МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математичної
економіки, економетрії,
фінансової та страхової
математики

Магістерська робота

Задачі оптимального керування моделями економічної динаміки

Виконав:
студент групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 – *математика*
спеціалізації *математична економіка та економетрика*
Куцевол Ігор Ігорович

Науковий керівник:
проф. Кирилич В. М.

*Роботу рекомендовано до захисту
на засіданні кафедри математичної
економіки, економетрії, фінансової
та страхової математики,
протокол від 08 грудня 2021 року № 5*

*Завідувач кафедри
проф. Кирилич В. М.*

Львів-2021

Форма № Н- 9.02

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ, ЕКОНОМЕТРІЇ, ФІНАНСОВОЇ ТА СТРАХОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Пояснювальна записка

до магістерської (кваліфікаційної) роботи

магістр
(освітній рівень)

на тему

Задачі оптимального керування моделями економічної динаміки

Виконав: студент групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 – *математика*
спеціалізації *математична економіка та економетрика*
Куцевол І.І.

Керівник проф. Кирилич В. М.
(прізвище та ініціали)

Рецензент________________________
(прізвище та ініціали)

Львів – 2021

Форма № Н-9.01

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет __________**механіко-математичний**____________________________________
Кафедра _математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики_
Освітньо-кваліфікаційний рівень ________магістр_________________________________
Напрям підготовки ______математична економіка та економетрія__________________
(шифр і назва)
Спеціальність ___________**111- Математика**_____________________________________
(шифр і назва)

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Завідувач кафедри _____________
____
“____” _________________20___року

З А В Д А Н Н Я
НА МАГІСТЕРСЬКУ (КВАЛІФІКАЦІЙНУ) РОБОТУ СТУДЕНТУ

____
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи____
____
____

керівник роботи____,
(прізвище, ім’я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)
затверджені Вченою радою факультету від “___” _________________20____ року №___

2. Строк подання студентом роботи____

3. Вихідні дані до роботи____
____
____
____
____

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)____
____
____
____
____
____

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень)
____
____
____
____

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів магістерської (кваліфікаційної) роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка

Студент ________________ ________________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівник проекту (роботи) ________________ ________________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Зміст

Вступ

Одним зі завдань системного аналізу є вивчення задач оптимального керування та оптимізації систем складної структури, зокрема, диференціальних рівнянь з частинними похідними та системи з розподіленими параметрами. Проблемою отримання умов оптимальності, побудови ефективних методів оптимізації в системах з розподіленими параметрами є значно складнішою, ніж в порівнянні зі звичайними диференціальними рівняннями. Причиною цього є різноманітність класів рівнянь та систем з частинними похідними.

Наведемо характеристику найбільш важливих напрямів дослідження в області оптимального керування системами диференціальних рівнянь з частинними похідними. Одним з основних напрямів є отримання необхідних та достатніх умов оптимальності. Різноманітність класів задач оптимального керування дає можливість виділення деяких загальних моделей оптимізації, які охоплюють достатньо широкі класи задач оптимального керування, зокрема:

- опуклі моделі оптимізації;
- загальний принцип Лагранжа для локально-опуклих задач;
- функціонально-операторні моделі оптимізації у функціональних просторах;
- моделі керування функціонально-інтегральними рівняннями в просторах функціональних просторах.

Охарактеризуємо підходи для відшукання умов оптимальності розподілених систем, в яких принцип максимуму та методи двоїстості природним шляхом приводять до необхідних та достатніх умов оптимальності. Насамперед, потрібно відзначити роботи з перетворення принципу максимуму в достатньою умову оптимальності шляхом його підсилення. Ці роботи в основному базуються на такому факті: якщо в задачі з обмеженнями допустимий процес задовольняє принцип Лагранжа в нормальній формі та при деякому наборі множників лагранжіан задачі має мінімум на заданому процесі, то цей процес можна назвати оптимальним [11].

Велику роль в оптимізації відіграв метод динамічного програмування Р.Беллмана [6]. Хоча тут є деякі складності з необхідністю розв’язку диференціальних рівнянь з частинними похідними, однак в деяких прикладних моделях це виявилось ефективним.

Виділимо ще один напрям - метод нелінійних відображень (достатні умови сумісної оптимальності). Цим методом вдалося дослідити більшу кількість прикладних моделей системного аналізу, вирішення яких базується на мінімізуючих послідовностях, що пов’язано з відсутністю мінімалі в стандартних класах керування [6].

Переважна кількість задач оптимального керування системами з розподіленими параметрами досліджується при умові, що для кожної допустимої керуючої дії існує єдиний стан процесу, який є розв’язком диференціального рівняння або систем диференціальних рівнянь.

Проблеми існування оптимального керування і надалі займають одне з основних місць в теорії оптимального керування процесами з розподіленими параметрами. Більшість авторів досліджують її в припущенні опуклості множини допустимих керувань та опуклості (по керуванню) функцій в цільовому функціоналі. Активно розвивається метод субоптимального керування на основі конструктивного використання варіаційних принципів.

Одним з найважливіших напрямів дослідження задач оптимального керування є побудова чисельних методів розв’язку задач оптимального керування.

У першу чергу відзначимо методи, побудовані на принципі максимуму Понтрягіна, першоджерелом є метод послідовних наближень І.А. Крилова та Ф.А. Черноусько, які заклали основу “голкових варіацій” [6]. Дослідження в цьому напрямку привели до ефективних процедур варіювання керування, що дозволило забезпечити властивість монотонності методу по функціоналу та обгрунтування збіжності послідовних наближень по принципу максимуму.

У результаті цього появився комплекс алгоритмів голкових варіацій з єдиною операцією пошуку допоміжного керування з умов максимуму функції Понтрягіна, і як підсумок визначено оптимальний спосіб варіювання керування в методах, основаних на принципі максимуму. Пізніше запропонувано новий підхід до побудови методів покращення, оснований на нестандартних апроксимаціях цільового функціоналу та конструктивних процедурах варіювання керувань. Оскільки реалізація цих методів пов’язана з інтегруванням розривних по стану систем диференціальних рівнянь, їх розповсюдження на задачі оптимізації систем з розподіленими параметрами є складною проблемою.

Наступна група методів складається з градієнтних процедур оптимального керування, які використовують класичний спосіб слабкого варіювання керувань.

На мій погляд, методи голкових варіацій мають наступні переваги:

- необов’язковість припущення про диференційовність параметрів задачі по керуванню (на відміну від градієнтних процедур);
- допустимість достатньо загальних обмежень на вплив керування;
- відсутність крайової задачі принципу максимуму;
- можливість комбінації з градієнтними методами.

До недоліків потрібно віднести “стрибкове” варіювання, що в процесі ітерації може привести до необмеженого накопичення точок розриву керування.

Сучасні операційні системи дозволяють забезпечити розв’язок задач шляхом організації паралельних обчислень для одночасного проведення розрахунків кількома ітераційними методами. Після знаходження чергового наближення, кожен з методів оцінюється, наприклад, за отриманим нарощенням функціоналу та обирається найбільш ефективний метод продовження оптимізації. Отримане таким чином наближення передається решті методів як початкове для виконання наступної ітерації. Однак, використання такого підходу до завдань оптимізації систем з розподіленими параметрами потребує великих витрат обчислювальних ресурсів.

Аналіз сучасного стану теорії та методів керування в рівняннях з частинними похідними дозволяє виокремити наступні характерні риси:

- теорія оптимального керування в системах з розподіленими параметрами розвивалася як узагальнення теорії оптимального керування системами звичайних диференціальних рівнянь;
- у системах звичайних диференціальних рівнянь для обмежень на керування істотно розширили клас допустимих керуючих функцій до вимірних та обмежених за єдиною незалежною змінною;
- методи розв’язку задач оптимального керування в класі гладких керуючих функцій притаманні для обернених задач математичної фізики;
- чисто теоретичне значення багатьох робіт з оптимального керування диференціальними рівняннями з частинними похідними.

Об’єктом дослідження в цій магістерській роботі є задачі оптимального керування моделями економічної динаміки, тобто незалежною змінною є час, а цільовий функціонал має вигляд визначеного інтегралу по часовому проміжку.

У першому розділі наведемо основи поняття систем диференціальних рівнянь, їх розв’язків, їхній вплив на постановку задачі оптимізації. Розглянуто декілька економічних та соціальних проблем, що моделюються диференціальними рівняннями, особливу увагу звернемо на модель Солоу-Свена.

У другому розділі під назвою “Динамічна оптимізація” розкрито принципи Беллмана та Понтрягіна, а також визначено суть теореми Кротова, що дозволяє знайти необхідні та достатні умови для задач динамічної оптимізації. Розглянуто також декілька прикладів з інтегральними цільовими функціями.

У третьому ж розділі розглянуто оптимальне керування динамікою соціально-економічних систем, зокрема оптимальне керування в математичній економіці, динамічні задачі оптимізації податкової ставки, задачу оптимального використовування електроенергії та динаміку біопопуляцій.

Розділ І. Застосування диференціальних рівнянь в задачах оптимізації

Розпочнемо з понять диференціального рівняння та системи таких рівнянь, їх розв'язку, поняття простору траєкторій та керуючих функцій а також критерію якості процесу.

1.1. Системи диференціальних рівнянь першого порядку

Введемо поняття диференціального рівняння першого порядку. Диференціальним рівнянням першого порядку, яке пов'язує невідому функцію $x(t)$, її аргумент t і похідну $\frac{dx}{dt}$ є рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1}$$

де функція $x = x(t)$ визначена на проміжку (a,b), а $f(t,x)$ – задана числова функція двох змінних, яка є неперервною в деякій області $D, D \subset R^2$.

Розв'язком диференціального рівняння (1) називають таку диференційовну на інтервалі (a,b) функцію $x = x(t)$, яка при підставленні в рівняння (1) перетворює його у тотожність, тобто

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \ \ \forall t \in (a,b).$$

Причому графік функції, що є розв'язком рівняння (1) називають *інтегральною кривою.*

Нехай задані два числа $t_0 \in (a,b)$ та x_0, такі, що $(t_0, x_0) \in D$. Задачу відшукання розв'язку, який задовольняє *початкову умову* $x(t_0) = x_0$, називають *задачею Коші.* З геометричної точки зору задача Коші полягає в знаходженні такої інтегральної кривої рівняння (1), що проходить через задану точку $M_0(t_0, x_0)$.

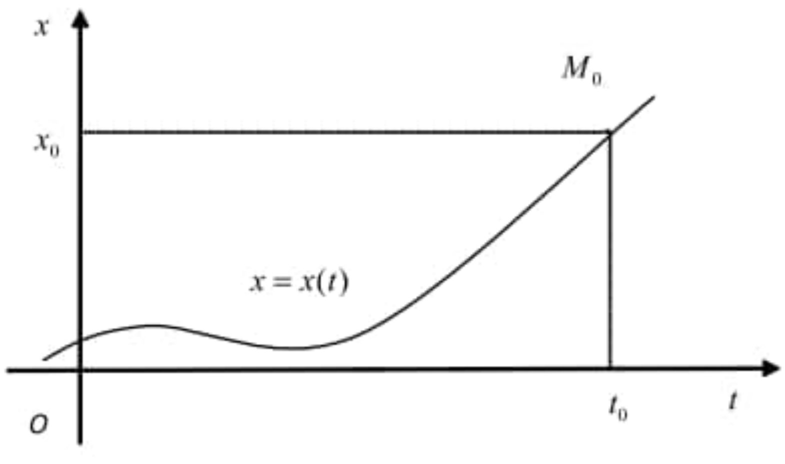


Рис. 1. Інтегральна крива

Можливі три випадки:

1. через точку M_0 проходить єдина інтегральна крива;
2. через точку M_0 проходить принаймні 2 таких кривих;
3. через точку M_0 не проходить жодна інтегральна крива.

З курсу диференціальних рівнянь [4] відомо, що при виконанні певних умов до функції $f(t, x)$, розв'язок задачі Коші на деякому інтервалі $(t_0 - h, t_0 + h)$, де додатне число h достатньо мале, завжди існує та визначається однозначно.

Припустимо, область D володіє властивістю, що в кожній її точці задача Коші для рівняння (1) має єдиний розв'язок, тобто через кожну точку проходить виключно одна інтегральна крива. Однопараметричне сімейство функцій $x = x(t, C)$, де C – параметр (довільна стала), називається загальним розв'язком рівняння (1) в області D, якщо для довільної точки $(t_0, x_0) \in D$ виконуються наступні дві умови:

1. рівняння $x_0 = x(t_0, C)$ відносно C має єдиний розв'язок $C = C_0$;
2. функція $x = x(t, C_0)$ є розв'язком задачі Коші для рівняння (1) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$.

Проінтегрувати диференціальне рівняння (1) означає знайти його розв'язок. Спосіб інтегрування напряму залежить від конкретного виду правої частини рівняння (1), тобто функції $f(t, x)$. В курсі диференціальних рівнянь вивчаються способи інтегрування, зокрема, таких класів рівнянь:

- рівняння з відокремлюваними змінними,
- лінійні рівняння,
- рівняння в повних диференціалах,
- однорідні рівняння.

Причому кожен клас характеризується своєрідними для нього прийомами інтегрування, на яких ми не будемо зупинятись.

Нормальна система з двох диференціальних рівнянь першого порядку має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2), \end{cases} \tag{2}$$

де $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ – шукані функції від t, f_1 та f_2– задані функції трьох аргументів t, x_1, x_2, визначених на деякій тривимірній області $D, D \subset R^3$.

Якщо функції f_1 та f_2 не залежать від t, то систему (2) називають *автономною*. *Розв'язком системи* (2) на інтервалі (a, b) називають пару функцій

$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$, визначених та диференційовних на даному інтервалі, та які перетворюють рівняння системи в тотожність за змінною t, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1\big(t, x_1(t), x_2(t)\big), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = f_2(t, x_1(t), x_2(t)). \end{cases} \quad \forall t \in (a, b),$$

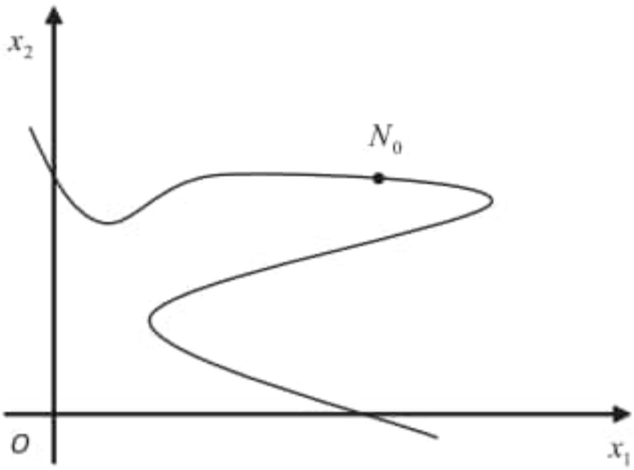


Рис. 2. Траєкторія системи

Задача Коші для системи (2) звучить наступним чином. Задані початкові дані $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ та початковий момент часу $t_0 \in (a, b)$ такі, що $(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in D$. Необхідно знайти розв'язок $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ системи (2), що задовольняє в момент часу $t = t_0$ задані *початкові умови*

$$x_1(t_0) = x_1^{(0)}, x_1(t_0) = x_2^{(0)}.$$

Розв'язок задачі Коші для системи (2) в прямокутній декартовій системі координат $x_1 O x_2$ на площині параметрично задає деяку криву, що проходить при $t = t_0$ через точку $N_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$. Цю криву називають *траєкторією системи* (2), а площину змінних x_1, x_2 називають *фазовою площиною*.

З курсу диференціальних рівняння відомо, що при виконанні певних умов до функцій f_1 та f_2 розв'язок задачі Коші на деякому інтервалі $(t_0 - h, t_0 + h)$, де додатне число h достатньо мале, завжди існує та визначається однозначно [2].

Набір двох функцій $x_1 = x_1(t, C_1, C_2)$, $x_2 = x_2(t, C_1, C_2)$, що залежать від аргументу t та двох параметрів C_1, C_2, називають загальним розв'язком задачі Коші системи рівнянь (2) в деякій області D, якщо для довільної точки $(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ виконуються умови:

1. система рівностей

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = x_1(t, C_1, C_2), \\ x_2^{(0)} = x_2(t, C_1, C_2) \end{cases}$$

може бути однозначно розв'язана відносно C_1, C_2. Позначимо ці розв'язки через C_1^0, C_2^0, відповідно;

2. функції $x_1 = x_1(t, C_1^0, C_2^0)$, $x_2 = x_2(t, C_1^0, C_2^0)$ утворюють розв'язок задачі Коші з початковою точкою $N_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ та початковим моментом часу t_0.

Розглянемо приклад системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x \end{cases} \tag{3}$$

відносно двох невідомих функцій $x = x(t)$ та $y = y(t)$. Перевіримо, що набір функцій

$$x = C_1 cost + C_2 sint, y = C_1 sint - C_2 cost \tag{4}$$

є загальним розв'язком даної системи у всьому просторі R^3. Спочатку розглянемо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_0 = C_1 cost_0 + C_2 sint_0, \\ y_0 = C_1 sint_0 - C_2 cost_0. \end{cases}$$

Єдиним розв'язком цієї системи алгебраїчних рівнянь відносно C_1, C_2 є пара чисел $C_1^0 = x_0 cost_0 + y_0 sint_0, C_2^0 = x_0 sint_0 - y_0 cost_0$. Перша умова з означення виконана.

Безпосередньою підстановкою функцій (4) в систему (3) можна переконатись, що вони є розв'язком цієї системи при будь-яких значеннях параметрів C_1, C_2, причому при виборі $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$ цей розв'язок задовольняє початкові умови $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$. Відповідно, функції (4) дійсно утворюють розв'язок системи диференціальних рівнянь (3).

В загальному випадку нормальна система з n диференціальних рівнянь з n невідомими функціями $x = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ у векторній формі запишеться наступним чином:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{5}$$

де

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \\ \dots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}.$$

При $n = 2$ система (5) перетворюється в систему (2). Для цієї системи теж можуть бути введені поняття розв'язку, загального розв'язку, задачі Коші та її розв'язку. Система (6) буде називатись лінійною, якщо її права частина матиме вигляд $f(t, x) = A(t)x + F(t)$, де

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \dots & a_{2n}(t) \\ & \dots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \dots \\ F_n(t) \end{pmatrix}.$$

Основна мета магістерської роботи – оптимальне керування динамічними процесами, які описуються системами диференціальних рівнянь. Тому зупинемось на таких системах детальніше.

При описі динамічних процесів завжди присутні дві компоненти: вектор стану та вектор керування. Нехай X – простір станів процесу з елементами $x = (x_1, \dots, x_n)$, тобто $X = R^n$ – n-вимірний евклідовий простір. Та нехай U – простір керувань з елементами $u = (u_1, \dots, u_r)$, тобто $U = R^r$ – r-вимірний евклідовий простір. Нехай t – поточний час, який належить відрізку $[0, T]$. Стан процесу, як і керуючий вектор, можуть змінюватись з часом, тому $x = x(t)$, $u = u(t)$, та скажемо, що $x(t)$ – траєкторія процесу, а $u(t)$ – керуюча функція. Оскільки ми розглядаємо динамічні процеси, що описуються системами диференціальних рівнянь, то в нашому випадку ці системи будуть мати вигляд:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big), \tag{6}$$

де права частина $f\big(t, x(t), u(t)\big)$ є n-вимірною вектор-функцією від змінних $t, x(t), u(t)$. В компонентному записі для кожного $i = \overline{1, n}$ ця система виглядатиме наступним чином

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)).$$

Відмінність між станом та керуванням полягає в тому, що саме стан описується системою диференціальних рівнянь, а керування входить в праву частину цієї системи, причому похідні від керування не описуються.

Введемо поняття простору траєкторій та керуючих функцій, в яких надалі будемо працювати. Практичними вимогами є:

- $u(t)$ – кусково-неперервна функція (тобто неперервна всюди на $[0, T]$, за винятком можливої скінченної кількості точок розриву першого роду);
- $x(t)$ – неперервна та кусково-диференційовна функція;
- $f\big(t, x(t), u(t)\big)$ - кусково-неперервна за t, неперервна та достатньо гладка функція (тобто має необхідну кількість похідних) за $x(t), u(t)$.

Окрім диференціального зв’язку (6), на динамічний процес також, як зазвичай, накладається скінченний ряд обмежень, такі як початкові умови до диференціальної системи. Також різні обмеження на значення керуючої функції та траєкторії процесу. Загалом ці умови можемо записати так:

$$\big(x(t), u(t)\big) \in V(t), \tag{7}$$

де $V(t) \subset X \times U$.

Отже, ми ввели множину пар функцій $[x(t), u(t)]$, що задовольняють наведені умови, диференціальний зв'язок (6) та обмеження (7). Цю множину позначимо через D та назвемо множиною допустимих пар функцій $[x(t), u(t)]$.

Для завершення формулювання задачі нам залишилось ввести критерій якості процесу, який можна представити як деякий функціонал на множині D. Практичним потребам відповідає наступна форма запису цього функціоналу:

$$I[x(t), u(t)] = \int_0^T f^0\big(t, x(t), u(t)\big)dt + F\big(x(T)\big), \tag{8}$$

де $f^0\big(t, x(t), u(t)\big)$, $F(x)$ – задані скалярні достатньо гладкі функції своїх аргументів.

Наша задача буде полягати в мінімізації функціоналу (8) на множині D, що складається з пар функцій $[x(t), u(t)]$, що з умовами:

- $u(t)$ - кусково-неперервна;
- $x(t)$ – неперервна та кусково-диференційовна;
- виконується диференціальний зв'язок (6);
- виконуються умови (7).

Пару функцій $[x^*(t), u^*(t)]$ називатимемо *мінімаллю* для I на D, якщо

$$I[x^*(t), u^*(t)] = d = \inf_D I[x(t), u(t)].$$

1.2. Приклади моделювання економічних та соціальних проблем диференціальними рівняннями

Розглянемо деякі задачі, які розв’язують певні економічні та соціальні проблеми, які можна описати диференціальними рівняннями.

Простим прикладом застосування диференціальних рівнянь є наступна задача. Нехай дано резервуар зі сумішшю, наприклад соляний розчин. Далі, індекс i означати input, а o – output з резервуару. Якщо припустити, що c_i – концентрація розчину (в грамах солі на літр розчину), r_i – стала швидкість заливу цього розчину в резервуар (в літрах на секунду), а r_o – стала швидкість виливання з резервуару, то постановка задачі наступна: знайти кількість солі $x(t)$ в певний момент часу t, якщо знаємо, що $x(0) = x_0$.

Очевидно, що кількість солі залежить від вищеописаної концентрації в момент часу t, тому $c_o = \frac{x(t)}{V(t)}$ і ми отримуємо наступне логічне рівняння, в якому $V(t)$ – заповнений об’єм резервуару в момент часу t

$$\frac{dx(t)}{dt} = r_i c_i - r_o c_o = r_i c_i - \frac{r_o x(t)}{V(t)},$$

з умовами $V(0) = V_0, \quad V(t) = V_0 + (r_i - r_0)t.$

Але, очевидно, що не кожен процес можливо описати одним рівнянням. Бувають процеси, які описуються системою диференціальних зв’язків. І ось один з простих прикладів:

Уявімо, що в нас тепер є не лише один резервуар, а декілька (припустимо три). В перший з них, в якому знаходиться сіль, заливається вода, і далі до наступного резервуару з цього виливається розчин певної концентрації. І аналогічно, з другого розчин перетікає в третій, з якого, в свою чергу розчин вже виливається. Кожен резервуар відповідно містить V_1, V_2 та V_3 розчину.

Якщо через $x_i(t)$ позначити кількість розчину в резервуарі i в якийсь момент часу t, де $i = \overline{1,3}$, та в кожен з баків заливається та виливається r літрів рідини (ця величина є сталою), то цей процес можна описати наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1' = -h_1 x_1, \\ x_2' = h_1 x_1 - h_2 x_2, \\ x_3' = h_2 x_2 - h_3 x_3, \end{cases}$$

де $h_i = \frac{r}{V_i}, i = \overline{1,3}$.

Дещо складнішою, для прикладу, еколого-економічна задача оптимального керування. Введемо агрегований екологічний показник $R(t)$, що характеризує стан природнього середовища. Певною мірою ми можемо вважати, що природне середовище здатне до регенерації. Іншими словами, при $t \to +\infty$ показник $R(t)$

завжди буде прямувати до якогось значення R_H, яке будемо називати показником непорушного стану природнього середовища.

Серед антропогенних факторів можемо тут виділити два: погіршення природнього середовища (тобто зменшення значення R) в зв'язку з промисловою діяльністю; збільшення показника у зв'язку з природоохоронною діяльністю, яка за собою, очевидно, тягне матеріальні витрати.

Цим словам насправді відповідає наступне рівняння динаміки показника $R(t)$:

$$\frac{dR(t)}{dt} = -Q(R(t) - R_H) - Cv(t) + Z(t),$$

де Q – величина, що характеризує здатність системи до самовідновлення; C – коефіцієнт, що відображає "затрати" природнього середовища, пов'язані з одиничним випуском; $Z(t)$ – темп можливого покращення екологічного стану завдяки природоохоронній діяльності. І тут, очевидно, коефіцієнти Q та C можуть залежати від часу.

У наступному пункті розглянути одну із найвагоміших моделей економіки, що відправною точкою для багатьох інших моделей економічного зростання.

1.3. Модель Солоу-Свена

Модель Солоу-Свена – одна з найяскравіших моделей, на мою думку, що демонструє динаміку економічного зростання, і описується диференціальними рівняннями.

Розглянемо цю модель, запропоновану у 1956 р. лауреатом Нобелівської премії Р.Солоу [9]. Ця модель, в основі якої диференціальне рівняння першого порядку, відіграє важливу роль в неокласичній теорії економічного росту. В цій моделі економічна система розглядається як одне ціле, що виробляє один універсальний продукт, який може як і споживатись, так і інвестуватись. Ринки збуту працюють безперебійно, виробничі фактори, такі як капітал та робоча сила, майже не змінюються при зміні цін, технологія не піддається змінам. Загалом, ця модель відображує важливі макроекономічні аспекти процесу виробництва. Зауважимо також, що в ній не враховується експорт та імпорт.

Стан економіки у моделі Солоу задається наступними п'ятьма ендогенними змінними:

1. X – валовий внутрішній продукт (ВВП);
2. C – фонд невиробничого споживання;
3. I – інвестиції;
4. L – робоча сила (кількість працездатних);
5. K – капітал (основні виробничі фонди).

Окрім того, в моделі також використовують екзогенні параметри (задані поза системою): ν – річний темп приросту кількості працездатних, μ – доля використаних за рік основних виробничих фондів, ρ – норма накопичення (доля валових інвестицій у ВВП). Екзогенні параметри задовольняють наступні обмеження:

$$-1 < \nu < 1, \qquad 0 < \mu < 1, \qquad 0 < \rho < 1.$$

Вважається, що ендогенні змінні залежать від часу. Екзогенні ж вважаються сталими, причому норма накопичення є керуючим параметром, тобто в початковий момент часу може встановлюватись в якості керування системи.

Час t змінюється неперервно від початкового моменту $t_0 = 0$ та одиницею виміру є один рік. Вважаємо також, що річний випуск в кожен момент часу визначається лінійно-однорідною неокласичною виробничою функцією

$$X = F(K, L), \tag{9}$$

яка є невід'ємною про невід'ємних значеннях змінних K та L, та має місце рівність $F(0,0) = 0$. Функція $F(K, L)$ має частинні похідні до другого порядку включно, причому обидві часткові похідні першого порядку додатні та $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$. Окрім того, ця функція вважається однорідною, тобто виконується рівність:

$$F(rK, rL) = rF(K, L)$$

для всіх додатних r.

Вияснимо, яким чином змінюються ресурсні показники за деякий невеликий проміжок часу Δt. Відповідно до означенням темпу приросту маємо

$$\frac{\Delta L}{L} = \nu \Delta t \text{ або } \frac{dL}{dt} = \nu L.$$

З останнього диференціального рівняння знаходимо $lnL = \nu t + lnA$, а значить $L = Ae^{\nu t}$. Використовуючи початкову умову $L(0) = L_0$, знаходимо $A = L_0$ та приходимо до залежності $L = L_0 e^{\nu t}$.

Зношення та інвестиції в розрахунку на рік складають μK та I відповідно, а за час Δt – відповідно $\mu K \Delta t$ та $I \Delta t$, тому приріст капіталу за цей час буде рівний $\Delta K = -\mu K \Delta t + I \Delta t$. Звідси, після ділення обох частин рівняння на Δt та переходу до границі при $\Delta t \to 0$, приходимо до диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I, \qquad K(0) = K_0.$$

При чому інвестиції складають $I = \rho X$, а фонд споживання рівний $C = (1 - \rho)X$.

Як результат, отримуємо наступне представлення *моделі Солоу* в абсолютних показниках:

$$L = L_0 e^{\nu t}, \qquad \frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho X, \qquad K(0) = K_0, \tag{10}$$
$$X = F(K, L), \qquad I = \rho X, \qquad C = (1 - \rho)X.$$

Далі для зручності введемо наступні відносні показники:

- $k = K/_L$ – фондоозброєність;
- $x = X/_L$ – народногосподарська продуктивність праці;
- $i = I/_L$ – інвестиції на одного працівника;
- $c = C/_L$ – середньодушове споживання.

Оскільки

$$x = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(K/_L, 1\right) = f(k), \qquad i = \rho x, \qquad c = (1 - \rho)x,$$
$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}(kL) = \nu kL + L\frac{dk}{dt},$$

то кінцевий вигляд модель Солоу у відносних показниках такий:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho f(k), \qquad \lambda = \mu + \nu, \qquad k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0} \tag{11}$$

$$x = f(k), \qquad i = \rho f(k), \qquad c = (1-\rho) f(k).$$

Так як кожен абсолютний або відносний показник змінюється з часом, то можна говорити про траєкторію системи в абсолютних або відносних показниках.

Траєкторія називається *рівноважною* (*стаціонарною* або *стійкою*), якщо основні показники не змінюються з плином часу, тобто

$$k(t) \equiv k^* - const, \qquad x(t) \equiv x^* - const,$$
$$i(t) \equiv i^* - const, \qquad c(t) \equiv c^* - const.$$

З рівнянь (11) отримуємо те, що стаціонарність фондоозброєності k тягне стаціонарність всіх інших основних показників. Тому далі розгляд моделі можна обмежити всього лиш одним показником k.

Для стаціонарності траєкторії $k(t) \equiv k^*$ має виконуватись рівність ${dk^*}/{dt} = 0$ для всіх t, тому з першого рівняння (11) маємо $-\lambda k^* + \rho f(k^*) = 0$, або

$$\rho f(k^*) = \lambda k^*.$$

Таким чином, якщо стаціонарна траєкторія $k(t) \equiv k^*$ існує, то для неї має місце рівність вище. Тож залишається відкритим лише питання існування цієї траєкторії. Це питання, насправді, еквівалентне існуванню додатного кореня $k(t) = k^*$ рівняння

$$\rho f(k) = \lambda k. \tag{12}$$

Повернемося до виробничої функції $F(K, L)$ та побудованої на її основі функції f. Оскільки виробнича функція вважається неокласичною, то виконуються відповідності $f(0) = 0$, $f_{(0)}{}' > 0$, $f_{(0)}{}'' < 0$, з яких випливає те, що функція f є строго зростаючою та строго увігнутою на проміжку $[0, +\infty)$.

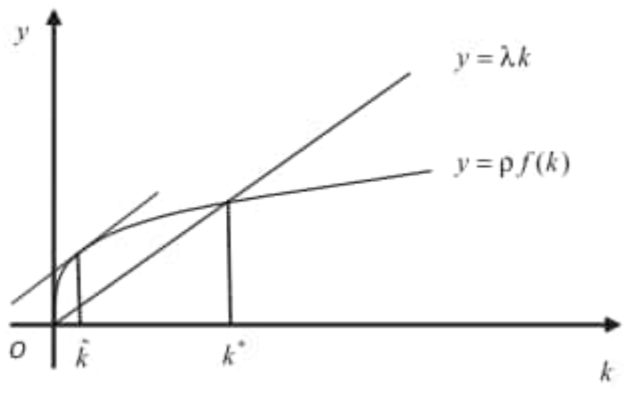


Рис. 3. Ілюстрація існування розв'язку рівняння (12)

Тут з рисунку та геометричного змісту похідної бачимо, що якщо додатково вимагати виконання умови

$$0 < \frac{\lambda}{\rho} < f'(0), \tag{13}$$

то рівняння (12) буде мати додатний розв'язок $k = k^*$. Тому справедлива теорема:

Теорема 1. (Про існування рівноваги). При виконанні умови (13) існує єдиний додатний корінь $k = k^*$ рівняння (12). Тобто, рівноважна (стаціонарна) траєкторія існує та є єдиною, якщо має місце умова (13).

А тепер познайомимося зі *"золотим" правилом накопичень*. Суть цього правила полягає в тому, що належним вибором норми накопичення можна максимізувати середньодушове споживання в стаціонарному режимі, та в перехідному режимі з плином часу отримати середньодушове споживання близьке до максимально можливого.

Будемо вважати, що виробнича функція є функцією Кобба-Дугласа. Тоді для величини c^* має місце представлення

$$c^* = (1-\rho)A(k^*)^\alpha = (1-\rho)A\left[\frac{\rho A}{\lambda}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = B[g(\rho)]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

де

$$B = \left[\frac{A}{\lambda^\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad g(\rho) = \rho^\alpha(1-\rho)^{1-\alpha}.$$

Як бачимо, середньодушове споживання повністю визначається функцією $g(\rho)$. Нескладно знайти похідну цієї функції

$$\frac{dg}{d\rho} = \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^\alpha \frac{\alpha-\rho}{\rho}.$$

Знак похідної повністю визначається співвідношенням між α та ρ. А саме, при $\alpha > \rho$ має місце нерівність $\frac{dc^*}{d\rho} > 0$, тоді як при $\alpha < \rho$ виконується $\frac{dc^*}{d\rho} < 0$. З цього випливає, що при $\alpha = \rho$ досягається найбільше можливе значення середньодушового споживання. В цьому випадку *норма накопичення ρ рівна еластичності випуску за фондами α*. На практиці норма накопичення зазвичай менша свого оптимального значення ($\alpha > \rho$), тобто можливе недонакопичення (див. рис. №).

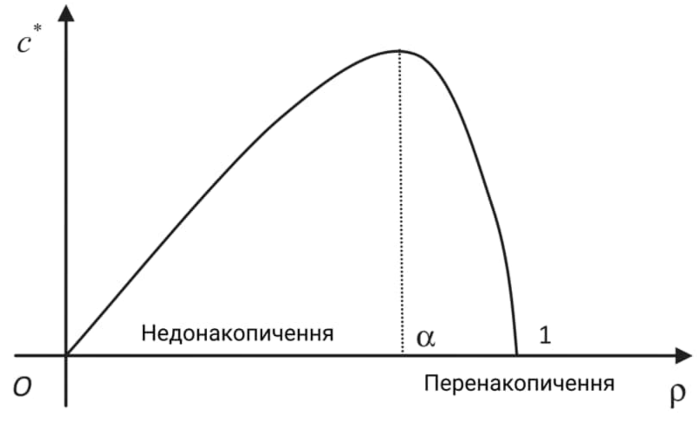


Рис. 4. Два види накопичення

Зауважимо, що якщо замість норми накопичення ρ (при $\alpha > \rho$) встановити меншу норму накопичення $\tilde{\rho} = \rho - \Delta\rho$ ($\Delta\rho > 0$), то поточне середньодушове споживання зросте зі значення $c_0 = (1-\rho)Ak_0^{\alpha}$ до $\widetilde{c_0} = (1-\rho+\Delta\rho)Ak_0^{\alpha}$. Проте цей виграш через достатньо короткий проміжок часу спочатку нівелюється, а потім і зовсім перетвориться на програш, оскільки при $\alpha > \rho$ в силу $\frac{dc^*}{d\rho} > 0$ стаціонарне середньодушове споживання складає $c^* = c^*(\rho) > c^*(\rho - \Delta\rho) = \tilde{c}^*$. Звідси робимо висновок, що *виграш в поточному споживанні неминуче веде до програшу в найближчій перспективі*.

Загальна порівняльна картина зміни середньодушового споживання в цих двох випадках зображена на наступному рисунку:

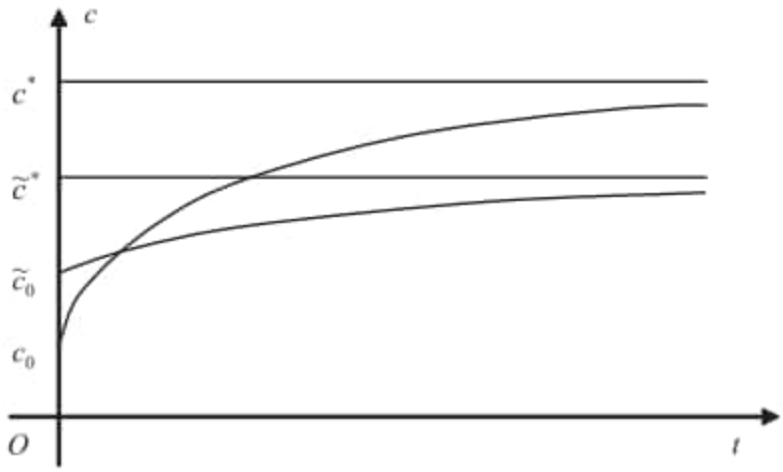


Рис. 5. Порівняння змін середньодушового споживання

Тож як висновок, можна стверджувати, що для вивчення економічного росту є досить комфортним використання математичної моделі Р.Солоу в формі диференціального рівняння першого порядку. Його дослідження дає можливість отримати низку важливих економічних висновків. Серед яких, очевидно – “золоте” правило накопичення.

1.4 Висновок до I розділу

У цьому розділі введено поняття диференціального рівняння та їхніх систем, які є одним з основних понять при побудові економічних моделей, зокрема динамічних.

На деяких простих та складніших прикладах, продемонстровано як можна описувати природничі процеси. Зокрема розглянуто модель економічного зростання Солоу-Свена, яка однозначно надала певну математичну базу для аналізу зміни капіталу та економічного ефекту від прогресу. Ця модель є відправною точкою для наступних, набагато складніших моделей і має досі вплив на макроекономічну теорію.

Варто зазначити, що модель Солоу не є універсальною і з деяких причин не дає пояснення багатьох проблем та процесів економіки, що пов’язані з економічним зростанням.

Розділ II. Динамічна оптимізація

У цьому розділі розглянемо основні теоретичні підходи відшукання необхідних та достатніх умов оптимального керування, описаними диференціальними зв'язками та інтегральною цільовою функцією.

2.1. Принцип максимуму Понтрягіна

Розглянемо мінімалізацію функціоналу

$$I = \int_0^T f^0\big(t, x(t), u(t)\big)dt + F\big(x(T)\big) \tag{14}$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big), \qquad x(0) = x_0, \tag{15}$$

$$u(t) \in U \subset R^r, \tag{16}$$

де U – замкнена множина; x_0 – задана точка з R^n та виконані всі умови на всі функції, описані в розділі I. Нехай пара $[x^*(t), u^*(t)]$ є мінімаллю в задачі (14) - (16). Надалі будемо вважати, що значення вектор-функції $x(t)$ та $f\big(t, x(t), u(t)\big)$ – це стовпці довжиною n.

Введемо вектор-функцію $\psi(t)$ як рядок довжиною n та побудуємо скалярну функцію

$$H(t, x, u) = \psi(t)f(t, x, u) - f^0(t, x, u), \tag{17}$$

де ψf є скалярним добутком

$$\psi f = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i.$$

Визначимо вектор-функцію $\psi(t)$ як розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H\big(t, x^*(t), u^*(t)\big)}{\partial x}, \tag{18}$$

з початковою умовою

$$\psi(T) = -\frac{\partial F\big(x^*(T)\big)}{\partial x}. \tag{19}$$

Тут оператор диференціювання скалярної функції за векторним аргументом x є рядком.

Систему (18) називають спряженою системою, а функцію $H(t, x, u)$ – функцією Гамільтона.

Має місце теорема, яку називають принципом максимуму Понтрягіна [2, 3, 6].

Теорема 2. (Л.С. Понтрягін, 1956р). Нехай пара $[x^*(t), u^*(t)]$ є мінімаллю в задачі (14) – (16), тоді оптимальне керування $u^*(t)$ задовольняє умову максимуму

$$H\big(t, x^*(t), u^*(t)\big) = \max_{u \in U} H\big(t, x^*(t), u(t)\big).$$

Зауважимо, що якщо в задачу (1) – (3) додати ще умову

$$x(T) = x_T,$$

де x_T – задана точка з R_n, то початкова умова (19) є непотрібною.

Техніка доведення принципу максимуму Понтрягіна базується на використанні так званих голчастих варіацій керування, тобто таких, що проварійовані керування можуть сильно відрізнятися від $u^*(t)$, але на множині малої міри, що тягне за собою малі варіації траєкторії. Відмітимо, що доведення виявилося досить складним. Л.І. Розоноер [7] запропонував дещо іншу техніку доведення, яка теж використовує голчасті варіації керування, але основану на прямому обчисленні приросту функціоналу

Для прикладу розглянемо мінімізацію функціоналу

$$I = -\int_0^1 \left(x(t) - \big(u(t)\big)^2 \right) dt\,, \tag{20}$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \qquad x(0) = 1, \tag{21}$$

$$x(1) = 0. \tag{22}$$

Виписуємо функцію (17) для цієї задачі

$$H(t, x, u) = \psi(t) u + x - u^2.$$

Як функція по аргументу u, вона є параболою з вітками донизу, тому має єдину точку максимуму $u^*(t)$ у своїй вершині, яку знаходимо з одного із рівнянь

$$u^*(t) = -\frac{b}{2a} = \frac{\psi}{2},$$

або

$$\frac{\partial H\big(t, x^*(t), u^*(t)\big)}{\partial u} = 0.$$

Отримуємо, що

$$u^*(t) = \frac{\psi(t)}{2}. \tag{23}$$

Так як $\frac{\partial H(t,x,u)}{\partial x} = 1$, то спряжена система (18) матиме вигляд

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -1. \tag{24}$$

У нашій задачі права точка траєкторії є зафіксованою, тому початкова умова (19) відкидається, але до останнього диференціального рівняння додається ще умова

$$\psi(1) = \psi_1. \tag{25}$$

Розв'язавши отриману задачу Коші знаходимо, що

$$\psi(t) = \psi_1 + 1 - t. \tag{26}$$

Далі підставляємо отриманий розв'язок в (23) та отриманий потім результат в (21). Тоді

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2}(\psi_1 + 1 - t), \qquad x(0) = 1.$$

Новоутворена задача Коші вже має розв'язок

$$x(t) = 1 + \frac{\psi_1 + 1}{2}t - \frac{1}{4}t^2.$$

На кінець, нам необхідно знайти, використовуючи умову (22), число ψ_1. Ця умова приводить до рівняння

$$1 + \frac{\psi_1 + 1}{2} - \frac{1}{4} = 0.$$

з якого отримуємо $\psi_1 = -2{,}5$.

Тому оптимальною траєкторією задачі буде співвідношення

$$x^*(t) = 1 - \tfrac{3}{4}t - \tfrac{1}{4}t^2\ .$$

2.2. Принцип Беллмана

Розглянемо задачу мінімізації функціоналу

$$I[x(\cdot),u(\cdot)] = \int_0^T f^0\big(t,x(t),u(t)\big)dt + F\big(x(T)\big), \tag{27}$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t,x(t),u(t)\big), \qquad x(0) = x_0, \tag{28}$$

$$u(t) \in U. \tag{29}$$

Нехай $[x^*(t),u^*(t)]$ – єдина мінімаль цієї задачі.

Познайомимось з *принципом оптимальності Беллмана*.

Візьмемо $t \in (0,T)$ та розглянемо наступну задачу мінімізації функціоналу:

$$I_1[x(\tau),u(\tau)] = \int_t^T f^0\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)d\tau + F\big(x(T)\big) \tag{30}$$

на множині $D(t,x)$, що складається з пар функцій $[x(\tau),u(\tau)]$, які задовольняють умови

$$\frac{dx(\tau)}{dt} = f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big), \qquad x(t) = x, \tag{31}$$

$$u(\tau) \in U. \tag{32}$$

Нехай $[\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)]$, $(\tau \in [t,T])$ – мінімаль в цій задачі. Якщо ми будемо змінювати момент часу t та вектор x, то, очевидно, буде змінюватись також і множина $D(t,x)$, і мінімальне значення функціоналу I. Позначимо

$$S(t,x) = \min I_1[x(\tau),u(\tau)] \tag{32}$$

при умові, що $[x(\tau),u(\tau)] \in D(t,x)$. Функція $S(t,x)$ називається *функцією Беллмана*.

Принцип Беллмана [6] полягає в тому, що коли $x = x^*(t)$ (тобто якщо точка x лежить на оптимальній траєкторії задачі (27) – (29)), то тоді мінімаль для задачі (30) – (32) співпадає з мінімаллю задачі (27) – (29) на відрізку $[t,T]$:

$$\bar{x}(\tau) = x^*(t), \qquad \bar{u}(\tau) = u^*(t) \quad \forall \tau \in [t,T]. \tag{33}$$

Доведення: Припустимо протилежне – рівність (33) не виконується. Тоді в силу того, що пара $[\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)]$ – мінімаль в задачі (30) – (32), то має місце нерівність

$$I_1[x^*(t),u^*(t)] > I_1[\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)],$$

яка тягне за собою наступне:

$$I_1[x^*(\cdot),u^*(\cdot)] = \int_0^t f^0\big(t_1,x^*(t_1),u^*(t_1)\big)dt_1 + I_1[x^*(\tau),u^*(\tau)] >$$

$$> \int_0^t f^0\big(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)\big)dt_1 + I_1[\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)] = I[x(\cdot), u(\cdot)], \qquad (34)$$

де пара $[x(\cdot), u(\cdot)]$ співпадає з парою $[x^*(\cdot), u^*(\cdot)]$ на $[0, t]$ та з парою $[\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)]$ на $[t, T]$. Очевидно, що пара задовольняє умови (28) та (29). В силу (34) функціонал I приймає на ній значення менше, ніж на мінімалі $[x^*(\cdot), u^*(\cdot)]$, що суперечить припущенню та завершує доведення.

Припустимо, що функція Беллмана, визначена в (32), неперервно-диференційовна за (t, x), тоді за формулою Тейлора [1] можемо записати

$$S(t + \Delta t, x + \Delta x) = S(t, x) + \frac{\partial S(t, x)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial S(t, x)}{\partial x}\Delta x + O(\cdot),$$

де $O(\cdot)$ – доданки вищого порядку малості.

Посилаючись на принцип оптимальності отримуємо рівність

$$S(t, x) = \min_D \left[\int_t^{t+\Delta t} f^0\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big)d\tau + \int_{t+\Delta t}^T f^0\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big)d\tau + F\big(x(T)\big)\right] =$$

$$= \min_{D_{t,t+\Delta t}} \left[\int_t^{t+\Delta t} f^0\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big)d\tau + S(t + \Delta t, x + \Delta x)\right], \qquad (35)$$

де $D_{t,t+\Delta t}$ – множина з пар $[\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)]$, що задовольняють (30) та (31) при $\tau \in [t, t + \Delta t]$; приріст Δx визначається з диференціального зв'язку, тобто:

$$\Delta x = f(t, x, u)\Delta t + O(\Delta t). \quad (36)$$

Враховуючи малість відрізку Δt, отримуємо:

$$\int_t^{t+\Delta t} f^0\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big)d\tau = f^0\big(t, x(t), u(t)\big)\Delta t + O(\Delta t).$$

А тепер враховуючи (36) та формулу Тейлора, можемо переписати (35) у вигляді:

$$S(t, x) = \min_{u \in U}\{ f^0\big(t, x(t), u(t)\big)\Delta t + S(t, x) + \frac{\partial S(t, x)}{\partial t}\Delta t +$$
$$+ \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} f\big(t, x(t), u(t)\big)\Delta t + O(\Delta t)\}.$$

Або

$$\min_{u \in U} \{ f^0\big(t, x(t), u(t)\big)\Delta t + \frac{\partial S(t, x)}{\partial t}\Delta t +$$
$$+ \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} f\big(t, x(t), u(t)\big)\Delta t + O(\Delta t)\} = 0.$$

Поділивши на Δt та перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, отримуємо

$$-\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} = \min_{u \in U} \left\{ f^0\big(t, x(t), u(t)\big) + \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} f\big(t, x(t), u(t)\big)\right\}. \qquad (37)$$

Це рівняння в частинних похідних першого порядку відносно функції $S(t,x)$ носить назву *функції Беллмана*. З означення (32) функції Беллмана легко дізнатись вигляд початкової умови:

$$S(T,x) = F(x). \tag{38}$$

Тепер розглянемо приклад мінімізації наступного функціоналу

$$I = \int_0^1 \left(\left(x(t)\right)^2 + \left(u(t)\right)^2\right) dt$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = x + u, \quad x(0) = 1.$$

Рівняння Беллмана (37) для цієї задачі має вигляд:

$$-\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} = \min_{u \in U}\left\{x^2 + u^2 + \frac{\partial S(t,x)}{\partial x}(x+u)\right\}.$$

Так як вираз під операцією $\min\limits_{u \in U}$ є параболою з вітками догори, відносно аргументу u, то отримуємо, що мінімум досягається у вершині цієї параболи:

$$2u + p = 0,$$

тобто $u = -{}^{p}/_{2}$.

Тоді рівняння Беллмана можна переписати подати як

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = x^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x}\left(x - \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x}\right),$$

або після спрощення

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = x^2 + x\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2, \tag{39}$$

з початковою умовою

$$S(1,x) = 0. \tag{40}$$

Тепер для знаходження функції Беллмана ми отримали задачу Коші (39), (40) для нелінійного рівняння з частинними похідними першого порядку. Такі задачі – своєрідні, адже в них можна вгадати загальний вигляд розв’язку. В даному випадку, розв’язок ми будемо шукати у вигляді:

$$S(t,x) = q(t)x^2, \tag{41}$$

де $q(t)$ – невідома функція, що задовольняє умову

$$q(1) = 0, \tag{42}$$

що забезпечує виконання умови (40). Тепер підставимо (41) в (39) та отримаємо:

$$-\frac{\partial q(t)}{\partial t}x^2 = x^2 + 2x^2 q(t) - \frac{1}{4}(2q(t)x)^2.$$

Скоротивши на x^2, знаходимо диференціальне рівняння з відокремлювальними змінними для невідомої функції $q(t)$

$$-\frac{\partial q(t)}{\partial t} = 1 + 2q(t) - q^2(t), \tag{43}$$

Розв'язок цього рівняння знайдемо з рівності:

$$\int \frac{dq}{q^2 - 2q - 1} = \int dt + C\,. \tag{44}$$

Для забезпечення виконання умови (40), праву частину в (44) подамо у вигляді $(-(1-t)+C)$. Лівий інтеграл обчислюємо як інтеграл від раціонального дробу, для цього знаходимо корені квадратного тричлена у знаменнику дробу $q_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ і подаємо цей дріб тепер у вигляді

$$\frac{1}{q^2 - 2q - 1} = \frac{A}{q - q_1} + \frac{B}{q - q_2},$$

де для знаходження A та B маємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Aq_2 + Bq_1 = -1. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримуємо такі значення A та B

$$A = {}^{1}\!/_{2\sqrt{2}}, \quad B = -A.$$

Тоді

$$\int \frac{dq}{q^2 - 2q - 1} = A\int \frac{dq}{q - q_1} - A\int \frac{dq}{q - q_2} = A\ln\left|\frac{q - q_1}{q - q_2}\right|.$$

Тепер (44) можна переписати у вигляді

$$\frac{q(t) - q_1}{q(t) - q_2} = Ce^{-2\sqrt{2}(1-t)}$$

Враховуючи, що виконується (42) знаходимо значення C та підставляємо в попередню рівність

$$q(t) = \left(\sqrt{2} - 1\right)\frac{1 - e^{-2\sqrt{2}(1-t)}}{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 + e^{-2\sqrt{2}(1-t)}}.$$

А тепер обчислимо оптимальне керування за формулою

$$u^*(t,x) = -0{,}5\frac{\partial S(t,x)}{\partial x},$$

та отримаємо

$$u^*(t,x) = -q(t)x =$$

$$= \left(1 - \sqrt{2}\right)\frac{1 - e^{-2\sqrt{2}(1-t)}}{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 + e^{-2\sqrt{2}(1-t)}}x(t).$$

Тепер, підставивши знайдене оптимальне керування в умови

$$\frac{dx(t)}{dt} = x + u, \quad x(0) = 1,$$

та розв'язавши отриману задачу Коші відносно $x(t)$, знаходимо і оптимальну траєкторію.

2.3. Теорема Кротова

Динамічне програмування та зв'язане з ним рівняння Беллмана були першим кроком до створення методів оптимального керування, непов'язаних з безпосереднім варіюванням керування та траєкторії. Наступним кроком було створення В.Ф. Кротовим теорії достатніх умов абсолютного мінімуму [1, 6]. Основна ідея не пов'язана з принципом оптимальності Беллмана і полягає у розширенні допустимої множини шляхом відкидання диференціальних зв'язків, що супроводжується спеціальним продовженням цільового функціоналу на більш широку множину. Це продовження містить деяку довільну функцію, яка називається функцією Кротова. Як виявилось, рівняння Беллмана є частковим випадком, а сама теорія містить велику кількість інших способів розв'язання.

Розглянемо найбільш загальне формулювання задачі оптимального керування динамічним процесом. Потрібно мінімізувати функціонал

$$I[x(t),u(t)] = \int_0^T f^0\big(t,x(t),u(t)\big)dt + F\big(x(T)\big) \tag{45}$$

на множині $D = \{x(t),u(t)\}$ за умов

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t,x(t),u(t)\big), \qquad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \tag{46}$$

$$\big(x(t),u(t)\big) \in V(t) \subset X \times U. \tag{47}$$

Як раніше зазначалось, умови на якість функцій описані у розділі I, тому вважаємо їх виконаними.

Введемо гладку скалярну функцію $\varphi(t,x)$, тобто неперервну та неперервно-диференційовану для всіх t,x. Побудуємо ще дві наступні функції:

$$R(t,x,u) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x} f\big(t,x(t),u(t)\big) - f^0\big(t,x(t),u(t)\big), \tag{48}$$

$$\Phi(x_0,x_T) = \mathrm{F}(x_T) + \varphi(T,x_T) - \varphi(0,x_0), \tag{49}$$

де $x_0 \in R^n, x_T \in R^n$.

Раніше зазначалось, що вектори x, f будемо уявляти як стовпці довжиною n, а похідну від скалярної функції за векторним аргументом (x) – як рядок довжиною n. Тоді

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} f_i$$

є скалярним добутком двох векторів.

Позначимо через $V_x(t)$ проекцію множини $V(t)$ на простір X, тоді $x(t) \in V_x(t)$ дає нам обмеження на значення вектору стану системи (46), що витікає зі загального обмеження (47).

Тут також ми припустимо, що множина $V(t)$ є замкнена та обмежена для довільного $t \in [0, T]$.

Теорема 3. (В.Ф. Кротов, 1962р). Для того, щоб пара $[x^*(t), u^*(t)]$ була мінімаллю для I на D, достатньо існування такої гладкої скалярної функції $\varphi(t, x)$, щоб виконувались умови:

1. $R\big(t, x^*(t), u^*(t)\big) = \max\limits_{(x,u)\in V(t)} R(t, x, u)$ для довільного $t \in [0, T]$;
2. $\Phi\big(x^*(0), x^*(T)\big) = \min\limits_{x_0\in V_x(0),\, x_T\in V_x(T)} \Phi(x_0, x_T)$.

Доведення: Нехай M – множина, що складається з пар функцій $[x(t), u(t)]$ і задовольняють лише обмеження (47). На цій множині введемо функціонал

$$L[x(t), u(t);\ \varphi] = \Phi\big(x(0), x(T)\big) - \int_0^T R\big(t, x(t), u(t)\big)dt\,. \tag{50}$$

Цей функціонал володіє такою властивістю: якщо пара $[x(t), u(t)] \in D$, то

$L[x(t), u(t);\ \varphi] = I[x(t), u(t)]$ для довільної

$$\varphi = \varphi(t, x). \tag{51}$$

Дійсно, якщо $[x(t), u(t)] \in D$, то виконується диференціальний зв'язок (46) і тоді в формулі (48) для функції R ми можемо функцію f замінити на ${dx}/{dt}$. Звідси

$$R\big(t, x(t), u(t)\big) = \frac{\partial\varphi\big(t, x(t)\big)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi\big(t, x(t)\big)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} - f^0\big(t, x(t), u(t)\big) =$$
$$= \frac{\partial\varphi\big(t, x(t)\big)}{\partial t} - f^0\big(t, x(t), u(t)\big),$$

З врахуванням правила диференціювання складеної функції.

Після цього функціонал (50) перепишеться таким чином:

$$L[x(t), u(t);\ \varphi] = F\big(x(T)\big) + \varphi\big(T, x(T)\big) - \varphi\big(0, x(0)\big) -$$
$$- \int_0^T \left[\frac{\partial\varphi\big(t, x(t)\big)}{\partial t} - f^0\big(t, x(t), u(t)\big)\right] dt\,. \tag{52}$$

Оскільки

$$\int_0^T \frac{\partial\varphi\big(t, x(t)\big)}{\partial t} dt = \varphi\Big(T, x(T) - \varphi\big(0, x(0)\big)\Big),$$

то (52) переписуємо у вигляді

$$L[x(t), u(t);\ \varphi] = F\big(x(T)\big) + \int_0^T f^0\big(t, x(t), u(t)\big)dt$$

та отримуємо рівність (51).

Далі вводимо функціонал

$$l(\varphi) = \min_{x_0 \in V_x(0),\, x_T \in V_x(T)} \Phi(x_0, x_T) - \int_0^T \max_{(x,u) \in V(t)} R(t, x, u)\, dt.$$

Функціонал $l(\varphi)$ є оцінкою знизу для функціоналу (50) для довільним чином вибраної функції $\varphi = \varphi(t, x)$, тобто

$$L[x(t), u(t);\ \varphi] > l(\varphi), \quad \forall [x(t), u(t)] \in M. \tag{53}$$

Дійсно, це витікає з нерівностей

$$\Phi(x_0, x_T) \geq \min_{x_0 \in V_x(0),\, x_T \in V_x(T)} \Phi(x_0, x_T),$$

$$-\int_0^T R\big(t, x(t), u(t)\big) dt \geq \int_0^T \min_{(x,u) \in V(t)} [-R(t, x, u)]\, dt =$$

$$= -\int_0^T \max_{(x,u) \in V(t)} R(t, x, u)\, dt,$$

які є справедливими для довільної пари $[x(t), u(t)]$ з множини M.

Для завершення доведення достатньо звернутись до умов теореми 3. Бачимо, що тоді

$$L[x^*(t), u^*(t);\ \varphi] = l(\varphi).$$

Але пара $[x^*(t), u^*(t)] \in D$, тому остання рівність може бути записана у вигляді

$$I[x^*(t), u^*(t)] = l(\varphi). \tag{54}$$

Зауважимо, що множина D є підмножиною з M, тому, якщо виконується (53) на M, то воно виконується і на D, де згідно (51) $L[\cdot] = I[\cdot]$. Іншими словами, поряд з (53) ми маємо нерівність

$$I[x(t), u(t)] \geq l(\varphi) \quad \forall [x(t), u(t)] \in D. \tag{55}$$

Ця нерівність (разом з (54)) свідчить про те, що пара $[x^*(t), u^*(t)]$ є мінімаллю для I на D. Доведення завершено.

Зауважимо, що в даному доведенні вагомим фактором є конструкція функціоналу L, що володіє властивістю (7). А функція φ носить назву *функції Кротова.*

Розглянемо тепер задачу

$$I[x(\cdot), u(\cdot)] = \int_0^T f^0\big(t, x(t), u(t)\big) dt + F\big(x(T)\big)$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big), \qquad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U,$$

яка є частковим випадком задачі (45) – (47), коли умова (47) подано як початкова умова $x(0) = x_0$ та умова на керування $u(t) \in U$, для знаходження зв'язку з рівнянням Беллмана.

Один зі способів виконати умови теореми 3 полягає в наступному: вводимо функцію

$$P(t,x) = \max_{(x,u)\in V(t)} R(t,x,u)$$

та вимагаємо, щоб $P(t,x) = 0$ для всіх (t,x). В детальному записі ця рівність виглядає так:

$$\frac{\partial\varphi\big(t,x(t)\big)}{\partial t} + \max_{u\in U}\left\{\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x} f\big(t,x(t),u(t)\big) - f^0\big(t,x(t),u(t)\big)\right\} = 0 \qquad (56)$$

та є нелінійним рівнянням з частинними похідними першого порядку відносно φ. Перша умова теореми 3 після цього повністю виконана.

Далі покладемо

$$\varphi(T,x) + F(x) = 0, \qquad (57)$$

після чого буде виконана вже друга умова теореми.

Неважко тепер побачити, що функція φ, на підставі (56) та (57), є пов'язана з функцією Беллмана простим відношенням $S(t,x) = -\varphi(t,x)$.

Розглянемо задачу

$$I[x(t),u(t)] = \int_0^T f^0\big(t,x(t),u(t)\big)dt + F^T\big(x(T)\big) \to min$$

з умовами

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t,x(t),u(t)\big), \qquad x(0) = x_0,$$
$$u(t) \in U.$$

Нехай пара $[x^*(t),u^*(t)]$ – мінімаль цієї задачі.

Умови теореми 3 виглядатимуть так:

1. $R\big(t,x^*(t),u^*(t)\big) = \max\limits_{u\in U, x\in E_n} R(t,x,u)$ для всіх $t \in [0,T]$;
2. $\Phi\big(x(0),x(T)\big) = \min\limits_{x_T\in E_n} \Phi(x_0,x_T)$,

де E_n – n-вимірний евклідовий простір.

Нехай існує двічі гладка функція $\varphi(t,x)$ така, що ці умови виконуються. Необхідні умови для виконання 1 та 2 наступні:

$$R\big(t,x^*(t),u^*(t)\big) = \max_{u\in U} R\big(t,x^*(t),u(t)\big), \qquad (58)$$

$$\frac{\partial R\big(t,x^*(t),u^*(t)\big)}{\partial x} = 0, \qquad (59)$$

$$\frac{\partial\Phi\big(x_0,x^*(T)\big)}{\partial x_T} = 0. \qquad (60)$$

Для кращого розуміння (58) – (60) введемо функцію $\psi(t)=\varphi_x(t,x^*(t))$ – рядок довжини n. Тоді можемо записати так:

$$R\big(t,x^*(t),u(t)\big)=\frac{\partial\varphi\big(t,x^*(t)\big)}{\partial t}+\psi(t)f\big(t,x^*(t),u(t)\big)-f^0\big(t,x^*(t),u(t)\big).$$

Увівши позначення

$$H(t,x,u)=\psi(t)f(t,x,u)-f^0(t,x,u),$$

тобто функцію Понтрягіна, отримаємо

$$R\big(t,x^*(t),u(t)\big)=\frac{\partial\varphi\big(t,x^*(t)\big)}{\partial t}+H\big(t,x^*(t),u(t)\big).$$

Так як перший доданок не залежить від u, то умова (14) зводиться до

$$H\big(t,x^*(t),u^*(t)\big)=\max_{u\in U}H(t,x^*(t),u)\,. \tag{61}$$

Тепер враховуючи формулу (48) для функції R, виконуємо диференціювання за x в (59):

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x}f+\frac{\partial\varphi\partial f}{\partial x\partial x}-\frac{\partial f^0}{\partial x}\right]_{x=x^*(t),u=u^*(t)}=0, \tag{62}$$

де $\varphi=\varphi(t,x)$, $f=f(t,x,u)$, $f^0=f^0(t,x,u)$.

Оскільки $[x(t),u(t)]\in D$, то

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x}f\right]_{x=x^*(t),u=u^*(t)}=\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x}\frac{dx}{dt}\right]_{x=x^*(t),u=u^*(t)}=\frac{d\psi(t)}{dt}.$$

Після цього (62) переписується наступним чином:

$$\frac{d\psi(t)}{dt}+\psi(t)\frac{\partial f(t,x^*(t),u^*(t))}{\partial x}-\frac{\partial f^0\big(t,x^*(t),u^*(t)\big)}{\partial x}=0$$

або, якщо врахувати позначення функції Понтрягіна,

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=-\frac{\partial H\big(t,x^*(t),u^*(t)\big)}{\partial x}. \tag{63}$$

Отже, для введеної функції $\psi(t)$, ми отримали систему лінійних диференціальних рівнянь, що співпадають зі спряженою системою в принципі максимуму Понтрягіна.

На завершення, розглянемо рівність (60). Пригадавши формулу (49) для функції $\Phi(x_0,x_T)$, деталізуємо її так:

$$\frac{dF\big(x^*(T)\big)}{dx}+\frac{d\varphi(T,x^*(T))}{dx}=0,$$

що є рівністю

$$\psi(T)=-\frac{dF\big(x^*(T)\big)}{dx}, \tag{64}$$

яка співпадає з умовою для спряженої системи в принципі максимуму Понтрягіна.

Отже, співвідношення (62), (63) та (64) є принципом максимуму Понтрягіна та є необхідними умовами для виконання теореми Кротова.

2.4. Висновок до II розділу

Термін “оптимальне керування” появився у 1956 році. І його пов’язують з Л.С. Понтрягіним, хоч всеможливі задачі на екстремуми функціоналів розглядаються вже декілька століть у варіаційному численні. У цьому розділі розглянули деякі основні методи оптимального керування. До них відносимо принципи Беллмана та Понтрягіна, а також теорему Кротова.

Основна мета цієї частини – оптимальне керування динамічними процесами, які описуються диференціальними рівняннями та системами. За допомогою яких можна реалізовувати практичні задачі.

Розглянуто деякі конкретні інтегральні цільові функціонали з диференціальними зв’язками та додатковими умовами, що стало основою деяких математичних моделей економічних процесів.

Розділ III. Оптимальне керування динамікою соціально-економічних систем

У цьому розділі познайомимось з поняттям оптимального керування однопродуктовою макроекономічною моделлю, розглянемо задачу оптимізації податкової ставки, використання енергії та динамікою біопопуляцій.

3.1. Оптимальне керування у математичній економіці

Розглянемо економічну систему, що характеризується такими показниками:

- $v(t)$ – випуск за одиницю часу (темп випуску) в момент t;
- $\Phi(t)$ – кількість основних виробничих фондів (ОВФ) в момент часу t;
- $p(t)$ – невиробниче споживання за одиницю часу (темп невиробничого споживання) в момент t;
- $L(t)$ – кількість трудових ресурсів в момент t.

Має місце рівняння балансу

$$v(t) = \alpha(t)v(t) + I(t) + p(t), \tag{65}$$

де $\alpha(t)$ – коефіцієнт виробничих затрат (або ж норма матеріаломісткості) в момент часу t, $\alpha(t) \in (0,1)$.

Інвестиції $I(t)$ йдуть на ріст ОВФ та на амортизацію ОВФ, якими володіємо, тому $I(t) = B(t)U_\Phi(t)$, де

$$U_\Phi(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} + \chi(t)\Phi(t),$$

$\chi(t)$ – коефіцієнт амортизації; $B(t)$ – коефіцієнт ефективності. Це рівняння перепишемо у формі

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = U_\Phi(t) - \chi(t)\Phi(t) \tag{66}$$

та розглянемо як диференціальне рівняння динаміки ОВФ. Якщо додати ще початкову умову $\Phi(0) = \Phi_0$, то отримаємо задачу Коші (при заданих $U_\Phi(t)$ та $\chi(t)$), яка має єдиний розв'язок.

З (65) отримуємо

$$p(t) = \big(1 - \alpha(t)\big)v(t) - I(t).$$

Так як інвестиції $I(t) \geq 0$, то звідси легко знаходимо

$$0 \leq p(t) \leq \big(1 - \alpha(t)\big)v(t), \tag{67}$$

де ліва частина нерівності записана базуючись на очевидність невід'ємності темпу невиробничого споживання $p(t)$), права частина водночас дає нам оцінку зверху для $p(t)$, що відповідає нульовим інвестиціям.

Випуск $v(t)$, будучи очевидно невід'ємним, обмежений зверху виробничими можливостями економічної системи. Це виражається наступною нерівністю:

$$0 \leq v(t) \leq F\big(t, \Phi(t), L(t)\big). \qquad (68)$$

Тут $F\big(t, \Phi(t), L(t)\big)$ – виробнича функція, де змінна t враховує виробничий прогрес.

Кількість трудового ресурсу $L(t)$ може змінюватись з часом, та темп його зміни $dL(t)/dt$ буде залежати як і від кількості $L(t)$, так і від поточного випуску $v(t)$ та темпу невиробничого споживання $p(t)$, а також і від інших екзогенних факторів, що визначають міграцію населення. Тоді в загальному вигляді

$$\frac{dL(t)}{dt} = f_L(t, L(t), v(t), p(t), \dots), \qquad L(0) = L_0.$$

отримуємо досить складне демографічне рівняння з початковою умовою. При розгляді великого району (чи навіть країни), вважається, що процес зміни кількості трудового ресурсу достатньо інерційний та слабо залежить від $v(t), p(t)$. Більше того, воно обмежується лінійним рівнянням

$$\frac{dL(t)}{dt} = -n(t)L, \qquad L(0) = L_0, \qquad (69)$$

де $n(t)$ – коефіцієнт пропорційності; L_0 – початкова чисельність.

Введемо функцію

$$u(t) = p(t)/\big(1 - \alpha(t)\big)v(t)$$

Так як в знаменнику дробу стоїть оцінка зверху для темпу невиробничого споживання $p(t)$, то ця функція складає реальний темп невиробничого споживання відносно його максимально можливої величини. Зрозуміло, що $u(t) \in [0,1]$. Тоді

$$p(t) = \big(1 - \alpha(t)\big)u(t)v(t). \qquad (70)$$

З рівняння балансу (1) виражаємо $I(t) = \big(1 - \alpha(t)\big)v(t) - p(t)$. З врахуванням рівності (6) можемо останню рівність переписати у вигляді $I(t) = \big(1 - \alpha(t)\big)v(t)\big(1 - u(t)\big)$. Після чого рівняння для динаміки ОВФ (66) разом з початковою умовою набуває наступного вигляду:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = B^{-1}(t)\big(1 - \alpha(t)\big)v(t)\big(1 - u(t)\big) - \chi(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = \Phi_0. \qquad (66^*)$$

Отже, математична модель цієї економічної системи подається у вигляді системи двох диференціальних зв'язків (66*) та (69), що описують динаміку ОВФ та трудового ресурсу, нерівності (68), що обмежують виробничі можливості через виробничу функцію, а також рівності (70) для темпу невиробничого споживання. Окрім цього функція $u(t) \in [0,1]$. Але так як нульове невиробниче споживання майже не можливе, то замість цього варто записувати $u(t) \in [u_{min}, 1]$, де u_{min}– мінімальна доля.

З огляду на теорію керування, тут $\Phi(t)$ та $L(t)$ мають сенс фазових координат, а функції $u(t)$ та $v(t)$ тут є керуючими.

Зараз потрібно сформулювати критерій якості. Метою економічної системи є максимально можливе забезпечення матеріальних потреб тих, хто працює на часовому відрізку $[0, T]$. Основними показниками матеріального забезпечення є $p(t)/L(t)$ – невиробничі споживання, що припадають на трудову одиницю. Таким чином, нам необхідно намагатися керувати цією економічною системою так, щоб цей показник був якомога більший при довільному $t \in [0, T]$. Проте варто зазначити, що завищення невиробничого споживання на деякому часовому інтервалі $(t_1, t_2) \subset [0, T]$ може призвести до сповільнення темпу росту ОВФ, що як результат негативно вплине на випуск, і відповідно, на невиробниче споживання. Саме тому як критерій якості економічної системи варто було б взяти максимум сумарного середньодушового невиробничого споживання, тобто

$$I_0 = \int_0^T \frac{p(t)}{L(t)} dt \to max.$$

Проте в цьому критерії всі моменти часу $t \in [0, T]$ рівноцінні. Може так статись, що з точки зору максимуму критерію I_0 доцільно, щоб невиробниче споживання було мінімальне на відрізку $[0, T - \varepsilon]$, де ε – деяке мале число, так як це забезпечить дуже велике значення на відрізку $[T - \varepsilon, T]$.
Напевно, такий розклад подій нас не задовольнить.

Потрібно виходити з того, що матеріальні блага, отримані людьми зараз та в найближчі моменти часу, представляють більше цінності, ніж можливі блага в далекому майбутньому. Іншими словами, моменти часу $t \in [0, T]$ в критерії оптимальності не повинні розглядатися як рівноцінні. Щоб врахувати це, введемо в критерії так званий *дисконтний множник* $e^{-\delta t}$, де $\delta > 0$ – коефіцієнт дисконтування. Таким чином, ми отримуємо критерій

$$I_1 = \int_0^T e^{-\delta t} \frac{p(t)}{L(t)} dt \to max.$$

Так як експонента є стрімко спадною функцією, то збільшення середньодушового невиробничого споживання на деякому відрізку часу $[t, t + \Delta t]$ при значенні t близькому до *0* надасть більшого впливу на функціонал, ніж таке ж збільшення на відрізку $[t, t + \Delta t]$ при значенні t далекого від *0.*

Вибір числового значення коефіцієнта дисконтування – питання непросте. Воно полягає у відповідності цінностей близького по часу та перспективного.

Підсумовуючи, задача оптимального керування полягає в наступному:

Мінімізувати функціонал

$$I = -\int_0^T e^{-\delta t} \frac{p(t)}{L(t)} dt$$

на множині D, що складається з функцій $[\Phi(t), L(t), v(t), u(t)]$, та що задовольняють наступні умови:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = B^{-1}(t)\big(1-\alpha(t)\big)v(t)\big(1-u(t)\big) - \chi(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = \Phi_0,$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = -n(t)L, \qquad L(0) = L_0,$$

$$0 \le v(t) \le F\big(t, \Phi(t), L(t)\big)$$

$$u_{min} \le u(t) \le 1,$$

$$p(t) = \big(1-\alpha(t)\big)u(t)v(t)$$

Ця постановка задачі має одну неприємну особливість. Справа в тому, що ми розглядаємо її на відрізку $[0, T]$, тобто нас зовсім не цікавить доля економічної системи в час $t > T$. Зараз ми піклуємося про те, щоб було “спожито” максимально багато матеріальних благ, про що свідчить обмеження $u(t) = 1$. Тому в умові поставленої задачі ми додамо ще вимогу $\Phi(T) = \Phi_T$, де вибір величини Φ_T реалізуємо з умови благополуччя системи при $t > T$. Вважатимемо, що розглядати надалі цю задачу ми будемо на досить великому відрізку часу $[0, T]$, проте нас цікавить лиш оптимальна стратегія при $t \in [0, t_K]$, де $t_K < T - \varepsilon$. Іншими словами, на кінцевий ефект, пов’язаний витратами, можемо не звертати уваги.

З точки зору оптимального керування ця задача не є тривіальною, оскільки вона нелінійна за парою керувань x, u, а також має нелінійне обмеження $0 \le x \le f(t, k)$. Однак, ця задача може бути аналітично розв’язана (принаймні для виробничої функції Кобба-Дугласа).

3.2. Динамічні задачі оптимізації податкової ставки

Розглянемо так звану модель "затрати – випуск". Спочатку сформулюємо задачу оптимізації податкової ставки на динамічній моделі з агрегованою однофакторною виробничою функцією, що пов'язує витрати та випуск продукції.

Припустимо, що ми володіємо підприємством, що випускає однорідний продукт. Будемо виходити з наступної виробничої функції

$$\upsilon = F(\Phi, L). \tag{71}$$

Тут υ – випуск за одиницю часу; Φ – кількість основних фондів; L – кількість трудових ресурсів. Будемо також розглядати відносно невеликий відрізок часу, що дозволить нам вважати, що об'єм основних фондів незмінний. Витрати на виготовлення продукції полягають у придбанні оборотних фондів та виплаті заробітної плати

$$z(t) = З(t)L(t) + Ц(t)f(t), \tag{72}$$

де $З(t)$ – середня зарплата одного працівника; $f(t)$ – темп використання оборотних фондів під час виробництва; $Ц(t)$ – ціна одиниці оборотних фондів. Вважаємо, що чисельність персоналу L є пропорційна темпу використання оборотних фондів:

$$L(t) = af(t) \qquad (a - const).$$

Тоді з (72) маємо

$$L(t) = b(t)z(t),$$

де

$$b(t) = (З(t) + Ц(t)a^{-1})^{-1}.$$

Підставивши цей вираз в (71), отримуємо

$$\upsilon(t) = \mathcal{F}\big(t, z(t)\big), \tag{73}$$

де

$$\mathcal{F}\big(t, z(t)\big) = F\big(\Phi, b(t)z(t)\big). \tag{74}$$

Нагадаємо, що об'єм основних фондів Φ вважається постійним, тоді співвідношення (73) та (74) дають нас початкову залежність випуску продукції від витрат. Наприклад, якщо розглядається в моделі виробнича функція Кобба-Дугласа, то

$$F(\Phi, L) = \upsilon_0 \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^{\alpha} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1-\alpha}, \alpha \in (0,1),$$

Звідси

$$\mathcal{F}\big(t, z(t)\big) = \varkappa(t) z^{1-\alpha}, \tag{75}$$

де

$$\varkappa(t) = \upsilon_0 \left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^{\alpha} \left(\frac{b(t)}{L_0}\right)^{1-\alpha}$$

Зауважимо, що оскільки основні фонди є постійні, то можливий граничний варіант виробничої функції при $\alpha = 0$, що відповідає лінійній функції (75) з коефіцієнтом посилення $\varkappa(t)$. Зважаючи на сенс цього коефіцієнта, логічно було б вважати, що $\varkappa(t) > 1$, що накладає умову на вибір розмірів заробітної плати $З(t)$.

Тепер безпосередньо можемо приступити до побудови моделі оподаткування на прибуток. Маємо

$$D(t,z) = \mathcal{F}(t,z) - z$$

є прибутком, який оподатковується.

Якщо $\nu(t)$ – податкова ставка, то

$$N(t) = \nu(t)D(t) = \nu(t)\left(\mathcal{F}\big(t,z(t)\big) - z(t)\right) \tag{76}$$

є величиною податку. Тоді

$$\Pi(t) = \big(1-\nu(t)\big)D(t) = \big(1-\nu(t)\big)\left(\mathcal{F}\big(t,z(t)\big) - z(t)\right)$$

є прибутком, що залишився після виплати податків. Частина цього прибутку йде на виплату ще інших податків, які тут не розглядаються (в фонд соціального страхування, тощо). Нехай $\mu(t)\Pi(t), \mu \in (0,1)$ – частина того прибутку, що складе затрати на виробництво в наступному році $t+1$, тоді

$$z(t+1) = \mu(t)\big(1-\nu(t)\big)\left(\mathcal{F}\big(t,z(t)\big) - z(t)\right), \tag{77}$$

$$z = z_0, t = 0,1,\ldots$$

де z_0 – затрати в початковий момент часу. В рівняннях (77) функція $z(t)$ є фазовою координатою, $\nu(t)$ – керуванням, що, очевидно, підлягає обмеженню

$$\nu_m \le \nu(t) \le \nu_s, \tag{78}$$

де $0 \le \nu_m < \nu_s \le 1$ – задані числа.

В якості критерію оптимальності візьмемо наступний функціонал

$$I = \sum_{i=0}^{T} e^{-\delta t} N(t) \tag{79}$$

- дисконтовану зважену суму податкових відрахувань з коефіцієнтом дисконтування $\delta > 0$. В розгорнутому вигляді цей функціонал матиме вигляд

$$I = \sum_{i=0}^{T} e^{-\delta t}\left(\mathcal{F}\big(t,z(t)\big) - z(t)\right)\nu(t), \tag{79*}$$

а задача оптимального керування полягатиме в знаходженні такої функції $\nu(t)$, що задовольняє обмеження (78), щоб функціонал (79*), в якому функція $z(t)$ є розв’язком дискретного ланцюжка (77), досягав свого максимального значення, забезпечуючи максимум дисконтовано зваженої суми податкових надходжень в бюджет.

Розглянемо тепер неперервний варіант цієї моделі оподаткування та відповідну задачу оптимального керування. Для цього перепишемо (77) в такому вигляді:

$$z(t+1)-z(t)=\mu(t)\big(1-\nu(t)\big)\Big(\mathcal{F}\big(t,z(t)\big)-z(t)\Big)-z(t).$$

Ліва частина – приріст затрат за рік. Раз так, то логічно було б вважати, що приріст витрат за відрізок часу Δt такий:

$$z(t+\Delta t)-z(t)=k\Big[\mu(t)\big(1-\nu(t)\big)\Big(\mathcal{F}\big(t,z(t)\big)-z(t)\Big)-z(t)\Big]\Delta t,$$

де k – розмірний коефіцієнт; $[k]=\frac{1}{[t]}$. Поділимо на Δt та перейде до границі $\Delta t\to 0$:

$$\frac{dz}{dt}=k\mu(t)\big(1-\nu(t)\big)\Big(\mathcal{F}\big(t,z(t)\big)-z(t)\Big)-kz(t),\ \ z(0)=z_0, \qquad (80)$$

Неперервний аналог критерію (9*) матиме вигляд

$$I=\int_0^T e^{-\delta t}\Big(\mathcal{F}\big(t,z(t)\big)-z(t)\Big)\nu(t)dt, \qquad (81)$$

а задача оптимізації податкової ставки полягає в максимізації цього функціоналу на розв’язках задачі Коші (80) та при обмеженні на керуванні (78).

Отож, давайте розглянемо тепер лінійний варіант задачі оподаткування:

$$I=-\int_0^T e^{-\delta t}\Big(\mathcal{F}\big(t,z(t)\big)-z(t)\Big)\nu(t)dt\to min,$$

на множині D_1, що складається з функцій $[z(t),\nu(t)]$, які задовольняють умови:

$$\frac{dz}{dt}=k\mu(t)\big(1-\nu(t)\big)\Big(\mathcal{F}\big(t,z(t)\big)-z(t)\Big)-kz(t),\ \ z(0)=z_0,$$

$$\nu_m\le\nu(t)\le\nu_s,$$

де

$$\mathcal{F}\big(t,z(t)\big)=\varkappa(t)z(t),\qquad \varkappa(t)=\upsilon_0\frac{b(t)}{L_0}>1,$$

$$b(t)=(З(t)+Ц(t)a^{-1})^{-1},\qquad [t]=1,\qquad k=1.$$

Враховуючи лінійність $\mathcal{F}\big(t,z(t)\big)$, задачу перепишемо в такому вигляді:

$$I=-\int_0^T e^{-\delta t}(\varkappa(t)-1)z(t)\nu(t)dt\ \to min$$

при умовах

$$\frac{dz}{dt}=\big[\mu(t)\big(1-\nu(t)\big)(\varkappa(t)-1)-1\big]z(t),\ \ z(0)=z_0,$$

$$\nu_m\le\nu(t)\le\nu_s.$$

По класифікації теорії оптимального керування, ця задача належить класу білінійних оптимальних задач. Позначивши $\alpha(t) = \mu(t)(\varkappa(t) - 1) - 1$, перепишемо диференціальний зв'язок наступним чином:

$$\frac{dz}{dt} = \alpha(t)z(t) - (\alpha(t) + 1)z\nu(t), \quad z(0) = z_0, \tag{82}$$

Виконуємо заміну $z = A(t)y$, де функцію $A(t)$ будемо вибирати такою, щоб спростити задачу. Підставляємо в (82) та отримуємо

$$\frac{dA}{dt}y + A\frac{dy}{dt} = \alpha Ay - (\alpha + 1)Ay\nu.$$

Покладемо

$$\frac{dA}{dt} = \alpha(t)A, \qquad A(0) = z_0,$$

що дає формулу

$$A(t) = z_0 e^{\int_0^t \alpha(\tau)d\tau}. \tag{83}$$

Після цього диференціальний зв'язок (82) (в змінній $y(t)$) матиме тепер вигляд

$$\frac{dy}{dt} = -(\alpha(t) + 1)y\nu(t), \qquad y(0) = 1.$$

Тоді задача вже трансформується в наступний вигляд:

$$I = -\int_0^T a(t)y(t)\nu(t)dt$$

на множині D_2, що складається з функцій $[y(t), \nu(t)]$, що задовольняють умови:

$$\frac{dy}{dt} = -\varkappa(t)y\nu(t), \qquad y(0) = 1,$$
$$\nu(t) \in [\nu_m, \nu_s],$$

де

$$a(t) = e^{-\delta t}(\varkappa(t) - 1)A(t), \qquad \varkappa(t) = \alpha(t) + 1. \tag{84}$$

Зазначимо, що нас цікавить лиш оптимальне керування $\nu^*(t)$, тому повертатися до попередньої фазової змінної z немає потреби.

Для розв'язку цієї задачі застосуємо принцип максимуму Понтрягіна:

$$H(t, y, \nu) = a(t)y\nu - \psi(t)\chi(t)y\nu = [a(t) - \psi(t)\chi(t)]y\nu.$$

Спряжену систему запишемо як

$$\frac{d\psi}{dt} = -[a(t) - \psi(t)\chi(t)]\nu(t), \qquad \psi(T) = 0. \tag{85}$$

Оптимальне керування $\nu^*(t)$ знаходимо з умови максимуму функції H за ν. Так як $y = y(t) > 0$, то отримуємо

$$\nu^*(t) = \begin{cases} \nu_m, & \text{при } [a(t) - \psi(t)\chi(t)] < 0, \\ \text{довільне}, & \text{при } [a(t) - \psi(t)\chi(t)] = 0, \\ \nu_s, & \text{при } [a(t) - \psi(t)\chi(t)] > 0. \end{cases} \tag{86}$$

Після цього функцію $\psi(t)$ знаходимо як розв'язок задачі Коші (74) при $\nu(t) = \nu^*(t)$, заданої в (75). Детальніший запис задачі такий:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \begin{cases} -[a(t) - \psi(t)\chi(t)]\nu_m, & \text{при } [a(t) - \psi(t)\chi(t)] < 0, \\ 0, & \text{при } [a(t) - \psi(t)\chi(t)] = 0, \\ -[a(t) - \psi(t)\chi(t)]\nu_s, & \text{при } [a(t) - \psi(t)\chi(t)] > 0, \end{cases} \quad (87)$$

$$\psi(T) = 0. \quad (88)$$

Інтегрування починаємо з моменту $t = T$, врахувавши $\psi(T) = 0$ та невід'ємність функції $a(t)$, тоді

$$[a(t) - \psi(t)\chi(t)] = a(t) > 0. \quad (89)$$

З (75) одержуємо, що $\nu^*(t) = \nu_s$. Так як розв'язок задачі Коші (76), (77) є неперервною функцією, тому вираз $[a(t) - \psi(t)\chi(t)]$ – також неперервний. Це означає, що виконання нерівності $[a(t) - \psi(t)\chi(t)] > 0$ при $t > T$ тягне за собою його виконання і на деякому напівінтервалі $(t_*, T](t_* < T)$. Тоді з формул (75) бачимо, що $\nu^*(t) = \nu_s$ при $t \in (t_*, T]$. Таким чином існує напівінтервал $(t_*, T]$, на якому податкова ставка приймає максимального значення.

З (76) бачимо, що при $t \in (t_*, T)$ похідна $\frac{d\psi(t)}{dt} < 0$. На підставі (77) можемо зробити висновок, що на інтервалі (t_*, T) функція $\psi(t)$ додатня та спадає зі збільшенням t. Це створює передумови для перетворення в нуль виразу $[a(t) - \psi(t)\chi(t)]$ при $t = t_*$ та зміни знаку при $t < t_*$. Згідно (5) тоді точка t_* буде точкою перемикання керування, яких, теоретично, може бути декілька.

3.3. Оптимальне використовування енергії

Розглянемо задачу оптимального використовування енергії з врахуванням якості навколишнього середовища (одновимірну модель). Тобто використання енергії (виробленої, наприклад, на тепловій чи атомній електростанції) має для суспільства позитивні та негативні наслідки одночасно. З однієї сторони, ця енергія дозволяє використовувати різного роду прилади, пристрої, механізми, машини такі, що полегшують життя. Та на противагу, сам процес виготовлення енергії та процес самого функціонування цих приладів, зазвичай, негативно впливають на якість навколишнього середовища. Тому і виникає задача визначення такого режиму використання енергії, який буде найбільш соціально вигідний з врахуванням довкілля.

Нехай $E = E(t)$ визначає *кількість (запас)* енергії того чи іншого виду, а $V = V(t)$ *– темп витрат* цієї енергії в момент часу $t, 0 \leq t \leq T$. Виходячи зі сенсу означень, ці величини мають бути пов'язані одна з одною наступним чином:

$$\frac{dE}{dt} = -V. \tag{90}$$

З однієї сторони, використання енергії призводить до збільшення товарів та послуг, позначимо це позитивний фактор через $C = C(V)$. З іншої сторони, призводить до забруднення довкілля, цей негативний фактор позначатимемо через $P = P(V)$. Очевидно, що при збільшенні витрат енергії обидві величини зростатимуть, тоді як темп швидкості їх росту мають протилежні знаки, тобто мають місце наступні нерівності:

$$C'(V) > 0, C''(V) < 0, \qquad P'(V) > 0, P''(V) > 0. \tag{91}$$

Зазначимо, що дякуючи процесам самоочищення забруднення не вважаємо акумулятивним. Тепер введемо *функцію корисності* $U = U(C, P)$, яка встановлює закон зміни величини корисності для суспільства від використання енергії в залежності від двох змінних C та P. Будемо вважати, що виконують наступні умови для $\forall t \in [0, T]$:

$$\frac{dU}{dC} > 0, \frac{dU}{dP} < 0, \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} < 0, \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} < 0, \frac{\partial^2 U}{\partial P \partial C} = 0. \tag{92}$$

Перші дві нерівності тут означають, що функція корисності є зростаючою по змінній C та спадною по змінній P, що виглядає цілком логічним, так як це залежність корисності як від кількості товарів та послуг, так і від величини забрудненості довкілля. Згідно інших двох нерівностей, темп зміни корисності зі збільшенням значень змінних сповільнюється.

У цій задачі на роль змінних керування та стану можуть претендувати як величина енергії E, так і темп її використання V. Причому зрозуміло, що саме темп використання енергії є тим параметром, який ми можемо обрати з економічних міркувань. Відповідно, V будемо вважати змінною керування, тоді як E – змінна стану (фазова змінна). Для того, щоб сформулювати задачу оптимального керування необхідно мати критерій оптимальності. В даному випадку цим критерієм (функціоналом), який варто максимізувати, буде інтегральна загальна корисність за певний період часу від початкового моменту часу $t = 0$ до кінцевого $t = T$, тобто

$$\int_0^T U\Big(C\big(V(t)\big), P\big(V(t)\big)\Big)\,dt. \tag{93}$$

Отже, задача оптимального керування, до розв'язку якої зведена задача найкращого використання енергії, полягає в максимізації інтегрального функціонала (93) при умовах:

$$\frac{dE}{dt} = -V, E(0) = E_0, E(T) \geq 0, V(t) > 0, 0 \leq t \leq T. \tag{94}$$

де числа E_0 та $E(T)$ вважаються заданими.

Щоб застосувати принцип максимуму, спочатку складемо функцію Гамільтона, обмежуючись $\psi_o^* = 1$

$$H(V, \psi) = U\big(C(V), P(V)\big) - \psi V.$$

Вважаючи функцію H диференційовною за додатною змінною V, запишемо для цієї функції необхідні умови екстремуму, поклавши її частинну похідну за V рівною нулеві:

$$\frac{dH}{dV} = \frac{dU}{dV} - \psi = \frac{\partial U}{\partial C} C'(V) + \frac{\partial U}{\partial P} P'(V) - \psi = 0. \tag{95}$$

З врахуванням (91) та (92) для похідної другого порядку функції H, отримуємо нерівність

$$\frac{\partial^2 H}{\partial V^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} C'^2 + \frac{\partial U}{\partial C} C'' + \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} P'^2 + \frac{\partial U}{\partial P} P'' < 0,$$

яка свідчить про те, що рівняння (95) буде максимізувати функцію Гамільтона по змінній V.

Спряженне рівняння в даному випадку матиме вигляд:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E} = 0.$$

З цього рівняння знаходимо оптимальне значення спряженої змінної $\psi^*(t) = c$, де $c - const$ $\forall t \in [0, T]$. Для того, щоб визначити цю сталу, нам слід використати умови трансверсальності на правому кінці. В даному випадку ця умова запишеться, як нерівність $\psi^*(T) \geq 0$ та рівність $\psi^*(T)E(T) = 0$. З першої, в силу $\psi^*(t) = c$ отримуємо

$$\psi^*(t) = c \geq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Враховуючи це, рівняння (95) тепер можемо переписати у наступному вигляді:

$$\frac{\partial U}{\partial C}C'(V)+\frac{\partial U}{\partial P}P'(V)=c.$$

У це рівняння не входить змінна t. Тому розв'язок (величина V) теж не має залежати від часу t. Значить, для оптимального значення темпу використання енергії отримуємо $V(t)=V^*\ \ \forall t\in[0,T]$, де V^* – деяка додатна стала.

З отриманого випливає те, що *в задачі оптимальний режим характеризується сталим темпом використання енергії*.

При сталому оптимальному значенню $V(t)\equiv V^*$ розв'яжемо диференціальне рівняння з (94) та знайдемо відповідне оптимальне значення фазової змінної $E^*(t)=E_0-V^*t$, що описує кількість енергії в момент часу t.

Оскільки функції $U(C,P)$, $P(V)$ та $C(V)$ явно не задані, то визначити оптимальне значення V^* неможливо. Залишається лиш провести загальний аналіз, використовуючи умову додатної визначеності запасу енергії $E^*(t)$ в кінцевий момент часу T. Зі знайденої раніше рівності $E^*(t)=E_0-V^*t$ при $t=T$ легко визначити, що у випадку $E^*(t)$ (що означає повне використання запасів до встановленого моменту часу) величина оптимального значення V^* темпу використання енергії матиме вигляд

$$V^*=\frac{E_0}{T}.$$

Необхідно зазначити, що отриманий вище висновок про сталість оптимального значення темпу використання енергії має місце завдяки тому, що в цільовому функціоналі під знаком інтегралу відсутній дисконтний множник.

3.4. Динаміка біопопуляцій

Для дослідження динаміки популяції широко використовуються моделі з віковою структурою. Процес описується диференціальними рівняннями з частинними похідними першого порядку та нестандартними крайовими умовами, що задають щільність розподілу щойно народжених членів популяції. Незалежними змінними є час спостереження та вік членів популяції. Тут задача оптимального керування динамікою популяції розглядається для керуючої функції, що задає віковий розподіл новонароджених та задовольняє додаткове інтегральне обмеження.

Розглянемо функцію залежну від двох змінних $x = x(s,t)$, що характеризує щільність розподілу популяції в залежності від віку $s \in S = [0, s_k]$, s_k – максимальна тривалість життя, на деякому часовому інтервалі $T = [0, t_k]$.

Поняття вікової щільності популяції випливає з таких міркувань. Нехай $g(s,t)$ – кількість осіб даного виду, що в момент спостереження t мають вік менший за s. Тоді щільністю розподілу популяції цього виду буде границя:

$$x(s,t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{g(s+\Delta s,t) - g(s,t)}{\Delta s} = \frac{\partial g(s,t)}{\partial s}.$$

Вважаючи, що зміна чисельності популяції може відбуватись виключно за рахунок народження та смерті членів, а кількість померлих пропорційна загальній чисельності популяції, приходимо до наступного рівняння з частинними похідними:

$$\frac{\partial x(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial x(s,t)}{\partial s} = -\mu(s)x(s,t), \quad s \in S, t \in T, \tag{96}$$

з початковими та крайовими умовами

$$x(s,0) = x_0(s), s \in S, \tag{97}$$

$$x(0,t) = \beta(t) \int_{s_1}^{s_2} K(s)u(s)x(s,t)ds, \;\; t \in T. \tag{98}$$

Тут $\mu(s)$ – коефіцієнт смертності; $x_0(s)$ – початковий розподіл популяції по віку; $\beta(t)$ – коефіцієнт, що характеризує середній рівень народжуваності в кожен момент часу; $K(s)$ – доля самок. Роль керування тут відіграє функція $u = u(s)$, що задає віковий розподіл осіб, що народжує. Ця функція задовольняє обмеження:

$$\int_{s_1}^{s_2} u(s)ds = 1, \quad u(s) \geq 0, \tag{99}$$

де s_1, s_2 – межі дітородного віку, $0 < s_1 < s_s \leq s_k$.

Наша ціль – мінімізувати функціонал

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s, t_k), s) ds. \quad (100)$$

Зокрема, якщо

$$\varphi(x(s, t_k), s) = \frac{1}{2}\left(x(s, t_k) - \bar{x}(s)\right)^2,$$

де $\bar{x} = \bar{x}(s)$ – задана функція, то ціль керування буде полягати у досягненні в кінцевий момент часу заданої щільності $\bar{x}$. В такому випадку задача може розглядатись і як обернена задача математичної фізики, сенс якої полягає у визначенні коефіцієнта $u(s)$ по відомим даним спостережень в кінцевий момент часу.

Задача оптимального керування (96) – (100) досліджується при наступних припущеннях на параметри:

1. функції $u = u(s)$, $K = K(s)$ неперервно диференційовані на відрізку $[s_1, s_2]$; вважатимемо, що
$$u(s) \equiv 0, K(s) \equiv 0, s \notin [s_1, s_2]$$
2. функції $x_0(s)$ та $\beta(t)$ неперервно диференційовані на відрізках S та T відповідно;
3. функція $\mu(s)$ неперервна на пів-інтервалі $[0, s_k)$ та задовольняє умову
$$\int_0^{s_k} \mu(s) ds = +\infty; \quad (102)$$
4. функція $\varphi(x, s)$ неперервна за сукупністю своїх аргументів та має неперервні та обмежені похідні по x всюди в області визначення;

Нестандартність умов (98) на границі полягає в тому, що значення $x(0, t)$ задається не як фіксована функція, а вираховується в кожен момент часу інтегруванням виразу, в який входить в обумовлений розв'язок. Умова (102) забезпечує нульову щільність, якщо вік осіб перевищує s_k.

Розв'язок початково-крайової задачі (96) - (98) потрібно розуміти як розв'язок наступного інтегрального рівняння, побудованого на сімействі характеристик диференціального рівняння (96):

$$x(s, t) = \begin{cases} x_0(s - t) \exp\left(-\int_{s-t}^{s} \mu(\rho) d\rho\right), s \geq t, \\ \beta(t - s) \int_{s_1}^{s_2} K(r) u(r) x(r, t - s) dr \, exp\left(-\int_0^s \mu(\rho) d\rho\right), s < t. \end{cases} \quad (103)$$

При встановлених пропозиціях для довільного допустимого керування розв'язок початково-крайової задачі (96) – (98), в сенсі описаному у (103), буде невід'ємною функцією, гладкою в областях $s < t$ та $s > t$. Можливою лінією розриву є пряма $s = t$. Можна також гарантувати неперервність функції $x(s, t)$ в заданій області лише за умови узгодженості

$$x_0(0) = \beta(0) \int_{s_1}^{s_2} K(s)u(s)x_0(s)ds. \quad (104)$$

Дану умову можна вважати додатковим інтегральним обмеженням на керування.

Описана модель є однією з різновидності структурованих по віку керуючих процесів. Окрім моделей динаміки популяцій, початково-крайова задача (96) - (98) використовується для вивчення процесів поширення інфекційних захворювань та наркоманії, динаміки безробітності, капітальних ресурсів з врахуванням вікової структури основних економічних фондів, тощо.

У цьому підрозділі принципом максимуму Понтрягіна встановлено необхідну умову оптимальності для даної задачі.

Теорема 4. Нехай $u^* = u^*(s)$ – оптимальне керування в задачі (96)-(100), $x^* = x^*(s, t)$ стан, що відповідає цьому керуванню, а $\psi^* = \psi^*(s, t)$ – роз'язок спряженої задачі при $u^* = u^*(s)$ та $x^* = x^*(s, t)$. Тоді для всіх точок $s \in [s_1, s_2]$ виконується наступна рівність:

$$u^*(s) = \int_T \psi^*(0, t)\beta(t)[K(s)x^*(s, t)]_s dt = 0. \quad (105)$$

3.5. Чисельна реалізація динамічної моделі оптимального керування інвестиційною діяльністю підприємства

Розглянемо модель оптимального керування інвестиційною діяльністю підприємства. Подібні задачі часто виникають в математичній економіці при розгляді мікроекономічних систем.

Нехай деяке підприємство випускає однорідний продукт. Нехай капітал підприємства (основні виробничі фонди) теж однорідний та в будь-який момент часу $t \geq 0$ кількість капіталу – це $x(t)$.

Розглянемо ситуацію, коли динаміка обсягу капіталу описується диференціальним рівнянням

$$x'(t) = u(t) - \delta x(t), \qquad u(t) \in U = [0, u_{max}].$$

Тут $u(t)$ – кількість капіталу, що отримується підприємством в одиницю часу, наступну після $t \geq 0$, u_{max} – максимальна можлива швидкість становлення нового капіталу, δ – постійна величина питомої швидкості амортизацій капіталу. Тут вимірна функція $u(t)$ описує інвестиційну політику підприємства. Вважаємо, що в початковий момент часу $t_0 = 0$ початковий обсяг капіталу відомий та рівний $x(0) = x_0 > 0$.

Вважатимемо також, що в кожну одиницю часу одиниця капіталу виготовляє одиницю продукції. Тоді, якщо на момент часу $t \geq 0$ підприємство володіє капіталом $x(t)$, то в наступну одиницю часу виробництво складе $y(t) = x(t)$ одиниць продукції.

Нехай $N(t)$ – максимальна кількість товару, що можна продати на ринку за одиницю часу, наступну після $t \geq 0$. Використовуючи найпростішу модель ринку, покладемо

$$N(t) = \frac{\bar{\pi} - \pi(t)}{b},$$

де $\pi(t) > 0$ – ціна одиниці товару, встановлена підприємством на цьому інтервалі, $\bar{\pi}$ – максимальна ціна, по якій товар можна продати, $\frac{\bar{\pi}}{b} > 0$ – об'єм ринку, тобто максимальна кількість товару, який може бути проданим на цьому ринку за одиницю часу.

Припустимо, що весь товар має бути проданий за ту одиницю часу, коли він був виготовлений. Тоді

$$N(t) = y(t) = x(t), \qquad \pi(t) = \bar{\pi} - by(t) = \bar{\pi} - bx(t).$$

У такому випадку дохід від продажу $y(t) = x(t)$ одиниць товару буде рівний

$$\pi(t)y(t) = \pi(t)x(t) = \bar{\pi}x(t) - bx^2(t).$$

Нехай $\zeta > 0$ – вартість виробництва одиниці продукції, вважаючи що максимальний дохід $a = \bar{\pi} - \zeta$ – це додатна величина, та $c > 0$ – вартість одиниці капіталу. Тоді прибуток підприємства, який ми отримаємо в наступний момент часу після $t \geq 0$ рівний

$$g\big(x(t), u(t)\big) = ax(t) - bx^2(t) - cu(t).$$

Будемо вважати, що оптимальна інвестиційна політика підприємства u_* визначається максимальним сумарним дисконтованим прибутком підприємства (з параметром дисконтування $\rho > 0$) на цілому проміжку $[0, T]$. Тоді ми отримуємо наступну задачу оптимального керування інвестиційною діяльністю підприємства:

$$x'(t) = u(t) - \delta x(t), \qquad u(t) \in U = [0, u_{max}], \tag{106}$$

$$x(0) = x_0, \tag{107}$$

$$J(x, u) = \int_0^T e^{-\rho t}[ax(t) - bx^2(t) - cu(t)]dt \to max, \tag{108}$$

x_0 – заданий початковий стан системи, $T, u_{max}, a, b, c, \delta, \rho$ – додатні параметри.

За допомогою мови програмування Python та пакету Gekko реалізуємо цю задачу та знайдемо оптимальні значення $x(t)$ та $u(t)$. Для цього перш за все нам необхідно імпортувати бібліотеку NumPy та клас GEKKO.

```
import numpy as np
from gekko import GEKKO
```

Тепер задаємо параметри $x_0, T, u_{max}, a, b, c, \delta, \rho$. Оскільки вони сталі, то задаємо їх в окремому класі Consts. Приступаємо до ініціалізації класу та певних необхідних параметрів.

```
model = GEKKO()                             # Initialize GEKKO
n = 1001                                    # Number of time points
model.time = np.linspace(0, Consts.T, n)    # Time array
t = model.Param(value = model.time)         # Set time as parameter
final = np.zeros(n)                         # Create an array of zeros
final[-1] = 1                               # With last element equal to one
f = model.Param(final)                      # And set this array as a parameter
```

Тут ми визначили кількість часових відрізків, на які розбиваємо проміжок $[0, T]$, та оголосили їх параметром моделі, а також задали параметр f, що відповідає за знайдення оптимального керування та траєкторії у фінальний момент часу. Визначаємо функції $x(t)$ та $u(t)$ з початковою умовою та межами існування відповідно, а також описуємо всі умови поставленої задачі наступним чином:

```
x = model.Var(value = Consts.x0)                        # trajectory
u = model.Var(lb = Consts.u_min, ub = Consts.u_max)    # control
model.Equation(x.dt() == - Consts.delta * x + u)
```

А також задамо цільовий функціонал, викликавши метод Minimize класу GEKKO.

```
model.Minimize(f  * model.integral(
    model.exp(-Consts.rho * t) * (Consts.b * x * x - Consts.a * x + Consts.c * u)))
```

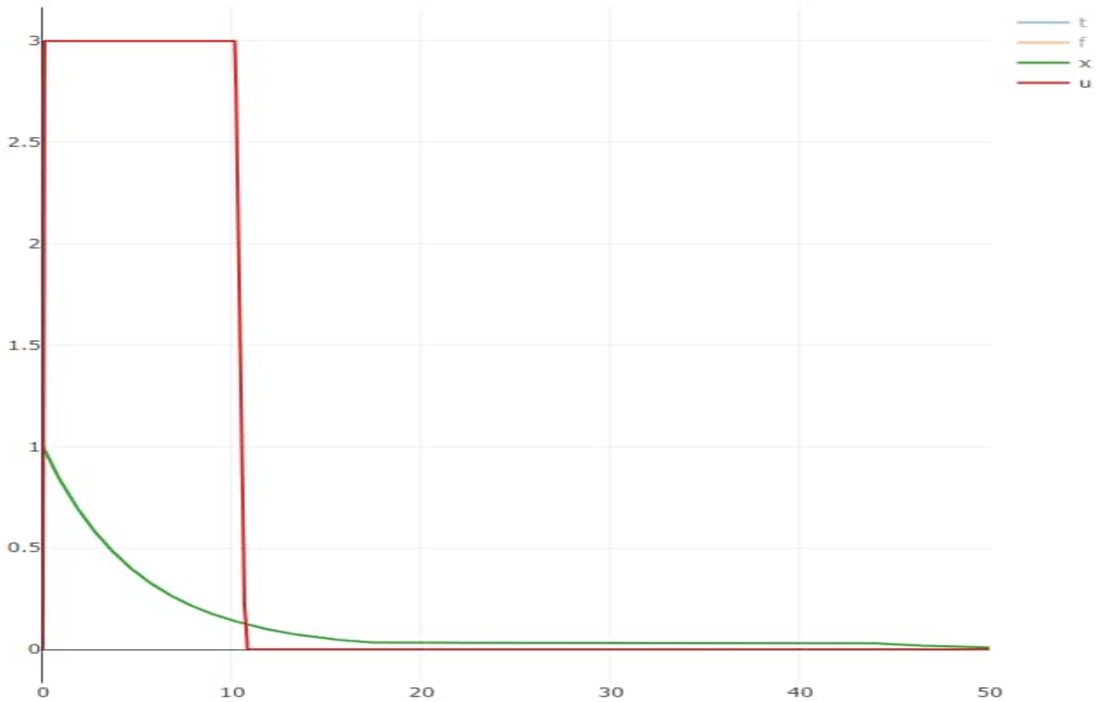
На завершення визначаємо деякі параметри процесу оптимізації та знаходимо графіки оптимальних керувань та траєкторій.

```
model.options.IMODE = 6
model.options.NODES = 5
model.options.SOLVER = 1
model.options.MAX_ITER = 10
model.solve(GUI=True)
```

Тепер отримуємо такі результати для наступних наборів стилих:

1. $a = 2, b = 6, c = 4, T = 50, x_0 = 1, \rho = 0.2, \delta = 0.2, u_{max} = 3.$

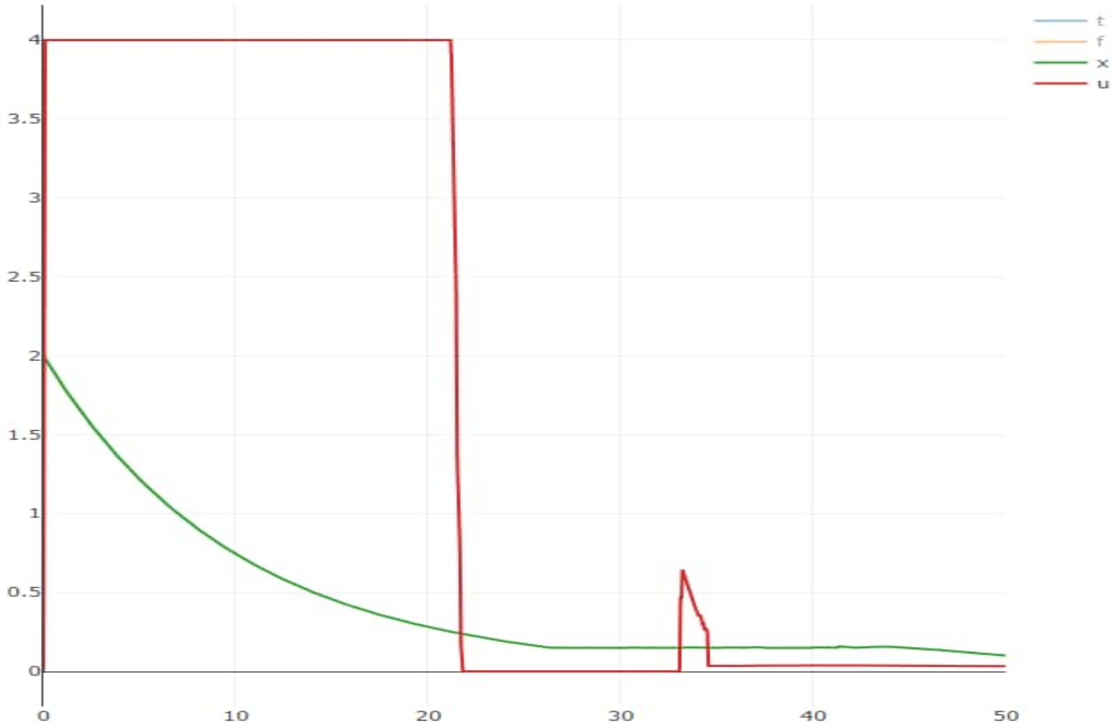
Значення цільового функціоналу $J(x, u) = 4.88.$

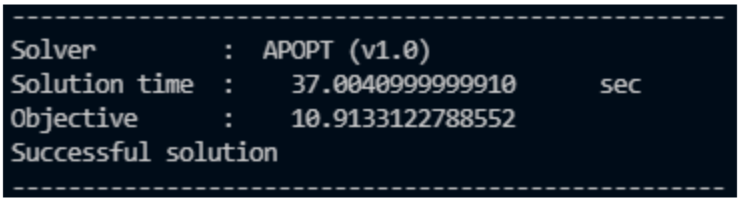



```
--------------------------------------------------
Solver          :  APOPT (v1.0)
Solution time   :    109.946599999996      sec
Objective       :    4.88158914465253
Successful solution
--------------------------------------------------
```

2. $a = 1, b = 2, c = 1, T = 50, x_0 = 2, \rho = 0.3, \delta = 0.1, u_{max} = 4.$

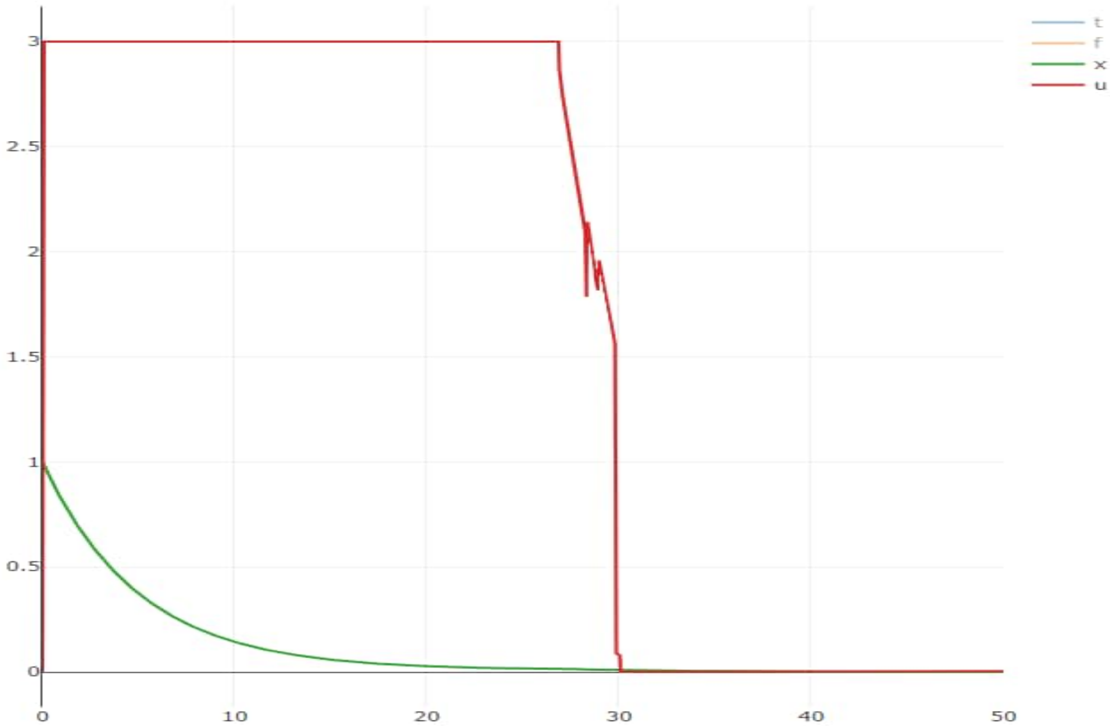
Значення цільового функціоналу $J(x, u) = 10.91.$





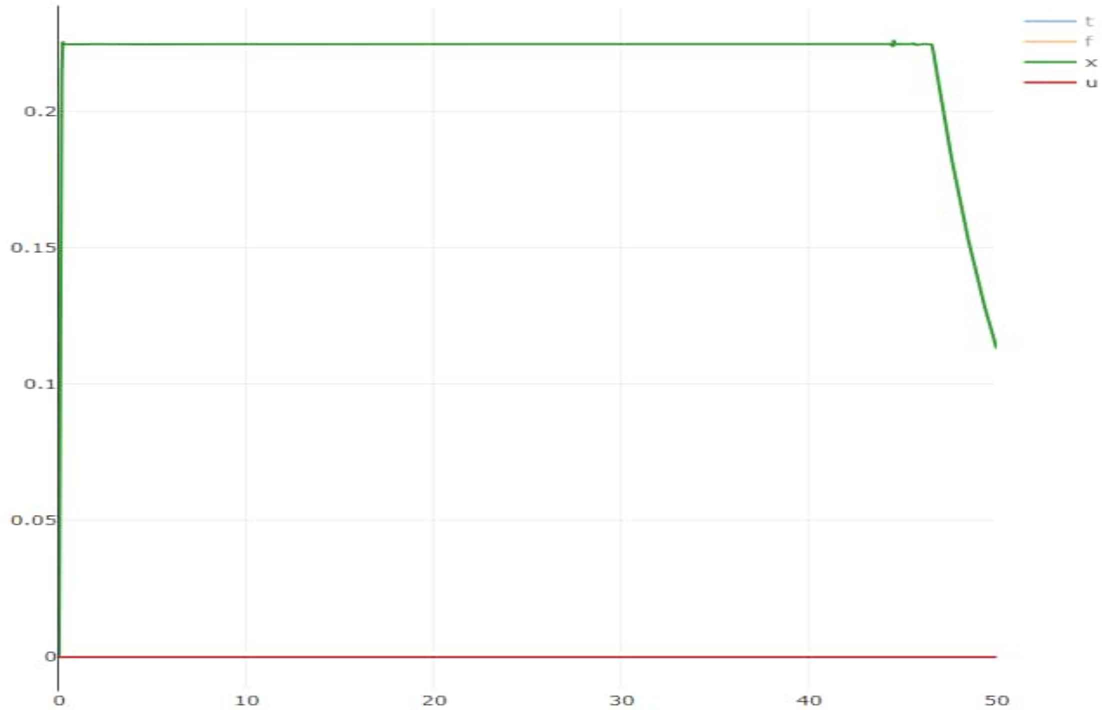
```
--------------------------------------------------
Solver         :  APOPT (v1.0)
Solution time  :    37.0040999999910      sec
Objective      :    10.9133122788552
Successful solution
--------------------------------------------------
```

3. $a = 0, b = 3, c = 4, T = 50, x_0 = 1, \rho = 0.3, \delta = 0.2, u_{max} = 3.$
Значення цільового функціоналу $J(x, u) = 4.23.$



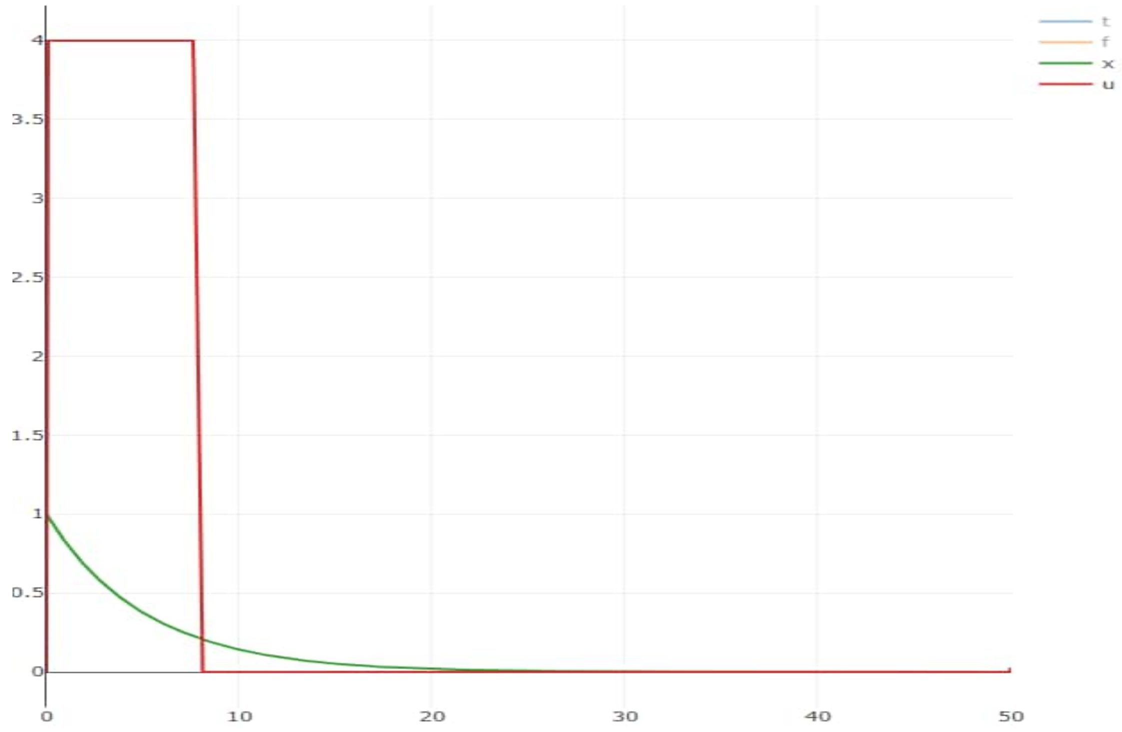
```
--------------------------------------------------
Solver         :  APOPT (v1.0)
Solution time  :    54.1419999999925      sec
Objective      :    4.23741314078372
Successful solution
--------------------------------------------------
```

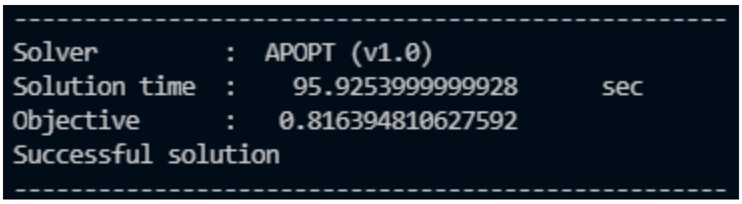
4. $a = 3, b = 4, c = 3, T = 50, x_0 = 0, \rho = 0.2, \delta = 0.2, u_{max} = 2.$ Значення цільового функціоналу $J(x, u) = -1.01.$




```
--------------------------------------------------
Solver         :  APOPT (v1.0)
Solution time  :    81.3145999999979      sec
Objective      :   -1.01430067914765
Successful solution
--------------------------------------------------
```

5. $a = 1, b = 2, c = 4, T = 50, x_0 = 1, \rho = 0.3, \delta = 0.2, u_{max} = 4.$ Значення цільового функціоналу $J(x, u) = 0.82.$





Бачимо, що за допомогою APOPT (Advanced Process OPTimizer), який використовує градієнтні методи, з легкістю можна знайти оптимальне керування та траєкторію задачі, за умови збіжності алгоритму. Після завершення виконання програми бачимо наведені вище графіки та значення Objective, що рівне значенню цільового функціоналу в кінцевий момент часу.

3.6. Висновок до III розділу

У цьому розділі розглянуто задачі соціально-економічних процесів, математичні моделі яких зводяться до дослідження задач оптимального керування для диференціальних рівнянь.

Зокрема, вивчено проблему однопараметричної економіки, що зводиться до задачі оптимального керування невиробничими ресурсами підприємства. Важливу роль у цих питаннях відіграє використання дисконтного множника у цільовому функціоналі.

Також розглянуто задачі керування для енергетичного сектору із врахуванням охорони навколишнього середовища, в яких показано, що оптимальне співіснування людських та природних ресурсів відбувається при сталих енергетичних параметрах.

У інших підрозділах магістерської роботи розглянуто проблеми оптимізації при врахуванні податкової ставки на виробництві та оптимізація для теорії біопопуляцій. Для реалізації розглянутих соціально-економічних процесів використано принцип максимуму.

Та на завершення чисельно реалізували задачу оптимального керування інвестиційною діяльністю підприємства за допомогою мови програмування Python, зокрема використовуючи пакет для динамічного програмування Gekko.

Висновок

У магістерській роботі показано, що основою задач теорії оптимального керування є диференціальні рівняння (звичайні та з частинними похідними). Це продемонстровано на моделі економічного росту Солоу-Свена.

Універсальним методом розв’язування задач оптимізації є принцип максимуму Понтрягіна, теорія Беллмана та теорема Кротова. Поясненню цих фундаментальних фактів присвячено другий розділ магістерської роботи.

У третьому розділі роботи показано використання принципу максимуму для реалізації соціально-економічних процесів з метою одержання оптимальних результатів. Ці принципи продемонстровано на задачах однопараметричної фірми, впливу податкової ставки на економічний розвиток виробництва, оптимального співіснування енергетики та її вплив на довкілля, теорії біопопуляцій та оптимального керування інвестиційною діяльністю підприємства.

Це показує, що задачі оптимального керування суттєво використовують для пояснення проблем економічної динаміки.

Використана література

1. Аргучинцев А.В. Оптимальное управление гиперболическими системами – М.: Физматлит, 2007. 168с.
2. Ногин В.Д. Введение в оптимальное управление. – СПб: Изд-во «ЮТАС», 2008 г., 92 с.
3. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. – Київ, 2004, 384с.
4. Головатий Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк С. П. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 470 с.
5. Кирилич В. М., Терещук О.В., Флюд В.М. Оптимальне керування соціально-економічними системами в середовищі MatLab.: Навч. Посібник. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2021. – 412 с.
6. Москаленко А.И. Оптимальное управление моделями економической динамики. – Новосибирск: Наука, 1999. -185с.
7. Розоноэр Л. И. “Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I-III”, Автомат. и телемех., 1959, -т.20 -№10-12.
8. Derevianko T.O. Kyrylych V.M. Problem of Optimal Control for a Semilinear Hyperbolic System of Equations of the First Order with Infinite Horizon Planning // Ukrainian Math Journal. -2015. -Vol.67. – №2 – P. 211-229.
9. Guerrini L. The Solow–Swan model with a bounded population growth rate. Journal of Mathematical Economics. -2006. -vol. 42.- P.14-21.
10. Кряжимский А.В., Асеев С.М. Об одном классе задач оптимального управления, возникающих в математической економике. 2008.
11. Lachowier M. – A. Teoria Steznowania. -UW. -2021.