МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математичної
економіки, економетрії,
фінансової та страхової
математики

Магістерська робота

Дослідження операцій в економіці

Виконала: студентка групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 – *математика,*
спеціалізації *математична економіка та економетрика*

Біда Андріяна Ігорівна

Науковий керівник:
доц. Козицький В. А.

Роботу рекомендовано до захисту
на засіданні кафедри математичної
економіки, економетрії, фінансової та
страхової математики
протокол від грудня 2021 року №

Завідувач кафедрою
проф. Кирилич В. М.

Львів 2021

Форма № Н- 9.02

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ, ЕКОНОМЕТРІЇ, ФІНАНСОВОЇ ТА СТРАХОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Пояснювальна записка

до магістерської (кваліфікаційної) роботи

магістр
____
(освітній рівень)

на тему

Дослідження операцій в економіці

Виконав: студентка групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 – *математика*
спеціалізації *математична економіка та економетрика*
Біда А. І.

Керівник _доц. Козицький В. А_________
(прізвище та ініціали)

Рецензент______________________________
(прізвище та ініціали)

Львів – 2021

Форма № Н-9.01

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет ____
Кафедра ____
Освітньо-кваліфікаційний рівень ____
Напрям підготовки ____
(шифр і назва)
Спеціальність ____
(шифр і назва)

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Завідувач кафедри________

____
“___________________20___року

З А В Д А Н Н Я

НА МАГІСТЕРСЬКУ (КВАЛІФІКАЦІЙНУ) РОБОТУ СТУДЕНТУ

____
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи____
____
____

керівник роботи____,
(прізвище, ім’я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)
затверджені Вченою радою факультету від “___”_____________20____ року №___

2. Строк подання студентом роботи____

3. Вихідні дані до роботи____
____
____
____

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)____
____
____
____

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень)
____
____
____

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів магістерської (кваліфікаційної) роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка

Студент ____________________ ____________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівник проекту (роботи) ____________________ ____________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Зміст

1 Вступ

Розвиток сучасного суспільства характеризується підвищенням технічного рівня, ускладненням організаційної структури виробництва, поглибленням суспільного поділу праці, пред'явленням високих вимог до методів планування і господарського керівництва. У цих умовах тільки науковий підхід до керівництва економічним життям суспільства може забезпечити високі темпи розвитку народного господарства.

Актуальність роботи. Одним з необхідних умов подальшого розвитку економічної науки є застосування точних методів кількісного аналізу, широке використання математики. Сьогодні новітні досягнення математики і сучасної обчислювальної техніки знаходять все більш широке застосування в економічних дослідженнях і плануванні. Цьому сприяє розвиток таких розділів математики, як математичне програмування, теорія ігор, теорія масового обслуговування, а також бурхливий розвиток швидкодіючої електронно-обчислювальної техніки.

Дослідження операцій акумулює математичні методи, які використовують для прийняття керівних рішень у різних сферах діяльності. Керування будь-якою системою реалізується як процес, підпорядкований певним законам. Знання цих законів дає можливість визначити умови, необхідні та достатні для здійснення такого процесу. Припустимо, що людина приймає дуже важливе рішення бо від нього залежить її доля, доля її підприємства, напрямок розвитку держави, доля військової операції. Виникає питання: наскільки це рішення є вірним? Виникає потреба об'єктивної кількісної оцінки прийнятого рішення.

Історичні корені дослідження операцій досить глибокі. Деякі оптимізаційні задачі були відомі ще в Стародавній Греції. Потреби у спеціалістах дослідження операцій виникли ще в XIX ст., коли доводилося розв’язувати військові задачі: військова техніка зросла, а техніка бою не змінилася. Проте свою назву ця дисципліна одержала тільки в 40-х роках минулого століття. Перші публікації з дослідження операцій датовані 1939-1940 рр. У них вирішувалися військові задачі, зокрема задачі аналізу і дослідження воєнних операцій. Звідси і виникла назва нової дисципліни.

Дослідження операцій – це застосування математичних методів для моделювання систем та аналізу їх характеристик. Операція – це дія або сукупність дій, підпорядкованих єдиному задуму та спрямованих на досягнення певної мети, яка має характер повторюваності, тобто багаторазовості. Операція має дві особливості – цілеспрямованість і повторюваність.

Оперувальна сторона – сукупність осіб і технічних пристроїв, які прагнуть у цій операції досягти певної мети. В операції можуть брати участь одна чи кілька оперувальних сторін, які часто ставлять перед собою різні цілі. Залежно від масштабів операції та характеру своєї участі у ній, оперувальна сторона може сама формулювати собі цілі або одержувати їх із зовні. Для досягнення мети оперувальна сторона має у розпорядженні певний запас активних засобів (ресурсів), використовуючи які вона керує операцією. [22]

Цілеспрямованість операції можлива лише у тому разі, якщо нею можна управляти, тобто її результат залежить від деяких керованих параметрів. Сукупність значень керованих параметрів визначають як рішення, одержане в результаті дослідження операцій. Рішення можна одержати різними способами, із різною мірою точності, з різними припущеннями щодо властивостей неконтрольованих факторів, але незалежно від цього вони повинні розглядатися лише як допоміжний матеріал, що потребує осмислення і зіставлення для остаточного прийняття рішення. Рішення, які знаходяться за допомогою моделі операції, дають можливість оперувальній стороні орієнтуватися у зовнішньому оточенні, вносити уточнення до моделі, аналізувати різні стратегії, виявляти другорядні чинники розглядуваної операції. [11]

Дослідити операцію – означає знайти оптимальне рішення за наявності обмежень економічного, технічного характеру тощо. Оптимальними вважають ті рішення, які з тих чи інших міркувань кращі за інші.

Отже, мета дослідження операцій – попереднє кількісне обґрунтування оптимальних рішень. Ефективність операції – кількісно виражається у вигляді критерію ефективності – цільової функції. Для застосування кількісних методів дослідження потрібно побудувати математичну модель операції. [4]

Мета роботи полягає в детальному аналізі теоретичних та практичних складових дослідження операцій в економіці та їх задач. Виходячи з мети роботи можна сформувати наступні завдання:

1. Розглянути основні поняття дослідження операцій
2. Дослідити об'єкт, мету та цілі дослідження
3. Проаналізувати етапи проведення дослідження операцій
4. Розглянути математичні моделі операцій
5. Опрацювати задачі дослідження операцій

Предметом роботи виступають дослідження операцій - як математичні методи для моделювання систем та аналізу їх характеристик.

Об'єктом роботи виступають задачі дослідження операцій.

Методологічна та методична база дослідження складається із методів математичного аналізу, синтезу, співставлення та комплексного порівняння.

Практичне значення одержаних результатів заключається у можливості ознайомитися із дослідженням операцій, їх видів та завдань.

Наукова новизна полягає, у розширенні, уточненні та поглибленні вивчення дослідженні задач операцій.

Опишемо основні позначення і елементарні поняття кооперативної теорії ігор, які використовуватимемо у роботі.

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел. $\mathbb{R}^N -$ множина векторів з дійсними координатами, довжиною $|N|$, де N – множина натуральних чисел. $\mathbb{R}^N_+$ $-$ множина всіх елементів з $\mathbb{R}^N$, з невід'ємними, $\mathbb{R}^N_{++}$ – множина векторів з додатніми координатами. Множину підмножин N позначатимемо 2^N. Для $S \subset N$, e^s визначає вектор з $\mathbb{R}^N$, такий, що $e_i^s = 0$ для всіх $i \in N \setminus S$. $Mat_{M,\,N}(V)$ − множина матриць розміру $M \times N$ з елементами з множини V.

Означення 1.1. Кооперативною грою з трансферабельною корисністю називається пара (N, v), де $N-$ множина гравців, а v: $2^N \rightarrow \mathbb{R}$ − характеристична функція. Вона показує максимальну грошову винагороду, яку гравці можуть отримати діючи спільно. Припускаємо, що порожня коаліція нічого не заробляє, тобто $v\,(\emptyset)\ =\ 0$. Гравці приймають рішення про створення коаліції в залежності від розміру виплат всередині коаліції.

Для дослідження ігор необхідно враховувати всі можливі коаліції. Створивши коаліцію, множина гравців S діє як один гравець проти інших. Виграш цієї коаліції залежить від стратегій, які застосує кожен із n гравців.

Характеристична функція називається простою, якщо приймає тільки два значення: 0 і 1. Якщо характеристична функція проста, то коаліції S, для яких $v\,(S) = 1$ називатимемо виграшними, а коаліції , для яких $v\,(S) = 0$ − програшними. Якщо в простій характеристичній функції виграшними є тільки ті коаліції, до яких входить фіксована непорожня коаліція $\mathbb{R}$, то характеристична функція позначається як $v_{\mathbb{R}}$ і називається найпростішою. Прості характеристичні функції виникають, наприклад, в умовах голосування, коли коаліція виграшна, якщо вона отримує більше половини голосів або не менше двох третіх. Складнішим є приклад результатів голосування в Раді Безпеки ООН, де виграшними є всі коаліції, що складаються з п'яти постійних членів плюс ще хоча б один непостійний член, але лише один.

Нехай маємо утворені коаліції. Тоді виникає питання: як ділити виграш з урахуванням ваг кожної коаліції між її членами?

2 Лінійні виробничі ігри

Нехай задано скінчену множину $N = \{1,2,\dots,n\}$ − множина виробників, скінчену множину $l-$ їхні ресурси і ці ресурси можна використати для виготовлення товарів. Множину товарів позначимо через m. В такому випадку виробничий процес можна описати виробничою матрицею $A = (a_{jk}), a_{jk} \geq 0$, в якій кожний рядок має хоча б один ненульовий елемент. $B = (b_j^i) -$ матриця ресурсів, які належать гравцям ($b_j^i -$ кількість ресурсу j, який належить виробнику i). Продукти можна продати за фіксованими ринковими цінами (незалежно від виробленої кількості), які визначають вектором $c \in \mathbb{R}_+^m$, c_k – ринкова ціна за одиницю продукту k. Кожному виробнику $i \in N$ потрібно максимізувати прибуток. Тобто розв'язати таку задачу лінійної оптимізації

$$max\, c \cdot x,$$

$$\text{за умов } Ax \leq b^*,$$

$$x \epsilon \mathbb{R}_+^m,$$

де координати $x_k -$ кількість виробленого продукту k.

Нехай $S \subset N$, $S \neq \emptyset -$ утворена коаліція. Приймемо вектор $e^s \in \mathbb{R}^N$: $e_i^s = 1$, якщо $i \in S$, і $e_i^s = 0$, якщо $i \notin S$.

Означення 2.1. Лінійним виробничим процесом називається система $P = (N, L, M, A, B, c)$, яка задовольняє умови:

1. $A \in Mat_{M,N}(V)$, $B \in Mat_{M,N}(V)$, $c \in \mathbb{R}^M$, $N, L, M \neq \emptyset$;
2. $Be^N > 0$. Тобто для кожного ресурсу існує принаймні один виробник, який має його в достатній кількості;
3. існує принаймні один продукт $k \in M$ такий , що $c_k \geq 0$;
4. якщо $c_k > 0$, тоді існує принаймні один ресурс $j \in L$ такий, що $a_{jk} \geq 0$. Тобто немає доходу без використання ресурсів. Для виробництва продукту,

ціна якого строго додатна, потрібні ресурси. В іншому випадку цільова функція задачі (1) необмежена на допустимій множині розв'язків задачі (множина допустимих розв'язків задачі непорожня, бо $x = 0$ належить цій множині).

Якщо лінійний виробничий процес з довільною скінченною множиною гравців $N = \{1,2,\dots,n\}$ задовольняє умови означення 1.1, то позначатимемо його через $\mathcal{L}$.

Припустимо, що гравці прийняли рішення про створення коаліції S. Тоді прибуток визначається як оптимальне значення задачі лінійного прорамування

$$LP(S): \quad \max c \cdot x,$$
$$\text{за умов } Ax \le Be^S, \qquad (2)$$
$$x \ge 0,$$

де Be^S відображає загальну кількість ресурсів коаліції S.

Відповідно до теорії двоїстості задача (2) матиме такий вигляд

$$\overline{LP(S)}: \quad \min Be^S \cdot y,$$
$$\text{за умов } y^T A \ge c^T, \qquad (3)$$
$$y \in \mathbb{R}_+^L.$$

Означення 2.2. Нехай $P = (N, L, M, A, B, c) \in \mathcal{L}$. Для задачі (3) при множина допустимих розв'язків

$$Y(N) = \{y \in \mathbb{R}_+^L \mid y^T A \ge c^T\},$$

Оптимальне значення –

$$v_p(N) = \min\{y \cdot Be^N \mid y \in Y(P)\},$$

Множина оптимальних розв'язків –

$$\mathcal{O}_{min}(P) = \{y \in Y(P) |\ y \cdot Be^N = v_p(N)\}. [24]$$

Важливо зауважити, що загальний прибуток $v_p(N)$, який може отримати головна коаліція, не залежить від розподілу ресурсів між агентами, а залежить тільки від кількості ресурсів, що є в наявності.

Означення 2.3. Нехай $P = (N, L, M, A, B, c) \in \mathcal{L}$. Множиною Оуена виробничого процесу P називається множина

$$Owen\ (P) = \{y^T B \in \mathbb{R}^N |\ y \in \mathcal{O}_{min}(P)\}. [24]$$

Отже, щоб визначити елементи множини Оуена, вектор Оуена, спочатку потрібно визначити оптимальне рішення $y \in \mathbb{R}_+^L$ двоїстої задачі для головної коаліції N. Для кожного $j \in \{1 \ldots, l\}$, y_j інтерпретується як тіньова ціна ресурсу j. Тоді для кожного $i \in N, (y^T B)_i$ – тіньова вартість початкового набору ресурсів гравця i.

Теорема 2.1. Нехай $P = (N, L, M, A, B, c) \in \mathcal{L}$. Тоді

$$Owen\ (P) \subset C(v_p).$$

Доведення. Візьмемо $z \in Owen\ (P)$, нехай $y \in \mathcal{O}_{min}\ (P)$ і $y^T B e^N = v_p(N)$, таке, що справедливою є рівність $z = y^T B.$ Тоді

$$\sum_{i \in N} z_i = \sum_{i \in N} (y^T B)_i = yBe^N = v_p(N)$$

і, для усіх $S \subset N$,

$$\sum_{i \in S} z_i = yBe^S \geq v_p(N),$$

оскільки $y \in \mathcal{O}_{min}(P)$ і таким чином є допустимим розв'язком двоїстої задачі, яка відповідає коаліції S.

Теорема 2.2. Кожна лінійна виробнича гра LP є невід'ємною і цілком збалансованою. І, навпаки, кожна невід'ємна і цілком збалансована TU-гра є LP грою.

Доведення. Для доведення достатньо показати зворотню частину. Нехай $v \geq 0$ – це цілком збалансована TU-гра. Визначимо лінійний виробничий процес $\mathrm{D}(v)=$ (N, L, M, A, B, c), де $N = L$, $M = 2^{\mathrm{N}} \setminus \emptyset$, $A=(\dots, e_1^s \dots)$, $B=I_N$ і $c=(\dots, v(s), \dots)$. Звідси легко переконатися, що $\mathrm{D}(v) \in \mathcal{L}$ і $v_{\mathrm{D}(v)} = v$.

■

Лінійний виробничий процес $\mathrm{D}(v)$ в доведенні теореми 1.2 називається прямим лінійними виробничим процесом, що відповідає TU-грі з характеристичною функцією v. Тут ресурсами є гравці, які можуть створювати коаліції, кожен гравець на ринку праці може запропонувати лише себе і вагу кожної коаліції визначає v. Для прямих лінійних виробничих процесів множина Оуена повністю вичерпує ядро.

Теорема 2.3. Нехай (N, v) − TU-гра. Тоді множина Оуена співпадає з C-ядром:

$$Owen\left(\mathrm{D}(v)\right)=C(v).\ [14]$$

Приклад 2.1. Розглянемо лінійний виробничий процес

$$P = (N, L, M, A, B, c) \in \mathcal{L}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},\quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Наявні два ресурси r_1, r_2 в загальній кількості $r_1 = 6, r_2 = 8$ одиниць і виробляється два продукти. Відповідна лінійна виробнича гра $\left(N, v_p\right)$, $N = \{1,2,3\}$, $S = \left\{\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\right\}$. Множина допустимих розв'язків двоїстої задачі

$$Y(P) = \{y \in \mathbb{R}_+^2 | 2y_1 + y_2 \geq 6, y_1 + 4y_2 \geq 8\}.$$

А відповідно до виробничого процесу гра така:

S	$\emptyset$	1	2	3	12	13	123
b^S	$\emptyset$	$(6{,}0)$	$(0{,}5)$	$(0{,}1)$	$(6{,}5)$	$(6{,}1)$	$(6{,}6)$
$v(s)$	0	0	0	0	$146\ /\ 7$	$106\ /\ 7$	$156\ /\ 7$

$(Be^N)^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}^T = (6{,}6),$ $\quad ,min_{y \in Y(P)}\ y \cdot Be^N$=$156\ /\ 7$ досягається у єдиній точці $(16\ /\ 7{,}10\ /\ 7)$. Для $S = \{1{,}2\}$, $(Be^S)^T = (6{,}5)$ і $min_{y \in Y(P)}\ y \cdot Be^N$=$146\ /\ 7$ досягається в (0,6). Знайдемо оптимальний розв'язок двоїстої задачі для головної коаліції:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 6 \\ y_1 + 4y_2 = 8, \end{cases}$$

$$7y_2 = 10,$$

$$y_2 = 10/7,$$

$$y_1 = 8 - 4y_2 = 16/7,$$

$$y^* = (16/7, 10/7).$$

Множина Оуена:

$$z = y^T B = \begin{pmatrix} 16/7 \\ 10/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96\ /\ 7 \\ 50\ /\ 7 \\ 10\ /\ 7 \end{pmatrix}$$

Наприклад, тіньова вартість початкового набору $(0{,}1)$ ресурсів третього гравця становить $\frac{16}{7} \cdot 0 + \frac{10}{7} \cdot 1 = \frac{10}{7}$. Зауважимо, що $Owen\ (P) \subsetneqq C(v_p)$.

Приклад 2.2. Розглянемо лінійний виробничий процес $P = (N, L, M, A, B, c) \in \mathcal{L}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix},\ \ c = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Наявні два ресурси r_1, r_2 в загальній кількості $r_1 = 10, r_2 = 12$ одиниць і виробляється два продукти. Для даного виробничого процесу множина Оуена така:

$$Owen\ (P) = \mathcal{O}_{min}(P) = \{(y, 27 - y): 0 \leq y \leq 11\}.$$

3 Ігри керування запасами

Розглянемо застосування теорії ігор для моделей керування запасами. Основна мета задачі управління запасами - мінімізувати середні (довгострокові) витрати за одиницю часу на замовлення, запаси, утримання, гарантуючи при цьому заздалегідь заданий мінімальний рівень обслуговування.

Фірми можуть заощадити на цих витратах, якщо будуть співпрацювати одна з одною. Наприклад, якщо є фіксованою вартість за замовлення, фірмам платитимуть менше за нього, якщо вони замовлять одночасно групою, а не кожна окремо. Це в свою чергу призводить до задачі розподілу витрат: як повинні бути розподілені загальні мінімальні витрати на зберігання запасів головної коаліції між окремими фірмами?

Розглянемо надзвичайно базову модель керування запасами однієї фірми. Фірма стикається з попитом на d одиниць конкретного товару за одиницю часу. Не допускається вичерпання запасів і час між розміщенням замовлення і доставкою товару товару, вважаємо, дорівнює нулю. Фірма стикається з двома видами витрат. По-перше, це витрати на замовлення. За кожне замовлення фірма повинна сплатити фіксовану вартість, яка не залежить від кількості замовленого товару. По-друге, це витрати на збереження товару на складі. Витрати на зберігання за одиницю часу вважаємо сталими і позначаємо h.

Нехай фірма щоразу здійснює замовлення в кількості Q. Тоді час між двома послідовними замовленнями дорівнює Q/d одиниць часу. Цикл визначається як інтервал часу довжини Q/d, починаючи з моменту часу, коли оформлено замовлення. Через m позначаємо кількість замовлень, розміщених за одиницю часу: $m = d/Q$. Оскільки на одиницю часу припадає середнє замовлення d/Q, середня вартість замовлення дорівнює ad/Q. Середній рівень запасів дорівнює

Q/2, тому середні витрати на утримання товару за одиницю часу дорівнюють hQ/2. Загалом, середні витрати на замовлення і зберігання запасів становлять $AC(Q)$ при замовленні товару в кількості Q:

$$AC(Q) = a\frac{d}{Q} + h\frac{Q}{2}.$$

Мінімізуючи середні витрати $AC(Q)$ при Q > 0, ми отримаємо: оптимальний розмір замовлення (економічна кількість замовлень) $Q^* = \sqrt{2ad/h}$, що визначає необхідну кількість замовлень за одиницю часу $m^* = d/Q^* = \sqrt{dh/(2a)}$ і мінімальні середні витрати $AC(Q^*)$ = $2am^*$.

Приклад 3.1. Магазин одягу пропонує колекцію сорочок, щороку в магазині продається 1500 сорочок. Зберігання сорочки на складі компанії коштує 120 грн на рік, а фіксована вартість замовлення становить 50 грн. Обчислимо оптимальний розмір замовлення: $Q^* = \sqrt{2 \cdot 1500 \cdot 50/120} = 35{,}4$. Тобто ідеальний розмір замовлення для мінімізації витрат і задоволення попиту клієнтів – трохи більше 35 сорочок.

Формула оптимального розміру замовлення передбачає, що споживчий попит є постійним. Розрахунок також передбачає, що витрати на замовлення та зберігання залишаються незмінними. Цей факт робить складним або неможливим для формули врахування факторів, таких як зміна споживчого попиту, сезонні зміни витрат на запаси, втрачений дохід від продажів через нестачу запасів або знижки на покупку, які компанія може отримати при купівлі запасів у більшій кількості. Але формула є досить корисною, оскільки допомагає компаніям приймати більш ефективні рішення щодо управління запасами, враховує час повторного замовлення, витрати на розміщення замовлення та витрати на зберігання товарів.

Метою формули є визначення оптимальної кількості одиниць продукції для замовлення. Формулу оптимального розміру замовлення можна змінити для визначення різних рівнів виробництва або інтервалів замовлення, а корпорації з великими поставками і високими змінними витратами використовують алгоритм у своєму програмному забезпеченні. Формула є важливим інструментом грошових потоків: може допомогти компанії контролювати суму готівки, яка зберігається в залишку запасів. Для багатьох компаній запаси є найбільшим активом, і ці підприємства повинні мати достатній запас для задоволення потреб клієнтів. Якщо економічна кількість замовлень може допомогти мінімізувати рівень запасів, заощадження готівки можна використати для інших бізнес-цілей або інвестицій. Формула визначає точку повторного замовлення запасів компанії. Коли запаси падають до певного рівня, формула EOQ, якщо її застосувати до бізнес-процесів, викликає необхідність розмістити замовлення на більше одиниць. Визначаючи точку повторного замовлення, компанія уникає вичерпання запасів і може продовжувати виконувати замовлення клієнтів. Якщо в компанії закінчуються запаси, виникає вартість дефіциту, яка є втраченим доходом через те, що компанія не має достатньої кількості запасів для виконання замовлення. Нестача запасів також може означати, що компанія втрачає клієнта або клієнт буде замовляти менше в майбутньому.

Розглянемо задачу керування запасами (N, d, h, a) для множини фірм $N = \{1, \dots, n\}$, вектор $d \in \mathbb{R}^N_{++}$ – вектор рівнів попиту, вектор $h \in \mathbb{R}^N_{++}$ – вектор витрат на зберігання товарів, загальна вартість замовлення дорівнює $a > 0$. Q_i – кількість замовленого товару фірмою $i \in N$.

Нашою метою є синхронізація роботи фірм і одночасніть замовлень. Розглянемо дві фірми. Припустимо, що друга має довший цикл, ніж перша. Тоді загальні витрати зменшаться, якщо друга фірма зменшить довжину свого циклу до довжини першої фірми. Витрати на замовлення зменшаться. Оскільки зменшиться і кількість замовлень, зменшаться витрати на зберігання товару для другої фірми, для першої все залишиться без змін.

Для кожної з фірм $i \in N$ довжина циклу дорівнює $Q_i / \, d_i$. Тому в оптимумі маємо, що

$$Q_i = \frac{d_i}{d_1} Q_1,$$

для всіх $i \in N$. Використовуючи ці формули отримаємо середні витрати для кожної фірми за одиницю часу:

$$AC(Q_1, \dots, Q_n) = a\frac{d_1}{Q_1} + \sum_{i \epsilon N} h_i \frac{Q_i}{2} = a\frac{d_1}{Q_1} + \frac{Q_1}{2d_1}\sum_{i \epsilon N} h_i \, d_i$$

або

$$AC(Q_1) = a\frac{d_1}{Q_1} + \frac{Q_1}{2d_1}\sum_{i \epsilon N} h_i \, d_i$$

Мінімізуючи останню рівність по Q_1, отримаємо оптимальний рівень замовлень для кожної з фірм

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2ad_i^2}{\sum_{j \in N} d_j h_j}}$$

і оптимальну кількість замовлень за одиницю часу

$$m_N = \frac{d_i}{Q_i^*} = \sqrt{\frac{\sum_{j \in N} d_j h_j}{2a}} = \sqrt{\sum_{j \in N} m_j^2}$$

і мінімальні середні витрати

$$AC(Q_1^*) = 2am_N$$

Оптимальні витрати на замовлення і витрати на зберігання однакові і становлять am_N. Варто зауважити, що мінімальні витрати залежать тільки від a і від m_i.

Тому для обчислення мінімальних витрат, достатньо, щоб кожна з фірм $i \in N$ вказувала своє оптимальне значення m_i, а не параметри d_i і h_i.

З огляду на останні зауваження, з задачі керування запасами можемо виключити параметри d і h. В результаті, задача керування запасами визначається трійкою (N, a, m), де $m \in \mathbb{R}^N_{++}$. Якщо коаліції S будуть кооперуватися, то їхня оптимальна вартість замовлення $a\sqrt{\sum_{i \in S} m_i^2}$, для кожної коаліції $S \subset N$.

Теорема 3.1. Нехай (N, a, m) – задача керування запасами і нехай (N, c_0) – відповідна гра керування запасами. Тоді (N, c_0) – увігнута і монотонна.

Ігри керування запасами є замкненими відносно невід'ємного скалярного множення, але не є замкненими відносно додавання. Визначимо правило розподілу витрат за замовлення (правило пропорційності):

$$\pi_i(c_0) = \frac{b(\{i\})}{b(N)} = \frac{am_i^2}{\sqrt{\sum_{j \in N} m_j^2}}$$

для всіх $i \in N$.

Теорема 3.2. Нехай (N, c_0) –гра керування запасами. Тоді існує монотонна схема розподілу $y = \{y_{iS}\}$, $i \in S$, $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, $y_{iN} = \pi_i(c_0)$ для всіх $i \in N$.

Доведення. Для всіх $i \in S$, $S \subset N$, $S \neq \emptyset$ визначимо

$$y_{iS} = \frac{am_i^2}{\sqrt{\sum_{j \in N} m_j^2}}$$

Тоді, для всіх $S \subset N$, $S \neq \emptyset$

$$\sum_{i\in S} y_{iS} = \sum_{i\in S} \frac{am_i^2}{\sqrt{\sum_{j\in s} m_j^2}} = a\sqrt{\sum_{j\in S} m_i^2} = c_0(S)$$

і для всіх $S, T \subset N,$ таких, що $S \neq \emptyset$ і $S \subset T$ і для всіх $i \in S$

$$y_{iS} = \frac{am_i^2}{\sqrt{\sum_{j\in S} m_j^2}} \geq \frac{am_i^2}{\sqrt{\sum_{j\in T} m_j^2}} = y_{iT}$$

Зокрема, маємо $y_{iN} = \pi_i(c_0)$ для всіх $i \in N$, тому правило пропорційності визначає основний елемент. ■

Правило пропорційності володіє властивістю монотонності.

Означення 3.1. Правило розподілу витрат за замовлення є монотонним, якщо для всіх ігор керування запасами (N, c_0) і $(N, \bar{c}_0)$ справедливою є нерівність $c_0(N)f_i(c_0) \geq \bar{c}_0(N)f_i(\bar{c}_0)$ при $c_0(\{i\}) \geq \bar{c}_0(\{i\})$.

Теорема 3.3. Правило розподілу витрат за замовлення є єдиними правилом розподілу витрат з класу ігор визначення вартості замовлення, яке задовольняє властивості ефективності і монотонності.

4 Задача банкрутства з-понад одним капіталом

Розглянемо множину агентів, кожен з яких володіє певною сумою готівки. Їхні минулі економічні операції призвели до ситуації, в якій агенти мають невід’ємні вимоги один до одного. Припускаємо, що ці позови відомі, законні та виправдані. Крім того, кожен агент має певний невід’ємний рівень готівки або грошовий резерв, за допомогою якого він може (частково) розрахуватися зі своїми можливими боржниками. Припускаючи, що агенти хочуть оплатити свої борги, як справедливо розподілити загальну доступну суму готівки між агентами?

Щоб змоделювати задачу банкрутства з-понад одним капіталом, розглянемо мережевий підхід, а саме: як модель розподілу потоку можна використовувати для опису задачі банкрутства з-понад одним капіталом. Розглянемо множину капіталів $M = \{1, \dots, m\}$ і множину позивачів $N = \{1, \dots, n\}$. Множині M відповідають проміжні вузли (капітали). Множині N відповідають кінцеві вузли (позивачі). Множину всіх вузлів позначимо $V = \{s\} \cup M \cup N$, де s – вузол-джерело. Вузли пов'язані між собою дугами $E \subseteq V \times V$. Орієнтовні дуги $(i; j)$ $(i \rightarrow j)$ є впорядкованими парами $(i; j)$ зі скінченною пропускною здатністю k_{ij}. Дуга може належати до одного з трьох видів:

1. $i = s$ і $j \in M$. Тут $(i; j)$ відображає частину спадкової майнової маси, яку не вимагають власники капіталів з $M \setminus \{j\}$. Будемо вважати, що майнова маса – це готівка. Проте на практиці вона може набувати різної форми. Значення цієї майнової маси визначено екзогенно і задається пропускною здатністю k_{ij} дуги;
2. $i \in M$ і $j \in N$. Тут k_{ij} – це розмір $j -$ го позову на $i -$ ий капітал;
3. $i \in M$ і $j \in M$. Тут k_{ij} – це розмір $j -$ го позову на $i -$ ий капітал.

Приклад 4.1. Розглянемо задачу банкрутства з двома капіталами і трьома позивачами. Капітал 1 становить $E_1 = 80$, капітал 2 – $E_2 = 110$. Власник капіталу 1 має позов на суму 70 до власника капіталу 2. На перший капітал є позов $d_1 = 60$, $d_2 = 70$, $d_3 = 90$. Знайдемо можливі розв'язки даної задачі банкрутства.

Поділимо капітал $E_2 = 110$ між позивачами 1 і 3 та власником капіталу E_1. Використаємо пропорційне правило, згідно з яким капітал ділиться між позивачами пропорційно до розмірів їхніх позовів.

$$PR_i(E, d) = \frac{d_i}{D} E$$

для всіх $i \in N$.

Розподіл капіталу E_2: $110 \cdot (\frac{70}{70+90+70}; \frac{90}{70+90+70}; \frac{70}{70+90+70}) = (33{,}5;\ 43;\ 33{,}5)$. Власник капіталу E_1 отримує 33,5. Розприділяємо 113,5 = між першим і другим позивачем: $(\frac{60}{100+60}; \frac{100}{100+60}) = (42{,}6;\ 70{,}9)$. Загальна сума нагод для трьох позивачів така: (76,1; 70,9; 43).

На прикладі 3.1 можна побачити, що розподіл капіталів у задачі банкрутства можна розглядати як потік у мережі. Потік – функція $f\colon E \to \mathbb{R}_+$, де f_{ij} – потік із вузла i в j. Нехай V – множина вузлів мережі і $P \subset V$, $Q \subset V$, тоді множина дуг з множини P в множину Q:

$$(P, Q) \coloneqq \{(p, q) \in E \mid p \in P, q \in Q\}$$

Потік з P у Q визначимо так:

$$f(P, Q) \coloneqq \sum_{(p,q)\in(P,Q)} f_{pq}$$

і пропускну здатність визначимо аналогічно:

$$k(P, Q) \coloneqq \sum_{(p,q)\in(P,Q)} k_{pq}$$

Чистий потік у вузол $i \in V$:

$$net(f, i) = f(V, \{i\}) - f(\{i\}, V)$$

Щоб потік f був допустимим, мають виконуватись такі умови: напрям потоку з початкового вузла у кінцеві; для проміжних вузлів (власність, капітал) вхідний потік має дорівнювати вихідному; потік не може йти в зворотному напрямку (має бути невід'ємним). Не повинна порушуватись пропускна здатність дуги, тобто:

$$0 \le f_{ij} \le k_j, (i, j) \in E$$

Пропускна здатність дуги, у контексті задачі банкрутства, відображає величину позову. Тому позивач не може отримати більше, ніж його вимога. Нехай F – множина допустимих потоків і нехай

$$\mathrm{X} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_i = net(f, i), \forall i \in N, f \in F\}$$

– множина потоків відповідних допустимим потокам. Для кожної з множин $S \subseteq N$, нехай загальний чистий вхідний потік у множину вузлів S визначається так:

$$net(f,S) = \sum_{i\in S} net(f,i) = f(V,S) - f(S,V)$$

Тоді множину максимальних потоків визначимо формулою:

$$F^* \coloneqq \{\, f \in F\colon net(f,N) \geq net(f',N), \forall f' \in F\},$$

Тобто F^*– множина потоків, для яких загальний чистий потік у кінцеві вузли є максимальним. Відповідна множина допустимих розподілів:

$$\mathrm{X}^* = \{x \in \mathbb{R}^N | x_i = net(f,i), \forall i \in N, f \in F^*\} \qquad [14].$$

Елементи з множини X^* вибиратимемо як допустимий розподіл відповідно до термінології задач банкрутства з одним капіталом. Враховуючи обмеження із-за обмеженого капіталу, знаємо, що загальна сума присудженої компенсації максимальна. З додаткового обмеження, знаємо, що жодному позивачу не може бути присуджено більше, ніж він вимагав. В прикладі 3.1 розподіл (76,1; 70,9; 43) − допустимий розподіл.

Приклад 4.2. Знайдемо можливі розв’язки задачі банкрутства з прикладу 3.1, методом поділу задачі на дві підзадачі.

CEA-поділ. Перша підзадача: поділимо капітал $E_2 = 110$ між позивачами 1 і 3 та власником капіталу E_1. Відповідно $d_1 = 70$, $d_3 = 90$, $d_{e_1} = 70$. Знайдемо розв’язок рівняння $\sum_{i=1,3} min\{d_i,\lambda\}$ + $min\{d_{e_1},\lambda\}$ = 110

$$min\{70,\lambda\} + min\{90,\lambda\} + min\{70,\lambda\} = 110$$

$$\lambda < 70\colon\ \lambda + \lambda + \lambda = 100$$

$$\lambda^* = 36{,}7$$

$$CEA_i(E,D) = min\{d_i\,, 36{,}7\}, \forall i \in \{1, 3, e_1\,\}$$

$$CEA(E,D) = (36{,}7;\ 36{,}7;\ 36{,}7)$$

Друга підзадача: поділимо капітал $80 + 36{,}7$ між позивачами 1 і 2. Відповідно $d_1 = 60$, $d_2 = 100$. Знайдемо розв’язок рівняння $\sum_{i=1,2} min\{d_i,\lambda\}$ = 116,7

$$min\{60, \lambda\} + min\{100, \lambda\} = 80 + 36{,}7$$

$$\lambda < 60: \; \lambda + \lambda = 116{,}7$$

$$\lambda^* = 58{,}3$$

$$CEA_i(E, D) = min\{d_i \,, 58{,}3\}, \forall i \in \{1, 2\}$$

$$CEA(E, D) = (58{,}3; \; 58{,}3)$$

Додавши відповідні розв'язки першої і другої підзадач, отримаємо розподіл капіталів $x = (95; 58{,}3; 36{,}7)$.

CEL-поділ. Розглянемо першу підзадачу і знайдемо її розв'язок. Розв'яжемо рівняння $\sum_{i=1,3} max\{0; d_i - \lambda\}$ + $max\{0; 70 - \lambda\} = 110$, $\lambda^* = 40$.

$$CEL_i(E, D) = \; max\{0; d_i - 40\}, \forall i \in \{1, 3, e_1\}$$

$CEL(E, D)$ =(30, 50, 30).

Розглянемо другу підзадачу: капітал $E_1 = 80 + 30$ розділимо між першим і другим позивачами з вимогами $d_1 = 60$, $d_2 = 100$ відповідно. З рівняння $\sum_{i=1,2} max\{0; d_i - \lambda\} = 110$, отримаємо, що $\lambda^* = 25$ і

$$CEL_i(E, D) = max\{0; d_i - 40\}, \forall i \in \{1, 2\}$$

$$CEL(E, D) = (35; 75).$$

В результаті, розподіл капіталів такий $x = (65; 75; 50)$.

AM –правило (правило Аумана-Машлера). Перша підзадача: поділимо капітал $E_2 = 110$ між позивачами 1 і 3 та власником капіталу E_1. Відповідно $d_1 = 70$, $d_3 = 90$, $d_{e_1} = 70$. Оскільки капітал є меншим половини суми всіх вимог, то знайдемо розв'язок рівняння $\sum_{i=1,3} min\left\{\frac{1}{2} d_i, \lambda\right\}$ + $min\left\{\frac{70}{2}, \lambda\right\}$ = 110

$$min\{35, \lambda\} + min\{45, \lambda\} + min\{35, \lambda\} = 110$$

$$\lambda < 35: \; \lambda + \lambda + \lambda = 110$$

$$\lambda = 36{,}7 > 35$$

$$35 < \lambda < 45: 35 + \lambda + 35 = 110$$

$$\lambda^* = 40$$

$$AM_i(E, D) = min\left\{\frac{1}{2} d_i, 40\right\}, \forall i \in \{1, 3, e_1\}$$

$$AM(E,D) = (35;\ 40;\ 35)$$

Друга підзадача: поділимо капітал $115 = 80 + 35$ між позивачами 1 і 2. Відповідно $d_1 = 60$, $d_2 = 100$. Знайдемо розв'язок рівняння $\sum_{i=1,2} min\left\{\frac{1}{2}d_i, \lambda\right\} = 115$

$$min\{60, \lambda\} + min\{100, \lambda\} = 115$$

$$\lambda < 60:\ \lambda + \lambda = 115$$

$$\lambda^* = 57{,}5$$

$$AM_i(E,D) = min\left\{\frac{1}{2}d_i, 57{,}5\right\}, 58\ \forall i \in \{1, 2\ \}$$

$$AM(E,D) = (57{,}5;\ 57{,}5)$$

Додавши відповідні розв'язки першої і другої підзадач, отримаємо розподіл капіталів $x = (92{,}5; 57{,}5; 40)$.

RAM –правило (зворотне правило Аумана-Машлера). Розглянемо першу підзадачу і знайдемо її розв'язок. Розв'яжемо рівняння $\sum_{i=1,3} max\left\{0, \frac{1}{2}d_i - \lambda\right\} +$ $max\{0; 35 - \lambda\} = 110$, $\lambda^* = 1{,}7$.

$$RAM_i(E,D) = \ max\left\{0, \frac{1}{2}d_i - \lambda\right\}, \forall i \in \{1, 3, e_1\ \}$$

$RAM(E,D)$ =(33,3; 43,3; 33,3).

Розглянемо другу підзадачу: капітал $E_1 = 80 + 33{,}3$ розділимо між першим і другим позивачами з вимогами $d_1 = 60$, $d_2 = 100$ відповідно. З рівняння $\sum_{i=1,2} max\left\{0, \frac{1}{2}d_i - \lambda\right\} = 113{,}3$, отримаємо, що $\lambda^* = 25$ і

$$RAM_i(E,D) = max\left\{\frac{1}{2}d_i - 25\right\}, \forall i \in \{1, 2\ \}$$

$$RAM(E,D) = (35; 75).$$

В результаті, розподіл капіталів такий $x = (65; 75; 50)$.

Приклад 4.2. Знайдемо можливі розв'язки задачі банкрутства з прикладу 3.1, методом об'єднання капіталів і вимог. Нехай задано капітал 190, який будемо ділити між трьома позивачаии, вимоги яких дорівнюють 130, 100 і 90 відповідно.

PR-правило (пропорційне правило).

$x = 190 \cdot (\frac{130}{130+100+90}; \frac{100}{130+100+90}; \frac{90}{130+100+90}) = (77,2; 59,4; 53,4).$

CEA-поділ. Знайдемо розв'язок рівняння $\sum_{i=1}^{3} min\{d_i, \lambda\} = 190$

$$min\{130, \lambda\} + min\{100, \lambda\} + min\{90, \lambda\} = 190$$

$$\lambda < 90: \ \lambda + \lambda + \lambda = 190$$

$$\lambda^* = 63,3$$

$$CEA_i(E, D) = min\{d_i\,, 63,3\}, \forall i \in \{1, 2,3\}$$

$$CEA(E, D) = (63,3; \ 63,3; \ 63,3)$$

CEL-поділ. Розв'яжемо рівняння $\sum_{i=1}^{3} \max\{0; \ d_i - \lambda\} = 190$

$$\lambda^* = 43,3$$

$$CEL_i(E, D) = \ max\{0; d_i - 43,3\}, \forall i \in \{1, 2,3\}$$

$CEL(E, D)$ =(86,7; 56,7; 46,7).

AM −правило (правило Аумана-Машлера). Оскільки капітал є більшим половини суми всіх вимог, то знайдемо розв'язок рівняння $\sum_{i=1,3} min\left\{\frac{1}{2} d_i, \lambda\right\} = 320 - 190.$

$$min\{65, \lambda\} + min\{50, \lambda\} + min\{45, \lambda\} = 130$$

$$\lambda^* = 43,3$$

$$AM_i(E, D) = d_i - min\left\{\frac{1}{2} d_i, 43,3\right\}, \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

$$AM(E, D) = (86,7; \ 56,7; \ 46,7).$$

5 Висновки

Методи дослідження операцій, як і будь-які математичні методи, завжди тією чи іншою мірою спрощують завдання, відбиваючи часом нелінійні процеси лінійними моделями, стохастичні системи детермінованими, динамічні процеси статичними моделями і т. д.

Успішне використання дослідження операцій у теоретичних та практичних дослідженнях будь-яких систем можливе за умови існування чотирьох взаємозв'язаних факторів:

– методів конструювання оптимізаційних моделей;

– методів розв'язування оптимізаційних задач;

– методів якісного математичного аналізу;

– методів інформаційного забезпечення.

Об'єктом дослідження операцій в економіці є аналіз функціонування виробничо-господарських систем і розробка методів оптимального управління ними з використанням відповідних математичних моделей.

Математичний апарат логістики охоплює вже розглянута нами з концептуального погляду теорія дослідження операцій. Отож, логістика і дослідження операцій нероздільні і взаємодоповнювальні. Логістика постачає дослідженню операцій формулювання задач, ідеологію й економічне обґрунтування (хоча, звісно, не одна тільки логістика постачає задачі економічного змісту для дослідження операцій).

Дослідження операцій, у свою чергу, дає інструмент для розв'язання задач логістики та їхнього кількісного обґрунтування. Розвиток сучасного суспільства досяг того рівня, коли виникає нагальна потреба в розробці ефективних методів управління організаційними системами різного призначення та різних рівнів. Прикладами таких систем є окремі виробництва, галузі господарства, структури управління (військові, державні), господарські комплекси і т. ін.

Виконання безпосередніх емпіричних досліджень відповідних процесів та явищ майже неможливе з багатьох причин: вартості досліду, його унікальності, , неможливості визначити результати впливу тих чи інших чинників, обмежень у часі і т. ін. З урахуванням цих обставин емпіричні дослідження заміняються дослідженнями відповідних математичних моделей. [23]

Отже, дослідження операцій – це комплексна математична дисципліна, що займається побудовою, аналізом та застосуванням математичних моделей прийняття оптимальних рішень при проведенні операцій.

Використана література

1. Акуліч І.Л. Економіко-математичні методи та моделі. Комп'ютерні технології та рішення / І.Л. Акуліч, Є.І. Велесько, П. Ройш, В.Ф. Стрільченя. - Мінськ: БДЕУ, 2013.
2. Барвінський А.Ф., Олексів І.Я. та ін. Математичне програмування. Львів: НУ «ЛП», 2014.
3. Бартіш М. Я. Методи оптимізації: Навч. посібник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2016р.
4. Вагнер Г. Основи дослідження операцій / Г. Вагнер. Т.1-3. - М.: Світ, 2012.
5. Вентцель Є. С. Дослідження операцій. Завдання, принципи, методологія: Навч. посібник для вузів. - М.: Дрофа, 2014.
6. Вентцель Є.С. Дослідження операцій: завдання, принципи, методологія.Є.С. Вентцель. - О.: Вища школа, 2011.
7. Вітлінський В.В. Математичне програмування/В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко. - К.: КНЕУ, 2011.
8. Еддоус М. Методи прийняття рішень / М. Еддоус, Р. Стенфілд. - Х.: ЮНІТІ, 2017.
9. Єрмольєв Ю.М. Математичні методи дослідження операцій /Ю.М. Єрмольєв, І.І. Ляшко, В.С. Михалевич, В.І. Тюптя. - К.: Вища школа, 2019.
10. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: Навч. посібник. - К.: Вища школа, 2015.
11. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: збірник завдань/Ю.П. Зайченко, С.О. Шумилова. - 2-ге вид., перераб. та дод. – К.: Вища школа, 2010.
12. Карлін С. Математичні методи в теорії ігор, програмуванні та економіці. -М: Світ, 2014.

13. Катренко О. В. Дослідження операцій: Підручник. – Львів: Магнолія Плюс, 2014.

14. Козицький В. А. Математична теорія кооперативних ігор. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2016.

15. Костевич Л. С. Математичне програмування: Інформ. технології оптимальних рішень: Навч. посібник. - Мн.: Нове знання, 2013.

16. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Трішин І. М., Фрідман М. Н. Дослідження операцій в економіці: Навчальний посібник для вузів – Х.: ЮНІТІ, 2018.

17. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Трішин І. М., Фрідман М. Н. Дослідження операцій в економіці: Навч. посібник. - О.: ЮНІТІ, 2014.

18. Ларичев О. І. Теорія та методи прийняття рішень, а також Хроніка подій у Чарівних країнах: Підручник. - Х.: Логос, 2013.

19. Машина Н. І. Математичні методи в економіці: Навч. посібник. - К.: Центр навчальної літератури, 2013.

20. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурім В.М. Основи математичної економіки. -К.: Інформтехніка, 2015. .

21. Таха Х. Введення у дослідження операцій / Хемді А. Таха. - М: Вільямс, 2011.

22. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці / О.В.Ульянченко. - Х.: Гриф, 2012.

23. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування. — Львів: Світ, 2015.

24. Born P. Operatoins research games: a survey / P. Born, H. Hamers, R. Hendricks. Top. – Vol.9. – P.139 – 216