln k}$$

такий, що $\sigma(F_3) = 0$ м.н., бо для довільного $\varepsilon \geq 0$ правильно, що

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e^{\varepsilon\ln k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k^{-\varepsilon}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1-\varepsilon}} = +\infty$$

і правильно, що

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e^{-\varepsilon\ln k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k^{\varepsilon}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} < +\infty.$$

4) Якщо $x = +\infty$ за ряд $F_4$ можна покласти ряд

$$F_4(z, \omega) = F_4(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} e^{z\frac{1}{k}}.$$

Справді, для довільного $x \in \mathbb{R}$ виконується

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} e^{x\frac{1}{k}} \leq e^x \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Тому $\sigma(F_4) = +\infty$.

5) Якщо тепер $x = -\infty$, то існує ряд $F_5$ такий, що

$$F_5(z, \omega) = F_5(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{z\frac{1}{k}}.$$

Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k e^{x\frac{1}{k}} = +\infty,$$

тобто $\sigma(F_5) = -\infty$. $\square$

**Твердження 9.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Тоді*

$$\sigma_\mu(F, \omega) = +\infty \text{ м.н.} \iff \forall C \in (0, +\infty) :$$

$$\varlimsup_{k \to +\infty} \big( \ln |f_k(\omega)| + C\lambda_k(\omega) \big) < +\infty \text{ м.н.} \tag{4}$$

*Доведення.* Відзначимо, що якщо $\forall C \in (0, +\infty)$ виконується умова (4), то для коефіцієнтів $f_k(\omega)$ маємо, що

$$\ln |f_k(\omega)| + C\lambda_k(\omega) < C_1 < +\infty. \tag{5}$$

Зауважимо, що з того, що $F \in \mathcal{D}$ випливає, що існує $x_* \in (-\infty, 0) \cap (-\infty, \sigma_\mu(F, \omega))$. Далі, $(\forall x \in \mathbb{R})$ і $(\forall k \in \mathbb{Z}_+)$ маємо:

$$\left| f_k(\omega) e^{x\lambda_k(\omega)} \right|^2 = |f_k(\omega)| e^{x_*\lambda_k(\omega)} \cdot |f_k(\omega)| e^{(2x - x_*)\lambda_k(\omega)}. \tag{6}$$

Нехай $x - x_* > 0$. З нерівності (5) при $C = 2x - x_* > 0$ отримуємо, що

$$|f_k(\omega)|e^{(2x-x_*)\lambda_k(\omega)} = e^{\ln|f_k(\omega)|+C\lambda_k(\omega)} \le e^{C_1},$$

тобто, послідовність $\big(|f_k(\omega)|e^{(2x-x_*)\lambda_k(\omega)}\big)$ є обмеженою. Оскільки добуток нескінченно малої послідовності $\big(|f_k(\omega)|e^{x_*\lambda_k(\omega)}\big)$ на обмежену послідовність є нескінченно малою послідовністю, то з рівності (6) випливає, що $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Big(f_k(\omega)e^{x\lambda_k(\omega)}\Big)^2 \to 0,\ k \to +\infty.$$

Звідси негайно випливає, що $\sigma_\mu(F,\omega) = +\infty$.

Якщо ж $\sigma_\mu(F,\omega) = +\infty$, то

$$\forall x \in (0,+\infty) : |f_k(\omega)|e^{x\lambda_k(\omega)} \to 0\ (k \to +\infty) \Longrightarrow$$
$$|f_k(\omega)|e^{x\lambda_k(\omega)} \le e^{C_1}\ (k \ge 0) \Longrightarrow$$
$$\varlimsup_{k\to+\infty} \big(\ln|f_k(\omega)| + x\lambda_k(\omega)\big) \le C_1 < +\infty,$$

тобто, умова (5) виконується з $C = x \in (0,+\infty)$. □

**Твердження 10.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо $(\forall C \in (0,+\infty))$ :*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \big(\ln|f_n(\omega)| + C\lambda_n(\omega)\big) = +\infty \text{ м.н.} \tag{7}$$

*то м.н.*

$$\sigma_\mu(F,\omega) \le 0.$$

*Доведення.* З умови (7), очевидно випливає, що $\sigma_\mu(F,\omega) \le 0$ м.н. Справді, у випадку $\sigma_\mu(F,\omega) > 0$ знайшлося б таке $C \in (0,\sigma_\mu(F,\omega))$, що $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(\omega)|e^{C\lambda_n(\omega)} = 0$, а це безпосередньо суперечить умові (7). □

**Приклад 5.** *Нехай $f_k(\omega) = \dfrac{1}{k^m},\ \lambda_k(\omega) = k^\alpha,\ m \in \mathbb{N}$ - довільне (велике), $\alpha > 0$ - будь-яке мале.*

*Тоді ряд*

$$F(z,\omega)=F(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^m}e^{zn^\alpha}$$

*і для нього виконується умова (5), бо* $\forall C\in(0,+\infty)$

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\left(\ln\left|\frac{1}{k^m}\right|+Ck^\alpha\right)=\overline{\lim_{k\to+\infty}}\big(-m\ln k+Ck^\alpha\big)=+\infty.$$

*Виконується також умова* $\overline{\lim}_{k\to+\infty}\left|\frac{1}{k^m}\right|=0<+\infty.$

*Нехай тепер* $\varepsilon>0$ *- мале. Тоді для* $\sigma_\mu(F,\omega)$ *виконується*

$$\frac{1}{k^m}e^{\varepsilon k^\alpha}\to+\infty,\ k\to+\infty,$$

*бо перейшовши до логарифма і використавши правило Лопіталя переконуємось, що*

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{e^{\varepsilon k^\alpha}}{k^m}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\varepsilon k^\alpha}{m\ln k}=\frac{\varepsilon}{m}\lim_{k\to+\infty}\frac{(k^\alpha)'}{(\ln k)'}=$$

$$=\frac{\varepsilon}{m}\lim_{k\to+\infty}\frac{\alpha k^{\alpha-1}}{k^{-1}}=\frac{\alpha\varepsilon}{m}\lim_{k\to+\infty}k^\alpha=+\infty.$$

*Якщо* $-\varepsilon<0$ *- довільне, то очевидно, що*

$$\frac{1}{k^m}e^{-\varepsilon k^\alpha}=\frac{1}{k^m e^{\varepsilon k^\alpha}}\to0,\ k\to+\infty.$$

*Тому* $\sigma_\mu(F,\omega)=0$ *м.н.*

**Приклад 6.** *Нехай при* $t=t_0$ *маємо фіксовану випадкову величину* $\xi_{t_0}(\omega)$ *з дискретного нескінченного випадкового процесу* $\{\xi_t(\omega):t\in I\}$ *на* $I$.

*Нехай* $\lambda_k(\omega)=\lambda_k=k$,

$f_k(\omega)=f_k=\mathbb{P}\big(\omega:\xi_{t_0}(\omega)=\lambda_k\big)=\mathbb{P}\big(\omega:\xi_{t_0}(\omega)=k\big)=pq^{k-1}$,

*де* $q=1-p$, $k\in\mathbb{N}$, $p\in(0,1)$.

*Ряд*

$$F=F(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}pq^{k-1}e^{zk}$$

*описує характеристичну функцію геометрично розподіленого випадкового процесу.*

*Переконаємось, що, згідно з твердженням 11* $\sigma_\mu(F) \geq 0$.

*Виконання умови 1):* $\overline{\lim}_{k\to+\infty} |f_k(\omega)| < +\infty$ *присутнє, оскільки*

$\lim_{k\to+\infty} pq^{k-1} = 0 < +\infty$.

*З твердження 2 маємо, що*

$$\sigma_\mu(F) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|pq^{k-1}|}{k} = -\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln p + (k-1)\ln q}{k} =$$

$$= -\ln q \lim_{k\to+\infty} \frac{k-1}{k} = -\ln q > 0.$$

*Справді, для довільного* $\varepsilon > 0$ *при* $k \to +\infty$ *маємо*

$$pq^{k-1}e^{(-\ln q-\varepsilon)k} = pq^{k-1}e^{\ln q^{-k}}e^{-\varepsilon k} = pq^{k-1}q^{-k}e^{-\varepsilon k} = \frac{p}{q}\frac{1}{e^{\varepsilon k}} \to 0.$$

*Очевидно, що при* $\varepsilon = 0$ *та* $k \to +\infty$

$$pq^{k-1}e^{-\ln q\cdot k} = \frac{p}{q} \nrightarrow 0.$$

**Приклад 7.** *Припустимо* $f_k(\omega) = f_k = k^2$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k = \ln k$.

*Дослідимо ряд*

$$F(z,\omega) = F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 e^{z\ln k}$$

*на значення* $\sigma_\mu(F)$.

*Виконується умова 2) твердження 11, тобто*

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} |f_k(\omega)| = \lim_{k\to+\infty} k^2 = +\infty.$$

*Переконаємося, що тоді* $\sigma_\mu(F,\omega) \leq 0$. *Згідно з твердженням 2 маємо*

$$\sigma_\mu(F) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln k^2}{\ln k} = -2\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\ln k} = -2 < 0.$$

**Твердження 11.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо*

$$\ln|f_n(\omega)| = o(\lambda_n(\omega)),\ n \to +\infty$$

*тоді* $\sigma_\mu(F, \omega) = 0$ *м.н.*

*Доведення.* За умовою,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0):\quad -\varepsilon\lambda_n(\omega) < \ln|f_n(\omega)| < \varepsilon\lambda_n(\omega).$$

Тому,

$$-\varepsilon \leq \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} \leq \varepsilon,$$

звідки за Твердженням 2

$$\sigma_\mu(F, \omega) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} = 0.$$

□

## 4 Ряди Діріхле з випадковими коефіцієнтами і показниками

Для $F \in \mathcal{D}$ вигляду (1) з коефіцієнтами $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$ вслід за [?] розглянемо такі ряди Діріхле

$$F_1(z) = F_1(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{z\lambda_k(\omega)}, \quad F_2(z) = F_2(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 e^{2z\lambda_k(\omega)},$$

$$F_3(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 e^{2x\lambda_k}, \quad F_3^*(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 e^{2x\lambda_k}, \quad F_4(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| e^{x\lambda_k},$$

$\omega \in \Omega, z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$.

Відзначимо такі очевидні співвідношення між абсцисами $\sigma_\mu$ існування максимальних членів цих рядів та абсцисами

$\sigma(F)$ абсолютної збіжності

$$\sigma_\mu(F_1,\omega)=\sigma_\mu(F_2,\omega),$$
$$\sigma(F_3)=\sigma(F_3^*),\ \sigma_\mu(F_3)=\sigma_\mu(F_3^*)=\sigma_\mu(F_4).$$

Наступне твердження зі статті [?] по-суті є першою частиною теореми 2 зі статті [?], доведеної для послідовності $\Lambda_+=(\lambda_n)$, $0=\lambda_0<\lambda_n<\lambda_{n+1}\to+\infty$ $(1\le n\to+\infty)$ за апріорного обмеження

$$\tau(\Lambda_+):=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}<+\infty.$$

**Твердження 12** ([?]). *Нехай $F_4\in\mathcal{D}$. Тоді,*

$$\sigma(F_4)\le\frac{\sigma(F_4)+\sigma_\mu(F_4)}{2}\le\sigma(F_3)\le\inf\left\{\sigma(F_4)+\frac{\tau(\Lambda)}{2},\sigma_\mu(F_4)\right\},$$

*де* $\tau(\Lambda)=\varlimsup\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\ln k}{\lambda_k}$.

У статті [?] наступне твердження отримане за апріорного обмеження, що м.н.

$$\varliminf_{n\to+\infty}\lambda_n(\omega)>0.$$

Доведені вище твердження (і насамперед Твердження 2) вказують на те, що це ж ствердження зі статті [?] є правильним без цього останнього апріорного обмеження.

**Твердження 13** ([?]). *Нехай $F\in\mathcal{D}$. Якщо $\omega\in\Omega$ таке, що $\tau(\Lambda,\omega)\overset{def}{=}\varlimsup\limits_{k\to+\infty}\frac{\ln k}{\lambda_k(\omega)}=0$ або $\ln k=o(\ln|f_k(\omega)|)$ $(k\to+\infty)$, то виконуються рівності*

$$\sigma_{зб}(F,\omega)=\sigma(F,\omega)=\sigma_\mu(F,\omega)=\alpha_0(\omega).$$

З Твердження 12 у статті [?] отримано наступне твердження. Зазначимо,що у ньому відсутні будь-які інші апріорні умови на послідовність показників $(\lambda_n(\omega))$, крім умов їхньої невід'ємності і $(\forall n \neq k) : \lambda_n(\omega) \neq \lambda_k(\omega)$ м.н.

**Твердження 14** ([?]). *Нехай* $F \in \mathcal{D}$ *з коефіцієнтами* $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$, *де* $(\xi_k(\omega))$ *– послідовність випадкових величин таких, що* $(\forall k)$: $0 < c_1 \leq |\xi_k(\omega)| \leq c_2 < +\infty$ *м.н. Тоді, м.н.*

$$\sigma(F,\omega) \leq \frac{\sigma(F,\omega) + \sigma_\mu(F,\omega)}{2} \leq \sigma(F_2,\omega) \leq \\ \leq \inf\Big\{\sigma(F,\omega) + \frac{\tau(\Lambda,\omega)}{2}, \sigma_\mu(F,\omega)\Big\}. \tag{8}$$

У виведенні цього твердження з Твердження 12 ключову роль відіграє умова $(\forall k)$: $0 < c_1 \leq |\xi_k(\omega)| \leq c_2 < +\infty$ м.н., з якої, як нескладно у цьому переконатися, випливає, що

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \sigma_\mu(F_1,\omega) = \sigma_\mu(F_2,\omega), \tag{9}$$

$$\sigma(F,\omega) = \sigma(F_1,\omega) \quad \text{м.н.} \tag{10}$$

Цих останніх рівностей виявляється достатньо, щоб з Твердження 12 отримати Твердження 14.

Доведемо тепер таке твердження

**Твердження 15.** *Нехай* $F \in \mathcal{D}$ *і має вигляд* (1) *з коефіцієнтами* $f_n(\omega) = a_n\xi_n(\omega)$, *де* $(\xi_n(\omega))$ *– послідовність випадкових величин таких, що* $\ln|\xi_n(\omega)| = o(\ln|a_n|)$ $(n \to +\infty)$ *м.н. Якщо* $\ln n = o(\ln|a_n|)$ $(n \to +\infty)$, *то, м.н.*

$$\sigma(F,\omega) \leq \frac{\sigma(F,\omega) + \sigma_\mu(F,\omega)}{2} \leq \sigma(F_2,\omega) \leq \\ \leq \inf\Big\{\sigma(F,\omega) + \frac{\tau(\Lambda,\omega)}{2}, \sigma_\mu(F,\omega)\Big\}. \tag{11}$$

*Доведення.* Зі сказанного вище перед формулюванням останнього твердження, випливає.що достатньо переконатися в тому,що виконуються рівності (9), (10). За Твердженням 2 м.н.

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n| - \ln|\xi_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} =$$
$$= \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)} \cdot \left(1 + \frac{\ln|\xi_n(\omega)|}{\ln|a_n|}\right) =$$
$$= \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln|\xi_n(\omega)|}{\ln|a_n|}\right) =$$
$$= \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)} = \sigma_\mu(F_1,\omega) = \sigma_\mu(F_2,\omega).$$

Звідси негайно отримуємо (9).

Для доведення (10), скористаємось Твердженням 13.

Зауважимо спочатку, що

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{|\ln|f_n(\omega)||} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{|\ln|a_n| + \ln|\xi_n(\omega)||} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{|\ln|a_n||}\left(1 + \frac{\ln|\xi_n(\omega)|}{\ln|a_n|}\right)^{-1} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{|\ln|a_n||} = 0.$$

Тому, за Твердженням 13, яке ми застосуємо двічі, отримаємо, що м.н.

$$\sigma(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} =$$
$$= \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n| - \ln|\xi_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} =$$
$$= \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)} \cdot \left(1 + \frac{\ln|\xi_n(\omega)|}{\ln|a_n|}\right) =$$
$$= \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln|\xi_n(\omega)|}{\ln|a_n|}\right) =$$
$$= \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)} = \sigma_\mu(F_1,\omega) = \sigma(F_1,\omega).$$

$\square$

Нехай тепер $(\eta_n(\omega))$ – послідовність стандартних нормально розподілених випадкових величин,тобто, $\eta_n(\omega) \in \mathcal{N}(0,1)$ $(n \geq 0)$. Правильна така лема.

**Лема 2.** *Існує подія $B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B) = 1$ і така, що для кожного $\omega \in B$ виконуються нерівності $(\exists n_0(\omega))(\forall n \geq n_0(\omega))$:*

$$-\varepsilon \ln n \leq -\ln|\eta_n(\omega)| \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \ln n,$$

*де $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване.*

*Доведення.* Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване. Позначимо $\ln\psi(k) = k^{2\varepsilon}$,

$$A_k = \{\omega : |\eta_k(\omega)| > \sqrt{\ln\psi(k)}\}.$$

Оскільки

$$P(|\eta_n| \geq \lambda) = \exp(-\lambda^2),$$

то послідовно отримаємо, що

$$P(A_k) = \frac{1}{\psi(k)}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\psi(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k^{2\varepsilon}} < +\infty.$$

Тому, за першою частиною леми Бореля-Кантелі серед подій послідовності $(A_k)$ з ймовірністю,щоджорівнює одиниці, відбувається лише скінченна кількість подій. Власне, існує $D_1 \in \mathcal{A}$ така, що $\mathbb{P}(D_1) = 1$ і для кожного $\omega \in D_1$ виконується

$$(\exists k_1(\omega))(\forall k \geq k_1(\omega)) : |\eta_k(\omega)| \leq \sqrt{\ln\psi(k)}.$$

Звідки, для кожного $\omega \in D_1$ і всіх $k \geq k_1(\omega)$ виконується нерівність

$$\ln|\eta_k(\omega)| \leq \ln\sqrt{\ln\psi(k)} = \varepsilon \ln k.$$

Далі, позначимо

$$B_k = \{\omega : |\eta_k(\omega)| > \frac{1}{k^{1/2+\varepsilon}}\}.$$

Оскільки $e^t \geq 1 + t$ $(\forall t \in \mathbb{R})$, то при $t = -\lambda^2$ отримуємо, що

$$P(|\eta_k| < \lambda) = 1 - P(|\eta_k| \geq \lambda) = 1 - \exp(-\lambda^2) \leq \lambda^2.$$

Звідки, послідовно маємо, що

$$P(B_k) = P\Big(|\eta_k| < \frac{1}{k^{1/2+\varepsilon}}\Big) \leq \frac{1}{k^{1+2\varepsilon}},$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+2\varepsilon}} < +\infty.$$

Тому, знову за першою частиною Леми Бореля-Кантелі існує подія $D_2 \in \mathcal{A}$ така,що $\mathbb{P}(D_2) = 1$ і для кожного $\omega \in D_2$ $(\exists k_2(\omega))$ $(\forall k \geq k_2(\omega))$ виконується $\omega \notin B_k$, тобто,

$$|\eta_k(\omega)| \geq \frac{1}{k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}.$$

Звідки, для кожного $\omega \in D_2$ $(\exists k_2(\omega))$ $(\forall k \geq k_2(\omega))$ виконується

$$\ln|\eta_k(\omega)| \geq -\big(\frac{1}{2} + \varepsilon\big)\ln k.$$

Для завершення доведення Леми залишається зауважити, що $\mathbb{P}(D_1 \cap D_2) = 1$. Тоді, для кожного $\omega \in D_1 \cap D_2$ остаточно отримуємо, що

$$(\forall k \geq \max\{k_1(\omega), k_2(\omega)\}):$$
$$-\varepsilon \ln k \leq -\ln|\eta_k(\omega)| \leq \Big(\frac{1}{2} + \varepsilon\Big)\ln k.$$

$\square$

З Твердження 15 і Леми 2 отримуємо наступне твердження.

**Твердження 16.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і має вигляд* (1) *з коефіцієнтами $f_n(\omega) = a_n\eta_n(\omega)$, де $(\eta_n(\omega))$ – послідовність нормально розподілених випадкових величин. Якщо $\ln n = o(\ln|a_n|)$ $(n \to +\infty)$, то, м.н.*

$$\sigma(F,\omega) \le \frac{\sigma(F,\omega) + \sigma_\mu(F,\omega)}{2} \le \sigma(F_2,\omega) \le$$
$$\le \inf\left\{\sigma(F,\omega) + \frac{\tau(\Lambda,\omega)}{2}, \sigma_\mu(F,\omega)\right\}. \tag{12}$$

*Доведення.* Для доведення досить переконатися, що виконуються умови Твердження 15. Справді, за Лемою 2 м.н.

$$|\ln|\eta_n(\omega)|| = O(\ln n) = o(|\ln|a_n||) \quad (n \to +\infty).$$

Залишається застосувати Твердження 15. □

Зауважимо,що у доведенні Твердження 15 встановлено,що

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \sigma_\mu(F_1,\omega) = \sigma_\mu(F_2,\omega) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)},$$
$$\sigma(F,\omega) = \sigma_\mu(F_1,\omega) = \sigma(F_1,\omega).$$

Для того, щоб сформулювати кілька інших тверджень зі статті [?], розглянемо два наступні класи випадкових величин.

Через $\Theta$ позначимо клас послідовностей комплекснозначних випадкових величин $\xi_n$ таких, що

$$(\exists c_j \in (0,+\infty))(\forall n)\colon\ \ c_1 \le |\xi_n| \le c_2 \text{ м.н.}$$

Через $\Delta$ позначимо клас невід'ємних випадкових величин $(\delta_n)$ таких, що

$$(\forall x \in (0,+\infty))(\forall n \in \mathbb{N})\colon \quad M(e^{x\delta_n}) \le C_1 = C_1(x) < +\infty.$$

Зауважимо,що правильною є така лема.

**Лема 3.** *Для послідовності випадкових величин* $(\delta_n(\omega)) \in \Delta$ *і для довільного* $\varepsilon > 0$ *м.н. виконується така нерівність*

$$e^{x\delta_n(\omega)} \leq C(x)n^{1+\varepsilon}, \quad n \geq n_0(\omega).$$

*Доведення.* Нехай $A_n = \{\omega\colon e^{x\delta_n(\omega)} > n^{1+\varepsilon}\}$. За нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}(A_n) \leq M(e^{x\delta_n(\omega)})n^{-1-\varepsilon} \leq C(x)n^{-1-\varepsilon},$$

тому, для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq C(x) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1-\varepsilon} < +\infty.$$

За першою частиною леми Бореля-Кантелі тепер маємо, що серед подій $A_n = \{\omega\colon e^{x\delta_n(\omega)} > n^{1+\varepsilon}\}$ м.н. виконується лише скінченна кількість подій. Тобто, існує $B \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(B) = 1$, така, що для кожного $\omega \in B$ знайдеться $n_0(\omega)$ таке, що для всіх $n \geq n_0(\omega)$ виконується

$$e^{x\delta_n(\omega)} \leq n^{1+\varepsilon}.$$

□

З Леми 3 отримуємо таке твердження.

**Твердження 17.** *Нехай* $F \in \mathcal{D}$ *і має вигляд* (1) *з коефіцієнтами* $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$, $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$, *і показниками* $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k\colon k \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $(\delta_n) \in \Delta$, *де* $(\xi_n(\omega))$ *– послідовність випадкових величин таких, що* $\ln|\xi_n(\omega)| = o(\ln|a_n|)$ $(n \to +\infty)$ *м.н. Якщо* $\ln n = o(\ln|a_n|)$

$(n \to +\infty)$, *то, м.н.*

$$\sigma(F,\omega) \le \frac{\sigma(F,\omega)+\sigma_\mu(F,\omega)}{2} \le \sigma(F_3,\omega) \le$$
$$\le \inf\left\{\sigma(F,\omega)+\frac{\tau(\Lambda,\omega)}{2}, \sigma_\mu(F,\omega)\right\}. \qquad (13)$$

*Доведення.* Зауважимо,що

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)} = \left(\varlimsup_{n\to+\infty}\left(\frac{\lambda_n}{-\ln|a_n|}+\frac{\delta_n(\omega)}{-\ln|a_n|}\right)\right)^{-1}.$$

Але, за Лемою 3 і за умовою, м.н.

$$\frac{\delta_n(\omega)}{|\ln|a_n|} \le \frac{1}{x}(1+\varepsilon)\frac{\ln n}{|\ln|a_n||} \to 0 \ (n\to+\infty).$$

Тому,

$$\sigma_\mu(F_2,\omega) = \sigma_\mu(F_1,\omega) = \varliminf_{n\to+\infty}\frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)} =$$
$$= \varliminf_{n\to+\infty}\frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n} = \sigma_\mu(F_4) = \sigma_\mu(F_3).$$

Залишається скористатися Твердженням 15. □

Подібно до того,як за допомогою Леми 2 з Твердження 15 отримали Твердження 16, за допомогою Леми 3 з Твердження 17 отримуємо таке твердження.

**Твердження 18.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і має вигляд* (1) *з коефіцієнтами* $\mathbf{f} = (f_n(\omega))$, $f_n(\omega) = a_n\eta_n(\omega)$, *і показниками* $\Lambda = (\lambda_n(\omega))$, $\lambda_n(\omega) = \lambda_n + \delta_n(\omega)$, $\{\lambda_n \colon n \ge 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $(\delta_n) \in \Delta$, *де* $(\eta_n(\omega))$ – *послідовність нормально розподілених випадкових величин. Якщо* $\ln n = o(\ln|a_n|)$ $(n \to +\infty)$, *то, м.н.*

$$\sigma(F,\omega) \le \frac{\sigma(F,\omega)+\sigma_\mu(F,\omega)}{2} \le \sigma(F_3,\omega) \le$$
$$\le \inf\left\{\sigma(F,\omega)+\frac{\tau(\Lambda,\omega)}{2}, \sigma_\mu(F,\omega)\right\}. \qquad (14)$$

Як вже відзначалося вище,з умови $\ln n = o(\ln|a_n|)$ $(n \to +\infty)$ для посдовності нормально розподілених випадкових величин $(\eta_n(\omega))$ випливає, що $\ln|\eta_n(\omega)| = o(\ln|a_n|)$ $(n \to +\infty)$. Тому, $\ln n = o(\ln|f_n(\omega)|)$ $(n \to +\infty)$, а за Твердженням 2

$$\sigma_\mu(F_4) = \sigma_\mu(F_3) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n}, \quad \sigma_\mu(F,\omega) = \sigma(F,\omega) \text{ м.н.}$$

Останні співвідношення відразу ж дають такий наслідок з Твердження 18.

**Твердження 19.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і має вигляд* (1) *з коефіцієнтами $\mathbf{f} = (f_n(\omega))$, $f_n(\omega) = a_n\eta_n(\omega)$, і показниками $\Lambda = (\lambda_n(\omega))$, $\lambda_n(\omega) = \lambda_n + \delta_n(\omega)$, $\{\lambda_n\colon n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $(\delta_n) \in \Delta$, де $(\eta_n(\omega))$ – послідовність нормально розподілених випадкових величин. Якщо $\ln n = o(\ln|a_n|)$ $(n \to +\infty)$, то абсциса абсолютної збіжності $\sigma(F,\omega)$ є м.н. сталою. При цьому виконується рівність*

$$\sigma(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = \sigma_\mu(F_4) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n} \quad \textit{м.н.}$$

З твердження 14 за допомогою теореми про три ряди у статті [?] доводиться таке твердження. З огляду на все, що було сказано вище, воно залишається правильним і без додаткового апріорного припущення, що м.н.

$$\varliminf_{n\to+\infty} \lambda_n(\omega) > 0.$$

**Твердження 20** ([?]). *Нехай $(\xi_n) \in \Theta$, $(\delta_n) \in \Delta$, а $F \in \mathcal{D}$ з коефіцієнтами $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ і показниками $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k\colon k \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$.*

**1.** *Якщо $M\big(\xi_n e^{x\delta_n}\big) = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного*

*$x \in \mathbb{R}$, $\left(\xi_k e^{x\delta_k}\right)$ – послідовність незалежних випадкових величин для кожного $x \in \mathbb{R}$, то $\sigma_{зб}(F,\omega) \geq \sigma(F_3)$ м.н.*

**2.** *Якщо додатково припустити, що $(\exists C_2(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}): \ M(e^{x\delta_n}) \geq C_2(x)$, то $\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma(F_3)$ м.н.*

У статті [?] також наведені наступні зауваження.

**Зауваження 1.** 1) $M(e^{x\delta_n}) = \varphi_{\delta_n}(-ix)$, де $\varphi_\delta$ – характеристична функція випадкової величини, то у випадку, якщо всі $\delta_n$ однаково розподілені, $\varphi_{\delta_n}(-ix) = \varphi_{\delta_0}(-ix) := C(x)$. Якщо тепер $(\forall x \in \mathbb{R})$: $C(x) \neq \infty$, то в умовах твердження 20 достатньо взяти $C_1(x) = C_2(x) = C(x)$.
2) Якщо $(\delta_k(\omega))$ і $(\xi_k(\omega))$ – дві послідовності незалежних випадкових величин, то такою ж є і послідовність $\left(\xi_k e^{x\delta_k}\right)$ для кожного $x \in \mathbb{R}$.

Наступне твердження зі статті [?] також правильне без апріорного припущення, що м.н.

$$\varliminf_{n\to+\infty} \lambda_n(\omega) > 0.$$

**Твердження 21** ([?]). *Нехай $(\xi_n) \in \Theta$, $(\delta_n) \in \Delta$, а $F \in \mathcal{D}$ з коефіцієнтами $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ і показниками $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k \colon k \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$.*
**1.** *Якщо $\left(\xi_k e^{x\delta_k}\right)$ – послідовність незалежних випадкових величин для кожного $x \in \mathbb{R}$, то $\sigma(F,\omega) \geq \sigma(F_4)$ м.н.*
**2.** *Якщо додатково припустити, що*

$$(\forall x, x < \sigma(F,\omega))(\exists a > 0)(\forall n \geq 1) \colon P\{\omega \colon |a_n| e^{x\lambda_n(\omega)} < a\} = 1$$

*і* $(\forall n \in \mathbb{N})\colon |\xi_n(\omega)| = c \neq \infty$ *м.н., а також* $(\exists C_3(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}):\ De^{x\delta_n} \geq C_3(x)$*, то* $\sigma(F, \omega) = \sigma(F_4)$ *м.н.*

**Зауваження 2.** *Якщо крім всього припустити, що* $(\delta_n)$ *– однаково розподілені, то* $D\big(e^{x\delta_n(\omega)}\big) = d(x) \leq C_1(2x) \in (0, +\infty)$*.*

Зазначимо, що отримані вище твердження істотно відрізняються від останніх двох Тверджень 20 та 21, які проте також містять дещо слабші апріорні умови, ніж відповідні твердження зі статті [**?**].

## 5 Випадок нормального розподілу коефіцієнтів характеристичних функцій

**Лема 4.** *Нехай випадкова величина* $\xi(\omega) \in \mathcal{N}(0,1)$*. Тоді* $\forall \lambda \in [0, +\infty)$ :

$$P\big(\omega : |\xi(\omega)| < \lambda\big) \leq \lambda^2.$$

*Доведення.* Оскільки для випадкової величини $\xi(\omega) \in \mathcal{N}(0,1)$ і для довільного $\lambda \in [0, +\infty)$ виконується:

$$P\big(\omega : |\xi(\omega)| < \lambda\big) = \frac{1}{\pi} \iint_{|z|<\lambda} e^{-|z|^2} dxdy = 1 - e^{-\lambda^2},$$

то розглянемо функцію $\varphi(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} - \lambda^2$. Її похідна рівна

$$\varphi'(\lambda) = 2\lambda e^{-\lambda^2} - 2\lambda = 2\lambda(e^{-\lambda^2} - 1) \leq 0 \ \ \forall \lambda \in [0, +\infty).$$

Тому функція $\varphi(\lambda)$ незростає на $[0, +\infty)$.

Отже, $P\big(\omega : |\xi(\omega)| < \lambda\big) \leq \lambda^2 \ \ \forall \lambda \in [0, +\infty)$.

□

**Твердження 22.** *Нехай* $F \in \mathcal{D}$ *з коефіцієнтами* $\xi_k(\omega) \in \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$.

*Якщо* $(\exists C_1, C_2 \in (0, +\infty))(\forall k) : \ C_1 \leq \sigma_k \leq C_2$*, тоді* $(\forall \alpha \in (0, +\infty))(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)$ :

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}} \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \right| \leq n^{\frac{1}{2}}.$$

*Доведення.* Нижня оцінка.

З того, що для випадкової величини $\xi(\omega) \in \mathcal{N}(0,1)$ виконується умова $P\big(\omega : |\xi(\omega)| < \lambda\big) \leq \lambda^2$ (див. лема) маємо, що для випадкової величини $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k(\omega)}{\sigma_k} =: \xi(n, \omega) \in \mathcal{N}(0,1)$ є правильною нерівність

$$P\Big(\omega : \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k(\omega)}{\sigma_k}\Big| < \lambda\Big) \le \lambda^2.$$

У такому разі при $\lambda = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}$, де $\alpha \in (0, +\infty)$ - довільне, ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Big(\omega : \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)\Big| < \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\Big) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{+\infty} P\Big(\omega : \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k(\omega)}{\sigma_k}C_1\Big| < \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P\Big(\omega : \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k(\omega)}{\sigma_k}\Big| < \frac{1}{C_1 n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\Big) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{C_1 n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\Big)^2 = \frac{1}{C_1^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+2\alpha}} < +\infty \quad \forall\alpha \in (0, +\infty).$$

За лемою Бореля-Кантелі отримуємо, що $\big(\forall\alpha \in (0, \infty)\big)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n > n_1) :$

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)\Big| \ge \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}.$$

Верхня оцінка.

З того, що ймовірності

$$P\Big(\omega : \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)\Big| \ge \lambda\Big) = 1 - P\Big(\omega : \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)\Big| < \lambda\Big) \le$$

$$\le 1 - P\Big(\omega : \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k(\omega)}{\sigma_k}C_2\Big| < \lambda\Big) = 1 - \Big(1 - e^{-\frac{\lambda^2}{C_2^2}}\Big) = e^{-\frac{\lambda^2}{C_2^2}},$$

то при $\lambda_n = \sqrt{n}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Big(\omega : \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)\Big| \ge \lambda_n\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P\Big(\omega : \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)\right| \geq \sqrt{n}\Big) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\sqrt{n}}{C_2}\right)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n}{C_2^2}} < +\infty.$$

З ознаки Коші з радикалом переконуємось, що

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^{-\frac{n}{C_2^2}}} = e^{-\frac{1}{C_2^2}} < 1.$$

Звідси, за лемою Бореля-Кантелі $(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n > n_2)$ :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)\right| \leq n^{\frac{1}{2}}.$$

Залишається покласти $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. □

**Твердження 23.** *Нехай* $F \in \mathcal{D}$ *з коефіцієнтами* $\xi_k(\omega) \in \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$.

*Якщо* $(\exists C_1, C_2 \in (0, +\infty))(\forall k):\ C_1 \leq \sigma_k \leq C_2$, *тоді* $(\forall \alpha \in (0, +\infty))(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n < n_0)$ :

$$\frac{1}{n^{1/2+\alpha}} \leq |\xi_n(\omega)| \leq n^{\alpha}.$$

*Доведення.* Нижня оцінка.

Згідно з лемою маємо, що для випадкової величини $\xi(\omega) \in \mathcal{N}(0,1)$ виконується умова $P\big(\omega : |\xi(\omega)| < \lambda\big) \leq \lambda^2$. Тому правильно, що $\frac{\xi_n(\omega)}{\sigma_n} =: \eta_n(\omega) \in \mathcal{N}(0,1)$ і

$$P\big(\omega : |\xi_n(\omega)| < \lambda\big) \leq P\Big(\omega : \left|\frac{\xi_n(\omega)}{\sigma_n}C_1\right| < \lambda\Big) \leq \frac{\lambda^2}{C_1^2}. \qquad (15)$$

Поклавши $\lambda_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}$, де $\alpha \in (0, +\infty)$ - довільне і враховуючи нерівності (9) отримуємо, що

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\big(\omega : |\xi_n(\omega)| < \lambda_n\big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\omega : |\xi_n(\omega)| < \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+2\alpha} C_1^2} = \frac{1}{C_1^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+2\alpha}} < +\infty \quad \forall \alpha \in (0, +\infty).$$

Отже, за лемою Бореля-Кантелі, $(\forall \alpha \in (0, +\infty))(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n > n_1) :$

$$|\xi_n(\omega)| \geq \frac{1}{n^{1/2+\alpha}}.$$

Верхня оцінка.

Оскільки для випадкової величини $\xi(\omega) \in \mathcal{N}(0,1)$ $m$-ий момент $M|\xi(\omega)|^m$ рівний

$$M|\xi(\omega)|^m = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |z|^m e^{-|z|^2} dx dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} \rho^m e^{-\rho^2} \rho d\rho =$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \rho^{m+1} e^{-\rho^2} d\rho = \left| \rho^2 = t \right| = \int_0^{+\infty} t^{\frac{m}{2}} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right),$$

де символ $\Gamma(\cdot)$ позначає гамма-функцію Ейлера.

Тоді за нерівністю Маркова для парного значення числа $m$ і для довільного значення $\alpha > 0$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\big(\omega : |\xi_n(\omega)|^m \geq n^{m\alpha}\big) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\omega : \left|\frac{\xi_n(\omega)}{\sigma_n} C_2\right|^m \geq n^{m\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\omega : \left|\frac{\xi_n(\omega)}{\sigma_n}\right|^m \geq \frac{n^{m\alpha}}{C_2^m}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_2^m M \left|\frac{\xi_n(\omega)}{\sigma_n}\right|^m}{n^{m\alpha}} =$$

$$= C_2^m \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}{n^{m\alpha}} < +\infty,$$

де з довільності вибору $m$ обираємо таке, що $m\alpha > 1$.

З леми Бореля-Кантелі отримуємо, що $\big(\forall\alpha \in (0, +\infty)\big)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n > n_2)$:

$$|\xi_n(\omega)|^m < n^{m\alpha}$$

або

$$|\xi_n(\omega)| < n^{\alpha}.$$

На завершення доведення покладемо $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. $\square$

## 6 Висновки

У цій роботі розглянуто оцінки абсцис збіжності та існування максимального члена ряду для загального випадку випадкового ряду Діріхле, а саме, для ряду, який можна подати у вигляді $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)},\ z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega$ з випадковими комплекснозначними коефіцієнтами $f_k(\omega)$ та випадковими дійсними невід'ємними попарно різними показниками $\lambda_k(\omega)$.

Випадкові ряди Діріхле вигляду $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)},\ z \in \mathbb{C}$, $\omega \in \Omega$ у випадку, коли на їхні коефіцієнти накладено умову $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) = 1$, а показники $\lambda_k(\omega)$ пов'язані з цими коефіцієнтами умовою $f_k(t,\omega) = \mathbb{P}\big(\omega : \xi_t(\omega) = \lambda_k(t,\omega)\big)$, де $\xi_t(\omega)$ — випадкова величина при кожному $t \in I$ ($I$ — нескінченна дискретна множина на $\mathbb{R}$) описують характеристичну функцію деякого дискретного випадкового процесу, дослідженням яких (випадкових процесів) займається наука – теорія ймовірностей.

Отже, пошуки асимптотичних властивостей, які здійснено у цій магістерській роботі можна застосувати для характеристичних функцій (які можна подати у вигляді ряду Діріхле) стосовно питань абсцис збіжності (зокрема абсолютної) та існування максимального члена ряду.

Як приклад застосування зі знайдених властивостей, які можна застосувати для характеристичної функції, подано **приклад 6** на с. 22 (випадок геометрично розподіленої випадкової величини з дискретного випадкового процесу).