МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математичної
економіки, економетрії,
фінансової та страхової
математики

Магістерська робота

Моделі політичної конкуренції

Виконала:
студентка групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 – *математика*
спеціалізації *математична економіка*
та економетрика
Збирко Василина Михайлівна

Науковий керівник:
доц. Козицький В. А.

Роботу рекомендовано до захисту
на засіданні кафедри математичної
економіки, економетрії, фінансової
та страхової математики,
протокол від   грудня 2021 року №

Завідувач кафедри
проф. Кирилич В. М.

Львів-2021

Форма № Н- 9.02

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ, ЕКОНОМЕТРІЇ, ФІНАНСОВОЇ ТА СТРАХОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Пояснювальна записка

до магістерської (кваліфікаційної) роботи

магістр
(освітній рівень)

на тему

Моделі політичної конкуренції

Виконала: студентка групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 – *математика*
спеціалізації *математична економіка та економетрика*
Збирко В. М.

Керівник доц. Козицький В. А
(прізвище та ініціали)

Рецензент________________________
(прізвище та ініціали)

Львів – 2021

Форма № Н-9.01

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет ____
Кафедра ____
Освітньо-кваліфікаційний рівень _________________________
Напрям підготовки ___________________________________
(шифр і назва)
Спеціальність ______________________________________
(шифр і назва)

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Завідувач кафедри ______________
____
“____” _________________20___року

З А В Д А Н Н Я
НА МАГІСТЕРСЬКУ (КВАЛІФІКАЦІЙНУ) РОБОТУ СТУДЕНТУ

____
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи____
____
____

керівник роботи____,
(прізвище, ім’я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)
затверджені Вченою радою факультету від “___”_________________20____ року №___

2. Строк подання студентом роботи______________________________

3. Вихідні дані до роботи____________________________________
____
____
____
____

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)____
____
____
____
____
____

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень)
____
____
____
____

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів магістерської (кваліфікаційної) роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка

Студент ________________ ________________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівник проекту (роботи) ________________ ________________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Зміст

1 Вступ

Ігри голосування – особливий клас TU-ігор. Ігри голосування належать до простих ігор, які використовують для прийняття рішень в різних державних і міжнародних сферах. Ситуацію голосування для двох альтернатив "за"і "проти"можна сформулювати у вигляді гри голосування. Наприклад, розглянемо ситуацію, коли група з n гравців (це можуть бути партії в парламенті, міністри в раді, члени правління) має ухвалити спільне рішення. Якщо в цій групі немає гравця, який може сам ухвалити рішення, тоді створюються коаліції. Формування коаліцій є звичайним явищем у парламентах чи асамблеях. Коаліція, яка може прийняти рішення без голосів інших гравців, називається виграшною, або навпаки – програшною.
Для розподілу впливу, наприклад, між партіями в парламенті, де кожна партія має різну кількість голосів, використовують поняття "індекс впливу". Індекс впливу – це загальний показник відносної сили окремих представників. Індекси впливу дозволяють оцінити можливості учасників впливати на прийняття рішень. Вони також дозволяють сформувати таку процедуру ухвалення рішень, у рамках якої розподіл впливу учасників близький до розподілу голосів між ними. Індекс Шеплі-Шубіка є одним з найбільш відомих і широко прийнятим способом вимірювання сили гравців. Індекси Банзафа - Колемана та Джонстона не менш ефективні. Ці індекси є імовірнісними значеннями заснованими на граничному внеску гравця в коаліцію, однак кожен з них має свою специфіку обчислення. Також зустрічаються індекси впливу, засновані на мінімальних вигра-

шних коаліціях. Мінімальна виграшна коаліція — це коаліція, яка може прийняти законопроект, але участь кожного учасника якої необхідна. Індекс Дігана - Пакела, заснований на припущенні, що всі мінімальні коаліції-переможці є однаково вірогідними і що члени даної мінімальної коаліції - переможця однаково важливі. Саме індекс суспільного блага та індекс Дігена - Пекела можна знайти на основі мінімальних виграшних коаліцій.

Отже, система голосування — це проста монотонна гра, де єдиною метою є виграш, а учасники гри характеризуються лише тим чи здатні вони виграти.

2 Теоретичні поняття

Почнемо з визначення гри голосування. Нехай $N-$ множина гравців, 2^N- множини виграшних коаліцій. Тоді гра (N, v) називається грою голосування, якщо виконуються наступні умови

1. $v(S) \in \{0, 1\}$: 1 для виграшних коаліцій, 0 в іншому випадку
2. $v(N) = 1$
3. v задовольняє монотоність: $S \subseteq T \subseteq N \Rightarrow v(S) \leq v(T)$

Монотонність говорить про те, що збільшення кількості гравців коаліції не може перетворити переможну коаліцію в програшну: збільшення гравців не повинно зашкодити коаліції.
Якщо виконується умова $v(s) + v(N \backslash S) \leq 1, \forall S \subset N$, то гра голосування (N, v) називається власною.
Сформулюємо гру голосування у формі $g = (N, W)$, де W- виграшні коаліції. $W = \{S \in 2^N : v(S) = 1\}$

1. $\oslash \notin W$
2. $N \in W$
3. $S \subset T, S \in W \Rightarrow T \in W$
4. $S, T \in W \Rightarrow S \cap T \neq \oslash$

Отже, коаліаційна гра матиме наступний вигляд

$$v(S) = \begin{cases} 1, S \in W \\ 0, S \notin W \end{cases}$$

Якщо виконується властивість $S \notin W \Rightarrow N \backslash S \in W$ і виконуються умови $(1)-(3)$ то проста гра g називається сильною простою грою. Коаліцію $v(S) \subseteq N$ будемо називати мінімальною виграшною коаліцією, якщо $v(S) = 1$ і $\forall i \in S : v(S \backslash \{i\}) = 0$. Виграшна коаліція є мінімальною виграшною коаліцією, коли вихід будь-якого гравця робить її програшною. Множину виграшних коаліцій позначимо через W^m.

Приклад: Розглянемо гру голосування $(N, v) : N = \{1, 2, 3, 4\}$, $v(S) = 1$ коли $|S| \geq 3$ або $|S| = 2$ і $1 \in S$, $v(S) = 0$ в іншому випадку. Множиною виграшних коаліцій буде $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Тоді множина мінімальних виграшних коаліцій:

$W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.

Наведемо наступні поняття, які використовуються для характеризації гравців в коаліціях.

- Нехай $(N, v)-$ проста гра. Гравець $i \in N-$ диктатор, якщо $\{i\}$ єдина мінімальна коаліція.За вимогами простих ігор може бути більше одного диктатора.

- Гравець $i \in N$ називається нуль-гравцем, якщо він не входить до жодної мінімальної виграшної коаліції ($i \in S$ для всіх $S \in W^m$). Такий гравець може вплинути на поведінку інших гравців, але його присутність або відсутність на результат голосування не позначається.

Наступне поняття — вето гравець, тобто це гравець, який може самостійно заблокувати рішення, виступаючи проти нього.

- Гравець $i \in N$ є вето-гравцем, якщо $N \backslash \{i\}$ є програшною коаліцією. Інакше i є вето гравцем, якщо для всіх мінімальних виграшних коаліцій $W^m, i \in W^m$. Звідси також випливає, що гравець з правом вето є членом кожної мінімальної переможної коаліції.
- Нехай $(N, v)-$ проста гра. Гравеці $i, j \in N$ називаються симетричними, якщо $S \cup i \in W \Leftrightarrow S \cup j \in W$ для всіх $\subseteq N \backslash \{i, j\}$ таких, що $S \notin W$.
- Коаліція S називається блокуючою, якщо $N \backslash S \notin W$. Концепція блокуючої коаліції: це коаліція, яка може і не бути виграшною, але кожна мінімальна виграшна коаліція має містити хоча б одного гравця з блокуючої коаліції.

3 Вагові ігри голосування

У багатьох ситуаціях, які включають декількох гравців, наприклад, вибори, існує потреба у справедливому прийнятті рішень, у яких кожен гравець має різний вплив на результат. Вагові ігри голосуванням часто використовуються для прийняття таких рішень. У таких іграх надається деяка квота, і кожен агент у грі має вагу. Якщо загальна вага коаліції гравців перевищує квоту, то ця коаліція вважається виграшною. Отже, вагові ігори голосування, стисло можна описати, так: кожен гравець має вагу, і коаліція повинна досягти порогу (тобто квоти), щоб перемогти. Формальне визначення наступне:

Гра $g = (N, v, w, q)$ називається ваговою грою голосування або ваговою мажоритарною грою, якщо:

- $w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in R_+^2$ вектор ваг для кожного гравця
- $q > 0$
- Коаліція S називається виграшною ($v(S) = 1$) якщо $\sum_{i \in S} w_i \geq q$, в іншому випадку навпаки ($v(S) = 0$) $\sum_{i \in S} w_i < q$
- $\sum_{i \in N} w_i \geq q$

Той факт, що кожен гравець має додатню (або нульову) вагу гарантує, що гра буде монотонною. Позначатимемо вагову гру голосування $g = (N, w, q)$ як $[\ q; w_1, w_2..., w_n]$. Квота може визначатись як найменше ціле число, яке більше за половину кількості гравців.

Характеристична функція записується у вигляді:

$$v(S) = \begin{cases} 1, w(S) \geq q \\ 0, w(S) < q \end{cases}$$

Кожна вагова гра голосування зображає просту гру голосування. Але не всі прості ігри можуть бути представлені як вагові ігри голосування.

Приклад: Розглянемо гру голосування (N, v) : $N = \{1, 2, 3, 4\}$,

$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(1,3) = v(2,4) = 0$, $v(1,2) = v(3,4) = v(N) = 1$. Припустимо, що ми можемо представити (N, v) за допомогою вагової гри голосування $[\ q; w_1, w_2, w_3, w_4]$. Можна сформувати такі нерівності:

$v(\{1,2\}) = 1$ тому $w_1 + w_2 \geq q$

$v(\{3,4\}) = 1$ тому $w_3 + w_4 \geq q$

$v(\{1,3\}) = 0$ тому $w_1 + w_3 < q$

$v(\{2,4\}) = 0$ тому $w_2 + w_4 < q$

Але тоді, $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 2q$ і $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 < 2q$. Отже, (N, v) не може бути представлена як вагова гра голосування.

Деякі вагові ігри голосування представляють одну і ту ж просту гру: дві вагові гри голосування, які мають різні квоти та ваги, можуть мати однакові переможні коаліції. Дві вагові гри $G = [\ q; w_1, w_2, ..., w_n]$ і $G' = [\ q\prime; w_1^{'}, w_2^{'}, ..., w_n^{'}]$ називаються еквівалентними, якщо $\forall S \subseteq N, w(S) \geq q$ якщо і $w^{'}(S) \geq q^{'}$.

Зображення вагової можоритарної гри (N, v, w, q) називається

- нормалізованим, якщо $\sum_{i \in N} w_i = 1$
- однорідним, якщо $\sum_{i \in S} w_i$ однакова для всіх $S \in W^m$

Вагова гра голосування (N, v, w, q)

- власна, якщо $q > \frac{1}{2} \sum_{i \in N} w_i$
- однорідна, якщо вона має однорідне зображення, тобто якщо існує таке зораження, що $\sum_{i \in S} w_i = q$ для всіх $S \in W^m$

Приклад:

- $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Задано гру $[q; 16, 8, 4, 1]$. Дамо визначення для гравців цієї гри при різних значення квоти.

  - $q = 18$: Множина виграшних коаліцій $W = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$. Гравець 1 – вето-гравець. Множина мінімальних виграшних коаліцій

    $W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$. Гравець 4 – нуль-гравець, оскільки не входить до жодної мінімальної виграшної коаліції.

  - $q = 15$: Множина виграшних коаліцій $W = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$. Множина мінімальних виграшних коаліцій $W^m = \{\{1\}\}$. Гравець 1 – диктатор. Гравеці 2, 3, 4 – нуль-гравці.

  - $q = 24$: Множина виграшних коаліцій $W = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$. Гравець 1– вето-гравець. Множина мінімальних виграшних коаліцій $W^m = \{\{1, 2\}\}$. Гравець 3 і 4 – нуль-гравці.

- Задано гру $[9; 5, 5, 4, 3]$. Множина виграшних коаліцій $W = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$. Гравці 1 і 2 – симетричні. Множина мінімальних виграшних коаліцій $W^m = \{\{1, 2\}\}$. Гравець 3 і 4 – нуль-гравці.

- Для вагових ігор голосування $[q; 8, 4, 2]$ і $[q; 7, 5, 2]$ потрібно знайти найменше значення квоти, при якій всі три гравці є вето гравцями.

  Вето-гравець входить до кожної виграшної коаліції, в цьому випадку, щоб було три вето-гравця $W = \{\{1, 2, 3\}\}$. $q = 13-$

найменше значення квоти, при якому всі три гравці є вето-гравцями.

4 Індекси впливу

4.1 Класичні індекси впливу

Індекс впливу — це n-вектор, елементи якого позначають відповідну здатність кожного гравця визначати результат загального голосування. Індекс для кожного гравця визначається як відносна кількість разів, коли гравець може вплинути на рішення, передаючи свою вагу голосу коаліції, яка програє без нього, але виграє разом з ним. Класичні індекси впливу, що застосовуються до простих ігор, лише враховують партії, гравців або виборців. Розглядаються ігри з апріорними спілками, тобто коаліціями між партіями, гравцями чи виборцями. Ми вимірюємо владу кожної партії, гравця чи виборця, коли серед них є коаліції. Зокрема, досліджуються реальні ситуації систем голосування.

Одним з важливих понять, що визначає вплив гравця, є уявлення про те, що він є *критичним гравцем.* Для коаліція S, критичним гравцем i є гравець, завдяки якому коаліція переможе, $S \backslash \{i\} \notin W(v)$. Таку коаліцію $S \in W$ називають *вразливою або квазімінімальною виграшною коаліцією*, тобто для якої, вихід хоча б одного з членів коаліції зробить її програшною. Множину вразливих коаліцій позначатимемо як $SW(v)$, а множину разливих коаліцій для яких гравець i критичний $- SW_i(v)$.

У ваговій грі голосування, вплив або сила не завжди обґрунтовано відображаються вагами. Цей факт добре відомий і спровокував винахід індексів впливу, тобто *відображення* $\phi : S_N \to R_+^N$*, яке кожній простій грі ставить у відповідність вектор* R_+^N*, що відображає вплив гравця на остаточне групове рішення.* Одним із найбільш відомих індексів впливу є **індекс Шеплі-Шубіка**. Його можна визначити через наступну формулу

$$\psi_i^{ss}(g) = \sum_{S \in SW_i} \frac{(S-1)!(n-S)!}{n!}, i \in N \tag{1}$$

де $s = |S|$

Індекс впливу Шеплі-Шубіка розраховуються на підставі квазімінімальних виграшних коаліцій, у яких відповідний гравець є критичним. Інша інтерпретація цього індекса — це відсоток перестановок усіх гравців, у яких i критичний.

Для критичного гравця i кількість упорядкованих елементів множини SW_i та її доповнення (крім гравця i), дорівнює $\frac{(S-1)!(n-S)!}{n!}$, де s - кількість членів коаліції $S \in SWi$, а $n-$ загальна кількість гравців. Індекс Шеплі-Шубіка приписує різним коаліціям різну вагу. Чим більший розмір коаліції, в якій гравець i є ключовим, тим більший внесок в оцінку його впливу

Для гри (N, v) індекс Шеплі-Шубіка шукатимемо за формулою

$$\psi_i^{ss}(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)), i \in N \tag{2}$$

Індекс впливу Банзафа також розраховується на підставі квазімінімальних виграшних коаліцій. Якщо θ_i- це кількість коаліцій, де гравець i критичний, то індекс Банзафа ψ_i^{bc} для нього становить

$$\psi_i^{bc}(g) = \frac{\theta_i(g)}{\sum_{j \in N} \theta_j(g)}, i \in N \tag{3}$$

Цей індекс базується на припущені, що вплив гравця пропорційний кількості коаліцій, в яких цей гравець критичний.

Ненормалізованим індексом впливу Банзафа-Колемана – це відношення числа коаліцій, в яких i критичний до числа всіх можливих коаліцій з участю гравця i

$$\psi_i^{B}(g) = \frac{|SW_i(g)|}{2^{n-1}}, i \in N \tag{4}$$

Значення індексу Банзафа - Колемана можуть змінюватися в діапазоні від нуля до одиниці. Однак на відміну від індексу Банцафа - Колемана, що є відносною величиною, ненормалізований індекс Банзафа-Колемана – величина абсолютна: якщо два гравця не вступатимуть в коаліцію, то це позначиться на індексі Банзафа-Колемана для всіх гравців, але для ненормалізованого індекса Банзафа - Колемана зміниться тільки для цих двох гравців. Причина в тому, що сума всіх індексів Банзафа - Колемана в одній грі становить одиницю і, відповідно, при зменшенні індексу впливу одного гравця індекс впливу інших збільшується. Сума індексів впливу ненормалізованого Банзафа - Колемана не дорівнює одиниці, і вплив гравця залежить тільки від нього самого.

Ще один індекс, який розраховується на підставі квазімінімальних виграшних коаліцій – **індекс Джонстона**

$$\psi_i^j(g) = \frac{J_i(g)}{\sum_{k \in N} J_k(g)} = \frac{1}{|SW(g)|} \sum_{S \in SW_i(g)} \frac{1}{|\chi(S)|}, i \in N \tag{5}$$

де $J_i(g) = \sum_{S \in SW_i} \frac{1}{d_S}$– абсолютний індекс. d_S– кількість критичних гравців в коаліції S.

В індексі Джонсона враховується загальна кількість критичних гравців у коаліції: найбільший вплив має гравець, який є у своїй коаліції єдиний критичний.

Індекс Дігена-Пекела збігається з індексом Джонстона, коли $SW_i(g)$ $= W^m(g)$ (тобто якщо множина квазімінімальних виграшних коаліцій для гравця i збігається з множиною мінімальних виграшних коаліцій).

$$\psi_i^{dp}(g) = \frac{1}{|W^m|} \sum_{S \in W_i^m} \frac{1}{|S|}, i \in N \tag{6}$$

де $\delta_i = \sum_{S \in W_i^m} \frac{1}{|S|}$– абсолютний індекс Дігена-Пекела.

Цей індекс заснований на трьох припущеннях: розглядаються тільки мінімальні виграшні коаліції; що вони рівноймовірні; і що вплив ділиться серед учасників коаліції порівно.

Індекс суспільного блага

$$\psi_i^{pg}(g) = \frac{|W_i^m|}{\sum_{j \in N} |W_j^m(g)|}, i \in N \tag{7}$$

подібний до індексу Банзафа-Колемана, основна відмінність полягає в тому, що враховуються тільки мінімальні виграшні коаліції, в яких гравець i критичний.

4.1.1 Властивості

Нехай індекс впливу ψ задовольняє властивість

- ефективності: якщо $\sum_{i \in N} \psi_i(N, W) = 1$ для всіх простих ігор (N, W).
- нуль - гравця: якщо $\psi_i(N, W) = 0$ для всіх нуль - гравців $i \in N$ і всіх простих ігор (N, W).
- симетрії: якщо $\psi_i(N, W) = \psi_j(N, W)$ для всіх симетричних гравців $i, j \in N$ і всіх простих ігор (N, W).

Усі вище наведені індекси, окрім ненормалізованого індексу Банзафа - Колемана задовольняють ці три властивості. Ненормалізованого індекс Банзафа - Колемана не задовольняє властивість ефективності, властивість нуль - гравця і симетрії— задовольняє.

- загального впливу: якщо $\sum_{i \in N} \psi_i(N, W) = \mu(W)/2^{n-1}$, де $\mu(W) = \sum_{i \in N} |SW_i|$ для всіх простих ігор (N, W) .
- задовольняє трансфер - аксіому: якщо $\psi(N, W \vee V) + \psi(N, W \wedge V) = \psi(N, W) + \psi(N, V)$ для всіх простих ігор (N, W) і (N, V).

Трансфер - аксіому задовольняє індекс Шеплі - Шубика та ненормалізований індекс Банзафа - Колемана, який також задовольняє властивість загального впливу.

4.2 Індекси впливу, які враховують ймовірність виникнення коаліції

Класичні індекси виходять із припущення, що всі гравці можуть вступати до коаліції один з одним і всі коаліції рівноймовірні. Вони не враховують відносин гравців між собою, їх інтересів, ідеологічних позицій. Ці індекси вимірюють потенціал кожного гравця, що він міг би зробити, маючи деяку кількість голосів. Щоб виміряти реальний, апостеріорний вплив, необхідно проаналізувати характер взаємовідносин між гравцями та оцінити ймовірність виникнення коаліції. Запишемо вище наведені індекси впливу з урахуванням ймовірності винекнення коаліцій.

Одним з індексів, в якому враховано переваги гравців щодо партнерів по коаліції є індекс Алескерова.

Індекс Алескерова для кожного гравця i розраховується на основі суми функцій сил зв'язку $f(i, S)$ гравця i за всіма коаліціями S, де він є ключовим гравцем:

$$\alpha(i) = \frac{\chi_i}{\sum_{j \in N} \chi_j}$$

де $\chi_i = \sum_{S \in SW_i} f(i, S)$.

Способи обчислення функції сили зв'язку:

- $f^+(i,S) = \frac{\sum_{j\in S} p_{ij}}{|S|}$– середня сила зв'язку i
- $f^-(i,S) = \frac{\sum_{j\in S} p_{ji}}{|S|}$– середня сила зв'язку з i
- $f(i,S) = \frac{1}{2}(f^+(i,S) + f^-(i,S))$– середня сила зв'язку для i
- $f^+(S) = \frac{\sum_{i\in S} f^+(i,S)}{|S|}$– середня позитивна сила зв'язку у S
- $f^-(S) = \frac{\sum_{i\in S} f^-(i,S)}{|S|}$– середня негативна сила зв'язку у S
- $f(S) = \frac{\sum_{i\in S} f(i,S)}{|S|}$– середня сила зв'язку в S
- $f^+_{min}(i,S) = \min_j p_{ij}$– мінімальна сила зв'язків i
- $f^+_{max}(i,S) = \max_j p_{ij}$– максимальна сила зв'язків i
- $f_{mf}(i,S) = \frac{1}{2}(\min_j p_{ij} + \max_j p_{ij})$– максимальне коливання сили зв'язків i
- $f^-_{min}(i,S) = \min_j p_{ji}$– мінімальна сила зв'язку інших гравців у S з i
- $f^-_{max}(i,S) = \min_j p_{ji}$– максимальна сила зв'язку інших гравців у S з i
- $f_{maxmin}(S) = \max_i min_j p_{ij}$– сила зв'язків $maxmin$
- $f_{minmax}(S) = \min_i max_j p_{ji}$– сила зв'язків $minmax$
- $f_{mf}(i,S) = \frac{1}{2}(f_{maxmin}(S) + f_{minmax}(S))$– максимальне коливання сили зв'язків

де $p_{ij}-$ дійсне число ($p_{ij} \in [0,1]$), яким задано бажання фракції i увійти в коаліцію з фракцією j.

Індекс Шеплі-Шубика теж можна записати за анологією індекса Алексерова. Для цього потрібно, щоб вага кожної коаліції залежала не тільки від її розміру, але і від відносин усередині коаліції, що можна оцінити за допомогою сили зв'язку гравця з партнерами по коаліції p_{ij}. Отже, **модифікований індекс Шеплі-Шубика** має наступний вигляд

$$\psi^{ss^M}(g) = \psi_i^{ss^M} / \psi_i^{ss^M} + ... + \psi_n^{ss^M} \tag{8}$$

де

$$\psi_i^{ss^M}(g) = \sum_{S \in SW_i} \frac{(S-1)!(n-S)!}{n!} \cdot f(i,S)$$

Модифікований індекс Джонстона

$$\psi^{j^M}(g) = \frac{J_i(g)}{\sum_{k \in N} J_k(g)} \tag{9}$$

де $J_i(g) = \sum_{S \in SW_i} \frac{1}{d_S} \cot f(i,S)$. d_S- кькість критичних гравців в коаліції S.

Подібно записуємо **модифікований індекс Дігена - Пекела**

$$\psi_i^{dp^M}(g) = \frac{\delta_i(g)}{\sum_{k \in N} \delta_k(g)} \tag{10}$$

де $\delta_i = \sum_{S \in W_i^m} \frac{1}{|S|} \cot f(i,S)-$ абсолютний індекс Дігена-Пекела.

Модифікований індекс суспільного блага

$$\psi_i^{pg^M}(g) = \frac{\chi_i}{\sum_{j \in N} \chi_j(g)}, \chi_i = \sum S \in W^m f(i, S) \tag{11}$$

5 Індекси впливу для парламенту Німеччини

5.1 Основні відомості про парламент Німеччини

В Федеративній Республіці Німеччина діє однопалатний парламент – Бундестаг. Кожні чотири роки під час виборів до Бундестагу громадяни визначають, хто представлятиме їхні інтереси. Виборці голосують за двома списками – мажоритарним та партійним. Державна влада в Німеччині орієнтується на класичний поділ на три складові: законодавчу, судову та виконавчу владу, які на взаємній основі контролюють одна одну. У рамках цієї взаємодії, Бундестагу відводиться роль законодавчої влади. Головні завдання Бундестагу: ухвалення законів, вибори федерального канцлера та контроль за діяльністю уряду. Крім того, Бундестаг бере участь у призначенні на інші важливі пости. Він обирає половину суддів до Федерального конституційного суду, президента та віце-президента Федеральної рахункової палати, а також Федерального уповноваженого з охорони даних та свободи інформації. Щодо уряду Бундестаг виконує важливу контрольну функцію. Ні Федеральний канцлер, ні хтось із міністрів не може уникнути цього парламентського контролю.

5.2 Аналіз 20 - го Бундестагу

5.2.1 Класичні індекси впливу

Розглянемо вище наведені індекси на конкретному прикладі, зокрема на парламенті Німеччини. Порівняємо вплив партій останніх двох скликань, де вибори до останнього відбулись цього року.

Вибори до Німецького Бундестагу 20-го скликання, що відбулися 26 вересня 2021 року, призвели до істотних змін у складі парламенту. 20-й Бундестаг, що складається з 736 депутатів став найбільшим за чисельністю за всю свою історію. До цього часу найбільшим був парламент 19-го скликання, в якому засідали 709 депутатів. Найбільшу кількість місць отримала Соціал-демократична партія Німеччини (SPD) – 206, партії Християнсько-демократичний союз (CDU) і Християнсько-соціальний союз (CSU), які за традицією утворюють єдину фракцію, отримали 196 місць. Блок CDU/CSU показав на виборах найгірший результат за весь період створення фракції. 118 місць отримала фракція Союз 90/Зелені (Grünen), 92 місць – фракція Вільна демократична партія, 83 - Альтернатива для Німеччини (AfD), 39 - партія Лівих (Die Linke), 1 - Союз південношлезвізьких виборців (SSW).

Отже, за допомогою гри голосування змоделюємо діяльність парламенту 20-го скликання, вибори до якого відбулись 26 вересня 2021 року.

Для більшості в парламенті потрібно 368 місць. Отже, вагова мажоритарна гра матиме наступний вигляд:

$$g = [368; 206, 196, 118, 92, 83, 39, 1]$$

Гру голосування сформулюємо наступним чином:

SPD	**206**	**1 гравець**
CDU/CSU	**196**	**2 гравець**
Die Grünen	**118**	**3 гравець**
FDP	**92**	**4 гравець**
AfD	**83**	**5 гравець**
Die Linke	**39**	**6 гравець**
SSW	**1**	**7 гравець**

Запишемо множини квазімінімальних виграшних коаліцій для кожного гравця, які використовуватимемо для знаходження індексів Шеплі-Шубика, Банзафа - Колемана, ненормалізованого індексу Банзафа - Колемана та індексу Джонстона (у кожній ккоаліції підкреслено критичних гравців):

$SW_1 = \{\{\underline{1},\underline{2}\}, \{\underline{1},\underline{2},3\}, \{\underline{1},\underline{2},4\}, \{\underline{1},\underline{2},5\}, \{\underline{1},\underline{2},6\}, \{\underline{1},\underline{2},7\}, \{\underline{1},\underline{3},\underline{4}\},$
$\{\underline{1},\underline{3},\underline{5}\}, \{\underline{1},\underline{4},\underline{5}\}, \{\underline{1},\underline{2},3,6\}, \{\underline{1},\underline{2},3,7\}, \{\underline{1},\underline{2},4,6\}, \{\underline{1},\underline{2},4,7\}, \{\underline{1},\underline{2},5,6\},$
$\{\underline{1},\underline{2},5,7\}, \{\underline{1},\underline{2},6,7\}, \{\underline{1},3,4,5\}, \{\underline{1},\underline{3},\underline{4},6\}, \{\underline{1},\underline{3},\underline{4},7\}, \{\underline{1},\underline{3},\underline{5},6\},$
$\{\underline{1},\underline{3},\underline{5},7\}, \{\underline{1},\underline{4},\underline{5},6\}, \{\underline{1},\underline{3},\underline{5},7\}, \{\underline{1},\underline{2},3,6,7\}, \{\underline{1},\underline{2},4,6,7\}, \{\underline{1},\underline{2},5,6,7\},$
$\{\underline{1},3,4,5,6\}, \{\underline{1},3,4,5,7\}, \{\underline{1},\underline{3},\underline{4},6,7\}, \{\underline{1},\underline{3},\underline{5},6,7\}, \{\underline{1},\underline{4},\underline{5},6,7\},$
$\{\underline{1},3,4,5,6,7\}\}$

$SW_2 = \{\{\underline{1},\underline{2}\}, \{\underline{1},\underline{2},3\}, \{\underline{1},\underline{2},4\}, \{\underline{1},\underline{2},5\}, \{\underline{1},\underline{2},6\}, \{\underline{1},\underline{2},7\}, \{\underline{2},\underline{3},\underline{4}\},$
$\{\underline{2},\underline{3},\underline{5}\}, \{\underline{2},\underline{4},\underline{5}\}, \{\underline{1},\underline{2},3,6\}, \{\underline{1},\underline{2},3,7\}, \{\underline{1},\underline{2},4,6\}, \{\underline{1},\underline{2},4,7\},$
$\{\underline{1},\underline{2},5,6\}, \{\underline{1},\underline{2},5,7\}, \{\underline{1},\underline{2},6,7\}, \{\underline{2},3,4,5\}\{\underline{2},\underline{3},\underline{4},6\}, \{\underline{2},\underline{3},\underline{4},7\},$

$\{\underline{2},\underline{3},\underline{5},6\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{5},7\},\{\underline{2},\underline{4},\underline{5},6\},\{\underline{2},\underline{4},\underline{5},7\},\{\underline{1},\underline{2},3,6,7\},\{\underline{1},\underline{2},4,6,7\},$
$\{\underline{1},\underline{2},5,6,7\},\{\underline{2},3,4,5,6\},\{\underline{2},3,4,5,7\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{4},6,7\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{5},6,7\},$
$\{\underline{2},\underline{4},\underline{5},6,7\},\{\underline{2},3,4,5,6,7\}\},$

$SW_3=\{\{\underline{1},\underline{3},\underline{4}\},\{\underline{1},\underline{3},\underline{5}\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{4}\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{5}\},\{\underline{1},\underline{3},\underline{4},6\},\{\underline{1},\underline{3},\underline{4},7\},$
$\{\underline{1},\underline{3},\underline{5},6\},\{\underline{1},\underline{3},\underline{5},7\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{4},6\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{4},7\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{5},6\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{5},7\},$
$\{\underline{1},\underline{3},\underline{4},6,7\},\{\underline{1},\underline{3},\underline{5},6,7\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{4},6,7\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{5},6,7\}\}$

$SW_4=\{\{\underline{1},\underline{3},\underline{4}\},\{\underline{1},\underline{4},\underline{5}\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{4}\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{5}\},\{\underline{1},\underline{3},\underline{4},6\},\{\underline{1},\underline{3},\underline{4},7\},$
$\{\underline{1},\underline{4},\underline{5},6\},\{\underline{1},\underline{4},\underline{5},7\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{4},6\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{4},7\},\{\underline{2},\underline{4},\underline{5},6\},\{\underline{2},\underline{4},\underline{5},7\},$
$\{\underline{1},\underline{3},\underline{4},6,7\},\{\underline{1},\underline{4},\underline{5},6,7\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{4},6,7\},\{\underline{2},\underline{4},\underline{5},6,7\}\}$

$SW_5=\{\{\underline{1},\underline{3},\underline{5}\},\{\underline{1},\underline{4},\underline{5}\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{5}\},\{\underline{2},\underline{4},\underline{5}\},\{\underline{1},\underline{3},\underline{5},6\},\{\underline{1},\underline{3},\underline{5},7\},$
$\{\underline{1},\underline{4},\underline{5},6\},\{\underline{1},\underline{4},\underline{5},7\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{5},6\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{5},7\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{5},6\},\{\underline{2},\underline{4},\underline{5},7\},$
$\{\underline{1},\underline{3},\underline{5},6,7\},\{\underline{1},\underline{4},\underline{5},6,7\},\{\underline{2},\underline{3},\underline{5},6,7\},\{\underline{2},\underline{4},\underline{5},6,7\}\}$

$SW_6=SW_7=\varnothing$

Обчислюємо **індекс Шеплі-Шубика**за формулою (1)

$$\psi_i^{ss}=\sum_{S\in SW_i}\frac{(S-1)!(n-S)!}{n!}$$

$$\psi_1^{ss} = \frac{1! \cdot 6!}{7!} + \frac{8 \cdot 2! \cdot 4!}{7!} + \frac{14 \cdot 3! \cdot 3!}{7!} + \frac{8 \cdot 4! \cdot 2!}{7!} + \frac{5! \cdot 1!}{7!} = 0,3$$
$$\psi_2^{ss} = \frac{1! \cdot 6!}{7!} + \frac{8 \cdot 2! \cdot 4!}{7!} + \frac{14 \cdot 3! \cdot 3!}{7!} + \frac{8 \cdot 4! \cdot 2!}{7!} + \frac{5! \cdot 1!}{7!} = 0,3$$
$$\psi_3^{ss} = \frac{4 \cdot 2! \cdot 4!}{7!} + \frac{8 \cdot 3! \cdot 3!}{7!} + \frac{4 \cdot 4! \cdot 2!}{7!} = \frac{2}{15}$$
$$\psi_4^{ss} = \frac{4 \cdot 2! \cdot 4!}{7!} + \frac{8 \cdot 3! \cdot 3!}{7!} + \frac{4 \cdot 4! \cdot 2!}{7!} = \frac{2}{15}$$
$$\psi_5^{ss} = \frac{4 \cdot 2! \cdot 4!}{7!} + \frac{8 \cdot 3! \cdot 3!}{7!} + \frac{4 \cdot 4! \cdot 2!}{7!} = \frac{2}{15}$$
$$\psi_6^{ss} = \psi_7^{ss} = 0$$

Отримаємо:

$$\psi^{ss} = (\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, 0, 0)$$

Для індексу Банзафа-Колемана запишемо кількість вразливих коаліцій, для яких кожен з гравців критичний:

$\theta_1 = 32, \theta_2 = 32, \theta_3 = 16, \theta_4 = 16, \theta_5 = 16, \theta_6 = \theta_7 = 0$

$\sum_{i=1}^{7} = 112$

Обчислюємо індекс Банзафа-Колемана:

$\psi_1^{bc} = \psi_2^{bc} = \frac{32}{112} = \frac{2}{7}, \psi_3^{bc} = \psi_4^{bc} = \psi_5^{bc} = \frac{16}{112} = \frac{1}{7}$

Отже, отримаємо наступний результат:

$$\psi^{bc} = (\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, 0, 0)$$

Кількість вразливих коаліцій для кожного гравця відомо, тому знаходимо **ненормалізований індекс Банзафа-Колемана** за формулою (4):

$$\psi_i^B(g) = \frac{|SW_i(g)|}{2^{n-1}}$$

$2^{n-1} = 64$

$\psi_1^B = \psi_2^B = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}, \psi_3^B = \psi_4^B = \psi_5^B = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$

$$\psi^B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$$

Для індексу Джонстона спочатку обчислюємо абсолютний індекс:

$$\begin{aligned} J_1(g) = J_2(g) = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \\ & + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \\ & + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3(g) = J_4(g) = J_5(g) = & \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \\ & + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$J_6(g) = J_7(g) = 0$

$\sum_{k=1}^{7} J_k(g) = 48$

Тоді підставивши в (5) отримаємо $\psi_1^j = \psi_2^j = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}, \psi_3^j = \psi_4^j = \psi_5^j = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{48} = \frac{1}{9}, \psi_6^j = \psi_7^j$

$$\psi^j = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, 0, 0)$$

Множина виграшних коаліцій для даної гри голосування має вигляд:

$W^m = \{\{1,2\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}\}$

Обчислюємо множину мінімальних виграшних коаліцій для кожного гравця:

$W_1^m = \{\{1,2\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}\}$

$W_2^m = \{\{1,2\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\}\}$

$W_3^m = \{\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\}\}$

$W_4^m = \{\{1,3,4\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,4,5\}\}$

$W_5^m = \{\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,5\}\}$

$W_6^m = W_7^m$

Для обчислення **індекса Дігена-Пекела** спочатку обчислюємо абсолютний індекс Дігена-Пекела:

$|W^m| = 7$

$\delta_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$

$\delta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$

$\delta_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$\delta_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$\delta_5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$\delta_6 = \delta_7 = 0$

Тоді можна застосовувати (6)

$\psi_1^{dp} = \psi_2^{dp} = \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{14}$

$\psi_3^j = \psi_4^j = \psi_5^j = \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{21}$

$\psi_6^j = \psi_7^j = 0$

$$\psi^{dp} = (\frac{3}{14}, \frac{3}{14}, \frac{4}{21}, \frac{4}{21}, \frac{4}{21}, 0, 0)$$

Для **індекса суспільного блага** знаходимо кількість мінімальних виграшних коаліцій для кожного гравця.

$$|W_1^m| = |W_2^m| = |W_3^m| = |W_4^m| = |W_5^m| = 4, |W_6^m| = |W_7^m|$$

$$\sum_{j=1}^{7} = 20$$

Зтосовуючи формулу

$$\psi_i^{pg}(g) = \frac{|W_i^m|}{\sum_{j\in N} |W_j^m(g)|}$$

отримаємо:

$$\psi^{dp} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0)$$

Отже, якщо підсумувати, індекси впливу для партій парламенту 20 - го скликання:

Партії	**Індекси впливу**					
	Шеплі-Шубика	***Банзаза-Колемана***	***Ненор. Банзафа***	***Джонстона***	***Дігена-Пекела***	***Суспільного блага***
SPD	0,3	0,285714286	0,5	0,333333333	0,214285714	0,2
CDU/CSU	0,3	0,285714286	0,5	0,333333333	0,214285714	0,2
Die Grünen	0,133333333	0,142857143	0,25	0,111111111	0,19047619	0,2
FDP	0,133333333	0,142857143	0,25	0,111111111	0,19047619	0,2
AfD	0,133333333	0,142857143	0,25	0,111111111	0,19047619	0,2
Die Linke	0	0	0	0	0	0
SSW	0	0	0	0	0	0

З даних результатів (індексу Шеплі - Шубика, Джонстона, Дігена - Пекела, Банзафа - Колемана, ненормалізований індексу Банзафа - Колемана) видно, що домінують партія SPD та фракція CDU/CSU, але жодна з них не має більшості, щоб самостійно приймати рішення. Партії Die Grünen, FDP, AfD хоч мають різну кількість голосів, мають однаковий вплив. По результатам індексу суспільного блага випливає, що кожна з партій SPD, CDU/CSU, Die Grünen, FDP, AfD однаково важлива для ухвалення рішень. Партії Die Linke та SSW не можуть впливати на процес голосування, оскільки в жодній коаліції не будуть ключовими партіями.

5.2.2 Індекси впливу, з урахуванням ймовірності винекнення коаліцій

У класичних індексах впливу утворення кожної коаліції – рівноймовірна. Оскільки, насправді це не так, можна проаналізувати діяльність кожної партії щоб бачити наскільки можлива співпраця між кожною з них.

У німецькому Бундестазі можливими вважаються коаліції: чорно-жовта коаліція (CDU/CSU + FDP), велика коаліція (CDU/CSU + SPD), соціально-ліберальна коаліція (SPD + FDP), червоно-зелена коаліція (SPD + Die Grünen). У 20 - му Бундестазі з цих коаліцій, які досі були випробувані на федеральному рівні, лише велика коаліція SPD та CDU/CSU може отримати більшість місць. Крім того, можливі трьохпартійні союзники: чорно-червоно-зелена коаліція, що складається з CDU/CSU, SPD і Die Grünen (також відома як Кенійська коаліція), Чорно-червоно-жовта коаліція, що складається з CDU/CSU, SPD і FDP, Світлофорна коаліція між Greens, SPD та FDP, Ямайська коаліція CDU/CSU, FDP і Die Grünen. Перші дві коаліції вважаються малоймовірними, оскільки CDU/CSU і SPD мають необхідну більшість місць навіть без третього союзника.

Усі сторони категорично відкидають співпрацю з AfD.
За попередніми прогнозами ймовірність утворення коаліцій наступна:

- CDU/CSU, Die Grünen, FDP –32%
- SPD, Die Grünen, FDP – 18%
- SPD, CDU/CSU – 17%
- SPD, CDU/CSU, FDP – 2%
- SPD, CDU/CSU, Die Grünen – 2%

Усі інші коаліції вважаємо малоймовірними, оскільки їх ймовірність близька до нуля. Також вважаємо, що бажання партій обєднатись в певну коаліцію однакове.
Отже, індекси впливу з урахуваннями можливості утворення коаліції:

Партії	**Індекси впливу**			
	Мод. Шеплі-Шубика	***Мод. Джонстона***	***Мод. Дігена-Пекела***	***Мод. суспільного блага***
SPD	0,260869565	0,239099859	0,21641791	0,190217391
CDU/CSU	0,304347826	0,29535865	0,286567164	0,266304348
Die Grünen	0,217391304	0,239099859	0,253731343	0,27173913
FDP	0,217391304	0,239099859	0,253731343	0,27173913
AfD	0	0	0	0
Die Linke	0	0	0	0
SSW	0	0	0	0

5.3 Аналіз 19 - го Бундестагу

Вибори до Бундестагу 19-го скликання відбулися 24 вересня 2017 року. 19 - й Бундестаг складався з 709 депутатів. Найбільшу кількість місць отримала фракція CDU/CSU – 246. SPD – 153. 94 місць отримала партія AfD, 80 місць ˘ партія FDP, 69 – Die Linke, 67 – Die Grünen.

Для більшості в парламенті потрібно 355 місць. Отже, вагова мажоритарна гра матиме наступний вигляд:

$$g = [355; 246, 153, 94, 80, 69, 67]$$

Гру голосування сформулюємо наступним чином:

CDU/CSU	**246**	**1 гравець**
SPD	**153**	**2 гравець**
AfD	**94**	**3 гравець**
FDP	**80**	**4 гравець**
Die Linke	**69**	**5 гравець**
Die Grünen	**67**	**6 гравець**

Для цієї гри голосування множини квазімінімальних виграшних коаліцій для кожного гравця будуть такими:

$SW_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 4\},$
$\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\},$
$\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 6\},$

$\{1,3,5,6\},\{1,4,5,6\},\{1,3,4,5,6\}\}$

$SW_2 = \{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{2,3,4,5\},$
$\{2,3,4,6\},\{2,3,5,6\},\{2,4,5,6\},\{2,3,4,5,6\}$

$SW_3 = \{\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{2,3,4,5\},\{2,3,4,6\},\{2,3,5,6\}\}$

$SW_4 = \{\{1,3,4\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{2,3,4,5\},\{2,3,4,6\},\{2,4,5,6\}\}$

$SW_5 = \{\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{1,5,6\},\{2,3,4,5\},\{2,3,5,6\},\{2,4,5,6\}\}$

$SW_6 = \{\{1,3,6\},\{1,4,6\},\{1,5,6\},\{2,3,4,6\},\{2,3,5,6\},\{2,4,5,6\}\}$
Множина мінімальних виграшних коаліцій:
$W^m = \{\{1,2\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\},$
$\{2,3,4,5\},\{2,3,4,6\},\{2,3,5,6\},\{2,4,5,6\}\}$
Виконавши, подібні обчислення до вище наведених, отримаємо:

Партії	**Індекси впливу**					
	Шеплі-Шубика	***Банзаза-Колемана***	***Ненор. Банзафа***	***Джонстона***	***Дігена-Пекела***	***Суспільного блага***
CDU/CSU	0,4	0,392857143	0,6875	0,574074074	0,227272727	0,194444444
SPD	0,2	0,178571429	0,3125	0,166666667	0,136363636	0,138888889
AfD	0,1	0,107142857	0,1875	0,064814815	0,159090909	0,166666667
FDP	0,1	0,107142857	0,1875	0,064814815	0,159090909	0,166666667
Die Linke	0,1	0,107142857	0,1875	0,064814815	0,159090909	0,166666667
Die Grünen	0,1	0,107142857	0,1875	0,064814815	0,159090909	0,166666667

Отже, у 19 - му Бундестазі домінувала фракція CDU/CSU, зараз вона повинна поступитись ще й SPD. За обчисленними індексами, партії AfD, FPD, Die Grünen мають одноковий вплив у парламенті для двох останніх скликань, хоч кількість голосів у кожної партії відрізняється та жодна з них не має більшості. Позиція партії Die Linke значно погіршилась, оскільки зараз вона не матиме впливу у парламенті.

6 Висновки

В результаті виконання магістерської роботи, було розглянуто вагові мажоритарні ігри та індекси впливу, зокрема найвідоміші з них — індекс Шеплі - Шубика, Джонстона, Банзафа - Колемана, Дігена - Пекела та індекс суспільного блага.

Було змодельовано парламент Німеччини 19 - го та 20 - го як вагову мажоритарну гру та побудовано аналіз на основі класичних індексів впливу, які враховують усі ймовірні виграшні коаліції. Також проаналізовано ймовірність обєднання у коаліцію. Тому для 20 - го Бундестагу було розглянуто модифіковані індекси впливу, які враховують ймовірність винекнення коаліції. За допомогою отриманих результатів зроблено порівняння, наскільки змінився вплив кожної з партій протягом останніх двох скликань.

Під час аналізу було підтверджено твердження, що у ваговій грі голосування, вплив не завжди відображається вагами. Прикладом для цього є партії AfD, FPD, Die Linke, Die Grünen у Бундестазі 19 - го скликання, які при різних вагах мають однаковий вплив. Причиною цього є утворення однакової кількості коаліцій при яких вихід певного гравця робить її програшною.

Індекси впливу мають як наукове, так і практичне значення. Вони використовуються при оцінці впливу партій у парламентах та різних управліннях, при виробленні правил прийняття рішень, при формуванні коаліційної політики та в багатьох інших галузях.

Література

[1] Козицький В. А. Математична теорія кооперативних ігор. ЛНУ імені Івана Франка – Львів. – 2016. – P.416.

[2] Lecture 7. A Special Class of TU games: Voting Games

[3] Constandina Koki, Stefanos Leonardos Coalitions & Voting Power in the Greek Parliament of 2012: A Case-Study.

[4] Соколова А. В. Модифицированные индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по коалиционированию. Моделирование в социально-политической сфере. 2009. № 3

[5] Соколова А. В. Количественые методы оценки влияния участников при принятии коллективных решений. Полития № 4(51). 2008.

[6] J.M. Alonso-Meijide, M. Alvarez-Mozos, M.G. Fiestras-Janeiro. Power Indices and Minimal Winning Coalitions in Simple Games in Partition Function Form.

[7] F Aleskerov. Power Indices Taking into Account Agent's Preferences. Mathematics and Democracy. – Berlin – 2006.

[8] Факты.Бундестаг – краткий обзор. Deutscher Bundestag, Berlin – 2018.

[9] Електроний ресурс: https://www.bundestagswahl-2021.de/koalitionen/#afd

[10] Електроний ресурс: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1246505/umfrage/ prognosen-koalitionen -nach-der-bundestag swahl/?fbclid =IwAR24R 6jzLpveZ8g 06JI-RO7lPmaAWd0QAPNF 1_V7TR90rthsNOSCPiwSFE8U