МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математичної
економіки, економетрії,
фінансової та страхової
математики

Магістерська робота

Дослідження зв'язку надлишкового попиту та рівноважної ціни

Виконала:
студентка групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 – *математика*
спеціалізації *математична економіка та економетрика*
Поясник Ярина Андріївна

Науковий керівник:
доц. Барабаш Галина Михайлівна

*Роботу рекомендовано до захисту
на засіданні кафедри математичної
економіки, економетрії, фінансової
та страхової математики,
протокол від 08 грудня 2021 року № 5*

*Завідувач кафедри
проф. Кирилич В. М.*

Львів-2021

Форма № Н- 9.02

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ, ЕКОНОМЕТРІЇ, ФІНАНСОВОЇ ТА СТРАХОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Пояснювальна записка

до магістерської (кваліфікаційної) роботи

магістр

(освітній рівень)

на тему

Дослідження зв'язку надлишкового попиту та рівноважної ціни

Виконала: студентка групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 – *математика*
спеціалізації *математична економіка та економетрика*
Поясник Я.А.

Керівник доц. Барабаш Г.М.
(прізвище та ініціали)

Рецензент доц. Пелюшкевич О.В.
(прізвище та ініціали)

Львів – 2021

Зміст

Вступ

Якщо ринкові ціни рівноважні, тобто такі, що всі товари на всіх ринках розкуповуються, то товари, куплені учасниками за цими цінами, утворюють набір благ. Цей набір благ називається вальрасівською (або конкурентною) рівновагою. Конкурентні набори благ утворються децентралізованим і некооперативним чином, оскільки кожен споживач максимізує власну корисність для свого індивідуально-бюджетного обмеження, не користуючись інформацією ні про попит, ні про переваги інших учасників. Підчас такого підходу ціни сигналізують нестачу або надлишок товарів, і учасники взаємодіють з ринком, а не один з одним.

В теорії міжнародної торгівлі розглядають декілька країн, які обмінюються товарами на міжнародних ринках за деякими правилами. Ця модель є відправною точкою для моделі економіки обміну. Встановлено існування цін (правил торгівлі), за яких можна розпродати товари на всіх ринках. Такі ціни називають рівноважними. Зрозуміло, що значного впливу на ведення торгівлі мають попит і пропозиція.

В даній роботі буде розглянуто зв'язок надлишкового попиту та рівноважної ціни. І також, розв'язано приклад знаходження рівноважної ціни та буде подано програмний код цього рішення в програмному середовищі Python.

1.Вальрасівська рівновага та квазірівновага.

Означення

Набір благ $(x_1, \dots, x_m)$ в економіці обміну називається:

(a) **вальрасівською** *(або* **конкурентною***) рівновагою, якщо існує така ціна $p \neq 0$, що $x_i \epsilon \mathrm{B}_i(p) = \{x \epsilon \mathrm{R}_+^m : p \cdot x \leq p \cdot \omega_i\}$ і з співвідношення $x > x_i$ випливає нерівність $p \cdot x > p \cdot \omega_i$ тобто для кожного і вектор x_i є максимальним елементом в бюджетній множині $\mathrm{B}_i(p)$;*

(b) **квазірівновагою***, якщо існує така ціна $p \neq 0$, що з співвідношення $x \geq x_i$ випливає нерівність $p \cdot x \geq p \cdot \omega_i$.*

Якщо ненульовий вектор цін задовольняє умову b), то будемо говорити, що він *підтримує* (*стимулює*) квазірівновагу або є *опорним* (*стимулюючим*). Якщо у кожного споживача існує екстремальний бажаний набір, то будь-яка вальрасівська рівновага буде і квазірівновагою. Щоб встановити це, припустимо, що v_i – екстремальний бажаний набір для споживача i, та нехай $(x_1, \dots, x_m)$ – вальрасівська рівновага. Візьмемо таку систему цін $p \neq 0$, що з співвідношення $x > x_i$ випливає нерівність $p \cdot x > p \cdot \omega_i$. Тоді з $x \geq x_i$ випливає, що $x + \varepsilon v_i > x_i$ і тому $p \cdot x + \varepsilon p \cdot v_i = p \cdot (x + \varepsilon v_i) > p \cdot \omega_i$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Звідси $p \cdot x \geq p \cdot \omega_i$, але це означає, що набір благ $(x_1, \dots, x_m)$ є квазірівновагою.

Вальрасівська рівновага завжди оптимальна за Парето. Цей результат Ерроу відомий як перша теорема про благоустрій.

Теорема (Ерроу)

Якщо в економіці обміну переваги учасників строго випуклі, то будь-яка вальрасівська рівновага є парето-оптимальним набором благ.

Основна відмінність між вальрасівською рівновагою і квазірівновагою полягає в тому, що в першому випадку при опорних цінах учасник має ненульовий дохід. В стані квазірівноваги у певних споживачів дохід може бути нульовим. Якщо ж дохід учасника ненульовий, то квазірівновага насправді є вальрасівською рівновагою.

Наступні теореми описують дві основні властивості опорних цін.

Теорема

Для будь-якого вектора цін p, який підтримує квазірівновагу $(x_1, \ldots, x_m)$*, справедливі такі твердження:*

(a) $p \cdot x_i = p \cdot \omega_i$ *для всіх* i*;*

(b) *якщо хоча б одна з переваг монотонна, то* $p \geq 0$.

Означення

Монотонність відношення переваги значить, що споживач вибирає більші набори, а не менші.

В термінах опорних цін вальрасівська рівновага в економіці обміну зі строго монотонними перевагами може бути представлено наступним чином.

Теорема

Якщо в економіці обміну переваги строго монотонні, то для даного набору благ $(x_1, \ldots, x_m)$ *і даного ненульового вектора цін p наступні твердження еквівалентні:*

(1) кожен елемент x_i *максимальний в бюджетній множині*

$$\mathrm{B}_i(p) = \{x \in \mathrm{R}_+^m : p \cdot x \leq p \cdot \omega_i\}\ ;$$

(2) якщо $p \gg 0$ *і* $x \geq x_i$*, то* $p \cdot x > p \cdot \omega_i$ *;*

(3) якщо $x > x_i$*, то* $p \cdot x \geq p \cdot \omega_i$ *;*

(4) якщо $x \geq x_i$*, то* $p \cdot x \geq p \cdot \omega_i$ *.*

2.Опорні ціни

Тепер звернемо увагу на поняття «опорності» цін.

Означення

Говорять, що набір благ $(x_1, \dots, x_m)$ *підтримується вектором цін* p, *а ця ціна називається опорною по відношенню до набору благ* $(x_1, \dots, x_m)$, *якщо з співвідношення* $x \geq x_i$ *випливає нерівність* $p \cdot x \geq p \cdot x_i$.

У випадку коли переваги монотонні, опорні ціни завжди додатні. Дійсно, якщо $(x_1, \dots, x_m)$ – набір благ, який підтримується ціною p і $x \geq 0$, то $x_1 + x \geq x_1$ і тому $p \cdot (x_1 + x) = p \cdot x_1 + p \cdot x \geq p \cdot x_1$, звідси випливає, що $p \cdot x \geq 0, p \geq 0$.

Наша ціль – встановити, що (при певних умовах) набір благ оптимальний за Парето тоді і тільки тоді, коли він підтримується деякими цінами (це є формулюванням Дебре про благоустрій). У справедливості цього твердження можна переконатись, розглянувши ящик Еджворта . Якщо x – якийсь набір благ, то він оптимальний за Парето тоді і тільки тоді, коли криві байдужості, які проходять через x (для «гладких» переваг), дотикаються в цій точці і тому це означає, що існує спільна опорна ціна p (рис.1).

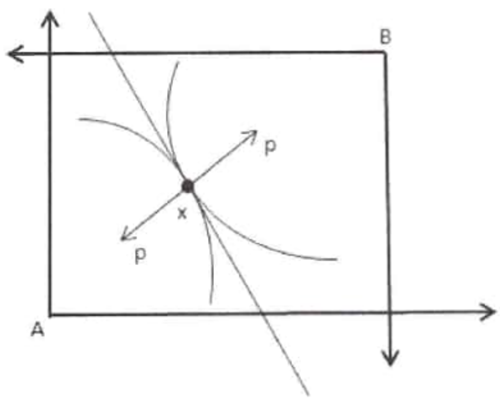

Рис.1. Ящик Еджворта

Теорема

Якщо деякий набір благ в економіці обміну з неперервними перевагами підтримується ціною p, для якої $p \cdot \omega \neq 0$, то цей набір благ слабо оптимальний за Парето.

На цю теорему потрібно накласти умови, які б гарантували відсутність максимальних елементів. Перевага задана на топологічному просторі X, називається:

(1) **локально-ненасиченою**, якщо для будь-якого елемента $x \in X$ і будь-якого його окола V існує такий набір $y \in V$, що $y > x$;

(2) **ненасиченою**, якщо для будь-якого елемента $x \in V$ існує такий елемент $z \in X$, що $z > x$.

Звернемо увагу, що будь-яка локально-ненасичена перевага є ненасиченою (і тому поняття ненасиченої переваги можна ввести на довільній множині).

Теорема

Якщо в економіці обміну кожна перевага строго опукла і ненасичена, то будь-який набір благ, слабо оптимальний за Парето (зокрема, будь-який парето-оптимальний набір благ), підтримується нульовою ціною.

3.Поняття неокласичної економіки обміну

Символом $\mathcal{P}$ позначимо множину всіх переваг на $\mathcal{R}_+^l$. Спочатку наведемо загальне означення економіки обміну з скінченним простором товарів.

Означення

Економікою обміну називають будь – яке відображення $\mathcal{E}$ непорожньої множини A (множина учасників, споживачів або агентів) в $\mathcal{R}_+^l \times \mathcal{P}$, тобто $\mathcal{E}$: A→ $\mathcal{R}_+^l \times \mathcal{P}$.

Якщо $\mathcal{E}$: A→ $\mathcal{R}_+^l \times \mathcal{P}$ – економіка обміну, то значення $\mathcal{E}_i = (\omega_i, \succeq_i)$ описує характеристики i – го учасника; вектор ω_i називають його початковий запас, а $\succeq_i$ – відношення переваги або смаками. Якщо p – вектор цін, то невід'ємне число $p \cdot \omega_i$ називається доходом i – го учасника за ціни p і позначається w_i , тобто $w_i = p \cdot \omega_i$. Якщо множина A скінченна, то вектор $\omega = \sum_{i \in A} \omega_i$ називається повним запасом економіки.

Важливим класом економік обміну є неокласична економіка. Її означення виглядає наступним чином.

Означення

Неокласична економіка обміну – це така економіка обміну

$\mathcal{E}$: A→ $\mathcal{R}_+^l \times \mathcal{P}$, що:

1) *множина учасників A скінченна;*
2) *у кожного учасника i є ненульовий початковий запас ω_i (такий, що $\omega_i > 0$) і його переваги $\succeq_i$ є неокласичними;*
3) *повний початковий запас $\omega = \sum_{i \in A} \omega_i$ строго додатній, тобто $\omega \gg 0$.*

4.Функція попиту

Ні переваги, ні функції корисності не набувають явного вигляду на ринку. У реальному житті можна спостерігати лише процес обміну між учасниками, тобто попит і пропозицію при існуючих цінах.

Зафіксуємо вектор $\mathrm{p} \in \mathcal{R}_{+}^{l}$ – *вектор цін. Бюджетна множина* вектора p для вектора $\omega \in \mathcal{R}_{+}^{l}$ визначена наступним чином:

$$\mathrm{B}_{\omega}(\mathrm{p}) = \{x \in \mathcal{R}_{+}^{l}: \mathrm{p} \cdot x \leq \mathrm{p} \cdot \omega\}$$

Бюджетна лінія (або бюджетна поверхня) в бюджетній множині $\mathrm{B}_{\omega}(\mathrm{p})$ – це множина $\{x \in \mathrm{B}_{\omega}(\mathrm{p}): \mathrm{p} \cdot x = \mathrm{p} \cdot \omega\}$. Відомо, що скалярний добуток $\mathrm{p} \cdot x$ визначається рівністю:

$$\mathrm{p} \cdot x = p_1 x_1 + \cdots + p_l x_l = \sum_{i=1}^{l} p_i x_i.$$

Відомо, що відображення $(\mathrm{p}, x) \mapsto \mathrm{p} \cdot x$ із $\mathcal{R}_{+}^{l} \times \mathcal{R}_{+}^{l}$ в $\mathcal{R}$ є неперервним. Отже, всі бюджетні множини є замкненими.

<u>Теорема</u>

Для заданої ціни $\mathrm{p} \in \mathcal{R}_{+}^{l}$ *справедливі наступні твердження:*

(1) *будь-яка бюджетна множина вектора* p *обмежена тоді і тільки тоді, коли* $\mathrm{p} \gg 0$*;*

(2) *будь-яка бюджетна множина вектора* p *не є обмеженою тоді і тільки тоді, коли хоча б одна його компонента дорівнює 0.*

Так як компактність в скінченно-вимірному векторному просторі еквівалентна замкненості та обмеженості, то попередню теорему можна переформулювати в наступному вигляді: *будь-яка бюджетна множина вектора цін* p *є обмежена тоді і тільки тоді, коли* $\mathrm{p} \gg 0$.

<u>Теорема</u>

Для заданої ціни $\mathrm{p} \gg 0$ *і неперервної переваги* $\succeq$ *на* $\mathcal{R}_{+}^{l}$ *справедливі наступні твердження:*

(1) *якщо* $\succeq$ *опукла, то кожна бюджетна множина вектора* p *має хоча б один максимальний елемент для* $\succeq$*;*

(2) *якщо* $\succeq$ *строго опукла, то кожна бюджетна множина вектора* p *має один максимальний елемент для* $\succeq$*;*

(3) *якщо* $\succeq$ *строго опукла та існує екстремально-бажаний набір благ, то кожна бюджетна множина вектора* p *має один максимальний елемент для* $\succeq$ *і він лежить на бюджетній лінії.*

Геометрична інтерпретація пункту (3) :

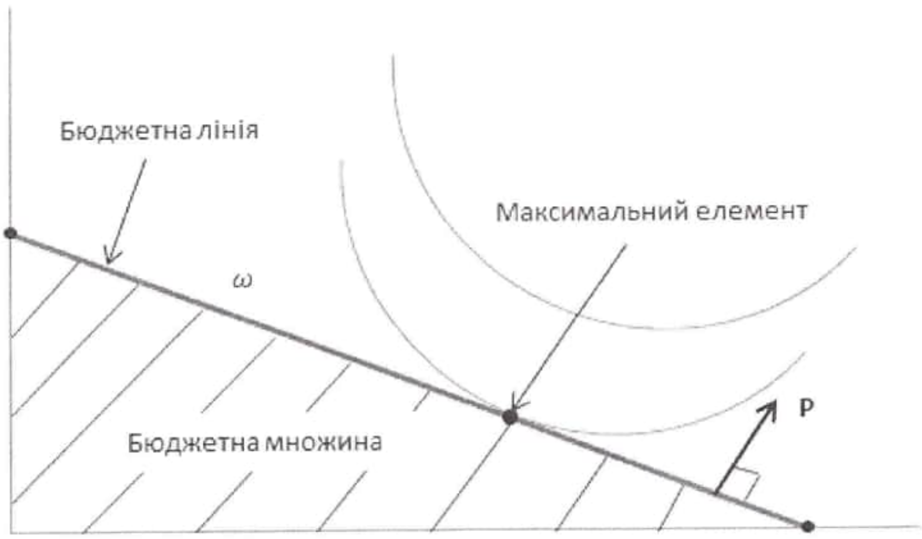

Рис.2. Геометрична інтерпретація (3)

<u>Теорема</u>

Нехай $\succeq$ *- відношення переваги на* $\mathcal{R}_+^l$ *і* $\mathrm{p} \in \partial\mathcal{R}_+^l$ *– вектор цін, тоді:*

(1) *якщо перевага* $\succeq$ *строго монотонна, то для неї немає максимального елемента ні в одній бюджетній множині вектора* p*;*

(2) *якщо перевага* $\succeq$ *строго монотонна на* $Int(\mathcal{R}_+^l)$ *так, що будь-який елемент з внутрішності переважає будь-який елемент межі та, якщо для вектора* $\omega \in \mathcal{R}_+^l$ *виконується нерівність* $\mathrm{p} \cdot \omega > 0$*, то множина* $\mathrm{B}_\omega(\mathrm{p})$ *не має максимального елемента для* $\succeq$*.*

Розглянемо неперервне строго опукле відношення переваги $\succeq$ на $\mathcal{R}_+^l$ в якому існує екстремально-бажаний набір. *Початковим запасом* є деякий фіксований вектор $0 < \omega \in \mathcal{R}_+^l$. Тоді в силу попередніх теорем, для будь-якої ціни $\mathrm{p} \in Int(\mathcal{R}_+^l)$ у бюджетній множині $\mathrm{B}_\omega(\mathrm{p})$ існує єдиний максимальний елемент переваги $\succeq$. Цей елемент називається *вектором попиту* (для) переваги $\succeq$ при заданій ціні p і позначається $x_\omega(\mathrm{p})$. Таким чином отримуємо функцію

$$x_\omega : Int(\mathcal{R}_+^l) \to \mathcal{R}_+^l$$

Цю функцію називають *функцією попиту*. Варто зауважити дві основні властивості цієї функції:

1) так як для кожного $\mathrm{p} \in Int(\mathcal{R}_+^l)$ вектор $x_\omega(\mathrm{p})$ лежить на бюджетній поверхні, то $\mathrm{p} \cdot x_\omega(\mathrm{p}) = \mathrm{p} \cdot \omega$.
2) для будь-якого $\lambda > 0$ і $\mathrm{p} \gg 0$ виконується рівність $x_\omega(\mathrm{p}) = x_\omega(\lambda \mathrm{p})$.

Означення

Неперервне відношення переваги $\succeq$ на $\mathcal{R}_+^l$ називається неокласичним, якщо або:

1) $\succeq$ строго монотонне і строге опукле;

2) $\succeq$ строго монотонне і строго опукле на $Int(\mathcal{R}_+^l)$, причому будь-який елемент внутрішності переважає будь-який елемент межі.

Теорема

Нехай $\succeq$ - неокласична перевага на $\mathcal{R}_+^l$ і нехай для векторів ω та p *із $\mathcal{R}_+^l$ виконується нерівність $\mathrm{p} \cdot \omega > 0$. Якщо послідовність $\{\mathrm{p}_n\}$ належить $Int(\mathcal{R}_+^l)$ та задовольняє $\mathrm{p}_n \to \mathrm{p}$ і $x_\omega(\mathrm{p}_n) \to x$, то:*

(a) $\mathrm{p} \gg 0$, *тобто* $\mathrm{p} \in Int(\mathcal{R}_+^l)$;

(b) $x \in \mathrm{B}_\omega(\mathrm{p})$;

(c) $x = x_\omega(\mathrm{p}_n)$.

Теорема

Будь-яка функція попиту, що відповідає неокласичній перевазі є неперервною.

Тепер наведемо економічну інтерпретацію поданих вище припущень.

Векторний простір $\mathcal{R}_+^l$ варто розуміти як простір товарів в економіці, що розглядається, причому l, природно, вказує кількість

доступних типів товарів. Відношення переваги можна охарактеризувати як "смаки" споживачів, а ω – початковий запас товарів. Вектор $\mathrm{p} = (\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_l)$ вказує на задані в економіці ціни: величина p_i – ціна товару i. Тоді вектор попиту $x(\mathrm{p})$ є саме тим набором товарі, що максимізує функцію корисності споживача задовольняючи бюджетні обмеження. Якщо $x_\omega(\mathrm{p}) = x(\mathrm{p}) =$
$= (x_1(\mathrm{p}), \dots, x_l(\mathrm{p}))$ – вектор попиту, то число:

$$\sum_{i=1}^{l} x_i(\mathrm{p}),$$

представляє собою кількість одиниць всіх товарів (послуг), до яких індивідуум виявляє інтерес.

Якщо ціни наближаються до межі простору $\mathcal{R}_+^l$, то деякі товари стають (відносно) дешевшими і відповідно попит на них має стати більшим. Однак, варто зазначити, що, якщо ціна деякого товару прямує до нуля, попит на нього зовсім необов'язково безкінечно зростатиме.

5.Функція надлишкового попиту

Всюди далі будемо вважати, що $\mathcal{E}$ - неокласична економіка обміну. Тоді переваги $\succeq_i$ кожного учасника i є неокласичними та для кожного учасника i визначена функція попиту x_i: $\mathrm{Int}(\mathcal{R}^l_+) \to \mathcal{R}^l_+$.

<u>Означення</u>

Нехай $\mathcal{E}$ - неокласична економіка обмін. Функцією надлишкового попиту економіки $\mathcal{E}$ називають відображення $\zeta : \mathrm{Int}(\mathcal{R}^l_+) \to \mathcal{R}^l$, *яке задається формулою*

$$\zeta(\mathrm{p}) = \sum_{i\in A} x_i(\mathrm{p}) - \sum_{i\in A} \omega_i = \sum_{i\in A} x_i(\mathrm{p}) - \omega \, .$$

Також використовують по компонентний запис:

$$\zeta(\cdot) = (\zeta_1(\cdot), \dots, \zeta_l(\cdot)) \, .$$

Наведена нижче теорема описує основні властивості функції надлишкового попиту.

<u>Теорема</u>

Функція надлишкового попиту ζ неокласичної економіки обміну володіє наступними властивостями:

(1) ζ є однорідною функцією степеня 0, тобто $\zeta(\lambda \mathrm{p}) = \zeta(\mathrm{p})$ *для будь – яких* $\mathrm{p} \gg 0$ *і* $\lambda > 0$;

(2) *функція ζ неперервна і обмежена знизу;*

(3) *для ζ виконується закон Вальраса, тобто* $\mathrm{p} \cdot \zeta(\mathrm{p}) = 0$ *для будь – якої ціни* $\mathrm{p} \gg 0$;

(4) *якщо послідовність* $\{\mathrm{p}_n\}$ *строго додатних векторів цін така,що*

$$\mathrm{p}_n = (\mathrm{p}_1^n, \dots, \mathrm{p}_l^n) \to \mathrm{p} = (\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_l)$$

і $\mathrm{p}_k > 0$ *для деякого k, то послідовність* $\{ \zeta_k(\mathrm{p}_n) \}$, *яка складається із k – х компонент, векторів* $\zeta(\mathrm{p}_n)$, *обмежена;*

(5) *якщо* $\mathrm{p}_n \gg 0$ *для всіх n та* $\mathrm{p}_n \to \mathrm{p} \in \partial\mathcal{R}^l_+ \setminus \{0\}$, *то існує хоч одне k, таке, що* $\lim sup_{n\to\infty} \zeta_k(\mathrm{p}_n) = \infty$.

6. Рівноважна ціна

Розглянемо поняття вектора рівноважних цін для неокласичної економіки обміну.

Означення

Строго додатній вектор цін p *називають рівноважною ціною для неокласичної економіки обміну, якщо* $\zeta(p) = 0$.

Чи завжди для неокласичної економіки обміну існують рівноважні ціни? Знаменита теорема Ерроу – Дебре дає позитивну відповідь на поставлене питання.

Оскільки функція надлишкового попиту ζ є однорідною степеня 0 (тобто $\zeta(\lambda p) = \zeta(p)$ для будь – яких $\lambda > 0$), то строго додатній вектор p є рівноважною ціною тоді і тільки тоді, коли $\zeta(\lambda p) = 0$ для будь – якого $\lambda > 0$. Іншими словами, якщо p – рівноважна ціна, то весь промінь $\{ \lambda p : \lambda > 0 \}$ складається із рівноважних цін. Це означає, що при пошуку рівноваги можна обмежитись тими множинами (рис.3), які містять хоч один елемент кожного такого променя. Найчастіше використовують норми, які відповідають наступним двом множинам:

$$\Delta = \{p \in \mathcal{R}_+^l : p_1 + \ldots + p_l = 1\}$$

і

$$S_{l-1} = \{p \in \mathcal{R}_+^l : (p_1)^2 + \ldots + (p_l)^2 = 1\}$$

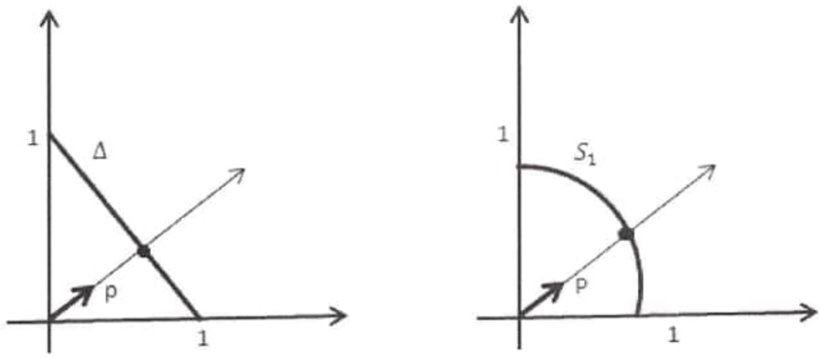

Рис.3.

Далі будемо користуватись виключно «симплексом» Δ .

Очевидно, що Δ - опукла компактна підмножина простору $\mathcal{R}_+^l$. Сукупність всіх строго додатних цін із Δ позначимо через S :

$$S = \{\mathrm{p} \in \Delta:\ \mathrm{p}_i > 0\ ,\ \ i = 1\ ,\dots,l\}\ .$$

Тепер будемо розглядати функцію надлишкового попиту ζ як відображення з S в $\mathcal{R}_+^l$. Функція $\zeta : S \to \mathcal{R}^l$ має наступні властивості:

<u>Теорема</u>

Нехай $\zeta(\cdot) = (\zeta_1(\cdot), \ldots, \zeta_l(\cdot))$ *– функція надлишкового попиту в неокласичній економіці обміну. Тоді*

(1) *функція* ζ *неперервна і обмежена знизу на* S*;*

(2) *для* ζ *виконується закон Вальраса:* $\mathrm{p}\cdot\zeta(\mathrm{p}) = 0$ *для будь – якого* $\mathrm{p} \in S$ *;*

(3) *якщо* $\{\mathrm{p}_n\} \subseteq S$, $\mathrm{p}_n \to \mathrm{p} = (\mathrm{p}_1\ ,\dots,\mathrm{p}_l)$ *і* $\mathrm{p}_k > 0,$ *то послідовність* $\{\ \zeta_k(\mathrm{p}_n)\ \}$, *яка складається із* k *– х компонент, векторів* $\zeta(\mathrm{p}_n)$*, обмежена;*

(4) *якщо* $\{\mathrm{p}_n\} \subseteq S$, $\mathrm{p}_n \to \mathrm{p} \in \partial S$, *то* $\lim_{n\to\infty}\| \zeta(\mathrm{p}_n) \|_1 = \infty$.

Для доведення існування рівноважних цін для будь – якої неокласичної економіки обміну ми скористаємось теоремою Какутані про нерухому точку. Для зручності пригадаємо деякі поняття. Відношенням (або багатозначною функцією) між двома множинами X і Y називають відображення $\varphi : X \to 2^Y$; іншими словами, для кожного x значення $\varphi(x) -$ це підмножина в Y. Графік відношення $\varphi : X \to 2^Y$ – це підмножина декартового добутку $X \times Y$, визначене рівністю

$$G_\varphi = \{(x,y) \in\ X\times Y : x \in X \text{ і } y \in\ \varphi(x)\ \}\ .$$

Якщо X і Y – топологічні простори, то говорять, що відношення $\varphi : X \to 2^Y$ має замкнений графік, якщо множина G_φ замкнена на $X \times Y$. Точка $x \in X$ нерухомою точкою відношення $\varphi : X \to 2^Y$, якщо $x \in \varphi(x)$.

Теорема Какутані про нерухому точку :

Теорема (Какутані)

Нехай C *– непорожня компактна опукла підмножина в* $\mathcal{R}^l$ *. Якщо значення відношення* $\varphi : C \to 2^C$ *непорожні та опуклі, а його графік замкнений, то у такого відношення є нерухома точка, тобто існує точк* $x \in C$ *для якої* $x \in \varphi(x)$.

Тепер можна встановити загальний результат, згідно якого в будь – якій неокласичній економіці обміну існують рівноважні ціни.

Теорема

Припустимо, що відображення $\zeta(\cdot) = (\zeta_1(\cdot), \ldots, \zeta_l(\cdot))$ *з* S *в* $\mathcal{R}^l$ *володіє наступними властивостями:*

(1) *функція* ζ *неперервна і обмежена знизу;*

(2) *для* ζ *виконується закон Вальраса:* $p \cdot \zeta(p) = 0$ *для будь – якого* $p \in S$ *;*

(3) *якщо* $\{p_n\} \subseteq S$, $p_n \to p = (p_1, \ldots, p_l)$ *і* $p_i > 0$, *то послідовність* $\{ \zeta_i(p_n) \}$, *яка складається із* i *– х компонент, векторів* $\zeta(p_n)$, *обмежена;*

(4) *якщо* $\{p_n\} \subseteq S$ та $p_n \to p \in \partial S$, *то* $\lim_{n\to\infty} \| \zeta(p_n) \|_1 = \infty$.

Тоді існує хоч один такий вектор $p \in S$ *, що* $\zeta(p) = 0$.

Частковий випадок теореми Ерроу – Дебре формулюється наступним чином:

Теорема (Ерроу – Дебре)

В кожній неокласичній економіці обміну є рівноважна ціна, тобто існує хоч один вектор $p \gg 0$ *, для якого* $\zeta(p) = 0$.

Наведені теореми лише гарантують існування рівноважних цін, але не наводять ніяких методів для їх знаходження. Вперше конструктивне доведення існування рівноважних цін було запропоновано Х. Скарфом. Фактично передбачити положення рівноважних цін на симплексі дуже тяжко навіть у найпростіших випадках.

7.Приклад знаходження надлишкового попиту та рівноважної ціни для економіки з простору $\mathcal{R}^2$

Розглянемо економіку з простором товарів $\mathcal{R}^2$, у якій споживачі:

Споживач 1: початковий запас $\overrightarrow{\omega_1} = (1, 2)$, функція корисності $u_1(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$;

Споживач 2: початковий запас $\overrightarrow{\omega_2} = (2, 3)$, функція корисності $u_2(x, y) = xy^2$;

Споживач 3: початковий запас $\overrightarrow{\omega_3} = (1, 1)$, функція корисності $u_3(x, y) = ye^x$;

Повний запас, це вектор $\vec{\omega} = \overrightarrow{\omega_1} + \overrightarrow{\omega_2} + \overrightarrow{\omega_3} = \binom{1}{2} + \binom{2}{3} + \binom{1}{1} = (4, 6)$

Зафіксуємо ціну $\vec{\mathrm{p}} = (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$.

Знайдемо функції попиту $\overrightarrow{x_1}(\mathrm{p}), \overrightarrow{x_2}(\mathrm{p}), \overrightarrow{x_3}(\mathrm{p})$.

Перший споживач максимізує свою функцію корисності

$u_1(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ при виконанні бюджетного обмеження:

$\mathrm{p}_1 x + \mathrm{p}_2 y = \mathrm{p}_1 \cdot 1 + \mathrm{p}_2 \cdot 2$

Запишемо останню умову так:

$\varphi_1 = \mathrm{p}_1 + 2\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_1 x - \mathrm{p}_2 y = 0$

Шукаємо умовний екстремум, використовуючи функцію Лагранжа:

$L_1(x, y, \lambda) = u_1 + \lambda\varphi_1$

$L_1(x, y, \lambda) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \lambda(\mathrm{p}_1 + 2\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_1 x - \mathrm{p}_2 y)$

$$\begin{cases} L'_{1x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \lambda \mathrm{p}_1 = 0 \\ L'_{1y} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} - \lambda \mathrm{p}_2 = 0 \\ L'_{1\lambda} = \mathrm{p}_1 + 2\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_1 x - \mathrm{p}_2 y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4\lambda^2 {\mathrm{p}_1}^2} \\ y = \dfrac{1}{4\lambda^2 {\mathrm{p}_2}^2} \\ \mathrm{p}_1 x + \mathrm{p}_2 y = \mathrm{p}_1 + 2\mathrm{p}_2 \end{cases}$$

$$\frac{p_1}{4\lambda^2 {p_1}^2} + \frac{p_2}{4\lambda^2 {p_2}^2} = p_1 + 2p_2$$

$$\frac{1}{4\lambda^2 p_1} + \frac{1}{4\lambda^2 p_2} = p_1 + 2p_2$$

$$\frac{p_2 + p_1}{4\lambda^2 p_1 p_2} = p_1 + 2p_2$$

$$4\lambda^2 p_1 p_2 = \frac{p_1 + p_2}{p_1 + 2p_2}$$

$$\lambda^2 = \frac{p_1 + p_2}{4p_1 p_2 (p_1 + 2p_2)} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4p_1 p_2 (p_1 + 2p_2)}{4(p_1 + p_2){p_1}^2}$$

$$x = \frac{p_2(p_1 + 2p_2)}{p_1(p_1 + p_2)}$$

$$y = \frac{4p_1 p_2 (p_1 + 2p_2)}{4(p_1 + p_2){p_2}^2} = \frac{p_1(p_1 + 2p_2)}{p_2(p_1 + p_2)}$$

Отримали функцію попиту 1 споживача:

$$\overrightarrow{x_1}(p) = \left(\frac{p_2(p_1 + 2p_2)}{p_1(p_1 + p_2)}; \frac{p_1(p_1 + 2p_2)}{p_2(p_1 + p_2)}\right)$$

Другий споживач максимізує свою функцію корисності

$u_2(x, y) = xy^2$ при виконанні бюджетного обмеження:

$$p_1 x + p_2 y = 2p_1 + 3p_2$$

$$\varphi_2 = 2p_1 + 3p_2 - p_1 x - p_2 y = 0$$

Шукаємо умовний екстремум, використовуючи функцію Лагранжа:

$$L_2(x, y, \lambda) = u_2 + \lambda\varphi_2$$

$$L_2(x, y, \lambda) = xy^2 + \lambda(2p_1 + 3p_2 - p_1 x - p_2 y)$$

$$\begin{cases} L'_{2x} = y^2 - \lambda p_1 = 0 \\ L'_{2y} = 2yx - \lambda p_2 = 0 \\ L'_{2\lambda} = 2p_1 + 3p_2 - p_1 x - p_2 y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{\lambda p_1} \\ x = \frac{\lambda p_2}{2y} = \frac{\lambda p_2}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{p_1}} = \frac{\sqrt{\lambda} p_2}{2\sqrt{p_1}} \\ p_1 x + p_2 y = 2p_1 + 3p_2 \end{cases}$$

$$\frac{p_1\sqrt{\lambda}p_2}{2\sqrt{p_1}} + p_2\sqrt{\lambda p_1} = 2p_1 + 3p_2$$

$$\sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{2}\sqrt{p_1}p_2 + \sqrt{p_1}p_2\right) = 2p_1 + 3p_2$$

$$\sqrt{\lambda}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{p_1}p_2 = 2p_1 + 3p_2$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{(2p_1 + 3p_2)\cdot 2}{3\sqrt{p_1}p_2} \ \Rightarrow \ x = \frac{(2p_1 + 3p_2)\cdot 2p_2}{3\sqrt{p_1}p_2\cdot 2\sqrt{p_1}} = \frac{2p_1 + 3p_2}{3p_1}$$

$$y = \frac{(2p_1 + 3p_2)\cdot 2\sqrt{p_1}}{3\sqrt{p_1}p_2} = \frac{2(2p_1 + 3p_2)}{3p_2}$$

Отримали функцію попиту 2 споживача:

$$\overrightarrow{x_2}(p) = \left(\frac{2p_1 + 3p_2}{3p_1}; \frac{2(2p_1 + 3p_2)}{3p_2}\right)$$

Третій споживач максимізує свою функцію корисності

$u_3(x, y) = ye^x$ при виконанні бюджетного обмеження:

$p_1x + p_2y = p_1\cdot 1 + p_2\cdot 1$

$\varphi_3 = p_1 + p_2 - p_1x - p_2y = 0$

Шукаємо умовний екстремум, використовуючи функцію Лагранжа:

$L_3(x, y, \lambda) = u_3 + \lambda\varphi_3$

$L_3(x, y, \lambda) = ye^x + \lambda(p_1 + p_2 - p_1x - p_2y)$

$$\begin{cases} L'_{3x} = ye^x - \lambda p_1 = 0 \\ L'_{3y} = e^x - \lambda p_2 = 0 \\ L'_{3\lambda} = p_1 + p_2 - p_1x - p_2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\lambda p_1}{e^x} \\ e^x = \lambda p_2 \\ p_1 + p_2 - p_1x - p_2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{p_1}{p_2} \\ x = \ln(\lambda p_2) \\ p_1x + p_2y = p_1 + p_2 \end{cases}$$

$$p_1 \cdot \ln(\lambda p_2) + p_2 \cdot \frac{p_1}{p_2} = p_1 + p_2$$

$$p_1 \cdot \ln(\lambda p_2) = p_2$$

$$\ln(\lambda p_2) = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\lambda p_2 = e^{\frac{p_2}{p_1}}$$

$$\lambda = \frac{e^{\frac{p_2}{p_1}}}{p_2}$$

$$x = ln\left(\frac{e^{\frac{p_2}{p_1}} \cdot p_2}{p_2}\right) = ln\left(e^{\frac{p_2}{p_1}}\right) = \frac{p_2}{p_1}$$

$$y = \frac{p_1}{p_2}$$

Отримали функцію попиту 3 споживача:

$$\overrightarrow{x_3}(p) = \left(\frac{p_2}{p_1};\ \frac{p_1}{p_2}\right)$$

Отже, *сукупний попит*:

$$\overrightarrow{x_1}(p) + \overrightarrow{x_2}(p) + \overrightarrow{x_3}(p) =$$

$$= \left(\frac{p_2(p_1 + 2p_2)}{p_1(p_1 + p_2)} + \frac{2p_1 + 3p_2}{3p_1} + \frac{p_2}{p_1};\ \frac{p_1(p_1 + 2p_2)}{p_2(p_1 + p_2)} + \frac{2(2p_1 + 3p_2)}{3p_2} + \frac{p_1}{p_2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2{p_1}^2 + 12{p_2}^2 + 11p_1p_2}{3p_1(p_1 + p_2)};\ \frac{10{p_1}^2 + 6{p_2}^2 + 19p_1p_2}{3p_2(p_1 + p_2)}\right)$$

Знайдемо функцію надлишкового попиту:

$$\vec{\zeta}(p) = \overrightarrow{x_1}(p) + \overrightarrow{x_2}(p) + \overrightarrow{x_3}(p) - \vec{\omega} =$$

$$= \left(\frac{2{p_1}^2 + 12{p_2}^2 + 11p_1p_2}{3p_1(p_1 + p_2)} - 4;\ \frac{10{p_1}^2 + 6{p_2}^2 + 19p_1p_2}{3p_2(p_1 + p_2)} - 6\right) =$$

$$= \left(\frac{12{p_2}^2 - p_1p_2 - 10{p_1}^2}{3p_1(p_1 + p_2)};\ \frac{10{p_1}^2 + p_1p_2 - 12{p_2}^2}{3p_2(p_1 + p_2)}\right)$$

Щоб $\vec{\zeta}(p) = 0$ необхідно і достатньо, щоб $12{p_2}^2 - p_1p_2 - 10{p_1}^2 = 0$.

Враховуємо, що $p_1 + p_2 = 1$. Тоді $p_2 = 1 - p_1$.

$$12(1 - p_1)^2 - p_1(1 - p_1) - 10{p_1}^2 = 0$$

$$12(1 - 2p_1 + {p_1}^2) - p_1 + {p_1}^2 - 10{p_1}^2 = 0$$

$$12 - 24p_1 + 12{p_1}^2 - p_1 + {p_1}^2 - 10{p_1}^2 = 0$$

$$3{p_1}^2 - 25p_1 + 12 = 0$$

$$D = 625 - 144 = 481 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D} = \sqrt{481}$$

$$p_1 = \frac{25 \pm \sqrt{481}}{6}$$

$$p_1 = \frac{25 + \sqrt{481}}{6} \approx 7{,}82 > 1 \qquad \text{не підходить.}$$

$$p_1 = \frac{25 - \sqrt{481}}{6} \approx 0{,}51$$

$$p_1 \approx 0{,}51, \;\; p_2 \approx 1 - 0{,}51 \approx 0{,}49$$

Отже, знайдено рівноважну ціну:

$$p_{eq} \approx (0{,}51;\; 0{,}49).$$

8.Інтерпретація рішення прикладу в програмному середовищі Python.

Постановка задачі

Зафіксуємо, $u_1(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ як функцію корисності першого споживача; $u_2(x,y) = xy^2$ як функцію корисності другого споживача; $u_3(x,y) = ye^x$ відповідно як функцію попиту третього споживача. Однак, початкові запаси $\overrightarrow{\omega_1}$, $\overrightarrow{\omega_2}$, $\overrightarrow{\omega_3}$ будуть змінними.

За допомогою наступного програмного коду можна знайти вигляд функцій Лагранжа та попиту для трьох споживачів, також функцій сукупного та надлишкового попиту і обчислює рівноважну ціну.

Програмний код в середовищі Python

```
print('Приклад знаходження надлишкового попиту та рівноважної ціни для економіки з простору R^2.')

print()
a1,a2=input("Введіть початковий запас першого споживача: ").split(',')
print("w1 = (", a1, ';', a2, ')', sep='')
a3,a4=input("Введіть початковий запас другого споживача: ").split(',')
print("w2 = (", a3, ';', a4, ')', sep='')
a5,a6=input("Введіть початковий запас третього споживача: ").split(',')
print("w3 = (", a5, ';', a6, ')', sep='')

print()
print("Повний запас")
s1=int(a1)+int(a3)+int(a5)
s2=int(a2)+int(a4)+int(a6)
print("w = (", s1, ';', s2,')', sep='')
```

```
print('Функція Лагранжа першого споживача при заданому початковому запасі і функції корисності: ')
print('L1 = x^0.5+y^0.5+λ(', int(a1),'p1+', int(a2),'p2-p1x-p2y)', sep='')

print()
print("Функція попиту першого споживача: ")
#print("x1_1=(p2(", a1,'p1+',a2,'p2))/(p1(p1+p2))')
#print("x1_2=(p1(", a1,'p1+',a2,'p2))/(p2(p1+p2))')
print('x1=(p2(',a1,'p1+',a2,'p2)/p1(p1+p2)',';','p1(',a1,'p1+',a2,'p2)/p2(p1+p))
', sep='')

print('Функція Лагранжа другого споживача при заданому початковому запасі і функції корисності: ')
print('L2 = xy^2+λ(', int(a3),'p1+', int(a4),'p2-p1x-p2y)', sep='')

print()
print("Функція попиту другого споживача: ")
#print("x2_1=(", a3, 'p1+', a4,'p2)/3p1')
#print("x2_2=(2(",a3,'p1+', a4,'p2))/3p2')
print('x2 = ((', a3, 'p1+', a4,'p2)/3p1',';  ', '2(',a3,'p1+', a4,'p2)/3p2)', sep='')

print('Функція Лагранжа третього споживача при заданому початковому запасі і функції корисності: ')
print('L3 = ye^x+λ(', int(a5), 'p1+', int(a6),'p2-p1x-p2y)', sep='')

print()
print("Функція попиту третього споживача: ")
#print('x3_1=(', int(a5)-1,'p1+',int(a6), 'p2)/p1')
#print('x3_2=p1/p2)')
print('x3 = ((',int(a5)-1,'p1+',a6, 'p2)/p1',';  ','p1/p2)', sep='')
```

```
print()
print("Функція сукупного попиту: ")
print('x1+x2+x3=((',int(a3)+3*(int(a5)−1),'p1^2+',3*int(a1)+int(a4)+
int(a3)+3*int(a6)+3*(int(a5) −1),'p1p2+',3*int(a2)+int(a4)+3*int(a6),
'p2^2)/3p1(p1+p2);'\,'(',3*int(a1)+2*int(a3)+3,'p1^2+',2*int(a4),'p2^2+',3*i
nt(a2)+2*int(a4)+2*int(a3)+3,'p1p2)/3p2(p1+p2))', sep='')

print()
print('Функція надлишкового попиту: ')
print('z=x1+x2+x3-w=((('',int(a3)+3*(int(a5)-1)-
3*s1,')p1^2+(',3*int(a1)+int(a4)+int(a3)+3*int(a6)+3*(int(a5)-1)-
3*s1,')p1p2+', 3*int(a2)+int(a4)+3*int(a6),'p2^2)/', \
  '3p1(p1+p2);  (',  3*int(a1)+2*int(a3)+3,'p1^2+(',  2*int(a4)-3*s2,')p2^2+',
3*int(a2)+2*int(a4)+2*int(a3)+3-3*s2, 'p1p2)/3p2(p1 + p2))', sep='')
print()

print('Шукаємо p1 і p2: ')
print(int(a3)+3*(int(a5)-1)-
3*s1,'p1^2+(',3*int(a1)+int(a4)+int(a3)+3*int(a6)+3*(int(a5)-1)-
3*s1,')p1p2+', 3*int(a2)+int(a4)+3*int(a6),'p2^2=0', sep='')
print('p2=1-p1')
print(3*int(a2)-3*int(a1),'p1^2+(',3*int(a1)-int(a4)+int(a3)-
3*int(a6)+3*(int(a5)-1)-6*int(a2)-3*s1,')p1+',
3*int(a2)+int(a4)+3*int(a6),'=0', sep='')

print()
D=(3*int(a1)-int(a4)+int(a3)-3*int(a6)+3*(int(a5)-1)-6*int(a2)-3*s1)**2-
4*(3*int(a2)-3*int(a1))*(3*int(a2)+int(a4)+3*int(a6))
print('D=',D, sep='')
```

```
p1_1=(-(3*int(a1)-int(a4)+int(a3)-3*int(a6)+3*(int(a5)-1)-6*int(a2)-
3*s1)+D**0.5)/(2*(3*int(a2)-3*int(a1)))
p1_2=(-(3*int(a1)-int(a4)+int(a3)-3*int(a6)+3*(int(a5)-1)-6*int(a2)-3*s1)-
D**0.5)/(2*(3*int(a2)-3*int(a1)))

print('p1_1=', f'{p1_1:.2f}')
print('p1_2=', f'{p1_2:.2f}')


print()
if p1_1<0:
  p1=p1_2
  print('p1=', f'{p1:.2f}')
elif p1_2<0:
  p1=p1_1
  print('p1=', f'{p1:.2f}')
else:
  p1=min(p1_1,p1_2)
  print('p1=', f'{p1:.2f}')
p2=1-p1
print('p2=', f'{p2:.2f}')

print()
print('Знайдено рівноважну ціну: ')

print('p_eq=(', f'{p1:.2f}', ';',f'{p2:.2f}',')', sep='')
```

На наступному рис.4. подано розв'язок задачі при $\overrightarrow{\omega_1} = (1,2)$, $\overrightarrow{\omega_2} = (2,3)$ та $\overrightarrow{\omega_3} = (1,1)$.

```
Приклад знаходження надлишкового попиту та рівноважної ціни для економіки з простору R^2.

Введіть початковий запас першого споживача:
1,2
w1 = (1;2)
Введіть початковий запас другого споживача:
2,3
w2 = (2;3)
Введіть початковий запас третього споживача:
1,1
w3 = (1;1)

Повний запас
w = (4;6)
Функція Лагранжа першого споживача при заданому початковому запасі і функції корисності:
L1 = x^0.5+y^0.5+λ(1p1+2p2-p1x-p2y)

Функція попиту першого споживача:
x1 = (p2(1p1+2p2)/p1(p1+p2); p1(1p1+2p2)/p2(p1+p2))
Функція Лагранжа другого споживача при заданому початковому запасі і функції корисності:
L2 = xy^2+λ(2p1+3p2-p1x-p2y)

Функція попиту другого споживача:
x2 = ((2p1+3p2)/3p1; 2(2p1+3p2)/3p2)
Функція Лагранжа третього споживача при заданому початковому запасі і функції корисності:
L3 = ye^x+λ(1p1+1p2-p1x-p2y)
Функція попиту третього споживача:
x3 = ((0p1+1p2)/p1; p1/p2)

Функція сукупного попиту:
x1 + x2 + x3 = ((2p1^2+11p1p2+12p2^2)/3p1(p1+p2);(10p1^2+6p2^2+19p1p2)/3p2(p1+p2))

Функція надлишкового попиту:
z = x1 + x2 + x3 - w = (((-10)p1^2+(-1)p1p2+12p2^2)/3p1(p1+p2); (10p1^2+(-12)p2^2+1p1p2)/3p2(p1 + p2))

Шукаємо p1 і p2:
-10p1^2+(-1)p1p2+12p2^2=0
p2=1-p1
3p1^2+(-25)p1+12=0

D=481
p1_1= 7.82
p1_2= 0.51

p1= 0.51
p2= 0.49

Знайдено рівноважну ціну:
p_eq=(0.51;0.49)
```

Рис.4. Розв'язок прикладку, виданий програмою

Як бачимо p_{eq}, що в ручному обчисленні, що у машинному дорівнює (0,51; 0,49). Це означає, що складений програмний код є коректним і видає правильні результати для введених з клавіатури початкових запасів $\overrightarrow{\omega_1}$, $\overrightarrow{\omega_2}$, $\overrightarrow{\omega_3}$ для трьох споживачів з економіки з простором товарів $\mathcal{R}^2$ для попередньо зафіксованих функцій корисності для кожного з них.

9.Існування загальної рівноваги в економіці з функцією надлишкового попиту

Теорія загальної рівноваги зосереджена на пошуку ринкових клірингових цін на всі товари одночасно. Оскільки між ринками існують різного виду взаємодії, то концепція рівноваги включає в себе інтерактивне спільне визначення рівноважних цін.

Якщо в економіці є N товарів, то вектор цін матиме наступний вигляд $\mathrm{p} = (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \dots, \mathrm{p}_{N-1}, \mathrm{p}_N)$. Множина цін з простору $\mathcal{R}^N$ представлена, як:

$$\mathrm{P} = \{\mathrm{p} \mid \mathrm{p} \in \mathcal{R}^N, \mathrm{p}_i \geq 0, i = 1, \dots, N, \textstyle\sum_{i=1}^{N} \mathrm{p}_i = 1\}.$$

Для будь-якого домогосподарства i визначено функцію попиту $D^i: \mathrm{P} \to \mathcal{R}^N$. Для будь-якої фірми j визначено функцію пропозиції $S^j: \mathrm{P} \to \mathcal{R}^N$.

Прибутком фірми j буде $\mathrm{p} \cdot S^j \equiv \sum_{n=1}^{N} p_n S_n^j(\mathrm{p})$. Також, економіка має початковий запас ресурсів $r \in \mathcal{R}_+^N$.

Функція надлишкового попиту визначено таким виглядом:

$$Z(\mathrm{p}) = \textstyle\sum_i D^i(\mathrm{p}) - \sum_j S^j(\mathrm{p}) - r,$$

$$Z: \mathrm{P} \to \mathcal{R}^N$$

$Z(\mathrm{p}) \equiv \big(Z_1(\mathrm{p}), Z_2(\mathrm{p}), Z_3(\mathrm{p}), \dots, Z_N(\mathrm{p})\big)$, де $Z_k(\mathrm{p})$ – це надлишковий попит на товар k.

У випадку, коли $Z_k(\mathrm{p})$ для товару k набуває від'ємного значення, ми будемо говорити, що товар k має надлишок пропозиції.

Варто приділити увагу до двох основних припущень: закон Вальраса і умова неперервності $Z(\mathrm{p})$.

<u>Закон Вальраса</u>

Для будь-якого $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$,

$$\mathrm{p} \cdot Z(\mathrm{p}) = \textstyle\sum_{n=1}^{N} p_n Z_n(\mathrm{p}) = \sum_i \mathrm{p} \cdot D^i(\mathrm{p}) - \sum_j \mathrm{p} \cdot S^j(\mathrm{p}) - \mathrm{p} \cdot \mathrm{r} = 0,$$

де $\sum_i \mathrm{p} \cdot D^i(\mathrm{p})$ *– це величина сукупних витрат домогосподарств, а* $\sum_j \mathrm{p} \cdot S^j(\mathrm{p}) + \mathrm{p} \cdot \mathrm{r}$ *– це величина сукупного прибутку домогосподарств* *(тобто значення прибутку фірми плюс вартість запасів). Закон Вальраса говорить, що витрати рівні прибутку.*

Умова неперервності $Z(\mathrm{p})$

$Z\colon \mathrm{P} \to \mathcal{R}^N$, $Z(\mathrm{p})$ *є неперервною функцією для всіх* $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$.

Тобто, незначні зміни p *також призводять до незначних змін* $Z(\mathrm{p})$ *скрізь у* P.

Далі розглянемо поняття вектора рівноважних цін.

Означення

$\mathrm{p}^0 \in \mathrm{P}$ *називається вектором рівноважних цін, якщо* $Z(\mathrm{p}^0) \leq 0$ *і* $\mathrm{p}_k^0 = 0$ *для* k *таких, що* $Z_k(\mathrm{p}^0) < 0$. *Отже,* p^0 *є вектором рівноважних цін, якщо пропозиція дорівнює попиту на всіх ринках.*

Теорема про фіксовану точку

Нехай f *є неперервною функцією, тобто* $f\colon \mathrm{P} \to \mathrm{P}$, *то тоді існує такий* $x^* \in \mathrm{P}$, *що* $f(x^*) = x^*$.

Теорема про існування рівноважної ціни

Нехай виконуються закон Вальраса і умова неперервності $Z(\mathrm{p})$. *Отже, існує така* $\mathrm{p}^* \in \mathrm{P}$, *що* p^* *є рівноважною ціною.*

10.Зв'язок між попитом, пропозицією та рівноважною ціною

Функціональна залежність між товарами або послугами, на які є попит та факторами, які впливають на попит цього товару чи послуги, називається функцією попиту.

Кількість товарів на які є попит можна подати у наступному вигляді:

$$QD = f(\mathrm{P}, \mathrm{P}_s, Y, T, E, \varepsilon)$$

де Р – ціна товару, P_s – ціна на взаємопов'язані товари, Y – дохід споживачів, T – смаки та вподобання споживачів, E – очікування споживача, ε – інші фактори.

Функцію попиту можна представити лінійно, нелінійно та аналітично:

1) лінійна функція попиту: $QD = a + b_1\mathrm{P}, +b_2\mathrm{P}_s + b_3Y + b_4T + \varepsilon$ де $a \equiv const, b_i$ – маргінальні коефіцієнти.
2) нелінійна функція попиту: $QD = a \cdot \mathrm{P}^{b_1} \cdot \mathrm{P}_s{}^{b_2} \cdot Y^{b_3} \cdot T^{b_4}$ (логарифмічна).
3) аналітична функція попиту: $q = a + b \cdot \mathrm{p}$, де q – попит, р – ціна, a, b – сталі коефіцієнти.

<u>Закон попиту (для нормальних товарів)</u>

Чим вища ціна, тим менший попит і навпаки чим нижча ціна, тим більший попит.

Природно, що споживачі купують менше, якщо ціни зростають. Отож, крива попиту є спадною.

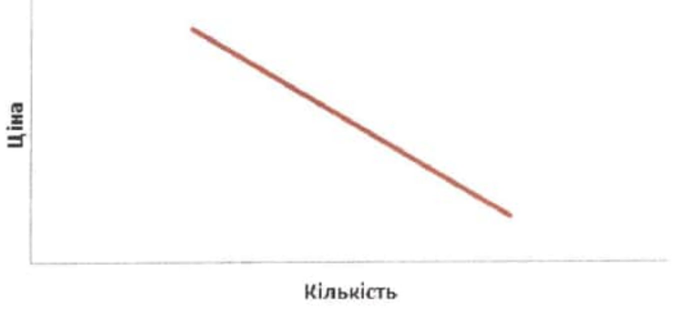

Рис.5. Крива попиту

Якщо говорити про пропозицію, то коли ціна зростає виробник, прагнучи максимізувати свій прибуток, збільшує випуск кількісті товару. Отож, якщо ціни зростають, збільшується і пропозиція, крива пропозиції є зростаючою.

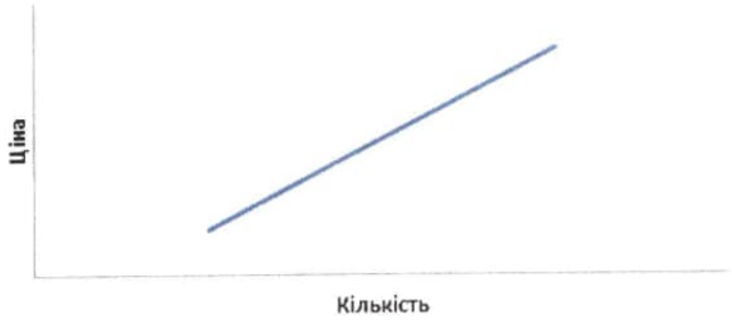

Рис.6. Крива пропозиції

Також, рух вздовж кривої попиту або пропозиції виникає внаслідок зміни ціни.

В точці, де перетинаються криві попиту і пропозиції ми отримуємо кількість, яку споживачі готові купити, а постачальники готові продати за вказаною ціною. Таку ціну називають рівноважною.

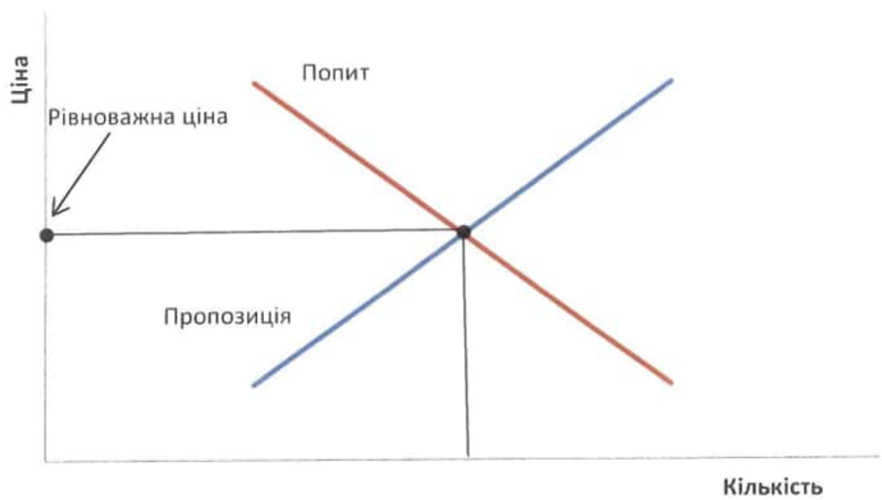

Рис.7. Рівноважна ціна

У той час як ціни спричиняють рух вгору або вниз вздовж кривих попиту та пропозиції, інші фактори можуть спричинити зсув цих кривих вліво або вправо.

Якщо виник зсув кривої попиту вправо, то це означає, що на кожному рівні цін попит збільшився. Якщо ж виник зсув вліво, то на кожному рівні цін попит зменшився.

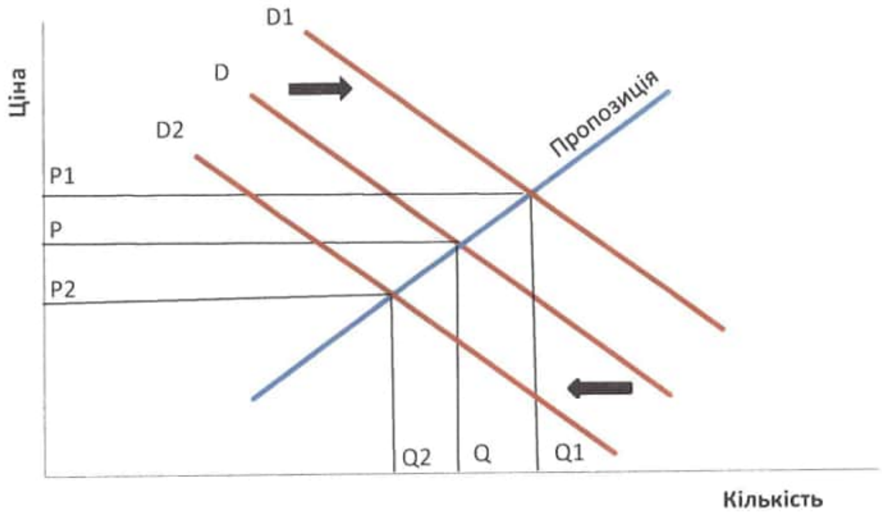

Рис.8. Зсуви кривої попиту

Детальніше розглянемо, що саме спричиняє зсув кривої попиту вліво або вправо:

a) збільшення доходів споживачів спричинить зсув вправо на більшість товарів, зменшення доходів навпаки спричинить зсув вліво;
b) якщо товари стають більш популярними або перед святами, то крива попиту зміщується вправо, а якщо товар втрачає свою популярність, то крива зміщується вліво;
c) успішна рекламна кампанія змістить криву вправо, однак погана реклама матиме зворотній ефект;
d) зміна кількості вікової ознаки населення також спричиняє зсув вліво або вправо;
e) державне законодавство може вплинути на зсуви кривої попиту.

Далі, проаналізуємо наступний приклад знаходження рівноважної ціни.

11.Рівноважна ціна та надлишок або дефіцит товарів

Економісти використовують термін "*рівновага*" так само, як це слово вживається у фізиці, щоб представити стійкий стан, у якому протилежні сили збалансовані так, що поточний стан системи має тенденцію зберігатись. У контексті попиту та пропозиції рівновага означає стан, коли "тиск" на підвищення цін точно врівноважується "тиском" на зниження цін і тому можна очікувати, що поточний стан обміну між споживачами і продавцями зберігатиметься.

Коли ціна така, що пропонована кількість товару чи послуг перевищує попит, деякі продавці не можуть вести торгівлю, оскільки купується менше одиниць ніж пропонується. Ця умова називається *надлишком*. За таких умов продавці мають стимул пропонувати свій товар за дещо нижчою ціною, щоб досягти успіху в продажах. Таке зниження цін "тисне" на ціни загалом і ті починають знижуватись. Падіння цін, зазвичай, зменшує кількість пропозиції і збільшує попит тим самим усуваючи надлишок. У цьому випадку, надлишок спонукає зниження цін.

Аналогічно, коли ціна досить низька, що обсяг попиту перевищує кількість пропонованого, виникає *дефіцит*. Зростання ціни призводить до зменшення кількості попиту і збільшення кількості пропозиції, тим самим усуваючи дефіцит. Знову ж таки, процес зупиняється, коли пропонована кількість товару зрівняється з попитом.

Для кращого розуміння варто проілюструвати "тиск" цін.

Будь-яка ціна відмінна від рівноважної, буде мати тенденцію зростати у зв'язку з дефіцитом та знижуватись при надлишку, допоки попит і пропозиція не будуть збалансовані. На рисунку 8 надлишок виникає за будь-якої ціни вище рівноважної p^*, оскільки пропонована кількість q_s більша від кількості попиту q_d. Ефект надлишку показано стрілками спрямованими вниз.

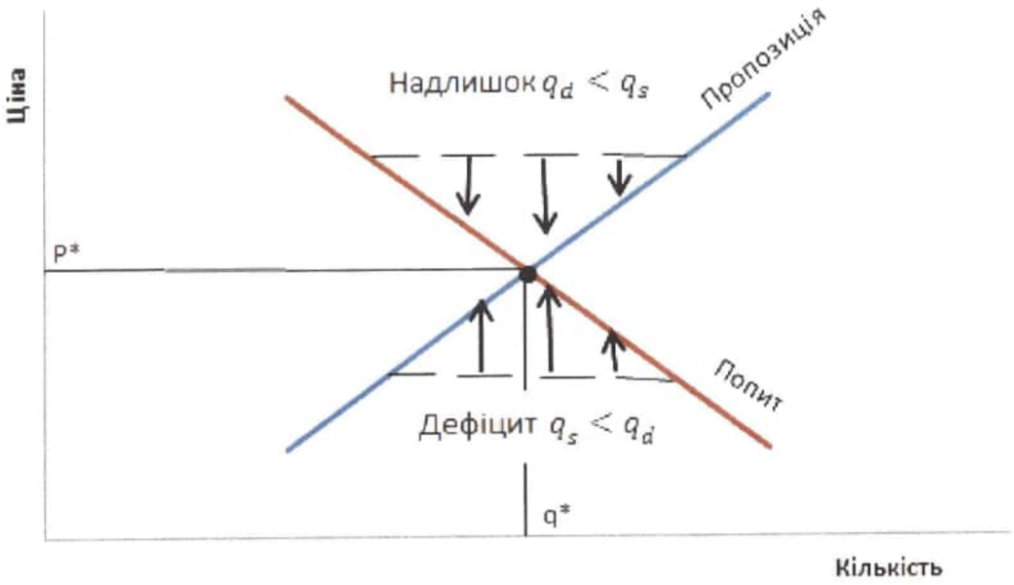

Рис.9. Надлишок і дефіцит

Аналогічно, коли ціна нижча за p*, пропонована кількість товару q_s є меншою за кількість попиту q_d. Це призводить до зростання цін, що проілюстровано стрілками спрямованими вгору. Єдина ціна, яка не призводить до змін цін загалом на ринку – це p*, рівноважна ціна. Зазначимо, що q^* – рівноважний попит.

З економічної точки зору, рівновага є ефективною, оскільки вона максимізує прибуток від торгівлі, за умови, що єдиними учасниками, на яких впливає будь-яка транзакція є споживачі та продавці (виробники).

12.Поняття надлишку для споживача та виробника

Далі розглянемо термін *індивідуального надлишку споживача*. Цей термін означає "чисту" вигоду покупця від купівлі товару чи послуги. Вона рівна різниці між готовністю покупця платити і сплаченою ціною. Також, *загальний надлишок споживача* – це сума усіх індивідуальних надлишків споживачів усіх покупців товару на ринку. Термін *надлишок споживача* часто використовується для позначення як індивідуального так і загального надлишку споживача. Варто зазначити, що зниження ціни на товар збільшує надлишок споживача двома наступними шляхами: вигода для споживачів, які були готові купляти товар і за початковою ціною, та вигода для споживачів, яких "приваблює" купувати нова менша ціна. І навпаки, зростання ціни аналогічно зменшує надлишок споживача.

Ще одним важливим поняттям є *індивідуальний надлишок виробника*. Цей термін означає "чисту" вигоду продавця від продажу товару чи послуги. Вона дорівнює різниці між діючою ціною на товар чи послугу та ціною продавця. Також, *загальний надлишок виробника* на ринку – це сума індивідуальних надлишків виробників усіх продавців товарів на ринку. Економісти використовують поняття *надлишок виробника* для позначення як індивідуального так і загального надлишку виробника.

Як і у випадку надлишку споживача, зміна ціни також змінює надлишок виробника. Однак, хоча падіння ціни збільшує надлишок споживача, одночасно воно зменшує надлишок виробника, аналогічно, зростання ціни зменшує надлишок споживача, але збільшує надлишок виробника. Коли ціна товару зростає, надлишок виробника збільшується двома шляхами: вигода тих, хто постачав би товар і за початковою ціною, та вигода тих, кого "приваблює" постачати товар за вищою ціною. Падіння цін на товар так само призводить до зменшення надлишку виробника. Попередні поняття можна подати графічно у вигляді наступного рисунку.

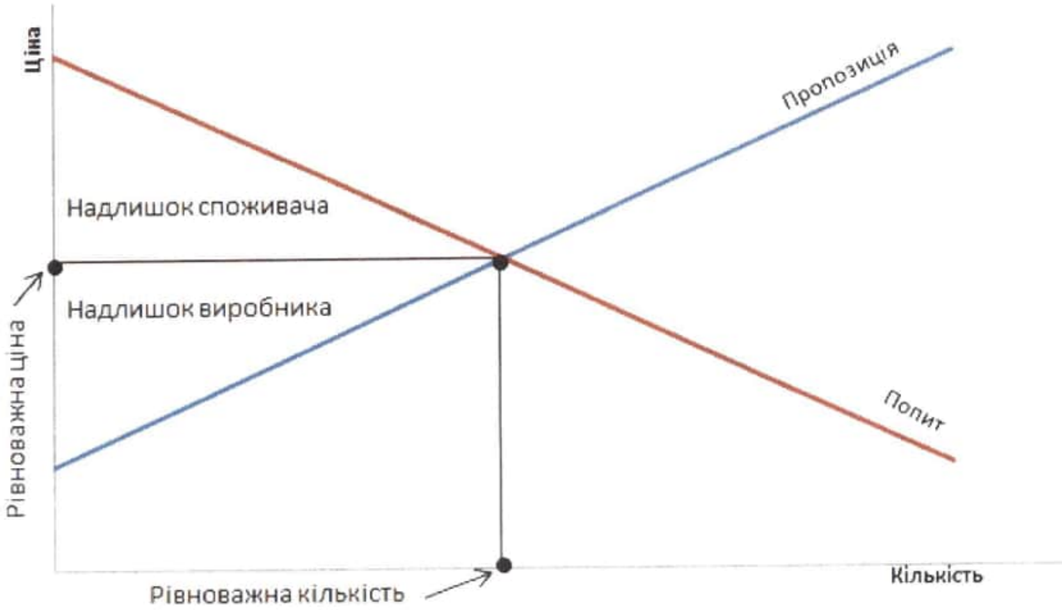

Рис.10. Надлишок споживача та виробника

Тепер позначимо точку перетину кривих як (p^*, q^*). Звернемо увагу, що покупці, які представлені зліва від точки рівноваги готові заплатити вищу ціну ніж все-таки заплатимо, тому рівноважна ціна "заощадила" їм гроші. З іншого боку, виробники, які теж представлені ліворуч, були готові постачати товари за нижчою ціною, тобто вони заробили більше грошей ніж очікували. Обидві групи учасників торгівлі отримали додаткові гроші.

Графічно, кількість грошей, які опинились в кишенях споживачів, є площею між кривою попиту і горизонтальною лінією на рівні рівноважної ціни p^*. Цю різницю в ціні, підсумовану за всіма споживачами, можна представити у вигляді наступного інтегралу:

$$\int_0^{q^*} d(q)\mathrm{d}q - p^*q^* \text{ – надлишок споживачів,}$$

де $d(q)$ – це функція попиту.

Аналогічно, кількість грошей, які опинились в кишенях виробників, є площею між кривою пропозиції і горизонтальною лінією на рівні рівноважної ціни p^*. Цю різницю в ціні, підсумовану за всіма виробниками, які отримали більше ніж очікували, можна подати як наступний інтеграл:

$$p^*q^* - \int_0^{q^*} s(q)\mathrm{d}q \ \text{– надлишок виробників,}$$

де $s(q)$ – це функція пропозиції.

Сума надлишку споживачів та надлишку виробників є загальним прибутком від торгівлі.

Розглянемо такий приклад:

Нехай функція попиту $d(q) = -0{,}8q + 150$, а функція пропозиції $s(q) = 5{,}2q$.

Знайдемо точку рівноваги: $-0{,}8q + 150 = 5{,}2q \Rightarrow \ q^* = 25$;

Якщо $q^* = 25$, то $p^* = 130$;

Шукаємо надлишок споживачів:

$\int_0^{25}(- 0{,}8q + 150)\mathrm{d}q - 130 * 25 = 250$;

Шукаємо надлишок виробників:

$130 * 25 - \int_0^{25}(5{,}2q)\mathrm{d}q = 1625$.

13.Надлишковий попит та пропозиція в реальному житті

У зв'язку з великим урожаєм пшениці цього 2021 року (близько 33,1 млн т) українські аграрії прийняли рішення експортувати 26 млн т пшениці на зовнішній ринок, адже для внутрішнього ринку цілком достатньо 7-8 млн т пшениці. Тому збільшення експорту дозволить аграріям продавати пшеницю за вигідними їм цінами, бо на зовнішньому ринку є високий попит на українські зернові культури.

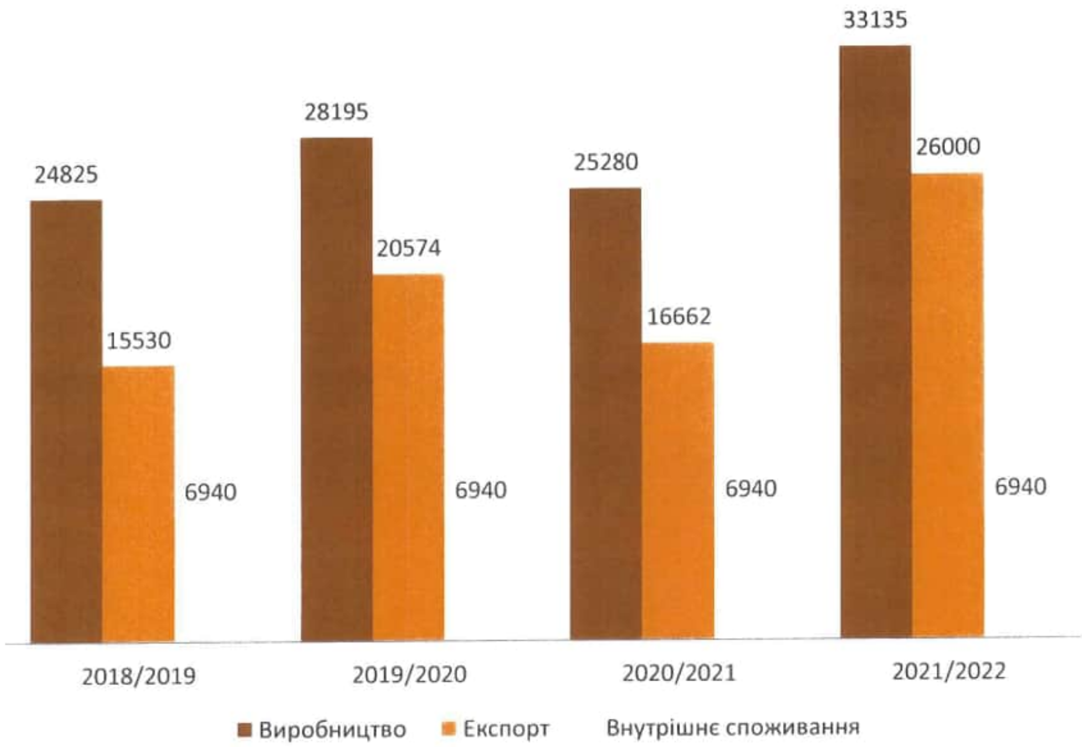

Рис.11. Дані, щодо української пшениці

На наведеній діаграмі кількість пшениці вказана у тис т. Дані взяті з офіційного сайту "Української Зернової Асоціації ".

Якщо б збільшили кількість пшениці для внутрішнього споживання, то її не змогли б продати, бо виник би надлишок пропозиції, що призвело б до того, що аграрії не отримали б бажаний дохід.

Висновок

В магістерській роботі розглянуто такі поняття як вальрасівська (або конкурентна) рівновага та квазірівновага, опорна ціна, неокласична економіки обміну, функція попиту, функція надлишкового попиту та рівноважна ціна. Крім того, представлено існування загальної рівноваги в економіці з функцією надлишкового попиту, показано зв'язок між попитом, пропозицією та рівноважною ціною і рівноважною ціною та надлишком або дефіцитом товарів. Розглянуто зв'язок надлишку для споживача та виробника і проілюстровано надлишковий попит та пропозицію на реальному прикладі. Самостійно розв'язано приклад знаходження надлишкового попиту та рівноважної ціни для економіки з простору $\mathcal{R}^2$ та побудовано його програмну інтерпретацію в Python.

Список використаної літератури

1. К.Алипарантис, Д.Браун, О.Бёркеншо Существование и оптимальность конкурентного равновесия / пер. с англ. – Мир, 1995. 384 с.
2. Ross M. Starr General equilibrium theory: an introduction 2nd Edition Cambridge University Press, 2011. 380 p.
3. R. Preston McAfee, Tracy Lewis, Donald J. Dale Introduction to Economic Analysis Version 2.1. Creative Commons, 2008. 346 p.
4. Paul Krugman, Robin Wells Microeconomics 2nd Edition Worth Publishers, 2009. 657 p.
5. Shana Calaway, Dale Hoffman, David Lippman Business Calculus 1st Edition 2013. 272 p.
6. Н. Ґреґорі Манків Макроекономіка Підручник для України. / за ред. С. Панчишина. Київ: Основи, 2000. 578с.
7. Українська зернова асоціація. – Електронні дані. – Режим доступу: www.uga.ua.