

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА
ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математичної
економіки, економетрії,
фінансової та страхової
математики

Магістерська робота
Моделі оптимального керування в
маркетингу та їх чисельна симуляція

Виконав:
студент групи МТЕМ-21
спеціальності 111 – *мате-
матика спеціалізації ма-
тематична економіка та
економетрика*
Продан Ю-М. М.

Науковий керівник:
доц. Флюд В. М.

*Роботу рекомендовано до захисту
на засіданні кафедри математичної
економіки, економетрії, фінансової
та страхової математики,
протокол від 08 грудня 2021 року № 5*

*Завідувач кафедри
проф. Кирилич В. М.*

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА
ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ, ЕКОНОМЕТРІЇ,
ФІНАНСОВОЇ ТА СТРАХОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Пояснювальна записка

до магістерської (кваліфікаційної) роботи

магістр

(освітній рівень)

на тему

Моделі оптимального керування в маркетингу та їх чисельна симуляція

Виконав: студент групи МТЕМ-21
спеціальності математика 111
*математика спеціалізації математична
економіка та економетрика*
Продан Ю-М. М.

Керівник доц. Флюд В. М.
Рецензент доц. Терещук О. В.

Зміст

1 Вступ	4
2 Постановка задачі Nerlove-Arrow	5
2.1 Модель	5
2.2 Принцип максимуму Понтрягіна	6
2.3 Нелінійне розширення	8
3 Рекламна модель Vidale-Wolfe	11
3.1 Оптимальне керування у моделі Vidale-Wolfe	11
3.2 Знаходження розв'язку за допомогою теореми Гріна (Q велике)	12
3.3 Знаходження розв'язку у випадку малого Q	20
3.4 Знаходження розв'язку у випадку нескінченного T	21
4 Висновки	24
Література	25
5 Додаток А	26

1 Вступ

Протягом багатьох років теорія оптимального керування використовується у сфері маркетингу. Зокрема, при встановленні оптимальної ціни реклами задача приводиться до задачі оптимального керування. Окрім цього виникає задача визначення залежності оптимальної ціни та якості від часу, незалежно від використання реклами. У магистерській роботі розглядаються відомі моделі Nerlove-Arrow і Vidale-Wolfe, у який досліджується оптимальна рекламна поведінка фірми.

При дослідженні поведінки фірми та математичної моделі рекламної кампанії припускаємо, що фірма володіє інформацією про динаміку продажів і реклами. Такі знання виражаються в термінах диференціального рівняння з гудвілом або показником продажів як змінною стану, а показником витрат на рекламу як керуючою змінною. Припустимо, що фірма має на меті максимізувати цільову функцію (критерійну функцію), яка відображає її мотиви прибутки, виражені в термінах продажів і рекламних ставках. Задача оптимального керування полягає в тому, щоб знайти рекламну політику, яка максимізує цільову функцію фірми.

Робота складається з таких частин: у підрозділі 2 розглядається модель Nerlove-Arrow, а також її нелінійне розширення. У підрозділі 3 розглядається рекламна модель Vidale-Wolfe та її детальний аналіз використовуючи аналіз теореми Гріна та використовуючи принцип максимуму.

При написанні роботи використані матеріали моделі, описані у *Optimal control theory. Applications to Management Science and Economics. Second Edition.* Suresh P. Sethi, Gerald L. Thompson у 2000 р.

2 Постановка задачі Nerlove-Arrow

Переконання в те, що витрати фірми на рекламу впливають на її нинішні та майбутні продажі, а отже, на її теперішній і майбутній чистий дохід, змусило низку економістів, включаючи Nerlove та Arrow у 1962 році, розглядати рекламу як інвестицію у створення певного виду рекламного капіталу, який зазвичай називають гудвілом.

Гудвіл – нематеріальні активи: репутація, становище на ринку, вартість товарних знаків, самі товарні знаки, кваліфікація співробітників тощо. Гудвіл не включає ідентифіковані активи, які можна відокремити або відокремити від суб'єкта господарювання та продати, передати, ліцензувати, орендувати чи обміняти окремо або разом із пов'язаним контрактом, ідентифікованим активом чи зобов'язанням, незалежно від того, чи збирається суб'єкт господарювання зробити так. Гудвіл також не включає договірні чи інші юридичні права, незалежно від того, чи можна їх передати чи відокремити від суб'єкта господарювання чи інші права та зобов'язання. У сучасному розумінні гудвіл – це особливий тип нематеріальних активів, який представляє ту частину всієї вартості бізнесу, яку не можна віднести до інших активів бізнесу, які приносять дохід, матеріальних чи нематеріальних. Крім того, запас гудвілу з часом знизиться, як зазначали Vidale і Wolfe у 1957 р., Palda 1964 р.

Гудвіл може бути створений шляхом долучення нових клієнтів або шляхом зміни смаків і вподобань споживачів і, таким чином, зміни функції попиту на продукт фірми. Гудвіл з часом знецінюється, оскільки споживачі "переходять" на інші бренди в результаті реклами конкуруючих фірм та впровадження нових продуктів та/або нових брендів тощо.

2.1 Модель

Нехай $G(t) \geq 0$ позначає запас гудвілу в момент часу t . Ціна (або вартість виробництва) однієї одиниці гудвілу становить 1 долар, тому долар, витрачений на поточну рекламу, збільшує гудвіл на одну одиницю. Передбачається, що запас гудвілу з часом знецінюється з постійною пропорційною швидкістю δ , так що

$$\dot{G} = u - \delta G, \quad G(0) = G_0 \quad (2.1)$$

де $u = u(t) \geq 0$, рекламні інвестиції за час t , що виміряні в доларах за одиницю часу. З економічної точки зору, рівняння (2.1) стверджує, що чисті інвестиції в гудвіл є різницею між валовими інвестиціями $u(t)$ та амортизацією $\delta G(t)$.

Щоб сформулювати задачу оптимального керування для монополістичної фірми, припустимо, що швидкість продажу $S(t)$ залежить від запасу гудвілу $G(t)$, ціни $p(t)$ та інших екзогенних змінних $Z(t)$, таких як доходи споживачів, чисельність населення тощо. Отже,

$$S = S(p, G, Z).$$

Припускаючи, що рівень загальних витрат виробництва дорівнює $c(S)$, можемо записати загальний дохід за вирахуванням витрат виробництва як

$$R(p, G, Z) = pS(p, G, Z) - c(S). \quad (2.2)$$

Отже, дохід за вирахуванням витрат на рекламу дорівнює $R(p, G, Z) - u$. Припустимо, що фірма хоче максимізувати поточну вартість потоків чистого доходу, дисконто-

ваних за фіксованою ставкою p , тобто

$$\max_{u \geq 0, p \geq 0} \left\{ J = \int_0^{\infty} e^{-pt} [R(p, G, Z) - u] dt \right\} \quad (2.3)$$

з урахуванням (2.1).

Оскільки p , входить у задачі тільки в інтегральному (2.3) виразі, то припустивши J фіксованим, знайдемо максимум по p , яка буде функцією по u . Наступною функцією будемо максимізувати по u .

$$\frac{\partial R(p, G, Z)}{\partial p} = S + p \frac{\partial S}{\partial p} - c'_s \frac{\partial S}{\partial p} = 0, \quad (2.4)$$

який неявно дає оптимальну ціну $p^*(t) = p(G(t), Z(t))$. Так як $\eta = -(p/S)(\partial S/\partial p)$ є еластичністю попиту щодо ціни, перепишемо умову (2.4) у вигляді

$$p^* = \frac{\eta c'_s S}{\eta - 1},$$

яка є звичайною формулою ціни для монополіста, іноді відома як відношення Amoroso-Robinson. Тобто, формула означає, що граничний дохід $(\eta - 1)p/\eta$ дорівнює граничним витратам $c'(S)$.

Визначивши $\pi(G, Z) = R(p^*, G, Z)$, цільову функцію в (2.3) запишемо у вигляді

$$\max_{u \geq 0} \left\{ J = \int_0^{\infty} e^{-pt} [\pi(G, Z) - u] dt \right\}.$$

Для зручності припустимо, що Z є заданою константою і переформулюємо задачу оптимального керування, у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u \geq 0} \left\{ J = \int_0^{\infty} e^{-pt} [\pi(G, Z) - u] dt \right\} \\ \text{якщо} \\ \dot{G} = u - \delta G, \quad G(0) = G_0. \end{array} \right.$$

2.2 Принцип максимуму Понтрягіна

Nerlove та Arrow у роботі 1962 р. досліджували задачу методами варіаційного числення. Для отримання оптимального розв'язку задачі застосуємо, на відміну Nerlove та Arrow, принцип максимуму Понтрягіна. У цьому випадку гамільтоніан матиме вигляд

$$H = \pi(G) - u + \lambda[u - \delta G] \quad (2.5)$$

з приєднаною змінною λ , яка задовольняє диференціальне рівняння

$$\dot{\lambda} = \rho \lambda - \frac{\partial H}{\partial G} = (\rho + \delta) \lambda - \frac{\partial \pi}{\partial G} \quad (2.6)$$

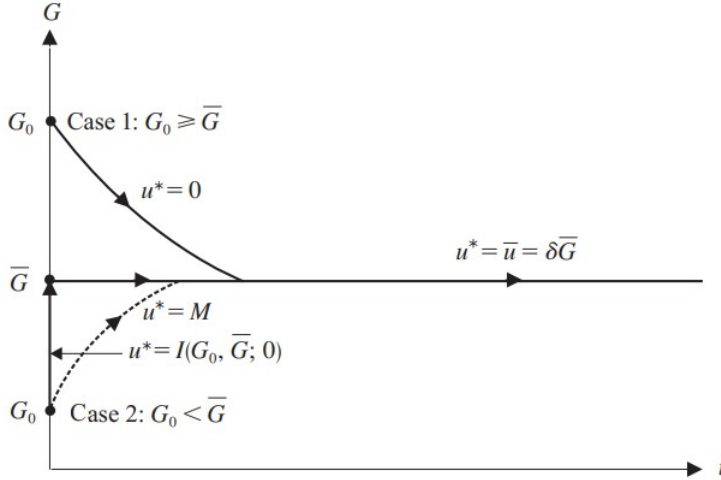


Рис. 1: Оптимальна поведінка за моделлю Nerlove-Arrow

за умови, що

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} \lambda(t) = 0.$$

Приєднана змінна $\lambda(t)$ - це прихована ціна, пов'язана з гудвілом у момент часу t . Таким чином, гамільтоніан у (2.5) можна інтерпретувати як динамічну норму прибутку, яка складається з двох доданків: (i) поточна норма чистого прибутку $(\pi(G) - u)$ та (ii) значення $\lambda \dot{G} = \lambda[u - \delta G]$ нового гудвілу, створеного рекламою за ставкою u . Також рівняння (2.6) відповідає звичайному рівноважному відношенню для інвестицій у капітальні товари. У ньому зазначено, що граничні альтернативні витрати $\lambda(\rho + \delta)dt$ інвестиції в гудвіл повинні дорівнювати граничному прибутку від збільшення гудвілу та приросту капіталу $d\lambda := \dot{\lambda}dt$.

Визначивши $\beta = (G/S)(\partial S/\partial G)$ як еластичність попиту щодо гудвілу та використовуючи (2.2), (2.4) та (2.6), одержимо

$$G^* = \frac{\beta p S}{\eta[(\rho + \delta)\lambda - \dot{\lambda}]} \quad (2.7)$$

Це точно той самий результат, отриманий Jасquemin (1973) з інтерпретацією, що в оптимальному випадку відношення гудвілу до доходу від продажів pS прямо пропорційне еластичності гудвілу, обернено пропорційне еластичності ціни та обернено пропорційне до суми граничних альтернативних витрат $\lambda(\rho + \delta)$ інвестицій плюс ставка, за якою потенційний внесок одиниці гудвілу в прибуток стає її минулим внеском $(-\dot{\lambda})$.

Отримаємо $\lambda = \bar{\lambda} = 1$ з (2.5) використовуючи $\dot{\lambda} = 0$. Тоді встановимо $\lambda = \bar{\lambda} = 1$ і $\dot{\lambda} = 0$ у (2.6).

Нарешті, з (2.7) та (2.6), \bar{G} або також окремий рівень G^S можна отримати як

$$\bar{G} = G^S = \frac{\beta p S}{\eta(\rho + \delta)} = \frac{\rho + \delta}{\partial \pi / \partial G}.$$

Властивість \bar{G} полягає в тому, що оптимальна поведінка, щоб перейти до \bar{G} якомога швидше. Якщо $G_0 < \bar{G}$, оптимально миттєво перейти до \bar{G} , застосувавши відповідний

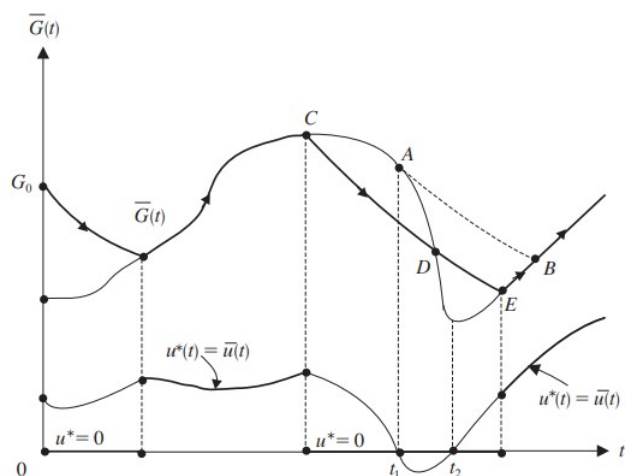


Рис. 2: Випадок залежної від часу магістралі та природа оптимального керування

імпульс при $t = 0$, а потім встановити $u^*(t) = \bar{u} = \delta \bar{G}$ для $t > 0$. Якщо, $G_0 > \bar{G}$ оптимальне керування $u^*(t) = 0$, до тих пір, поки запас гудвілу не знеціниться до рівня \bar{G} після чого керування перемикається на $u^*(t) = \delta \bar{G}$ і залишається на цьому рівні для підтримки рівня \bar{G} гудвілу. Ця оптимальна поведінка зображена на малюнку 1 для цих двох різних початкових умов.

Однак для залежного від часу Z , $\bar{G}(t) = G(Z(t))$ буде функцією часу. Щоб підтримувати цей рівень $\bar{G}(t)$, необхідний керування становить $\bar{u}(t) = \delta \bar{G}(t) + \bar{G}(t)$. Якщо $\bar{G}(t)$ зменшується досить швидко, то $\bar{u}(t)$ може набирати від'ємних значень і, таким чином, нереальним. Якщо $\bar{u}(t) \geq 0$ для всіх t , то оптимальна поведінка буде як раніше. Однак припустимо, що $\bar{u}(t)$ неможливе в інтервалі $[t_1, t_2]$ показаному на малюнку 2. У такому випадку можливо встановити $u(t) = \bar{t}$ для $t \leq t_1$; при $t = t_1$ (що є точкою А на малюнку 2) більше не можемо залишатися на магістралі, і повинні встановити $u(t) = 0$, поки знову не вдаримось в магістраль (у точці В на малюнку 2). Однак така політика не обов'язково є оптимальною. Наприклад, припустимо, залишаємо магістраль в точці С, передбачаючи неможливість в точці А. Новий шлях СДЕВ може бути кращим, ніж старий шлях САВ. Приблизно причиною цього може статися те, що шлях СДЕВ знаходиться "ближче" до магістралі, ніж САВ. Наприклад, 2 ілюструє такий випадок. Оптимальна поведінка - та, котра є найближчою до магістралі.

З точки зору теорії керування, модель Nerlove-Arrow є прикладом, що включає в себе стрибок і імпульсний контроль, за яким слідує одиничний контроль, яке виникає в класі задач оптимального управління. З точки зору реклами, це основоположний документ, незважаючи на те, що поведінка "bang-bang" не є загально визнаною як реалістична рекламна поведінка. Щоб уникнути такої політики, розглянемо нелінійне узагальнення.

2.3 Нелінійне розширення

Нелінійні розширення моделі Nerlove-Arrow означають, що цільова функція стає нелінійною в рекламі. Gould у 1970 р. розширив модель, припустивши нелінійну вартість рекламних інвестицій. Jacquemin у 1973 р. припустив, що функція попиту S також прямо залежить від рекламних інвестицій u . В результаті π в цільовій функції (2.1) на-

буває вигляду

$$\pi = \pi(u, G).$$

Розглянемо випадок коли π не залежить від екзогенної змінної Z .

Розглянемо простішу версію моделі Jасquetin, проаналізовану Bensoussan та ін. у 1974 р. Вони припустили, що функція $\pi(u, G)$ є сепарабельною, тобто

$$\pi(u, G) = \pi_1(u) + \pi_2(G),$$

де $G \geq 0$ і π_1 і π_2 вважаються зростаючими строго увігнутими функціями, тобто $\pi_1' > 0$, $\pi_2' > 0$, $\pi_1'' < 0$, і $\pi_2'' < 0$. Відзначимо, що це також можна інтерпретувати у розумінні Gould із вартістю реклами $c(u) = u - \pi_1(u)$. Як наслідок після вказаних припущень задача оптимального керування запишеться наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u \geq 0} \left\{ J = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} [\pi_1(u) + \pi_2(G) - u] dt \right\} \\ \text{за умови} \\ \dot{G} = u - \delta G, \quad G(0) = G_0. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Гамільтоніан для задачі

$$H = \pi_1(u) + \pi_2(G) - u + \lambda(u - \delta G),$$

де

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \pi_2'(G) + \delta\lambda. \quad (2.9)$$

Диференціювання H за u дає

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \pi_1'(u) - 1 + \lambda = 0. \quad (2.10)$$

Оскільки $\pi_1'' < 0$, можемо інвертувати π_1' для розв'язання (2.10) для u як функцію від λ . Таким чином,

$$u = f_1(\lambda). \quad (2.11)$$

Функція f_1 в (2.11) дозволяє переписати рівняння стану в (2.8) і приєднане рівняння (2.9) у вигляді наступної задачі на початкове значення:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{G} + \delta G = f_1(\lambda), \quad G(0) = G_0, \\ -\dot{\lambda} + (\rho + \delta)\lambda = \pi_2'(G), \quad \lambda(0) = \lambda_0, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

однак, значення λ_0 невідоме, і буде визначено нижче при дослідженні, описаним нижче. Також зауважимо, що $\pi_2'(G) > 0$ для $G \geq 0$ і $\pi_2'(G)$ є спадною функцією.

Дамо геометричну інтерпретацію системі (2.12) в просторі (λ, G) . Цей метод називається методом фазової діаграми, описаним нижче. Використовуючи зазначені вище властивості функцій f_1 і π_2' і встановивши $\dot{\lambda} = 0$ і $\dot{G} = 0$, можемо об'єднати два рівняння в (2.12), як показано пунктирно на фазовій діаграмі на малюнку 3. Перетин двох кривих $\delta G = f_1(\lambda)$ і $(\rho + \delta)\lambda = \pi_2'(G)$ є точкою $(\bar{\delta}, \bar{G})$ з $\bar{\lambda}$ що задовольняє $0 < \bar{\lambda} < 1$. Ці

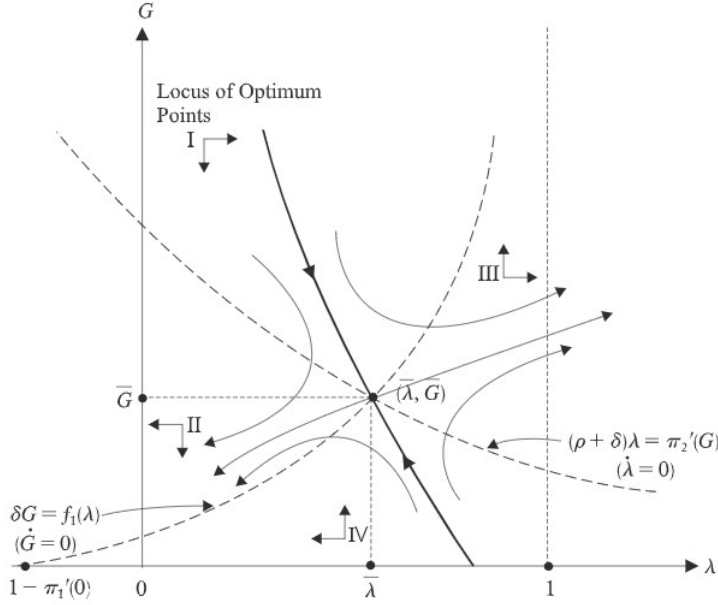


Рис. 3: Фазова діаграма системи (2.12) для задачі (2.8)

дві криві розділяють площину на чотири області, позначені на малюнку I, II, III та IV. Зазначимо, що для цієї задачі $\{\bar{G}, \bar{u}, \bar{\lambda}\}$, де $\bar{u} = \delta\bar{G}$, магістраль для цієї задачі.

Зазначимо, що

$$\begin{cases} \text{в області I та II,} & \delta G - f_1(\lambda) > 0, \\ \text{в області III та IV,} & \delta G - f_1(\lambda) < 0, \\ \text{в області I та III,} & (\rho + \delta)\lambda - \pi_2'(G) > 0, \\ \text{в області I та IV,} & (\rho + \delta)\lambda - \pi_2'(G) < 0, \end{cases}$$

що передбачає, що

$$\begin{cases} \text{в області I,} & G \text{ зменшується і } \lambda \text{ зростає,} \\ \text{в області II,} & G \text{ зменшується і } \lambda \text{ зменшується,} \\ \text{в області III,} & G \text{ зростає і } \lambda \text{ зростає,} \\ \text{в області IV,} & G \text{ зростає і } \lambda \text{ зменшується.} \end{cases}$$

Через ці умови зрозуміло, що для даного G_0 , вибір λ_0 такий, що (λ_0, G) знаходиться в областях II і III, не призведе до шляху, що сходиться до точки розвороту $(\bar{\lambda}, \bar{G})$. З іншого боку, вибір (λ_0, G) в області I, коли $G_0 < \bar{G}$ або (λ_0, G_0) у області IV де $G_0 > \bar{G}$, може дати шлях, який сходиться до $(\bar{\lambda}, \bar{G})$. Використовуючи результати Coddington та Levinson з 1955 р., можна показати, що принаймні в околі $(\bar{\lambda}, \bar{G})$, існує місце оптимальним вихідним точкам (λ_0, G_0) . Детальний аналіз веде до траєкторії сідлової точки, як показано затемненим на малюнку 3. Щоб знайти оптимальний розв'язок для даного G_0 , знаходимо відповідний λ_0 на шляху сідлової точки, а потім оптимальна траєкторія, зображена в (λ, G) -просторі, рухається вздовж шляху в напрямку, показаному стрілками.

Враховуючи $G_0 > \bar{G}$, вибираємо λ_0 на шляху перехідної точки в області I на малюнку 3. Очевидно, початкове керування $u^*(0) = f_1(\lambda_0)$. Крім того, $\lambda(t)$ зростає, а за (2.11), $u(t)$ зростає, тому в цьому випадку оптимальною політикою є початкова реклама з низькою ставкою та поступово збільшуючи рекламу до рівня $\bar{u} = \delta\bar{G}$. Якщо $G_0 < \bar{G}$,

можна аналогічно показати, що оптимальна поведінка полягає в тому, щоб рекламувати найбільш інтенсивно на початку і поступово знижувати її до рівня магістралі \bar{u} коли G наближається до \bar{G} .

Зазначимо, що підхід до рівноваги \bar{G} більше не здійснюється за допомогою керування вибухом, як у моделі Nerlove-Arrow. Це, звісно, те, чого можна було б очікувати, коли модель робиться нелінійною щодо керуючої змінної u .

Альтернативна процедура фазової діаграми полягала б у розв'язанні проблеми в просторі (u, G) , як це було досліджено Feichtinger та Hartl у 1986р. Процедура вимагає використання (2.9) та (2.10) для виведення диференціального рівняння для u .

3 Рекламна модель Vidale-Wolfe

Наведемо аналіз рекламної моделі Vidale-Wolfe, яка, на відміну від моделі Nerlove-Arrow, не використовує ідею рекламного гудвілу. Натомість модель використовує тісно пов'язане поняття того, що ефект реклами має тенденцію зберігатися, але зі зменшуваним ефектом, протягом наступних періодів часу. Цей ефект переносу моделюється явно за допомогою диференціального рівняння, яке дає зв'язок між продажами та рекламою.

Vidale і Wolfe у своїй праці довели, що зміни темпів продажів продукту залежать від двох ефектів: реакції на рекламу, яка діє (через показник відповіді a) на непродану частину ринку, і втрати через забуття, яка діє (через показник спадання b) на проданій частині ринку. Нехай $M(t)$, відомий як рівень насичення ринкового потенціалу, позначає максимальну потенційну швидкість продажів у момент t . Нехай $S(t)$ – фактичний рівень продажів у момент t . Тоді модель Vidale-Wolfe для монопольної фірми можна сформулювати як

$$\dot{S} = au\left(1 - \frac{S}{M}\right) - bS. \quad (3.1)$$

Особливістю цього рівняння, що відрізняє його від рівняння Nerlove-Arrow (2.1), є ідея кінцевого рівня насичення M . Модель Vidale-Wolfe демонструє зниження віддачі від рівня реклами як прямий наслідок цього явища насичення. Зауважимо, що коли M нескінченно велике, явище насичення зникає, зводячи (3.1) до рівняння (з постійною віддачею від реклами), подібного до рівняння Nerlove-Arrow (2.1). Nerlove та Arrow з іншого боку, включають ідею зменшення віддачі від реклами в свою модель, зробивши продажі S в (2.1) увігнутою функцією гудвілу.

Vidale і Wolfe заснували модель на результатах кількох експериментальних досліджень ефективності реклами.

3.1 Оптимальне керування у моделі Vidale-Wolfe

Оскільки Vidale і Wolfe запропонували свою модель в першу чергу як опис реальних ринкових явищ, представлених випадками, які вони спостерігали, отримуємо оптимальні витрати на рекламу для моделі, щоб максимізувати певну цільову функцію за горизонтом T , а також досягти кінцевої кількості продажів. Зробимо заміну змінної (3.1)

$$x = \frac{S}{M}.$$

Таким чином, X представляє частку ринку (точніше, рівень продажів, виражений як частка рівня насичення M). Крім того, позначимо

$$r = \frac{a}{M}, \quad \delta = b + \frac{\dot{M}}{M}.$$

І тоді в позначеннях запишемо (3.1) як

$$\dot{x} = ru(1 - x) - \delta x, \quad x(0) = x.$$

Для простоти приймемо M , а отже, S і r , додатними константами.

Щоб розв'язати задачу оптимального керування у моделі Vidale-Wolfe, будемо вважати, що π позначатиме максимальний дохід від продажу, що відповідає $x = 1$, а πx позначає функцію доходу для $x \in [0, 1]$. Також нехай Q — максимально допустима норма витрат на рекламу, а p неперервна ставка дисконтування. У цих позначеннях задачу оптимального керування можна сформулювати так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \left\{ J = \int_0^T e^{-pt} (\pi x - u) dt \right\} \\ \text{за умови} \\ \dot{x} = ru(1 - x) - \delta x, \quad x(0) = x_0, \\ \text{обмеження стану терміналу} \\ x(T) = x_T, \\ \text{та обмеження керування} \\ 0 \leq u \leq Q. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Зауважимо, що Q розглядається як скінченний або нескінченний, а цільова частка ринку знаходиться в $x_T \in [0, 1]$. Звернемо увагу, що задача є задачею з фіксованою кінцевим значенням. Очевидно, що вимога $0 \leq x \leq 1$ виконується без додаткових умов, де $x_0 \in [0, 1]$ - початкова частка ринку.

Зокрема, розв'язок цієї задачі можна знайти застосувавши принцип максимуму. Розглянемо метод, заснований на теоремі Гріна, який не використовує принцип максимуму. Процедура знаходження розв'язку задачі з фіксованою точкою і змінною стану та змінною керування, у якій керуюча змінна має лінійну структуру і виступає в рівнянні стану і функції цілі. Задача (3.2) має ці властивості, і тому вона також є хорошим прикладом для ілюстрації методу. Для застосування теореми Гріна потрібно, щоб Q було великим. Зокрема, можна вважати $Q = \infty$.

3.2 Знаходження розв'язку за допомогою теореми Гріна (Q велике)

Розв'яжемо задачу з фіксованою кінцевою точкою, починаючи з x_0 і закінчуючи x_T , за умови, що Q необмежена або набуває великих значень. У процесі знаходження розв'язку подається обґрунтування у необхідності цього припущення.

Користуючись теоремою Гріна, розглянемо часові змінні τ і θ , такі що $0 \leq \tau < \theta \leq T$, і задачу:

$$\max \left\{ J(\tau, \theta) = \int_{\tau}^{\theta} (\pi x - u) dt \right\} \quad (3.3)$$

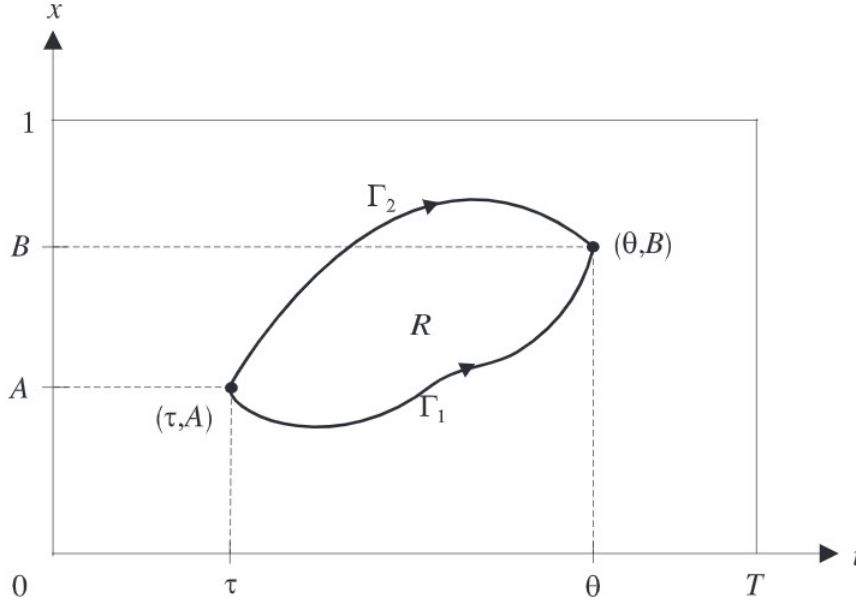


Рис. 4: Допустимі дуги в (t, x) -просторі

за умови

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ru(1-x) - \delta x, \quad x(\tau) = A, \quad x(\theta) = B, \\ 0 &\leq u \leq Q. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Щоб змінити цільову функцію в (3.3) на інтеграл вздовж будь-якої можливої дуги Γ_1 від (τ, A) до (θ, B) на площині (t, x) як зображено на рисунку 4, помножимо (3.4) на dt і отримаємо формальне співвідношення

$$u dt = \frac{dx + \delta x dt}{r(1-x)},$$

яку підставляємо в цільову функцію (3.3). Таким чином,

$$J_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} \left\{ \left[\pi x - \frac{\delta x}{r(1-x)} \right] e^{-\rho t} dt - \frac{1}{r - (1-x)} e^{-\rho t} dx \right\}.$$

Розглянемо іншу можливу дугу Γ_2 від (τ, A) до (θ, B) що лежить вище Γ_1 як зображено на рисунку 4. Нехай $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$, де Γ проста замкнута крива, яка додатньо зорієнтована стосовно своєї внутрішності. Тобто Γ зберігає орієнтацію Γ_1 і протилежно зорієнтована стосовно Γ_2 . Тепер маємо

$$J_{\Gamma} = J_{\Gamma_1 - \Gamma_2} = J_{\Gamma_1} - J_{\Gamma_2}.$$

Оскільки Γ є простою замкненою кривою, використаємо теорему Гріна. Тобто криволінійний інтеграл вздовж простої кривої J_{Γ} замінимо подвійним інтегралом по області R обмеженої кривою Γ . Такий чином, розглядаючи x і t як незалежні змінні, можемо

записати

$$\begin{aligned}
J_{\Gamma} &= \oint_{\Gamma} \left\{ \left[\pi x - \frac{\delta x}{r(1-x)} \right] e^{-\rho t} dt - \frac{1}{r(1-x)} e^{-\rho t} dx \right\} \\
&= \int \int_R \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{-e^{-\rho t}}{r(1-x)} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\pi x - \frac{\delta x}{r(1-x)} \right) e^{-\rho t} \right] \right\} dt dx \\
&= \int \int_R \left[\frac{\delta}{(1-x)^2} + \frac{\rho}{(1-x)} - \pi r \right] \frac{e^{-\rho t}}{r} dt dx. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Вираз у дужках (3.5) позначимо

$$I(x) = \frac{\delta}{(1-x)^2} + \frac{\rho}{(1-x)} - \pi r.$$

Зауважимо, що знак підінтегрального виразу такий самий, як і знак $I(x)$.

Лема порівняння 3.1. *Нехай Γ_1 і Γ_2 є нижньою і верхньою допустимими дугами, як показано на малюнку 4. Якщо $I(x) \geq 0$ для всіх $(x, t) \in R$, то нижня дуга Γ_1 принаймні настільки ж вигідна, як і верхня дуга Γ_2 . Аналогічно, якщо $I(x) \leq 0$ для всіх $(x, t) \in R$, тоді Γ_2 принаймні такий же дохідний, як Γ_1 .*

Доведення 1. *Якщо $I(x) \geq 0$ для всіх $(x, t) \in R$, тоді J_{Γ_2} .*

Щоб скористатися цією лемою для пошуку оптимального керування для задачі (3.2), потрібно знайти області, в яких $I(x)$ додатне, а де воно від'ємне. Для цього спочатку зверніть увагу, що $I(x)$ є зростаючою функцією x на проміжку $[0, 1]$. Розв'язок $I(x) = 0$ дасть таке значення x , вище якого $I(x)$ є додатним, а нижче $I(x)$ є від'ємним. Оскільки $I(x)$ є квадратичним у $1/(1-x)$, можемо використовувати квадратичну формулу, щоб отримати

$$x = 1 - \frac{2\delta}{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\pi r \delta}}.$$

Щоб утримати x в інтервалі $[0, 1]$, повинні вибрати додатний знак перед радикалом. Оптимальний x має бути невід'ємним, тому отримуємо

$$x^s = \max \left\{ 1 - \frac{2\delta}{-\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\pi r \delta}}, 0 \right\}, \tag{3.6}$$

де використовується верхній індекс s , оскільки це виявиться сингулярною траєкторією. Оскільки x^s є невід'ємним, керування

$$u^s = \frac{\delta x^s}{r(1-x^s)} \tag{3.7}$$

що відповідає (3.6) завжди буде невід'ємним. Крім того, оскільки Q вважається великим, u^s завжди буде здійсненним.

Тепер маємо достатньо механізмів, щоб отримати оптимальний розв'язок для (3.2), коли Q вважається достатньо великим, тобто $Q \geq u^s$, де u^s дано в (3.7).

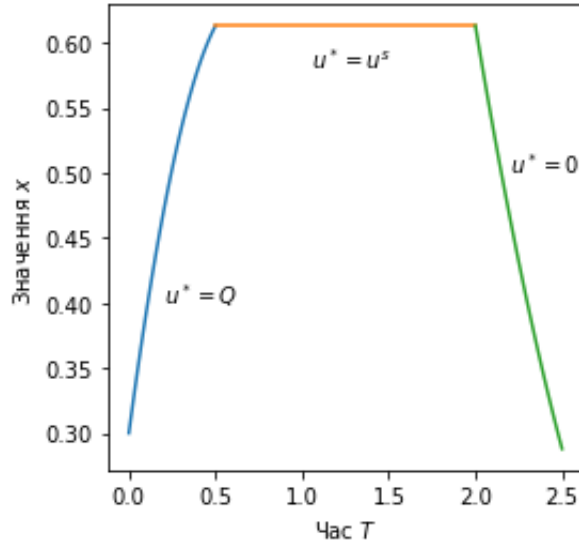


Рис. 5: Оптимальна траєкторія для випадку 1: $x_0 \leq x^s$ і $x^s \geq x_t$

Сформулюємо їх у формі двох теорем: Теорема 1.1 стосується випадку, коли T є великим; Теорема 1.2 відноситься до випадку, коли T є малим. Щоб визначити ці поняття, нехай t_1 найкоротший час переходу від x_0 до x^s а також нехай t_2 – найкоротший час переходу від x^s до x_T . Тоді стверджуємо, що T є великим, якщо $T \geq t_1 + t_2$; з іншого боку T є малим.

На малюнках 5-8 проілюстровані випадки коли T є великим, а малюнки 10-11 показують випадки коли T є малим.

Теорема 3.1. *Припустимо, що T велике і x_T досяжний з x_0 . Оптимальні траєкторії наведені на малюнках 5-8 для нерівностей, що пов'язують x_0 і x_T з x^s відповідно.*

Доведення 2. *Детально розглянемо випадок 1. На малюнку 9 показана оптимальна траєкторія для малюнку 5 разом із довільно обраною можливою траєкторією, показаною пунктирною лінією. Очевидно, що пунктирна траєкторія не може перетинати дугу x_0 до C , оскільки $u = Q$ на цій дузі. Аналогічно, пунктирна траєкторія не може перетинати дугу G до x_T , тому що $u = 0$ на цій дузі.*

Поділимо інтервал $[0, T]$ на підінтервали, на яких пунктирна дуга знаходиться вище, нижче або ідентична суцільній дузі. На малюнку 9 цими підінтервалами є $[0, d]$, $[d, e]$, $[e, f]$ і $[f, T]$. Оскільки $I(x)$ є додатнім для $x > x^s$ і $I(x)$ є від'ємним для $x < x^s$, області, утворені двома траєкторіями, позначаються знаком "+" або "-" про те, чи є $I(x)$ додатним чи негативним на об'єктах відповідно. Згідно з Лемою 1.1, суцільна дуга є кращою, ніж пунктирна дуга в підінтервалах $[0, d]$, $[d, e]$ та $[f, T]$; на інтервалі $[e, f]$, рівні між собою. Отже, пунктирна траєкторія поступається суцільній траєкторії. Дані міркування можна використати у випадку зліченної кількості траєкторій.

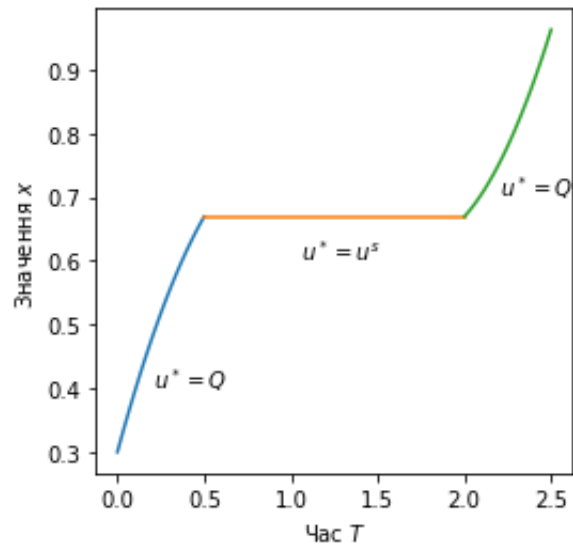


Рис. 6: Оптимальна траєкторія для випадку 2: $x_0 \leq x^s$ і $x^s \leq x_t$

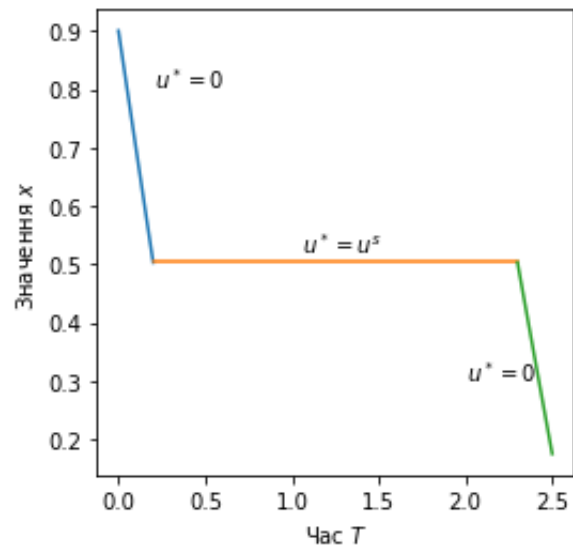


Рис. 7: Оптимальна траєкторія для випадку 3: $x_0 \geq x^s$ і $x^s \geq x_t$

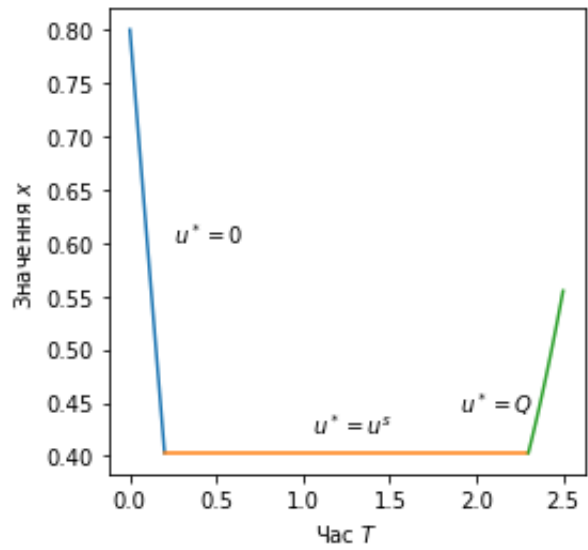


Рис. 8: Оптимальна траєкторія для випадку 4: $x_0 \geq x^s$ і $x^s \leq x_t$

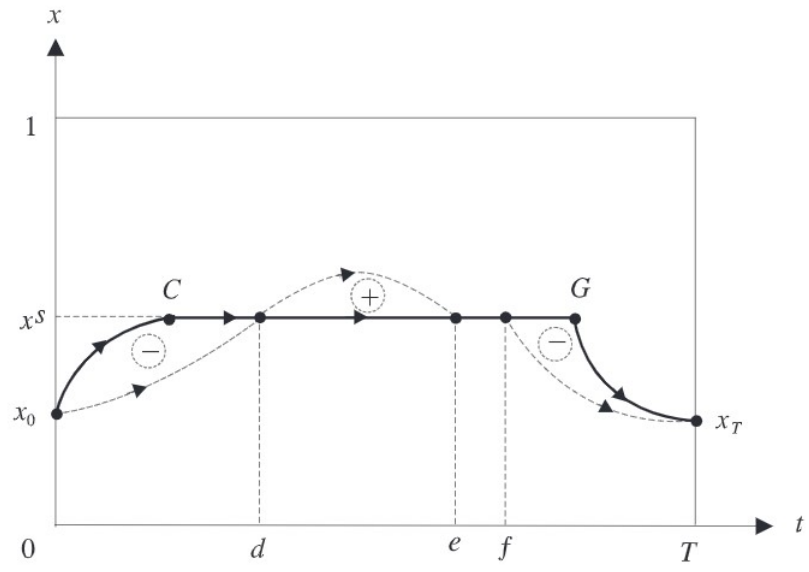


Рис. 9: Оптимальна траєкторія (суцільні лінії) $x_0 \geq x^s$ і $x^s \leq x_t$

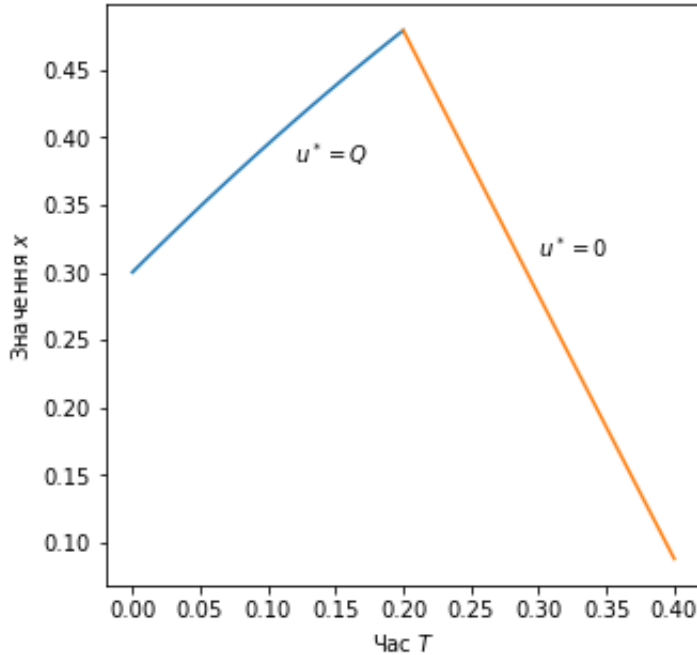


Рис. 10: Оптимальна траєкторія коли T є малим у випадку 1: $x_0 < x^s$ і $x_T < x^s$

Теорема 3.2. Нехай значення T мале, тобто $T < t_1 + t_2$, і нехай x_T досяжний з x_0 . Оптимальні траєкторії наведені на малюнку 10 та 11 для двох можливих нерівностей, що пов'язують x_0 з x_T і x^s відповідно.

Доведення 3. Необхідність здійснення умов, коли T мале, виключає випадки, коли x_0 і x_T знаходяться на протилежних сторонах x^s або дорівнюють йому. Доведення оптимальності траєкторій, зображених на малюнках 10 та 11, є аналогічними у частині теореми 1.1. У 10 та 11 можливі варіанти: або $t_1 \geq T$ або $t_2 \geq T$.

Усі попередні дослідження ґрунтувались на припущеннях, що значення Q є достатньо великим. І можна поширити цей висновок, коли $Q \approx \infty$. Завдяки цьому, дуги на малюнках 5-10, що відповідають $u^* = Q$, перетворюються на вертикальні сегменти, що відповідають імпульсним елементам керування. Наприклад, 1 перетворюється на малюнок (2.2), коли $Q = \infty$.

Вплив на цільову функцію імпульсного керування (x_0, x^s) можна обчислити таким чином: інтегруємо рівняння стану в (3.2) від 0 до ε з початковою умовою x_0 і u що розглядається як постійна. Припустимо $x_0 < x^s$, оскільки $imp(x_0, x^s) = 0$ у тривіальному випадку, коли $x_0 = x^s$. Результат такий:

$$x(\varepsilon) = \left(x_0 - \frac{ru}{\delta + ru}\right)e^{-(\delta+ru)\varepsilon} + \frac{ru}{\delta + ru}.$$

Потрібно для u обрати $u(\varepsilon)$ так, щоб $x(\varepsilon)$ дорівнював x^s . Має бути зрозуміло, що $u(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Зауваживши, що праву частину (3.2)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-u(\varepsilon)\varepsilon] = imp(x_0, x^s, 0) = I,$$

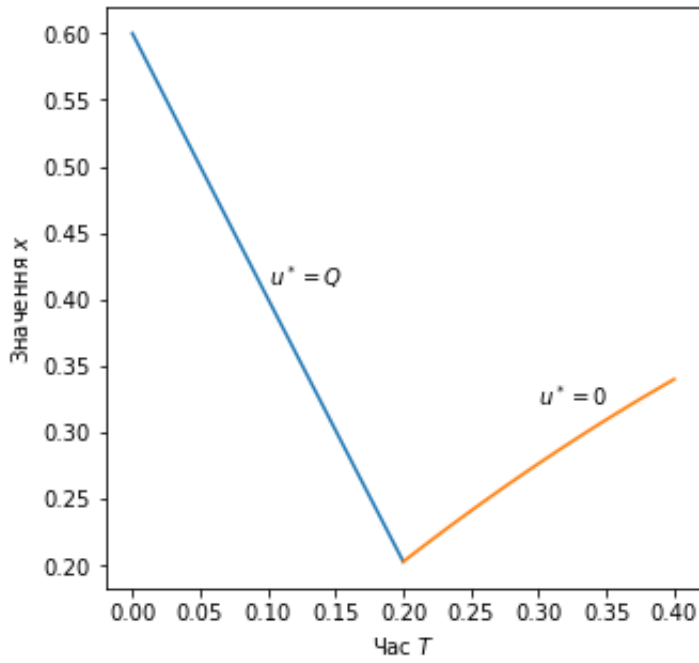


Рис. 11: Оптимальна траєкторія коли T є малим у випадку 2: $x_0 > x^s$ і $x_T < x^s$

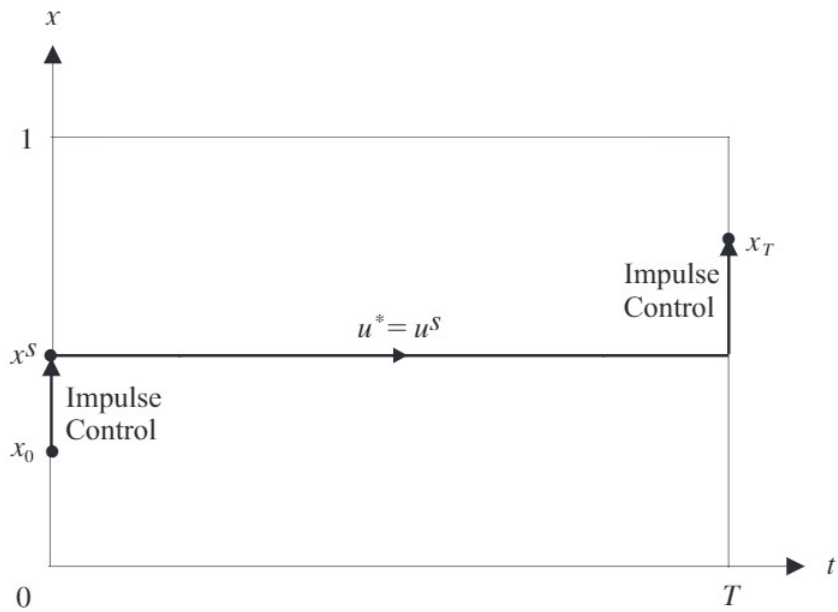


Рис. 12: Оптимальна траєкторія у випадку 2 теореми 1.1 для $Q = \infty$

можна розв'язати для I безпосередньо, не отримуючи $u(\varepsilon)$. Це робиться, якщо $\varepsilon \rightarrow 0$, $-u(\varepsilon)\varepsilon \rightarrow I$, і $x(\varepsilon) = x^s$ у виразі для $x(\varepsilon)$, отриманому вище. Це дає

$$x(0+) = e^{rI}(x_0 - 1) + 1.$$

Тому,

$$\text{imp}(x_0, x^s, 0) = -\frac{1}{r} \ln \left[\frac{1 - x_0}{1 - x^s} \right].$$

Зауважимо, що ця формула використовується для будь-якого часу t , а також $t = 0$. Отже, її також можна використовувати при $t = T$ для обчислення імпульсу в кінці періоду.

3.3 Знаходження розв'язку у випадку малого Q

Коли Q мале, неможливо пройти вздовж магістралі x^s так що міркування, випливають з теореми Гріна, неможливо застосовувати. Застосуємо принцип максимуму для аналізу задачі. Під "Q є малим" маємо на увазі Q, u^s , де u^s визначено в (3.7).

Застосуємо принцип максимуму поточного значення до задачі з фіксованою кінцевою точною, наведеної в (3.2). Функція Гамільтона запишеться у вигляді

$$H = \pi x - u + \lambda[ru(1 - x) - \delta x] = \pi x - \delta \lambda x + u[-1 + r\lambda(1 - x)], \quad (3.8)$$

і функція Лагранжа

$$L = H + \mu(Q - u).$$

Коефіцієнт λ задовольняє

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial L}{\partial x} = \rho\lambda + \lambda(ru + \delta) - \pi, \quad (3.9)$$

де $\lambda(T)$ є константою, яку необхідно визначити. Крім того, множник Лагранжа μ задовольняє

$$\mu \geq 0, \quad \mu(Q - u) = 0. \quad (3.10)$$

З (3.8) помічаємо, що гамільтоніан є лінійним у керуванні. Отже, оптимальне керування

$$u^*(t) = \text{bang}[0, Q; W(t)], \quad (3.11)$$

де

$$W(t) = r\lambda(1 - x) - 1. \quad (3.12)$$

Коли $W = r\lambda(1 - x) - 1 = 0$, маємо можливість сингулярного керування за умови, що можемо підтримувати цю рівність протягом скінченного інтервалу часу. Для випадку, коли Q є великим, показали в попередньому розділі, що оптимальна траєкторія містить відрізок, на якому $x = s^s$ і $u^* = u^s$, де $0 \leq u^s \leq Q$. Це, очевидно, може бути єдиним керуванням. Розв'язок задачі (3.2), коли Q мала величина, вимагає тривалого аналізу точки перемикання.

3.4 Знаходження роз'язоку у випадку нескінченного T

У двох останніх підрозділах досліджувалась задача на припущення скінченного T . Тепер сформулюємо задачу для нескінченного горизонту (3.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \left\{ J = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (\pi x - u) dt \right\} \\ \text{за умови} \\ \dot{x} = ru(1-x) - \delta x, \quad x(0) = x_0, \\ 0 \leq u \leq Q. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Дослідимо цю задачу для двох випадків: ” Q - велике” і ” Q - мале”.

Коли Q велике, з теореми 1.1 одержимо розв'язок, коли T нескінченне. Через коефіцієнт дисконтування кінцеві частини розв'язку, показаних на малюнках 5-8, можуть бути показані як нерелевантні (тобто дисконтований прибуток, накопичений протягом інтервалу $(T - t_2, T)$ приймає значення 0, коли T прямує до ∞). Таким чином, розглядаються лише два випадки: (а) $x_0 \leq x^s$, і (б) $x_0 \geq x^s$. Оптимальним керуванням у випадку (а) є використання $u^* = Q$ в інтервалі $[0, t_1]$ і $u^* = u^s$ для $t \geq t_1$. Аналогічно, оптимальним контролем у випадку (б) є використання $u^* = 0$ на інтервалі $[0, t_1]$ і $u^* = u^s$ для $t \geq t_1$.

Коли Q мале, тобто $Q < u^s$, неможливо прослідкувати за поворотом $x = x^s$, оскільки немає повної інформації, тоді $u = u^s$, що не є оптимальним керуванням. Очевидно, що ”найближчий” стаціонарна траєкторія руху — це траєкторія отримана шляхом встановлення $\dot{x} = 0$ і $u = Q$, найбільшого можливого керування, у рівнянні стану (3.13). Це дає

$$\bar{x} = \frac{rQ}{rQ + \delta}$$

і відповідно отримуємо

$$\bar{\lambda} = \frac{\pi}{\rho + \delta + rQ}$$

встановивши $u = Q$ і $\dot{\lambda} = 0$ у (3.9) і розв'язуючи λ . Більш конкретно, сформулюємо наступні теореми, які дають магістраль та оптимальне керування, коли Q є малим. Для доведення цих теорем введемо позначення, а саме:

$$\hat{x} = 1 - \frac{1}{r\bar{\lambda}}, \quad (3.14)$$

$$\bar{\mu} = r\bar{\lambda}(1 - \bar{x}) - 1. \quad (3.15)$$

Теорема 3.3. *Коли Q є малим, наступні величини*

$$\bar{x}, Q, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$$

утворюють магістраль.

Доведення 4. *Покажемо, що $\bar{x} \leq \hat{x}$, що з визначень (3.14) та (3.15) означає $\bar{\mu} \geq 0$. Крім того, $\bar{u} = Q$, тому виконується (3.10). Нарешті, оскільки $W = \bar{\mu}$ з (3.12) і (3.15), впливає, що $W \geq 0$, тому гамільтонова умова максимізації виконується $\bar{u} = Q$, і доведення завершено.*

Теорема 3.4. Коли Q мале, оптимальне керування в моменту часу τ визначається так:

- (а) якщо $x(\tau) \leq \hat{x}$, тоді $u^*(\tau) = Q$,
- (б) якщо $x(\tau) > \hat{x}$, тоді $u^*(\tau) = Q$.

Доведення 5. (а) Покладемо $\lambda(t) = \bar{\lambda}$ для всіх $t \geq \tau$ і зауважимо, що λ задовольняє суміжне рівняння (3.9). Доведенням того, що (3.10) і (3.11) справедливі для всіх $t \geq \tau$ спирається на той факт, що $x(t) \leq \hat{x}$ і на аргумент, аналогічний до доведення попередньої теореми.

На рисунку 13 показані оптимальні траєкторії для $x(0) < \hat{x}$ та двох різних початкових значень $x(0)$, одна зверху, а друга нижче \hat{x} . Відзначимо, що на цьому малюнку завжди знаходимося у випадку (а), оскільки $x(\tau) \leq \hat{x}$ для всіх $\tau \geq 0$.

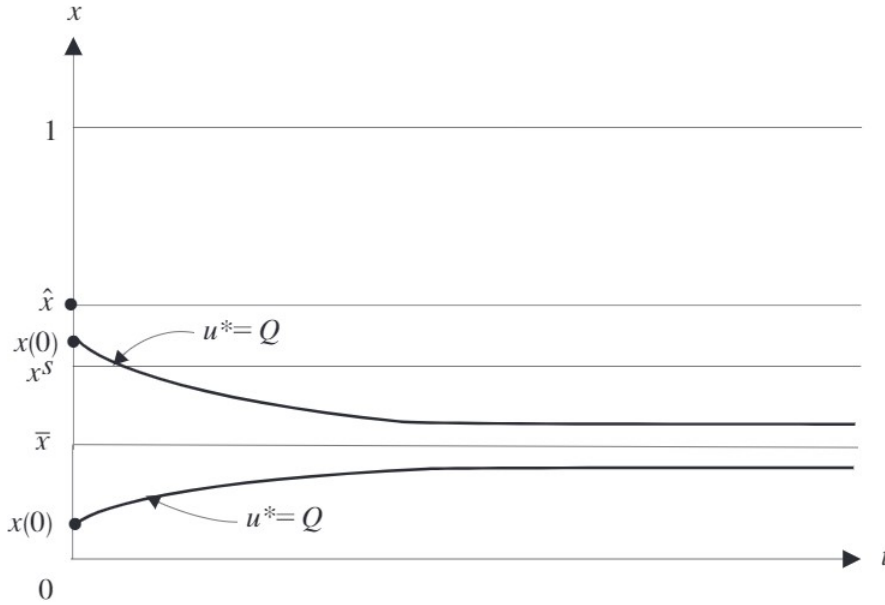


Рис. 13: Оптимальна траєкторія для $x(0) < \hat{x}$

(б) Припустимо $x(0) > \hat{x}$. Для цього випадку покажемо, що оптимальна траєкторія така, як показано на малюнку 14, яку отримуємо, застосовуючи $u = 0$ до $x = \hat{x}$ і $u = Q$ після цього. Використовуючи цю поведінку, можемо знайти час t_1 при якому $x(t_1) = \hat{x}$, розв'язавши рівняння стану в (3.13) з $u = 0$. Одержимо

$$t_1 = \frac{1}{\delta} \ln \frac{x(0)}{\hat{x}}.$$

Очевидно, що для $t \geq t_1$, значення $u = Q$ є оптимальною, оскільки застосовується випадок (а). Тепер розглянемо інтервал $[0, t_1)$. Нехай τ будь-який час у цьому інтервалі,

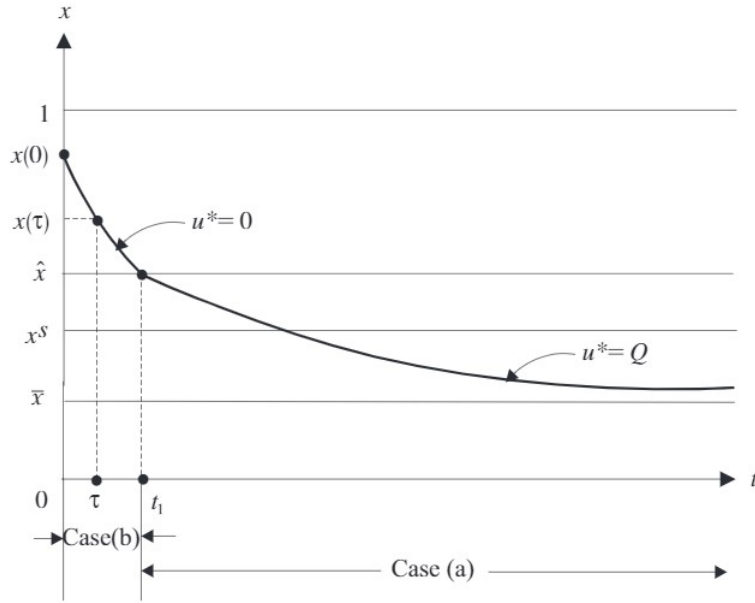


Рис. 14: Оптимальна траєкторія для $x(0) > \hat{x}$

як показано на малюнку 14, і нехай $x(\tau)$ відповідне значення змінної стану. Розглянемо наступну двочкову граничну задачу в інтервалі $[\tau, t_1]$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\delta x, & x(\tau) \text{ дано,} \\ \dot{\lambda} = (\rho + \delta)\lambda - \pi, & \lambda(t_1) = \bar{\lambda} \end{cases} \quad (3.16)$$

Отже, згідно з (3.11) політика $u = 0$, використана при виведенні (3.16), задовольняє принципу максимуму. Ця політика "приєднується" до оптимальної політики після того, t_1 як стала $\lambda(t_1) = \bar{\lambda}$.

4 Висновки

Отже, робота присвячена дослідженню оптимальної рекламної політики фірми використовуючи задачу оптимального керування. Розглянуто задачу Nerlove-Arrow методом варіаційного числення та використовуючи принцип максимуму Понтрягіна, отримані результати зображені на малюнку 1, та як змінюється оптимальне керування в залежності від часу на малюнку 2. Досліджено рекламну модель Vidale-Wolfe та диференціальне рівняння, яке наглядно ілюструє зв'язок між продажами та рекламою. Використовуючи метод Runge-Kutta та теорему Гріна визначенні розв'язки та їх графічна ілюстрація зображені на малюнках 5-8 оптимальне керування при великому значенні Q у моделі Vidale-Wolfe та як змінюється керування в залежності від витрат на рекламу залежно від часу. Були дослідженні випадки коли значення T мале або велике та проілюстровано на малюнках 10-11. Було розглянуто розв'язок у випадку малого значення Q . Окрім цього, дослідили випадки, коли T нескінченне та отримали значення оптимального контролю $u = Q$, коли Q є малим.

Результати обчислення у додатку А.

Література

- [1] Sethi S.P., Gerald L. Thompson. OPTIMAL CONTROL THEORY Applications to Management Science and Economics Second Edition. — Springer. — 2000. — P. 185–209.
- [2] Sethi, S.P. Optimal control of the Vidale-Wolfe advertising model. — Operations Research. — 1973. — P. 998-1013.
- [3] Sethi, S.P. Dynamic optimal control models in advertising: a survey. — SIAM Review. — 1977. — P. 685-725.
- [4] Gould, J.P. Diffusion processes and optimal advertising policy, in Microeconomic Foundation of Employment and Inflation Theory, E.S. Phelps et al. (Eds.) — Norton, New York — 1970 — P. 338-368.
- [5] STEWART J.M. Python for Scientists — United Kingdom by Clays, St Ives plc — 2014.

5 Додаток А

Обчислення отримані у Python при таких значеннях

```
!/usr/bin/env python3
```

```
 -*- coding: utf-8 -*-
```

```
"
```

```
Created on Sat Nov 27 14:40:34 2021
```

```
@author: yurii
```

```
"import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
DATA
```

```
r=0.2
```

```
dlt=0.05 постійна пропорційна ставка
```

```
ro=0.1 безперервна ставка дисконтування
```

```
Q=5 максимальна норма витрат на рекламу
```

```
pi=2 максимальний дохід від реалізації
```

```
x0=0.2
```

```
xT=0.3 цілова частка ринку
```

```
t0=0.0
```

```
t1=0.5
```

```
t2=2
```

```
T=t1+t2
```

```
l=1
```

```
xs=max(1-2*dlt/(-ro+np.sqrt(ro**2+4*pi*r*dlt)),0)
```

```
xdax=r*Q/(r*Q+dlt)
```

```
ldax=pi/(ro+dlt+r*Q)
```

```
xhat=1-1/(r*ldax)
```

```
us=dlt*xs/(r*(1-xs))
```

```
ltau=pi/(ro+dlt)+(ldax-pi/(ro+dlt)*np.exp(-(ro+dlt)*(0-t1)))
```

```
def rhsDE(x,y):
```

```
return r*u*(1-x) - dlt*x
```

```
def rkm41(x,y):
```

```
k1=rhsDE(x,y)
```

```
k2=rhsDE(x+h/2,y+h/2*k1)
```

```
k3=rhsDE(x+h/2,y+h/2*k2)
```

```
k4=rhsDE(x+h/2,y+h/2*k3)
```

```
return y+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
```

```
def rhsDEa(x,y):
```

```
return r*u*(1-xs) - dlt*xs
```

```
def rkm41a(x,y):
```

```
k1=rhsDEa(x,y)
```

```
k2=rhsDEa(x+h/2,y+h/2*k1)
```

```
k3=rhsDEa(x+h/2,y+h/2*k2)
```

```
k4=rhsDEa(x+h/2,y+h/2*k3)
```

```
return y+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
```

```
def rhsDEb(x,y):
```

```

return ro*x+x*(r*u+dlt)-pi
def rkm41b(x,y):
k1=rhsDEb(x,y)
k2=rhsDEb(x+h/2,y+h/2*k1)
k3=rhsDEb(x+h/2,y+h/2*k2)
k4=rhsDEb(x+h/2,y+h/2*k3)
return y+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6

```

```

    u=Q
n=44
h=(t1-t0)/n
mt1=[t0]
mx1=[x0]
for k in range(n):
xn=rkm41(mt1[k],mx1[k])
mx1.append(xn)
tn=mt1[k]+h
mt1.append(tn)
mpl.plot(mt1,mx1)
mpl.show()
u=us
n=44
h=(t2-t1)/n
mt2=[mt1[-1]]
mx2=[mx1[-1]]
for k in range(n):
xn=rkm41a(mt2[k],mx2[k])
mx2.append(xn)
tn=mt2[k]+h
mt2.append(tn)
mpl.plot(mt2,mx2)
mpl.show()
u=0
H=pi*xT-u+1*(r*u*(1-xT)-dlt*xT)
n=44
h=(T-t2)/n
mt3=[mt2[-1]]
mx3=[mx2[-1]]
for k in range(n):
xn=rkm41b(mt3[k],mx3[k])
mx3.append(xn)
tn=mt3[k]+h
mt3.append(tn)
mpl.plot(mt3,mx3)
mpl.show()
fig, ax = mpl.subplots(figsize=[4,4])
ax.plot(mt1,mx1,mt2,mx2,mt3,mx3)

```

```

ax.set(title='Оптимальна траєкторія для випадку 1:  $x_0 \leq x^s$  and  $x^s \geq x_T$  ')
mpl.text(0.2,0.4,' $u^* = Q$ ')
mpl.text(1.05,0.58,' $u^* = u^s$ ')
mpl.text(2.2,0.5,' $u^* = 0$ ')
mpl.xlabel('Час ')
mpl.ylabel('Значення  $x$ ')
mpl.show()
u=Q
n=44
h=(T-t2)/n
mt4=[mt2[-1]]
mx4=[mx2[-1]]
for k in range(n):
xn=rkm41b(mt4[k],mx4[k])
mx4.append(xn)
tn=mt4[k]+h
mt4.append(tn)
mpl.plot(mt4,mx4)
mpl.show()
fig, ax1 = mpl.subplots(figsize=[4,4])
ax1.plot(mt1,mx1,mt2,mx2,mt4,mx4)
ax1.set(title="Оптимальна траєкторія для випадку 2:  $x_0 \leq x^s$  and  $x^s \leq x_T$  ")
mpl.text(0.2,0.3,' $u^* = Q$ ')
mpl.text(1.05,0.4,' $u^* = u^s$ ')
mpl.text(2.2,0.7,' $u^* = Q$ ')
mpl.xlabel('Час ')
mpl.ylabel('Значення  $x$ ')
mpl.show()
u=0
n=44
h=(t1-t0)/n
mt5=[t0]
mx5=[x0]
for k in range(n):
xn=rkm41b(mt5[k],mx5[k])
mx5.append(xn)
tn=mt5[k]+h
mt5.append(tn)
mpl.plot(mt5,mx5)
mpl.show()
u=us
n=44
h=(t2-t1)/n
mt6=[mt5[-1]]
mx6=[mx5[-1]]
for k in range(n):
xn=rkm41a(mt6[k],mx6[k])

```

```

mx6.append(xn)
tn=mt6[k]+h
mt6.append(tn)
mpl.plot(mt6,mx6)
mpl.show()
u=0
n=44
h=(T-t2)/n
mt7=[mt6[-1]]
mx7=[mx6[-1]]
for k in range(n):
xn=rkm41b(mt7[k],mx7[k])
mx7.append(xn)
tn=mt7[k]+h
mt7.append(tn)
mpl.plot(mt7,mx7)
mpl.show()
fig, ax2 = mpl.subplots(figsize=[4,4])
ax2.plot(mt5,mx5,mt6,mx6,mt7,mx7)
ax2.set(title="Оптимальна траєкторія для випадку 3:  $x_0 \geq x^s$  and  $x^s \geq x_T$  ")
mpl.text(0.2,0.8,' $u^* = 0$ ')
mpl.text(1.05,0.52,' $u^* = u^s$ ')
mpl.text(2.0,0.3,' $u^* = 0$ ')
mpl.xlabel('Час ')
mpl.ylabel('Значення  $x$ ')
mpl.show()
u=Q
n=44
h=(T-t2)/n
mt8=[mt6[-1]]
mx8=[mx6[-1]]
for k in range(n):
xn=rkm41b(mt8[k],mx8[k])
mx8.append(xn)
tn=mt8[k]+h
mt8.append(tn)
mpl.plot(mt8,mx8)
mpl.show()
fig, ax2 = mpl.subplots(figsize=[4,4])
ax2.plot(mt5,mx5,mt6,mx6,mt8,mx8)
ax2.set(title="Оптимальна траєкторія для випадку 4:  $x_0 \geq x^s$  and  $x^s \leq x_T$  ")
mpl.text(0.25,0.6,' $u^* = 0$ ')
mpl.text(1.05,0.42,' $u^* = u^s$ ')
mpl.text(1.9,0.44,' $u^* = Q$ ')
mpl.xlabel('Час ')
mpl.ylabel('Значення  $x$ ')
mpl.show()

```

```

u=Q
n=44
h=(T-t2)/n
mt9=[t0]
mx9=[x0]
for k in range(n):
xn=rkm41(mt9[k],mx9[k])
mx9.append(xn)
tn=mt9[k]+h
mt9.append(tn)
mpl.plot(mt9,mx9)
mpl.show()
u=0
n=44
h=(T-t2)/n
mt10=[mt9[-1]]
mx10=[mx9[-1]]
for k in range(n):
xn=rkm41b(mt10[k],mx10[k])
mx10.append(xn)
tn=mt10[k]+h
mt10.append(tn)
mpl.plot(mt10,mx10)
mpl.show()
mpl.plot(mt9,mx9,mt10,mx10)
mpl.title("Оптимальна траєкторія коли T мале у випадку 2:  $x_0 < x^s$  і  $x_T < x^s$ ")
mpl.text(0.12,0.38,' $u^* = Q$ ')
mpl.text(0.3,0.31,' $u^* = 0$ ')
mpl.xlabel('Час ')
mpl.ylabel('Значення  $x$ ')
mpl.show()
u=0
n=44
h=(T-t2)/n
mt11=[t0]
mx11=[x0]
for k in range(n):
xn=rkm41b(mt11[k],mx11[k])
mx11.append(xn)
tn=mt11[k]+h
mt11.append(tn)
mpl.plot(mt11,mx11)
mpl.show()
u=Q
n=44
h=(T-t2)/n
mt12=[mt11[-1]]

```

```

mx12=[mx11[-1]]
for k in range(n):
xn=rkm41(mt12[k],mx12[k])
mx12.append(xn)
tn=mt12[k]+h
mt12.append(tn)
mpl.plot(mt12,mx12)
mpl.show()
mpl.plot(mt11,mx11,mt12,mx12)
mpl.title("Оптимальна траєкторія коли  $T$  мале у випадку 2:  $x_0 > x^s$  і  $x_T < x^s$ ;)
mpl.text(0.10,0.41,' $u^* = Q$ ')
mpl.text(0.3,0.32,' $u^* = 0$ ')
mpl.xlabel('Час ')
mpl.ylabel('Значення  $x$ ')
mpl.show()

```