Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу

Методичні вказівки до курсу

МАТЕМАТИЧНИЙ ПРАКТИКУМ

Уклав доц. Т.С.Кудрик

гр. МТОМ-11С, МТОМ-113

Львів - 2023

1. Задача на рух для розминки

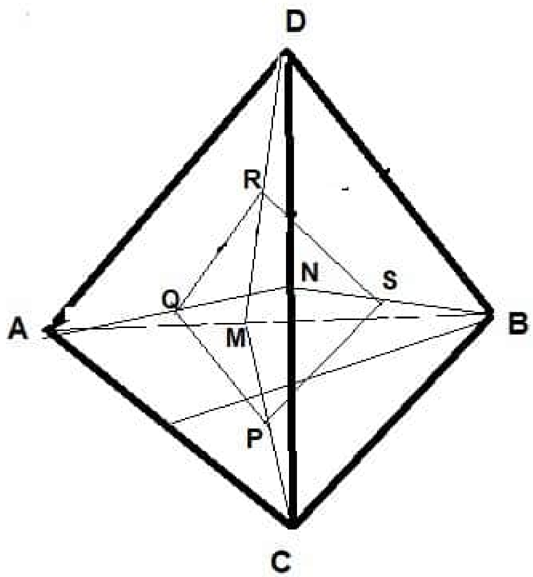
Із пункту А в пункт Б виїхав легковий автомобіль. Перші 30 хв він рухався зі швидкістю 60 км/год, потім 40 хв - 90 км/год, потім зробив зупинку на 5 хвилин, потім 20 хвилин рухався зі швидкістю 30 км/год, а весь інший час рухався зі швидкістю 90 км/год.

Із пункту Б одночасно назустріч виїхала вантажна машина. Перші 10 хв вона рухалася зі швидкістю 60 км/год, потім 20 хв - 30 км/год, потім зупинилася на 10 хв, після цього їхала зі швидкістю 60 км/год.

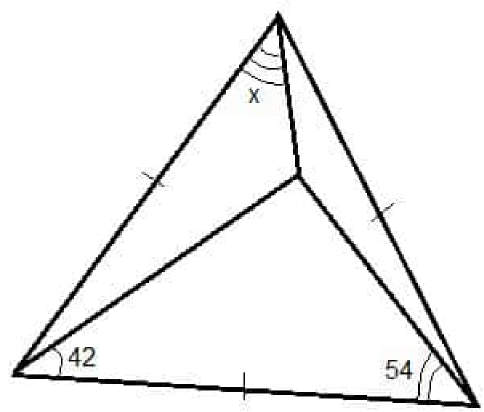
Скільки кілометрів до зустрічі проїхала кожна машина, якщо відстань від пункту А до пункт Б становить 205 км?

2. Задача про тетраедр

Нехай $ABCD$ - правильний тетраедр. M - середина AB, N - середина CD, P - середина MC, Q - середина AN, R - середина DM, S - середина NB. Довести, що $PQRS$ - паралелограм.



3. Задача про кути трикутника



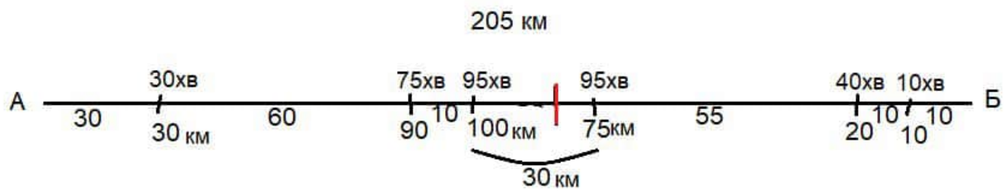
Задано рівносто-
ронний трикутник
і кути 42, 54. (град)

Знайти кут x.

Розв'язки надіслати на е-мейл taras.kudryk@lnu.edu.ua

Розв'язування задачі про рух

Покажемо "розклад руху", а потім пояснення до цього рисунка:



Розглянемо рух легкового автомобіля. Він проїхав, не враховуючи останній проміжок руху,

$$60 \cdot \frac{1}{2} + 90 \cdot \frac{2}{3} + 30 \cdot \frac{1}{3} = 30 + 60 + 10 = 100 \quad (\text{км})$$

за 95хв (30+40+5+20).

За той самий час вантажний автомобіль проїхав

$$60 \cdot \frac{1}{6} + 30 \cdot \frac{1}{3} + 60 \cdot \frac{55}{60} = 10 + 10 + 55 = 75(\text{км}).$$

(Тут враховано різницю 95-40=55(хв) для того, щоб час руху був однаковий.)

Після цього автомобілям залишилося проїхати до зустрічі

$$205 - 100 - 75 = 30(\text{км}).$$

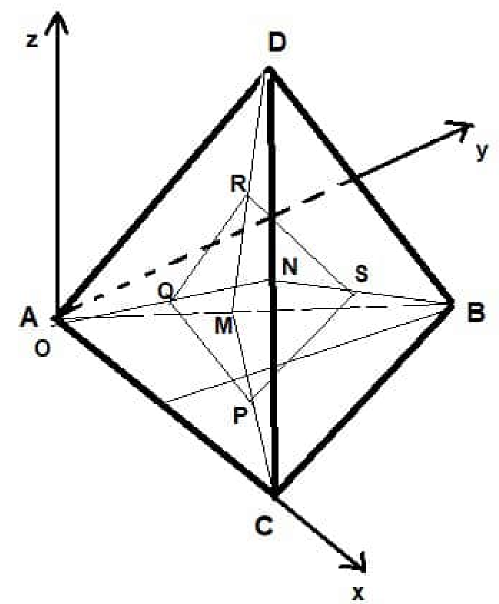
Тому зустріч відбулася за

$$\frac{30}{60+90} = \frac{1}{5}(\text{год}) = 12(\text{хв}).$$

За цей час легковий проїхав ще $90 \cdot \frac{1}{5} = 18$, а вантажний - $60 \cdot \frac{1}{5} = 12(\text{км})$.

Отже, легковий проїхав всього 100+18=118 км, а вантажний - 75+12=87 км.

Розв'язування задачі про тетраедр



Нехай у правильному тетраедрі всі ребра рівні 1. Застосуємо координатно-векторний метод. Розмістимо осі координат у тривимірному просторі так. як показано на рисунку. Нехай точка C має координати $(1,0,0)$, $A(0,0,0)$. Тоді легко обчислити, що точки B і D мають такі координати: $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, $D(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$.

Тепер легко знайти координати інших точок як середин відповідних відрізків:

$$M(\tfrac{1}{4},\tfrac{\sqrt{3}}{4},0),\qquad N(\tfrac{3}{4},\tfrac{\sqrt{3}}{12},\tfrac{1}{\sqrt{6}}),\qquad P(\tfrac{5}{8},\tfrac{\sqrt{3}}{8},0),$$

$$Q(\tfrac{3}{8},\tfrac{\sqrt{3}}{24},\tfrac{1}{2\sqrt{6}}),\qquad R(\tfrac{3}{8},\tfrac{5\sqrt{3}}{24},\tfrac{1}{\sqrt{6}}),\qquad S(\tfrac{5}{8},\tfrac{7\sqrt{3}}{24},\tfrac{1}{2\sqrt{6}}).$$

Тому $\vec{PS}=(0,\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2\sqrt{6}})$, $\quad \vec{QR}=(0,\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2\sqrt{6}})$.

Оскільки ці вектори рівні, то протилежні сторони чотирикутника $PQRS$ паралельні і рівні. Із цього випливає, що $PQRS$ - паралелограм.

Аналогічно можна обчислити

$$\vec{PQ} = (-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{\sqrt{3}}{12}, \tfrac{1}{2\sqrt{6}}), \qquad \vec{SR} = (-\tfrac{2}{8}, -\tfrac{\sqrt{3}}{12}, \tfrac{1}{2\sqrt{6}}).$$

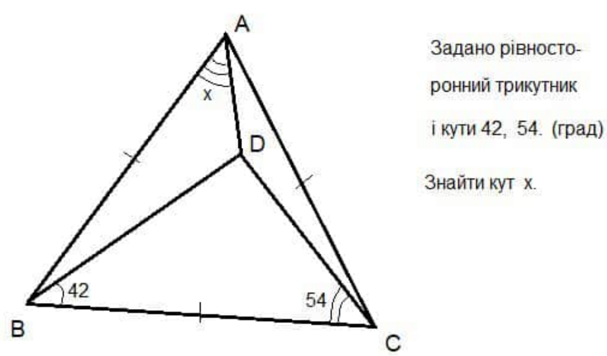
Ці вектори також рівні.

Самостійно встановити, чи можна довести твердження задачі для **довільного** тетраедра.

Розв'язування задачі про кути трикутника

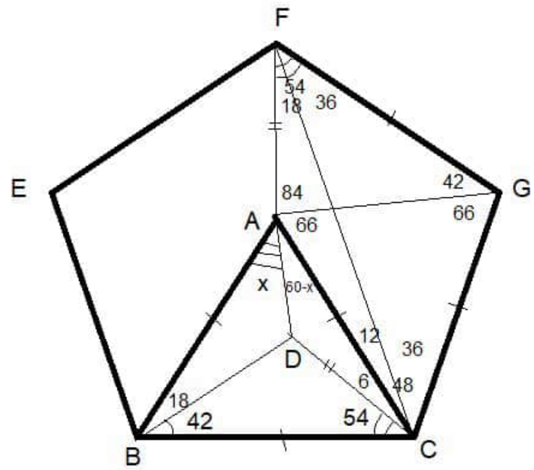
Цю задачу можна розв'язати різними способами.

1) Координатний метод. Ввести прямокутну систему координат із початком, наприклад, в лівій нижній вершині B трикутника. Нехай BC=1. Тоді A має координати $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.



Записати рівняння прямих BA, BD, CD. Знайти координати точки D перетину BD і CD. Записати рівняння прямої AD. Знайти кут між прямими AB і AD. Проте це виглядає дещо нераціонально. Можна обійтися елементарнішими знаннями з середніх класів школи.

2)



Задано рівносторонній $\triangle ABC$ і кути 42°, 54°. Знайти кут x.
Очевидно, $\angle ABD = 18$, $\angle ACD = 6$, $\angle CAD = 60 - x$.
Враховуючи, що задано кут 54, побудуємо правильний 5-кутник на стороні BC.
З'єднаємо точки A і F, A і G, F і C.

Тепер знаходимо кути.

$\angle AFG = 54$ із міркувань симетрії (тому що точки A і F проєктуються точно в середину BC; при цьому точка A не є центром 5-кутника!).

$\triangle FGC$ рівнобедрений і $\angle FGC = 108$, тому $\angle CFG = \angle FCG = 36$.

$\angle ACG = 54 - 6 = 48$, $\angle ACF = 48 - 36 = 12$, $\angle AFC = 54 - 36 = 18$.

$\triangle ACG$ рівнобедрений і $\angle ACG = 48$, тому $\angle CAG = \angle CGA = 66$.

$\angle FGA = 108 - 66 = 42$.

Розглянемо трикутники BCD і GFA. Вони рівні за стороною і двома прилеглими кутами. Тому $AF = CD$.

$\angle FAG = 180 - 54 - 42 = 84$.

Тепер розглянемо чотирикутник $AFCD$. Кути AFC і ACF рівні 18° і відрізки AF і CD рівні. Тому це є рівнобічна трапеція. (Рисунок спотворений!)

Отже, $\angle DAF = \angle ADC$. Ця рівність дає рівняння

$$84 + 66 + 60 - x = 180 - (60 - x) - 6.$$

Звідси

$$2x = 96,$$

$$x = 48^\circ.$$

3) Ще один спосіб розв'язування значно коротший, якщо знаєте теорему Чеви:

$$\sin x \sin 42 \sin 6 = \sin(60 - x) \sin 18 \sin 54.$$

(Зауваження. Це співвідношення легко довести, застосувавши теорему синусів до трикутників ABD, BCD, ACD.)

Можна перевірити, що $x = 48°$ є розв'язком цього рівняння.

(Самостійно!).

Залишається пояснити, що це рівняння не має інших розв'язків $0 < x < 60$.

Перевірка залишків знань

1. Розв'язати рівняння $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$.

2. Методом математичної індукції довести, що

$$|\sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$$

$(0 \leq x_k \leq \pi,\ k = 1, 2, \ldots, n)$.

3. Середня лінія трапеції дорівнює 10 см і ділить площу трапеції у відношенні 3:5. Знайти довжини основ цієї трапеції.

Розв'язування записати, сфотографувати і надіслати на e-mail:
taras.kudryk@lnu.edu.ua
В одному pdf-файлі або в одній папці.

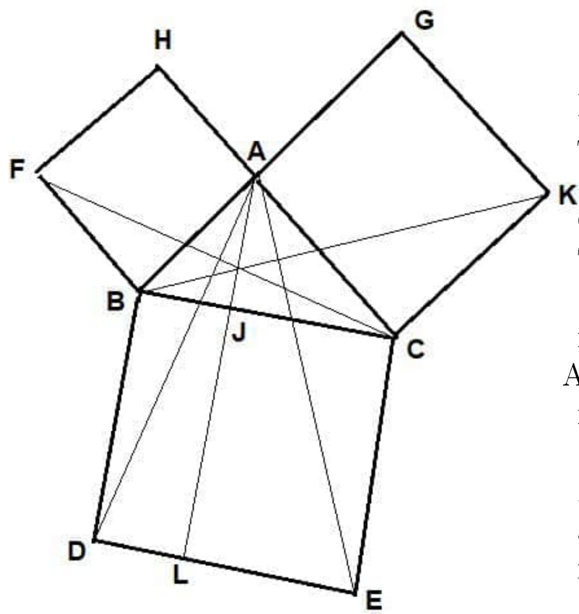
Крім цього, записати давно відомі доведення теореми Піфагора. Хоча би декілька різних елементарних способів доведення, доступних учням, які тільки починають вивчати геометрію і мають поняття про площу прямокутників, квадратів, трикутників. Можна знайти й інші доведення зі знанням про інші геометричні поняття. І також надіслати.

Різні доведення теореми Піфагора

Припускаємо, що вже відоме поняття площі простих фігур.

1. Давньогрецьке доведення того, що сума площ квадратів, побудованих на катетах прямокутного трикутника, дорівнює площі квадрата, побудованого на гіпотенузі.

Введемо такі позначення:



$\angle BAC = 90^\circ$.
Маємо, що $\angle DBC = \angle FBA$, тому $\angle DBC + \angle ABC =$
$= \angle FBA + \angle ABC$,
Отже, $\angle DBA = \angle FBC$.
Тому $\Delta ABD = \Delta FBC$ (за двома сторонами і кутом між ними).
Але ΔABD рівний половині прямокутника $BDLJ$ (BD - спільна основа, LD - висота),
а ΔFBC рівний половині $\square HFBA$, бо FB - спільна основа, AB - висота.

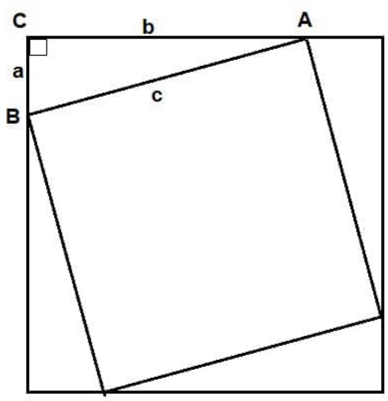
Отже, $\square HFBA$ рівновеликий прямокутнику $BDLJ$. Аналогічно доводимо, що $\square GKCA$ рівновеликий прямокутнику $CELJ$. Звідси і випливає, що сума площ квадратів, побудованих на катетах прямокутного трикутника, дорівнює площі квадрата, побудованого на гіпотенузі.

Саме це доведення теореми Піфагора мають на увазі, коли кажуть "Піфагорові штани на всі сторони рівні". У середньовічних школах це вважали дуже складним і називали його "ослячим переходом" або "втечею убогих". Для "ослів" це було непрохідне доведення і від геометрії втікали ті, хто не мав достатньої математичної підготовки.

На сайті http://etudes.ru можна побачити анімований варіант цього доведення.

2 геометричне доведення

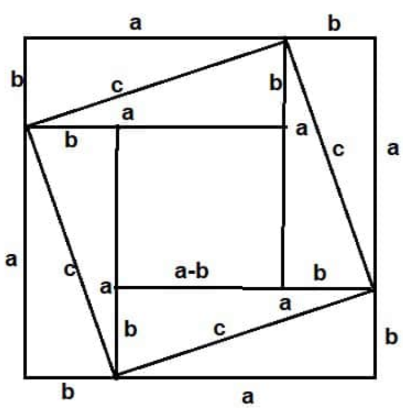
Розглянемо прямокутний трикутник ABC з катетами a, b і стороною c. Побудуємо квадрат зі стороною c і на кожній стороні квадрата побудуємо такий самий трикутник:



Утворився квадрат зі стороною $a+b$ і чотири прямокутні трикутники з катетами a і b. З одного боку, площа великого квадрата дорівнює $(a+b)^2$, а з другого $4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$. Тому $(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$ або

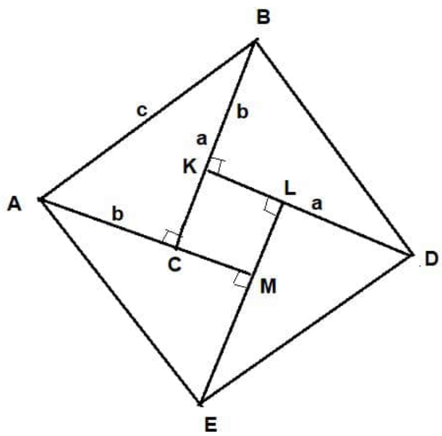
$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$, звідки $a^2 + b^2 = c^2$.

3 давньокитайське доведення



Бачимо, що
$(a+b)^2 = 8 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2$,
$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$,
$a^2 + b^2 = c^2$.

4 доведення Бхаскари

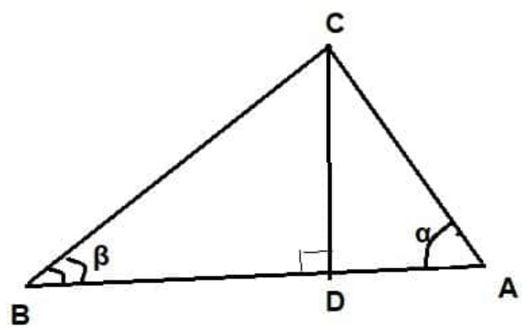


Нехай у ΔABC $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Побудуємо $\square ABDE$ як показано. Утворився $\square CKLM$ зі сторонами $a - b$. Бачимо, що

$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2$,
$c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$,

$c^2 = a^2 + b^2$.

5 доведення за властивістю подібності трикутників



У ΔABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Проведемо CD перпендикулярно до AB. Прямокутні трикутники ABC і ACD подібні за трьома кутами. За властивістю подібних трикутників їх сторони пропорційні, тобто

$$AB : AC = AC : AD,$$

звідки

$$AC^2 = AB \cdot AD. \qquad (1)$$

Трикутники ABC і CBD також подібні. Тому

$$AB : CB = CB : DB,$$

звідки

$$CB^2 = AB \cdot DB. \qquad (2)$$

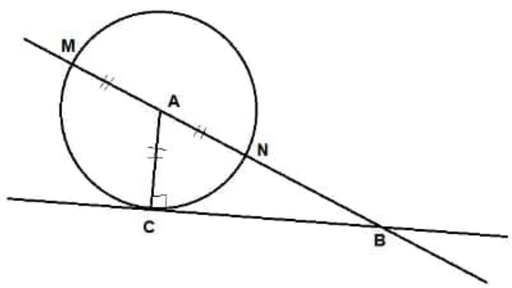
Додамо рівності (1) і (2):

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB =$$

$$= AB(AD + DB) = AB \cdot AB = AB^2.$$

6 доведення за властивістю січної та дотичної до кола, проведених з однієї точки

Нехай задано трикутник ABC, $\angle C = 90°$.



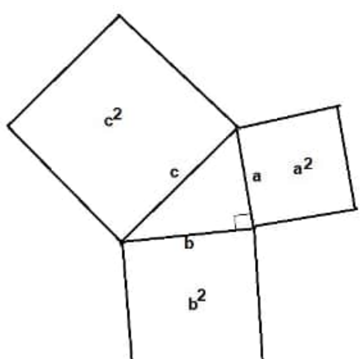
Побудуємо коло з центром у точці A і радіусом AC. Воно перетне гіпотенузу AB у точці N, а її продовження у точці M. Оскільки катет $AC \perp CB$, то CB - дотична до кола, AB - січна. За властивістю січної та дотичної, проведених до кола з однієї точки (зауваження: згадати доведення цієї властивості; якщо у ньому використано теорему Піфагора, то чого варте наше доведення?), маємо, що

$$CB^2 = BN \cdot BM = (AB - AN)(AB + AN).$$

Але $AN = AM = AC$ як радіус кола. Тому

$$CB^2 = (AB - AC)(AB + AC) = AB^2 - AC^2.$$

7 доведення узагальнююче-споглядальне

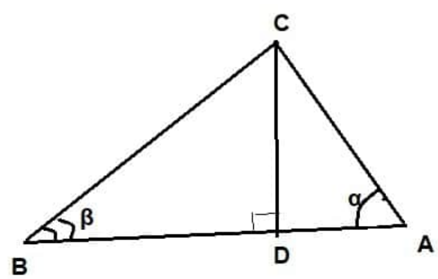


Поглянемо на задачу доведення теореми Піфагора з ширшої перспективи. Поміркуємо, чи не можна узагальнити твердження цієї теореми на довільні подібні многокутники, побудовані на сторонах прямокутного трикутника. Якщо вдасться довести те загальніше твердження, то одержимо і доведення теореми Піфагора як частковий випадок.

На перший погляд зовсім незрозуміло, як підійти до цієї складнішої проблеми.

Виникає таке запитання: чи ми не знаємо хоча би один простий частковий випадок, який легко довести? (Тут рекомендується поворушити мізками.)

Такий очевидний випадок існує! Розглянемо прямокутний трикутник ABC і опустимо з вершини C висоту CD на гіпотенузу AB:



Частковий випадок доведено! Пояснення: на цьому рисунку бачимо, що трикутники ABC (побудований на гіпотенузі AB), ACD (побудований на катеті AC) і BCD (побудований на катеті BC) подібні за трьома кутами і що площа ΔABC дорівнює сумі площ ΔACD і ΔBCD.

Залишається пояснити, як доведення загального твердження випливає із цього часткового випадку для трикутників. А це залишено для самостійної роботи.

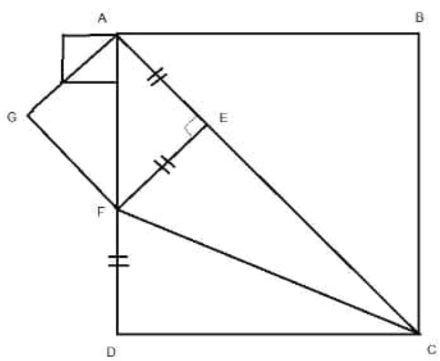
У математичній літературі відомі сотні інших доведень теореми Піфагора різного рівня складності. Тим самим знайдено багато еквівалентних тверджень.

Про ірраціональність числа $\sqrt{2}$

Практично всі студенти-математики чули таке доведення ірраціональності числа $\sqrt{2}$: якщо припустити, що $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, то тоді $2n^2 = m^2$; але остання рівність неможлива, бо її ліва частина ділиться на 2 в непарному степені, а права частина - на 2 в парному степені. Проте таку буквенну символіку придумали лише декілька сотень років тому у 16-17 століттях. Виникає запитання: а як давні греки прийшли до цього факту?

1. Давньогрецьке доведення неспівмірності сторони і діагоналі квадрата (*)

Нехай $ABCD$ - квадрат зі стороною 1. Припустимо, що існує відрізок довжини e, який вкладається деяке ціле число разів (m) в його сторону і деяке ціле число разів (n) в його діагональ.



На діагоналі AC відкладемо відрізок CE, рівний CD. Побудуємо перпендикуляр EF до перетину з AD. З'єднаємо точки F і C.

Тепер розглянемо трикутники FDC і FEC. Вони прямокутні, мають спільну гіпотенузу і однакові катети CD і CE. Тому ці трикутники рівні і, отже, $DF = FE$.

Розглянемо трикутник AEF. Він є прямокутний з кутом $DAE = 45°$, тому рівнобедрений. Отже, $FE = AE$.

Оскільки відрізок e вкладається ціле число разів у відрізки AC і $CE = CD$, то він вкладається ціле число разів і в $AE = DF$, а тому і в AF.

Проведемо FG перпендикулярно до FE і AG перпендикулярно до AE. Тоді $AEFG$ - квадрат. Ми довели, що відрізок e вкладається ціле число разів в сторону і діагональ цього квадрата.

Таку саму побудову і міркування можна повторити і побудувати ще менший квадрат і ще раз, і так далі до нескінченності. Нескінченність процесу суперечить припущенню про скінченність чисел m і n.

*) синонім - несумірності

2. Сучасніші алгебраїчні доведення

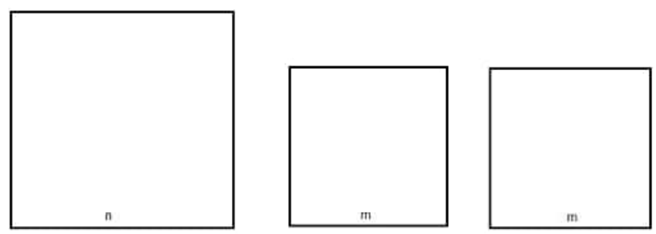
2а. Нехай $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, де p і q - взаємно прості натуральні і числа, причому $q \neq 1$. Тоді за означенням кореня $\frac{p^2}{q^2} = 2$. За припущенням p і q - взаємно прості цілі числа, тому рівність $\frac{p^2}{q^2} = 2$ суперечлива.

2б. Нехай існує таке раціональне число $r = \frac{m}{n}$, для якого $r^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$, причому дріб нескоротний. Тоді $m^2 = 2n^2$ і тому число m^2 є парним. Але тоді буде парним і число m, тому що у протилежному випадку $m = 2k+1$ і $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ - непарне число. Оскільки m - парне число, тобто $m = 2k$, то $4k^2 = 2n^2$, звідки $n^2 = 2k^2$. А це означає, що й число n парне. Отже, числа m і n є парними. Прийшли до суперечності.

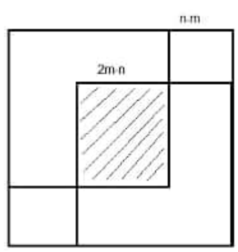
2в. Нехай $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, де p і q - взаємно прості натуральні числа. Позначимо k - найменше з чисел q таких, що $q\sqrt{2}$ - натуральне число. Тоді $k(\sqrt{2}-1)\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2}$ - також натуральне число. Оскільки $k(\sqrt{2}-1) = k\sqrt{2} - k$ - натуральне число і $k(\sqrt{2}-1) < k$, то одержали суперечність з вибором k.

3. Сучасне спрощене геометричне доведення

Нехай n і m - такі найменші цілі числа, що $n^2 = 2m^2$.
Розглянемо квадрат зі стороною n і два квадрати зі сторонами m:



Розмістимо менші квадрати на більшому так:



Суперечність!

У чому суперечність?

(Сума площ цих двох квадратів дорівнює площі великого квадрата. Квадрати частково перекриваються, а два маленькі квадрати залишилися непокриті. Одержали квадрат зі стороною $2m - n$, площа якого дорівнює сумі площ двох квадратів зі стороною $n - m$. Але бачимо, що ці числа менші від чисел n і m. Це суперечить початковому припущенню.)

4. Конструктивний спосіб доведення

Конструктивний напрям у математиці не визнає закону виключеного третього, а тому і доведення від протилежного вважають недійсними. З цієї точки зору вище у попередніх "доведеннях" ми довели, що довжина діагоналі квадрата (тобто $\sqrt{2}$) не є раціональним числом, а не те, що ця довжина має ірраціональну довжину. Розглянемо конструктивне доведення.

Для кожного раціонального числа $\frac{m}{n}$ число $2n^2$ подільне на 2 в непарному степені, а m^2 - на 2 в парному степені. Тому $|2n^2 - m^2| \geq 1$ (тут ми застосували закон виключеного третього до ефективно вирішуваного предиката на множині $\mathbb{Z}$). Оскільки десяткове розвинення числа $\sqrt{2}$ починається з $1,41$, то вважаємо, що $\frac{m}{n} \leq 1,5$. Тому

$$|\sqrt{2} - \frac{m}{n}| = \frac{|\sqrt{2} - \frac{m}{n}||\sqrt{2} + \frac{m}{n}|}{|\sqrt{2} + \frac{m}{n}|} = \left|\frac{2n^2 - m^2}{n^2(\sqrt{2} + \frac{m}{n})}\right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{2} + \frac{m}{n})} > \frac{1}{3n^2},$$

що дає чисельно змістовне доведення ірраціональності числа $\sqrt{2}$.

(Це є частковий випадок теореми Ліувілля про діофантові наближення алгебраїчних чисел.)

5. Про ірраціональне число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ мовою покриттів

Тут вважаємо факт ірраціональності $\sqrt{2}$ вже відомим. Розглянемо всі раціональні числа з $[0;1]$, за винятком нуля. Кожне число можна записати як дріб $\frac{a}{b}$, де a і b не скорочуються. Тепер уявимо число $\frac{a}{b}$ як центр інтервалу довжини $\frac{1}{2b^2}$, тобто покриємо $\frac{a}{b}$ інтервалом $(\frac{a}{b} - \frac{1}{4b^2}; \frac{a}{b} + \frac{1}{4b^2})$. Оскільки раціональні числа утворюють щільну множину (тобто в довільному інтервалі як завгодно малої довжини є раціональні числа) і оскільки сума довжин всіх покриваючих інтервалів є нескінченна (бо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{2(n+1)^2}$ розбіжний), то *видається*, що таке щедре покриття містить всі числа з $[0;1]$.

Проте ми доведемо, що число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ залишиться непокритим. Справді, число $|b^2 - 2a^2|$, будучи цілим, мусить бути принаймні 1 або більше (бо $\sqrt{2}$ - ірраціональне). Звідси маємо

$$\frac{|b^2 - 2a^2|}{2b^2} \geq \frac{1}{2b^2} \quad \Rightarrow \quad |\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{b}| \cdot |\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{b}| \geq \frac{1}{2b^2} \quad \Rightarrow$$

$$|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{b}| \geq \frac{1}{2b^2|\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{b}|} \geq \frac{1}{2b^2} \cdot \frac{1}{2}$$

(бо $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{b} < 2$). Отже, одержали, що

$$|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{b}| \geq \frac{1}{4b^2}.$$

Тому число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ не покрите жодним інтервалом вказаного вище вигляду.

6. Ще одне доведення з використанням бінома

Знову проведемо доведення від протилежного. При цьому вважаємо відомим біном Ньютона і поняття границі послідовності.

Нехай $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, причому $a, b \in \mathbb{N}$. Оскільки $1 < 2 < 4$, то зрозуміло, що $1 < \sqrt{2} < 2$. Із цього випливає, що $\sqrt{2} - 1 < 1$, що знадобиться нам нижче.

Тепер розглянемо $2n$-й степінь різниці $\sqrt{2} - 1 < 1$ із довільним натуральним n:

$$(\sqrt{2} - 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (\sqrt{2})^k (-1)^{2n-k} =$$

(розіб'ємо суму на дві суми по парних і непарних k)

$$= \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} 2^k - \sqrt{2} \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1} 2^{k-1} =$$

(записані суми являють собою натуральні числа)

$$= A + B\sqrt{2}, \qquad \text{де} \quad A, B \in \mathbb{Z}.$$

Тепер використаємо зроблене припущення, що $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, і одержимо

$$(\sqrt{2} - 1)^{2n} = A + \frac{Ba}{b} = \frac{Ab + Ba}{b},$$

причому зрозуміло, що $Ab + Ba \in \mathbb{Z}_+$ і що $Ab + Ba \geq 1$.

Із цього робимо висновок, що

$$(\sqrt{2} - 1)^{2n} \geq \frac{1}{b} > 0.$$

В одержаній нерівності перейдемо до границі при n, що прямує до нескінченності. При цьому число $\sqrt{2} - 1 < 1$. Тому

$$0 < \frac{1}{b} \leq \lim_{n \to \infty} (\sqrt{2} - 1)^{2n} = 0.$$

Одержали суперечність $0 < \frac{1}{b} \leq 0$.

Математичний практикум
3 задачі

1. Скільки потрібно взяти доданків суми $1+2+3+4+5+\cdots$, щоб одержати трицифрове число, яке складається із однакових цифр?

2. Коло радіуса $r=13$ см дотикається до двох суміжних сторін квадрата, довжина сторони якого дорівнює $a=18$ см. На які два відрізки коло ділить дві інші сторони квадрата?

3. В основі піраміди лежить рівнобедрений прямокутний трикутник із катетами, які дорівнюють 1. Знайти об'єм піраміди, якщо відомо, що її бічні ребра рівні між собою, а бічні грані рівновеликі (за площею).

Д.з.

1. Скільки необхідно взяти доданків суми $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$, щоб одержати трицифрове число, яке складається із однакових цифр?

2. Коло радіуса $r = 13$ см дотикається до двох суміжних сторін квадрата, довжина сторони якого дорівнює $a = 18$ см. На які два відрізки ділить коло інші дві сторони квадрата?

3. В основі піраміди лежить рівнобедрений прямокутний трикутник із катетами, які дорівнюють 1. Знайти об'єм піраміди,якщо відомо, що її бічні ребра рівні між собою, а бічні грані рівновеликі.

Розв'язок задачі 1. Нехай

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = aaa = 100a + 10a + a = 111a,$$

де $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Тоді за формулою суми n членів арифметичної прогресії

$$\frac{n(n+1)}{2} = 111 \cdot a = 3 \cdot 37 \cdot a,$$

причому числа 3 і 37 прості. Звідси одержуємо, що

$$n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a.$$

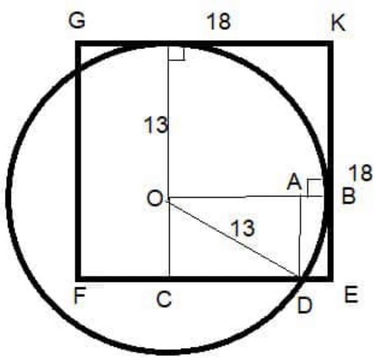
(Зауваження. Нераціонально перебирати всі можливі варіанти для числа n від 14 до 44 або всі варіанти для цифри a від 1 до 9. Зменшимо кількість можливих варіантів, використовуючи подільність добутку ліворуч.)

Число праворуч подільне на 2, 3, a, 37. Добуток $n(n+1)$ обов'язково ділиться на 2. Число n має бути таким, щоб цей добуток був подільний на 3 і на a, що не дає корисної інформації. Крім цього, n або $n+1$ повинно ділитися на 37.

Якщо $n = 37$, то сума $1 + \cdots + 37 = 19 \cdot 37 = 703 \neq aaa$.
Якщо $n = 36$, то $1 + \cdots + 36 = 18 \cdot 37 = 666 = aaa$.
При $n \geq 73$ сума прогресії вже не буде трицифровою.

Відповідь: $n = 36$.

Розв'язок задачі 2. Розглянемо квадрат KEFG і коло з центром в точці O, яке дотикається до сторін KE (у точці B) і GK, причому $KE = 18$, $OB = 13$.



$OC = AD = 18 - 13 = 5,$

$OD = 13$ за умовою,

за т.Піфагора

$OA = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$

Тому $AB = DE = OB - OA =$

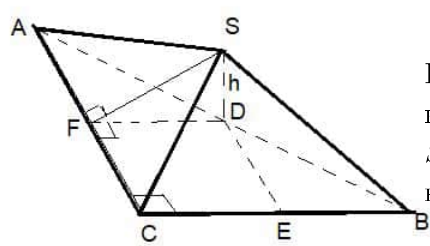
$= 13 - 12 = 1,$

$FD = FE - DE = 18 - 1 = 17.$

Відповідь: 17 і 1.

Розв'язок задачі 3. Нехай SABC - піраміда, $AC = BC = 1$, $\angle C = 90°$, $SA = SB = SC$, $S_{\Delta SAC} = S_{\Delta SBC} = S_{\Delta SAB}$. Вимагається знайти об'єм піраміди V.

Як відомо, об'єм піраміди обчислюється за формулою $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot h$.



Встановимо, де розміщена точка S - вершина піраміди. Оскільки $SA = SB = SC$, то точка S розміщена в точці перетину серединних площин до ребер AB, AC і BC.

Тому зрозуміло, що точка S розміщена точно над точкою D, яка є серединою AB. Точка S проєктується в центр кола, описаного навколо трикутника ABC.

Тепер маємо, що

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1 + 1 = 2 \;\Rightarrow\; AB = \sqrt{2}.$$

Площа основи:

$$S_{\text{осн.}} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Виразимо площі трикутників SAB і SAC через висоту $h = SD$:

$$S_{\Delta SAB} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}.$$

Нехай FD - середня лінія ΔABC. Тоді з ΔFSD маємо

$$SD^2 + FD^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = FS^2 \ \Rightarrow \ FS = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}}.$$

Тому

$$S_{\Delta SAC} = \frac{AC \cdot FS}{2} = \frac{\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}}}{2}.$$

Оскільки площі рівні, то одержуємо, що

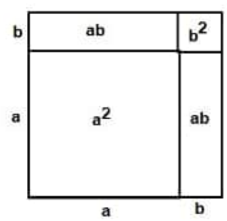
$$\sqrt{2} \cdot h = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}} \ \Rightarrow \ 2h^2 = h^2 + \frac{1}{4} \ \Rightarrow \ h = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

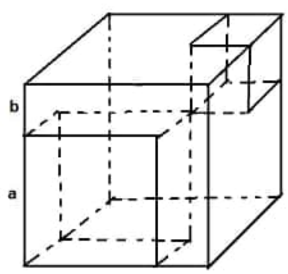
Про наочні (геометричні) доведення

Тотожність $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ при $a > 0$ і $b > 0$ має простий геометричний зміст. Розіб'ємо квадрат зі стороною $a+b$ на 2 квадрати і 2 прямокутники:



З того, що площа великого квадрата рівна сумі площ всіх цих фігур, випливає $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Тим самим способом можна пояснити тотожність $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$:



При розбитті куба, крім 2 кубів, виникли 6 паралелепіпедів.

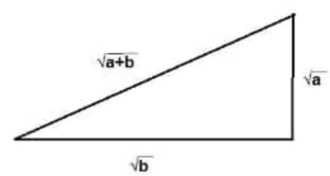
Італійський математик Кардано, виводячи свої знамениті формули, міркував так: "... якщо куб зі стороною $b = \delta + x$ розрізати площинами, паралельними до граней, на куб зі стороною δ і куб зі стороною x, одержуємо, крім двох кубів, три прямокутні паралелепіпеди зі сторонами δ, δ, x і три зі сторонами δ, x, x; тоді співвідношення між об'ємами дає $x^3 + 3x^2\delta + 3x\delta^2 + \delta^3 = b^3$; для переходу до $x^3 + 3\delta bx = b^3 - \delta^3$ паралелепіпеди різних типів попарно об'єднуються".

Так виглядала звична для нас викладка $3x^2\delta + 3x\delta^2 = 3x\delta(x+\delta) = 3x\delta b$ (з врахуванням того, що $x + \delta = b$). Перехід на алгебраїчну символіку, зокрема відкриття аналітичної геометрії, суттєво спростили міркування. Тепер студенти-першокурсники просто розв'язують задачі (часто механічно, не розуміючи геометричного змісту), багато з яких вимагали би значних зусиль у видатних математиків минулого.

Розглянемо приклади наочного доведення деяких простих (і не дуже простих) **нерівностей**.

1) Чому $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ для всіх $a, b > 0$?

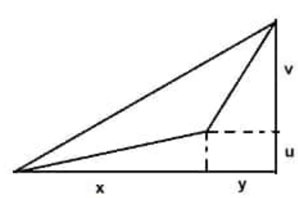
Елементарно!



(Якщо теорема Піфагора і обернена до неї вже відомі.)

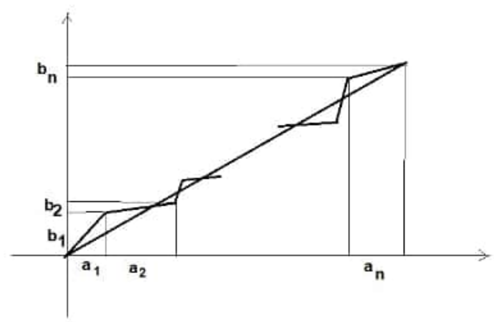
2) Чому $\sqrt{(x+y)^2 + (u+v)^2} \leq \sqrt{x^2+u^2} + \sqrt{y^2+v^2}$ для всіх $x, y, u, v > 0$?

Елементарно:

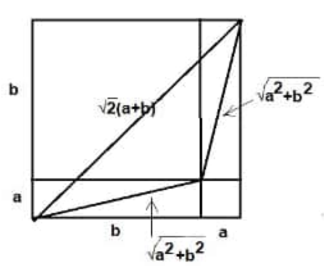


3) Аналогічно доводимо спеціальний випадок нерівності Мінковського-го:

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} :$$



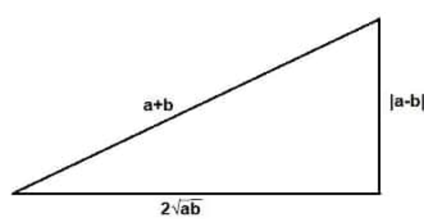
4) Доведемо нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним двох чисел.



$\sqrt{2}(a+b) \leq 2\sqrt{a^2+b^2} \leq 2(a+b)$

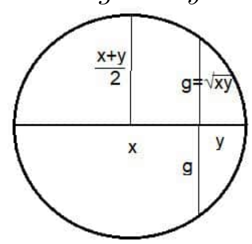
або $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

5) Середнє арифметичне не менше, ніж середнє геометричне.
Розглянемо трикутник зі сторонами
$a+b$, $|a-b|$ і $2\sqrt{ab}$.
Оскільки $(2\sqrt{ab})^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2$,
то цей трикутник прямокутний.
Отже, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.



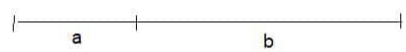
6) Інший спосіб про середнє арифметичне та середнє геометричне.

Нехай довжина діаметра кола $x+y$. Тоді довжина радіуса $\frac{x+y}{2}$. Проведемо хорду довжини $2g$ перпендикулярно до діаметра. За теоремою про хорди, що перетинаються, маємо $g^2 = xy$.

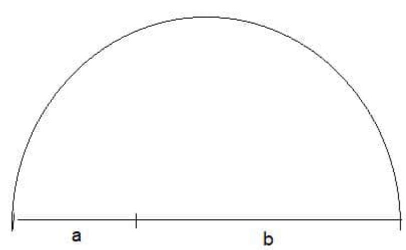


7) Ще раз про співвідношення між середніми.

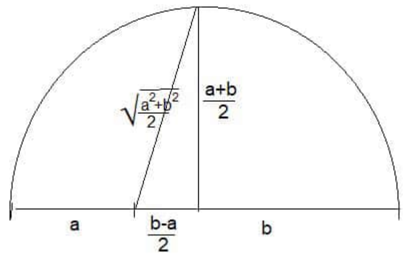
Відкладемо два відрізки довжини a і b і нехай $a < b$:



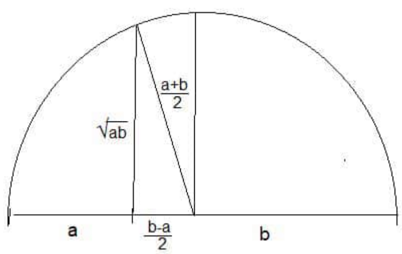
Побудуємо коло діаметра $a + b$:



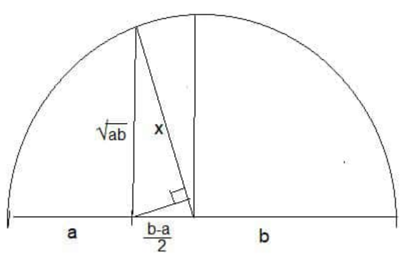
Радіус цього кола $r = \frac{a+b}{2} =$ с.арифм.(a, b). З'єднаємо точку дотику відрізків з кінцем радіуса, перпердикулярного до діаметра. Утворився прямокутний трикутник з катетами $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b-a}{2}$. Його гіпотенуза за т.Піфагора $\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{b-a}{2})^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} =$ с.квадр.(a, b).



Тепер із точки дотику відрізків проведемо перпендикуляр до діаметра і з'єднаємо точку перетину цього перпендикуляра з колом з центром кола. Утворився прямокутний трикутник з катетом $\frac{b-a}{2}$ і гіпотенузою $r = \frac{a+b}{2}$. Другий катет за т.Піфагора $\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{b-a}{2})^2} = \sqrt{ab} =$ с.геом.(a, b).



Із вершини прямого кута цього трикутника проведемо перпендикуляр до гіпотенузи і позначимо x довжину катета утвореного прямокутного трикутника.



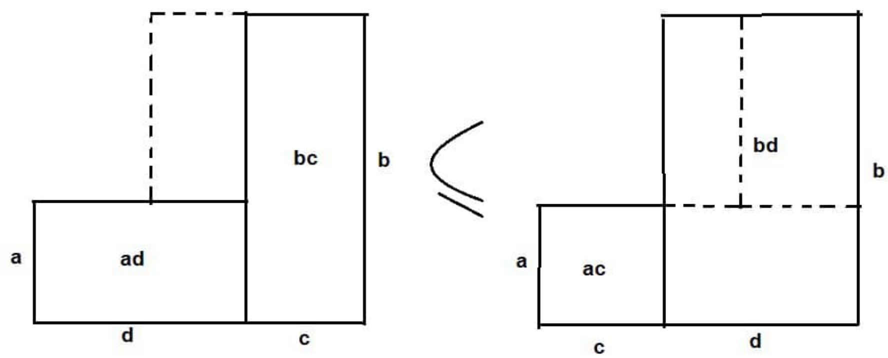
Із подібності трикутників випливає співвідношення $\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{x}{\sqrt{ab}}$, звідки $x = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} =$ с.гарм.(a, b).

Висновок:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

причому знак рівності можливий тільки при $a = b$.

8) Якщо $0 < a \leq b$ і $0 < c \leq d$, то $ad + bc \leq ac + bd$.
Справді:



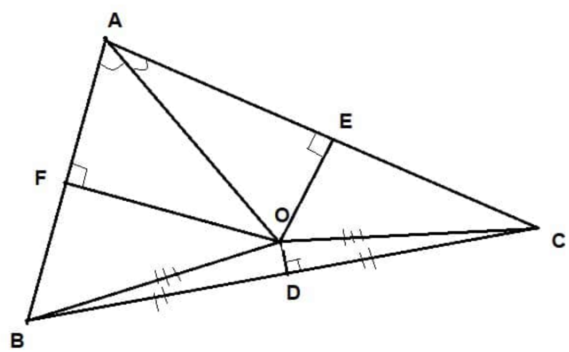
З цього випливає нерівність Чебишова.

Завдання для самостійної роботи. Згадати, знайти або придумати приклади таких геометричних наочних доведень, в яких надмірна довіра до малюнка призводить до помилки. Надіслати такі приклади до наступного понеділка, 19.00.

Про помилки в наочних доведеннях

Надмірне покладання на рисунок може призвести до помилки в геометричних доведеннях.

1. Розглянемо **довільний** трикутник ABC.

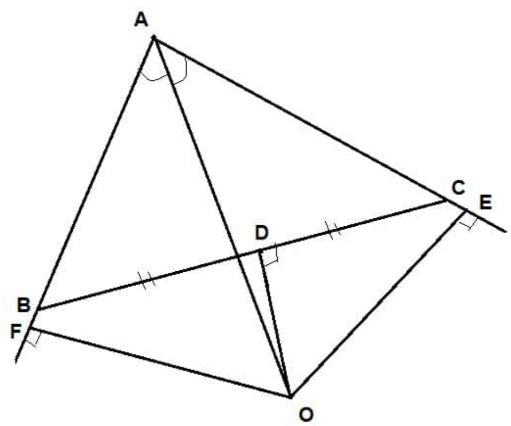


Проведемо бісектрису AO кута A і серединний перпендикуляр DO до сторони BC. Із точки O опустимо перпендикуляри на сторони AB і AC і з'єднаємо її з точками B і C. Тоді $\Delta AFO = \Delta AEO$, звідки $AF = AE$ і $FO = EO$; $\Delta BOD = \Delta COD$ і $BO = CO$. Із рівності трикутників BFO і CEO випливає, що $BF = CE$. Звідси $AB = AF + BF = AE + CE = AC$. Отже, трикутник ABC **рівнобедрений**.

Де помилка у цьому міркуванні?

Насправді точка O лежить зовні трикутника на описаному колі.

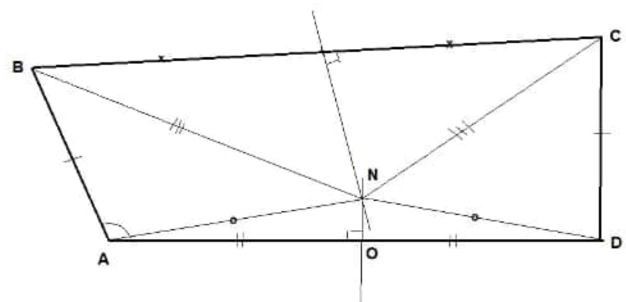
Проте рисунок (тут прямі кути спотворені, проте так часто буває на рисунках)



знову призводить до помилки!

Насправді одна з точок E і F лежить зовні, а друга всередині відповідної сторони трикутника.

2. Нехай $ABCD$ - чотирикутник, $AB = DC$, $\angle ADC = 90°$, $AD \nparallel BC$, $\angle BAD$ тупий:

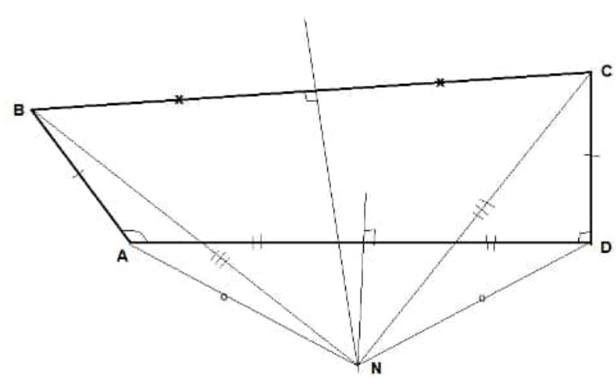


Проведемо осі симетрії сторін AD і BC. Нехай N - точка їх перетину.

Випадок 1. Нехай т. N розміщена вище AD. З'єднаємо N з вершинами чотирикутника. Точка N однаково віддалена від кінців відрізків AD і BC, тому ΔNAB і ΔNDC рівні за трьома сторонами. Тому $\angle NAB = \angle NDC$. Крім цього, $AN = DN$ і $AO = OD$, тому $\Delta NAO = \Delta NDO$, звідки $\angle NAO = \angle NDO$. Із цього випливає, що $\angle BAD = \angle CDA = 90°$.

Де помилка?

Випадок 2. Точка N розміщена нижче AD:



Міркуючи аналогічно до випадку 1, доводимо, що $\angle BAD = 90°$.

Де помилка?

Нерівності, наочні доведення і математична індукція

Для розв'язування багатьох задач із різних розділів математики надзвичайно важливими є нерівності Бернуллі, Коші, Гельдера, Мінковського, Єнсена.

1. Нерівність Бернуллі. Для довільних n чисел x_1, x_2, ..., x_n, більших від -1, виконується нерівність

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Зокрема, для кожного числа $x \geq -1$ виконується

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

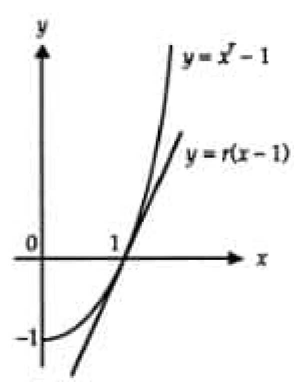
причому знак рівності можливий тільки при $x = 0$. Пропонується довести цю нерівність самостійно методом математичної індукції. Легко довести також узагальнену нерівність Бернуллі

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

для довільних $x \geq -1$ і $\alpha \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{Q}$. (Вказівка. Використати монотонність послідовності $(1+\frac{x}{n})^n$.)

Геометричне тлумачення:

$$x > 0, x \neq 1, r > 1 \Rightarrow x^r - 1 > r(x-1)$$



2. Нерівність Коші-Буняковського-Шварца. Якщо x_i, y_i - довільні дійсні числа ($i = 1, \ldots, n$), то

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

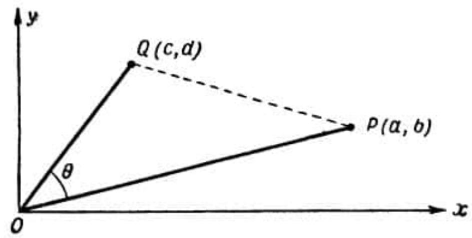
Доведемо спочатку простий двовимірний варіант цієї нерівності:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2.$$

Справді,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 =$$
$$= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \geq (ac + bd)^2.$$

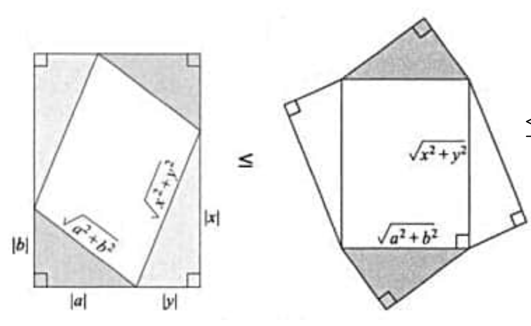
Існує геометрична інтерпретація цієї нерівності. Див. рисунок:



За теоремою косинусів маємо

$$\cos^2 \Theta = \frac{(ac + bd)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \leq 1.$$

Геометричне доведення двовимірного варіанта за допомогою спрямлення паралелограма:



$$(a + y)(b + x) = ab + xy + ax + by \leq$$
$$\leq ab + xy + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \;\Rightarrow$$
$$ax + by \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тепер доведемо нерівність Коші у загальному випадку за допомогою запровадження певного квадратного тричлена. Нехай t - дійсний параметр. Очевидно, що для всіх дійсних значень t виконується така нерівність:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i t + y_i)^2 \geq 0.$$

Розкривши дужки і змінивши порядок доданків, маємо невід'ємний квадратний тричлен щодо змінної t:

$$t^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n}x_i y_i + \sum_{i=1}^{n}y_i^2 \geq 0.$$

Тому дискримінант D цього квадратного тричлена недодатний:

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right) \leq 0,$$

що й т.б.д.

Зауважимо, що знак рівності у цій нерівності можливий тільки тоді, коли для кожного i $x_i t + y_i = 0$. Це означає, що існує таке число $\lambda \neq 0$, що $y_i = \lambda x_i$ для кожного i, тобто всі числа y_i та x_i пропорційні.

2а. Довести загальний випадок за допомогою скалярного добутку n-вимірних векторів і проєкції.

2б. Довести цю нерівність методом математичної індукції.

3. Нерівність Коші між середніми арифметичним, геометричним та гармонійним.

Нехай $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Доведемо за індукцією по n ліву частину цієї нерівності.

База індукції. При $n = 1$ нерівність перетворюється в рівність: $x_1 = x_1$, а при $n = 2$ маємо очевидну нерівність: $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$, бо $\frac{x_1+x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} = \frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{2} \geq 0$.

Крок індукції. Припустимо, що для деякого натурального числа n і довільних додатних чисел $x_1, \ldots, x_n$ виконується записана вище нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним. Розглянемо середнє арифметичне для довільних $n+1$ чисел і використаємо припущення індукції:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n \cdot \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} + x_{n+1}}{n+1} \geq$$

$$\geq \frac{n \cdot \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + x_{n+1}}{n+1}.$$

Тепер розглянемо різницю

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}}$$

і оцінимо її знизу згідно із записаною щойно нерівністю:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}} \geq$$

$$\geq \frac{n \cdot \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + x_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}} =$$

Для спрощення записів позначимо $x_1 x_2 \cdots x_n = a^{n(n+1)}$, $x_{n+1} = b^{n+1}$, де $a, b > 0$. Тоді маємо

$$= \frac{na^{n+1} + b^{n+1}}{n+1} - a^n b =$$

(перетворюємо вираз)

$$= \frac{na^{n+1} + b^{n+1} - na^n b - a^n b}{n+1} = \frac{na^n(a-b) - b(a^n - b^n)}{n+1} =$$

$$= \frac{a-b}{n+1}[na^n - ba^{n-1} - b^2 a^{n-2} - \cdots - b^n] =$$

$$= \frac{a-b}{n+1}[(a^n - ba^{n-1}) + (a^n - b^2 a^{n-2}) + \cdots (a^n - b^n)] =$$

(використаємо тотожність $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$)

$$= \frac{(a-b)^2}{n+1}[a^{n-1}+a^{n-2}(a+b)+a^{n-3}(a^2+ab+b^2)+\dots+(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})] \geq 0$$

(у всіх дужках суми додатних чисел, тому добуток невід'ємний), що й доводить крок індукції. Зауважимо, що знак рівності можливий тільки тоді, коли $a = b$, тобто за умови $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Для доведення нерівності між середнім геометричним та середнім гармонійним застосувати вже доведену нерівність до чисел $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, ... , $\frac{1}{x_n}$.

3а. Існує багато інших способів доведення цієї нерівності. Зокрема, згадаємо ще два способи.

1. Нерівність Коші можна довести як наслідок такого твердження: якщо $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ і $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, то $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$. Довести це твердження за індукцією і виснувати з нього нерівність Коші.

Підказка для тих, хто не зумів довести.

1) При $n = 1$ твердження тривіальне: якщо $x_1 = 1$, то $x_1 \geq 1$.

2) Припустимо, що це твердження виконується для будь-якого набору n чисел, де n - деяке натуральне.

Розглянемо будь-який набір з $n+1$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, причому $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n \cdot x_{n+1} = 1$.

Потрібно довести, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1$.

Якщо добуток $n+1$ чисел дорівнює одиниці, то зовсім не обов'язково серед них є n чисел, для яких добуток дорівнює одиниці. Тому на перший погляд незрозуміло, як доводити крок індукції.

Розглянемо два можливі випадки для $n+1$ чисел.

1) Всі ці числа рівні 1. Тоді їх сума дорівнює $n+1$. У цьому випадку твердження тривіальне.

2) Не всі числа рівні 1. Тоді серед них обов'язково є принаймні одне менше від одиниці і принаймні одне більше, тому що в протилежному випадку добуток не міг дорівнювати одиниці.

Перенумеруємо ці числа і припустимо, що $x_n < 1$, а $x_{n+1} > 1$.

Тепер розглянемо такий набір чисел:

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}.$$

Це n чисел і їх добуток за припущенням дорівнює 1. Тому згідно з припущенням індукції виконується нерівність

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n.$$

Додамо до обох частин цієї нерівності суму чисел x_n і x_{n+1}:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} + x_n x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1}.$$

Перенесемо доданок в праву сторону:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1}.$$

Перетворимо вираз праворуч:

$$n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} = n + 1 + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} - 1 =$$
$$= n + 1 + x_n(1 - x_{n+1}) + x_{n+1} - 1 = n + 1 + (x_n - 1)(1 - x_{n+1}).$$

За припущенням $x_n - 1 < 0$, $1 - x_{n+1} < 0$. Тому добуток цих чисел додатний.

Отже, одержуємо, що

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} > n + 1, \quad \text{що й т.б.д.}$$

Тепер підказка, як із цього твердження виснувати нерівність Коші. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - довільні додатні числа з довільним добутком. Позначимо

$$A_i = \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді маємо, що $A_1 A_2 \ldots A_n = 1$ і можемо використати доведене вище твердження для чисел $A_1, \ldots, A_n$:

$$A_1 + \cdots + A_n \geq n.$$

Остання нерівність означає, що

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

2. Розглянемо функцію $y = \log x$ на множині всіх додатних дійсних чисел. Як відомо, ця функція опукла вгору (або ж угнута, увігнута). Це означає, що для довільних $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ виконується нерівність

$$\log(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geq \frac{\log x_1 + \log x_2}{2}$$

і (що нескладно довести) для довільного $n \in \mathbb{N}$

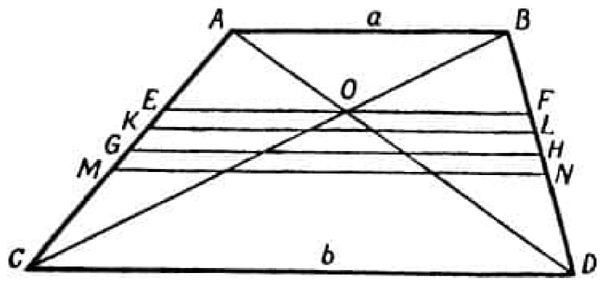
$$\log(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \geq \frac{\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n}{n}$$

(це нерівність Єнсена для логарифмічної функції). Використовуючи властивості логарифмічної функції, із останньої нерівності одержуємо, що

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

4. Геометричне тлумачення нерівності Коші для трапеції

На наступному рисунку зображено трапецію $ABDC$ із основами $AB = a$ і $CD = b$. Нехай O - точка перетину діагоналей.



Геометрична ілюстрація нерівностей

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Покажіть, що:

а) Середнє арифметичне $\frac{a+b}{2}$ двох чисел a і b можна зобразити відрізком GH, паралельним до основ трапеції, що проходить через середину її висоти.

б) Середнє геометричне $\sqrt{ab}$ цих чисел зображене відрізком KL, паралельним до основ і розтащованим так, що трапеції $ABLK$ і $KLDC$ подібні.

в) Середнє гармонійне зображене відрізком EF, який паралельний до основ і проходить через точку O.

г) Середнє квадратичне зображене відрізком MN, який паралельний до основ і розбиває трапецію $ABDC$ на дві рівновеликі трапеції.

5. Для довільних двох невід'ємних чисел Гаус визначив **арифметико-геометричне середнє** як границю двох послідовностей середніх арифметичних і середніх геометричних, що послідовно будуються, виходячи з двох заданих чисел.

6. Нескладно довести **нерівність Гельдера**, яка є узагальненням нерівності Коші:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q},$$

де a_i, b_i - довільні невід'ємні числа і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$.

7. Узагальненням відомої нерівності трикутника є **нерівність Мінковського** для невід'ємних чисел $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p},$$

де $p \geq 1$. При $p < 1$ знак нерівності протилежний.

3 задачі дом.завд.

1. Андрій і Борис виконують певну роботу разом за 2 години, Андрій і Віктор - за 3 години, а Борис і Віктор - за 4 години. За який час вони виконають цю роботу всі разом?

2. Знайти значення виразу $x^{15} + 2x^{10} + x^5$, якщо

$$x(1-x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

3. У прямокутному трикутнику гіпотенуза рівна 10 см, а висота, опущена на гіпотенузу - 6 см. Знайти площу цього трикутника.

Про елементарну геометрію і тригонометрію

1. Теорема Фалеса.
Теорема про пропорційні відрізки.

Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відсікають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відсікають рівні відрізки і на другій стороні кута.

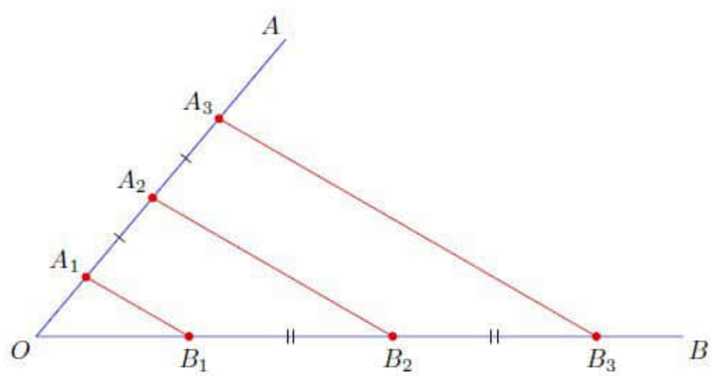


Рис. 1. Теорема Фалеса

Твердження теореми проілюстровано на рис. 1. Три паралельні прямі відсікають на стороні OA кута AOB рівні відрізки A_1A_2 і A_2A_3. Тоді на стороні OB ці прямі також відсікають рівні відрізки B_1B_2 і B_2B_3.

Доведення. Нехай паралельні прямі A_1B_1, A_2B_2 і A_3B_3 перетинають сторони кута AOB, причому $A_1A_2 = A_2A_3$ (рис. 2). Потрібно довести, що $B_1B_2 = B_2B_3$.

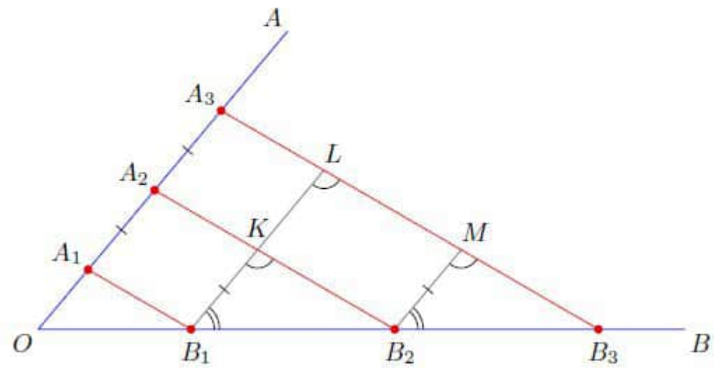


Рис. 2. **До доведення теореми Фалеса**

Проведемо B_1L і B_2M паралельно до ОА (B_1L перетинає A_2B_2 в точці К). Чотирикутники $A_1A_2KB_1$ і $A_2A_3MB_2$ — паралелограми, тому $B_1K = A_1A_2$ і $B_2M = A_2A_3$. Отже, $B_1K = B_2M$. Крім цього, кути B_1KB_2, KLM і B_2MB_3 рівні як відповідні при паралельних прямих. З тієї ж причини рівні кути KB_1B_2 і MB_2B_3. Тому трикутники B_1KB_2 і B_2MB_3 рівні за стороною і двома прилеглими до неї кутами. Із цього випливає, що $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорема Фалеса доведена.

Зауважимо, що теорема про середню лінію трикутника є простим наслідком цієї теоремы.

Найважливішим наслідком теореми Фалеса є теорема про пропорційні відрізки.

Теорема про пропорційні відрізки. Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відсікають від його сторін пропорційні відрізки.

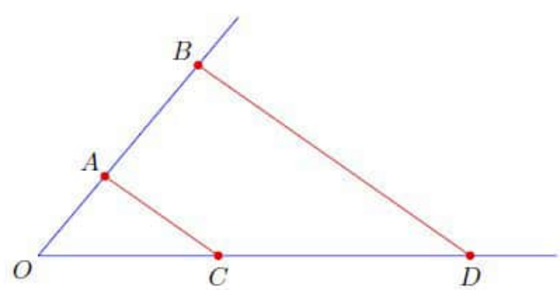


Рис. 3. $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$

Так, на рис. 3 прямі АС и BD паралельні. Твердження теореми полягає в тому, що

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \qquad (1)$$

Доведення. Припустимо, що рівність (1) не виконується. Нехай, наприклад,

$$\frac{OA}{OB} < \frac{OC}{OD},$$

тобто

$$OC > \frac{OA \cdot OD}{OB}.$$

Відкладемо на промені OD відрізок

$$OE = \frac{OA \cdot OD}{OB} \qquad (2)$$

Точка E лежить між O і C, оскільки OE < OC (рис. 4).

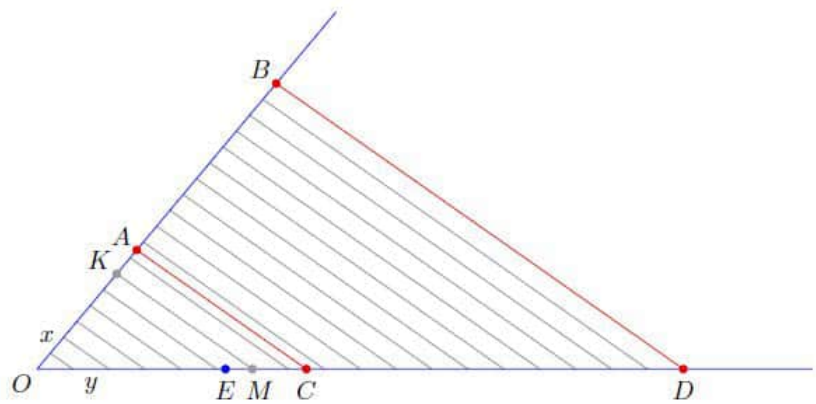


Рис. 4. До доведення теореми про пропорційні відрізки

Візьмемо натуральне число n і розіб'ємо відрізок OD на n рівних відрізків. Нехай довжина одного відрізка рівна y; тоді $OD = ny$. Через кінці цих рівних відрізків проведемо прямі, паралельні до BD. За теоремою Фалеса вони розіб'ють відрізок OB на n рівних відрізків. Позначимо x довжину кожного з одержаних відрізків; тоді $OB = nx$. Якщо взяти число n достатньо великим, всередині відрізка EC знайдуться точки розбиття відрізка OD. Нехай M — така точка і $OM = my$. Відповідна пряма перетинає OB в точці K; тоді $OK = mx$ Маємо таке:

$$\frac{OM}{OD} = \frac{my}{ny} = \frac{m}{n} = \frac{mx}{nx} = \frac{OK}{OB}.$$

Оскільки $OE < OM$ і $OK < OA$, одержуємо:

$$\frac{OE}{OD} < \frac{OM}{OD} = \frac{OK}{OB} < \frac{OA}{OB},$$

звідки

$$OE < \frac{OA \cdot OD}{OB}$$

всупереч рівності (2). Одержана суперечність доводить теорему.

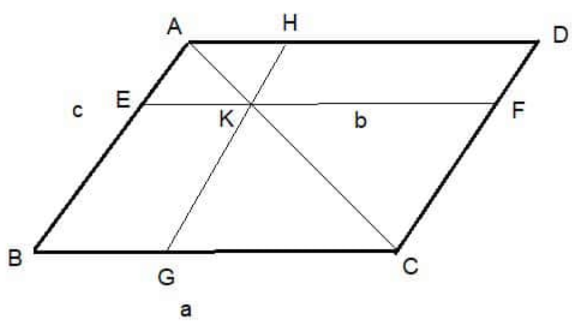
2. Про теореми синусів і косинусів

Само собою зрозуміло, що вчитель математики в будь-який момент повинен вміти пояснити учням доведення таких тверджень як теорема синусів або теорема косинусів.

У зв'язку з теоремою косинусів я хочу нагадати, що в старших класах доводять цю теорему за допомогою поняття вектора і скалярного добутку векторів. Проте тут використовується ідейно неелементарне поняття скалярного добутку, до якого в середніх класах не доросли. Бажано, щоб учні засвоювали основи тригонометрії і основні теореми без таких понять. Теорему косинусів і теорему синусів легко довести учням, які знають теорему Піфагора, мають поняття про площу, віддаль між точками і означення косинуса і синуса кута. Або володіють координатним методом.

І ще одне зауваження про аналог теореми косинусів у Евкліда.

Розгляньте малюнок



і таке твердження:

У паралелограмі доповнення паралелограмів навколо діагоналі є рівні: (пл.)$BK = DK$, бо $ABC = ADC$, $AEK = AHK$, $KGC = KFC$.

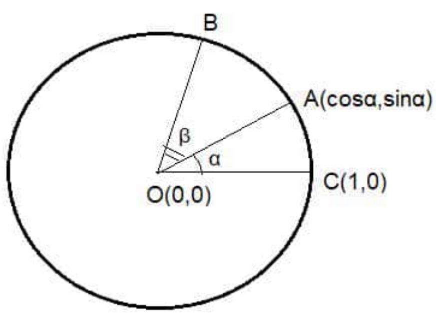
Чому це твердження еквівалентне до теореми косинусів?

3. Про косинус і синус суми кутів

.

Доведення формул суми і різниці синусів і косинусів двох кутів дають, наскільки я знаю, в підручниках з алгебри і основ аналізу, а не геометрії чи тригонометрії, що було би природніше.

Корисно дати учням таке завдання: довести ці формули координатним методом, припускаючи, що вже відомо, як записати рівняння прямих ліній і як зв'язані кутові коефіцієнти взаємно перпендикулярних прямих.



Знайти координати точки B,

тобто $\cos(\alpha+\beta)$ і $\sin(\alpha+\beta)$

(виразити через функції

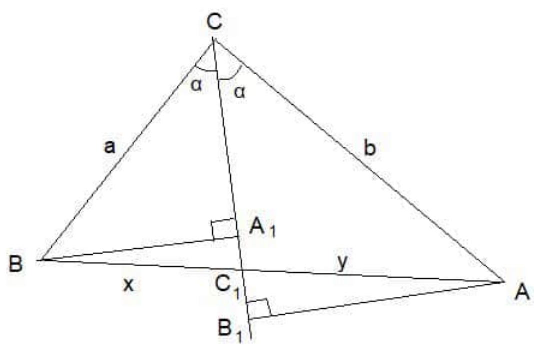
кутів α і β).

Проте такий метод доведення не охоплює всіх можливих випадків розміщення точок A і B на колі.

4. Про властивості бісектриси трикутника

Декілька способів довести властивість бісектриси трикутника.

1)



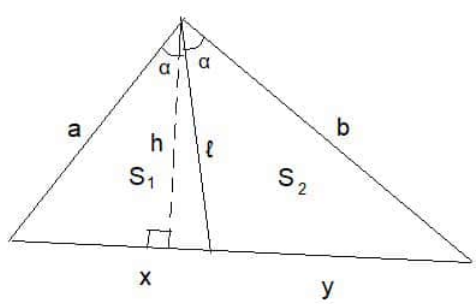
CC_1 - бісектриса кута C.
Опустимо перпендикуляри BA_1 і AB_1 на бісектрису кута C.

$\Delta BA_1C_1 \sim \Delta AB_1C_1$: $\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{BA_1}{AB_1}$,

$\Delta CBA_1 \sim \Delta CAB_1$: $\frac{CB}{CA} = \frac{BA_1}{AB_1}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$.

2)

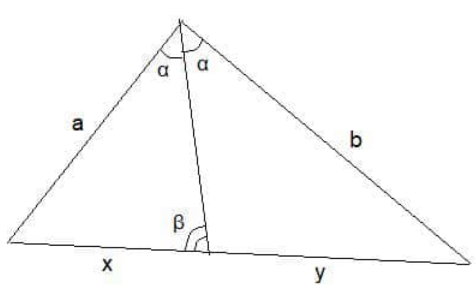


$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}a\ell\sin\alpha}{\frac{1}{2}b\ell\sin\alpha} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}xh}{\frac{1}{2}yh} = \frac{x}{y}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$.

3)



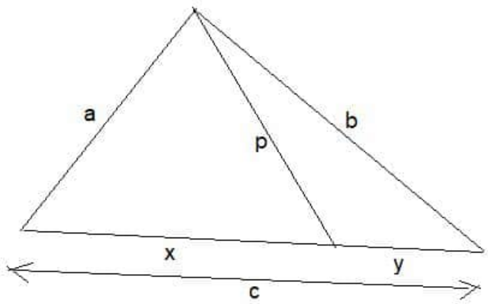
За теоремою синусів

$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{x}{\sin\alpha}.$$

$$\frac{b}{\sin(180-\beta)} = \frac{y}{\sin\alpha}.$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$

5. Теорема Стюарта та наслідки



Нехай p - довільна чевіана,

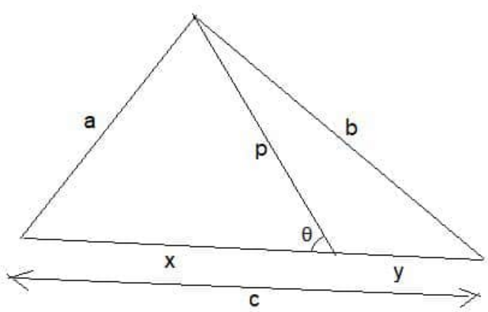
x, y - довжини утворених відрізків.

Доведемо, що

$$p^2 = \frac{a^2 y}{c} + \frac{b^2 x}{c} - xy.$$

Доведемо це твердження за допомогою теореми косинусів і за допомогою теореми Піфагора. Можна довести також координатним або векторним способом.

1-й спосіб. Позначимо кут θ, який чевіана p утворює зі стороною c:



За теоремою косинусів

$$a^2 = p^2 + x^2 - 2px\cos\theta,$$

$$b^2 = p^2 + y^2 - 2py\cos(180 - \theta) =$$

$$= p^2 + y^2 + 2py\cos\theta.$$

Першу рівність домножимо на y, а другу на x і додамо:

$$a^2y + b^2x = p^2y + p^2x + x^2y + y^2x,$$

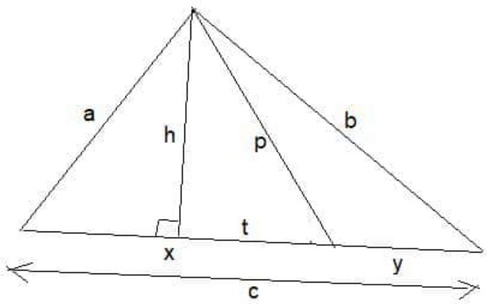
$$a^2y + b^2x = p^2(y + x) + xy(x + y),$$

$$p^2c = a^2y + b^2x - xyc.$$

Еквівалентний запис твердження теореми через площі:

$$p^2 = a^2\frac{S_2}{S} + b^2\frac{S_1}{S} - xy.$$

2-й спосіб. Опустимо висоту h на сторону c і позначимо t довжину відрізка між основами висоти і чевіани.



За теоремою Піфагора

$$a^2 = h^2 + (x - t)^2,$$

$$b^2 = h^2 + (y + t)^2,$$

$$p^2 = h^2 + t^2.$$

Тому

$$p^2 = c^2 - (x - t)^2 + t^2 = c^2 - x^2 + 2xt,$$

$$p^2 = b^2 - (y + t)^2 + t^2 = b^2 - y^2 - 2yt.$$

Першу з двох останніх рівностей домножимо на y, а другу на x і додамо:

$$p^2y = c^2y - x^2y + 2xty,$$
$$p^2x = b^2x - y^2x - 2ytx,$$
$$p^2(x + y) = a^2y + b^2x - xy(x + y),$$
$$p^2c = a^2y + b^2x - xyc.$$

Наслідок для бісектриси. Якщо чевіана p є бісектрисою, то за властивістю бісектриси $x = \frac{ay}{b}$ і $y = \frac{bx}{a}$. Тому за т.Стюарта

$$p^2 = \frac{a^2y}{c} + \frac{b^2x}{c} - xy = \frac{abx}{c} + \frac{aby}{c} - xy = \frac{ab(x + y)}{c} - xy = ab - xy,$$

Отже,

$$p^2 = ab - xy.$$

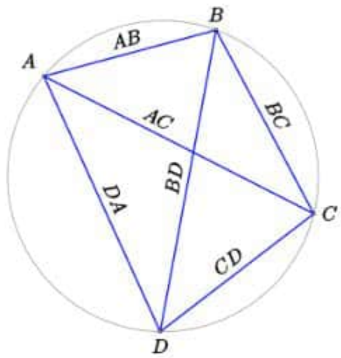
Наслідок для медіани. Якщо чевіана p є медіаною, то $x = y = \frac{c}{2}$ і

$$p^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Саме це стверджується у **теоремі Аполлонія** (яку можна довести і за теоремою косинусів):

$$a^2 + b^2 = 2(p^2 + \frac{c^2}{4}) = 2p^2 + 2x^2.$$

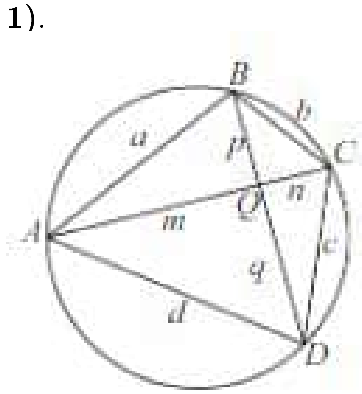
Наслідком теореми Стюарта є і **теорема Птолемея** — теорема елементарної геометрії, яка стверджує, що добуток довжин діагоналей вписаного в коло чотирикутника дорівнює сумі добутків довжин його протилежних сторін:



$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$$

Викладемо доведення теореми Птолемея: 1) як наслідку теореми Стюарта; 2) за допомогою подібних трикутників.

1).



Нехай a, b, c, d - довжини сторін AB, BC, CD і DA відповідно, AC∩BD=Q, AQ=m, QC=n, BQ=p, QD=q. Необхідно довести, що $(m+n)(p+q)=ac+bd$ або, що рівносильно, $(m+n^2)(p+q)^2=(ac+bd)^2$.

З ΔBAD і ΔBDC за т.Стюарта маємо

$$m^2+pq=a^2\frac{q}{p+q}+d^2\frac{p}{p+q} \quad \text{і} \quad n^2+pq=b^2\frac{q}{p+q}+c^2\frac{p}{p+q}.$$

Оскільки $nm=pq$ (за теоремою про хорди, що перетинаються), то додавши останні рівності, маємо

$$(m+n)^2=(a^2+b^2)\frac{q}{p+q}+(c^2+d^2)\frac{p}{p+q}.$$

З іншого боку, оскільки

$$\frac{p}{q}=\frac{S_{CBA}}{S_{ADC}}=\frac{ab\sin(CBA)}{cd\sin(ADC)}=\frac{ab}{cd}$$

(врахували, що CBA+ADC=180), то

$$\frac{p}{p+q}=\frac{\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}+1}=\frac{ab}{ab+cd}$$

і аналогічно

$$\frac{q}{p+q}=\frac{cd}{ab+cd}.$$

Звідси випливає, що

$$(m+n)^2=(a^2+b^2)\frac{cd}{ab+cd}+(c^2+d^2)\frac{ab}{ab+cd}=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}. \quad (*)$$

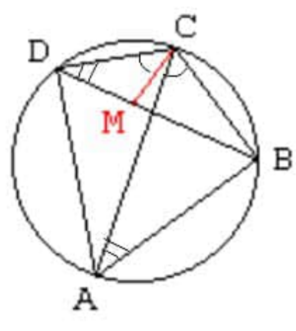
Аналогічно знаходимо, що

$$(p+q)^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}. \quad (**)$$

Тому із $(*)$ і $(**)$ одержуємо

$$(m+n^2)(p+q)^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\cdot\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}=(ac+bd)^2.$$

2). Доведемо теорему Птолемея за допомогою подібних трикутників. На діагоналі BD розмістимо точку M так, щоб кути ACB і MCD були рівні.



Оскільки кути BAC і BDC спираються на ту саму дугу, то вони рівні. Тому трикутники ABC і DMC подібні. Одержуємо CD/MD=AC/AB або AB·CD=AC·MD. Кути BCM і ACD також, очевидно, рівні. Тому трикутники BCM і ACD подібні, що дає рівність BC/BM=AC/AD або BC·AD=AC·BM. Додавши дві рівності, одержимо

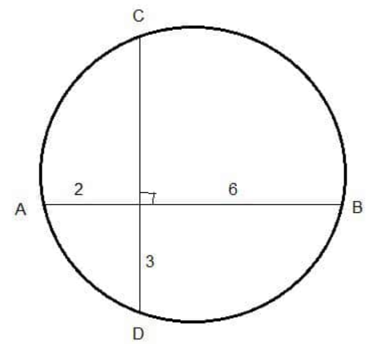
$$|AB|\cdot|CD|+|BC|\cdot|AD|=|AC|\cdot|MD|+|AC|\cdot|BM|=|AC|\cdot|BD|.$$

У тому випадку, коли AC — діаметр кола, теорема перетворюється в правило синуса суми. Саме цей наслідок Птолемей використав для складання таблиці синусів.

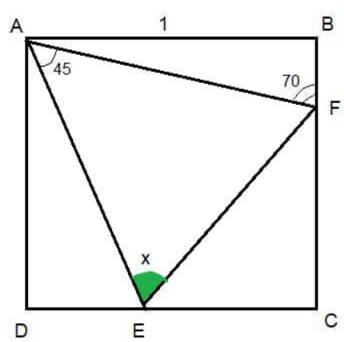
Зауважимо також, що теорема Птолемея є частковим випадком співвідношення Бретшнайдера для довільного чотирикутника.

Задачі дом.завд.

1. Проведено дві хорди кола AB і CD, які перетинаються під прямим кутом. Задано довжини трьох відрізків: 2, 3 і 6. Знайти радіус кола.



2. У квадраті $ABCD$ зі стороною 1 вибрано точку E на стороні CD і точку F на стороні BC так, шо кут EAF рівний 45°, а кут AFB - 70°. Знайти: а) величину кута AEF; б) периметр трикутника EFC.



3. Розв'язати рівняння

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1+\frac{1}{2022}\right)^{2022}.$$

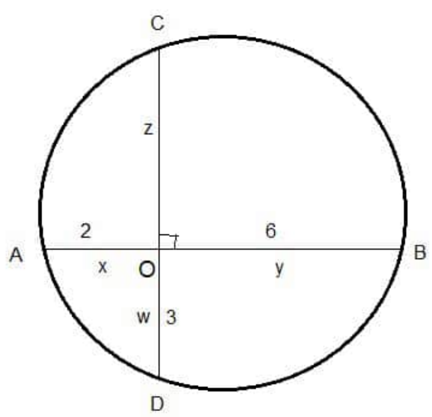
Задачі дом.завд.

2 методи розв'язування **задачі 1**:

1) запровадити координатну систему вздовж цих двох хорд; записати три рівняння, які означають, що три точки із заданими координатами належать колу; із цієї системи виключити змінні x і y і знайти радіус;

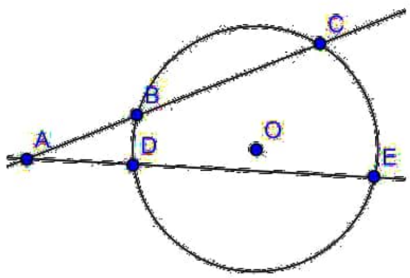
2) використати рівності $xy = zw$ (див. рисунок) і $x^2+y^2+z^2+w^2 = 4r^2$, які легко довести.

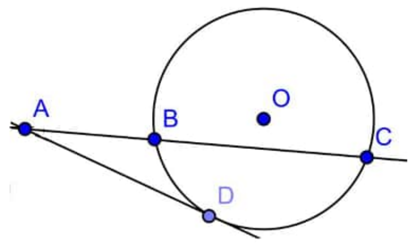
Якщо ці рівності невідомі вам, то даю вказівку. Щодо першої - це за теоремою про хорди, що перетинаються. Це легко довести за допомогою подібних трикутників. Теорема про хорди, що перетинаються, і теорема про січні, що перетинаються, є частковими випадками загальної теореми про степінь точки. Є безліч задач на ці теми, зокрема на математичних олімпіадах.



$AO \cdot BO = CO \cdot DO$,
причому кут перетину може бути довільним.

Ілюстрація до теми про січні, що перетинаються:





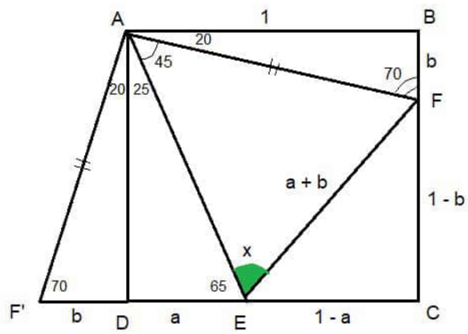
$AB \cdot AC = AD \cdot AE$ $\qquad$ $AB \cdot AC = AD^2$

Значення цих добутків називають степенем точки A щодо даного кола.

Завдання для самостійної роботи: знайти степінь точки щодо кола. Як цей степінь виражається через координати точки і радіус кола? Або як степінь виражається через відстань від точки до центра кола і його радіус?

Вказівка до **задачі 2**:

Звісно, можна використати громіздку тригонометрію. Проте існує просте геометричне розв'язування. Ідея така: вийти за межі квадрата, повернути трикутник ABF на $90°$ за рухом годинникової стрілки. Утворився трикутник ADF'.



Кути 20, 25 і 65 вже відомі за умовою задачі. Позначимо $DE = a$, $BF = b$. Розглянемо трикутники $AF'E$ і AEF. Вони рівні за двома сторонами і кутом між ними. Тому кут AEF рівний куту AEF', тобто $x = 65°$.

Крім цього, маємо рівність сторін $F'E$ і EF:

$$F'E = EF = a + b.$$

Очевидно, що $EC = 1 - a$, $FC = 1 - b$. Можемо знайти периметр трикутника EFC:

$$p = EF + EC + FC = a + b + 1 - a + 1 - b = 2.$$

Ще можна провести такий уявний експеримент: забути про кут 70 і повертати кут 45 навколо точки A. Який буде периметр трикутника EFC у крайніх (граничних) позиціях, коли трикутник вироджується в двокутник?

Вказівка до **задачі 3**.

Ліву частину рівняння виразити через $x+1$:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-(x+1)} =$$
$$= \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-(x+1)} = \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}.$$

Прирівнюючи до правої частини рівняння, бачимо, що

$$-x-1=2022,$$

звідки

$$x=-2023.$$

Розв'язування рівнянь з параметрами

Розглянемо приклади рівнянь:

Приклад 1. $ax + 31 = 0$, $ax = -31$, якщо $a = 0$,

то рівняння $ax = -31$ $(0x = -31)$, не має коренів, $a \neq 0$, $x = \frac{-31}{a}$.

Відповідь: 1) $a = 0$, $x \in \varnothing$; 2) $a \neq 0$, один корінь $x = \frac{-31}{a}$.

Приклад 2. $\frac{x^2 + ax - 2}{x+2} = x - a$, $\frac{x^2 + ax - 2 - (x+2)(x-a)}{x+2} = 0$;

$\frac{x^2 + ax - 2 - x^2 + ax - 2x + 2a}{x+2} = 0$; $\frac{2ax - 2x + 2a - 2}{x+2} = 0$;

$$\begin{cases} 2ax - 2x + 2a - 2 = 0, \\ x + 2 \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(a-1) = 1 - a, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Якщо $a = 1$, то $0x = 0$, x - будь-яке число, крім -2;

якщо $a \neq 1$, то $x = \frac{1-a}{a-1} = -1$.

Відповідь: 1) $a = 1$, x – будь-яке число; $x \neq -2$;

2) $a \neq 1$, $x = -1$.

Приклад 3. При яких значеннях параметра b має один корінь рівняння.

$2x^2 - bx + 18 = 0$ – це квадратне рівняння,

$D = b^2 - 4ac$, $D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144$,

$D = 0$, $b^2 - 144 = 0$, $b_1 = -12$, $b_2 = 12$.

Відповідь: $b_1 = -12$, $b_2 = 12$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x^2 - bx - 2b^2 = 0$.

$D = b^2 - 4ac$, $D = b^2 - 4(-2b^2)1 = b^2 + 8b^2 = 9b^2 \geq 0$. $x = \frac{b \pm 3b}{2}$.

$x = 2b$; $-b$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\frac{3x^2-6ax-a+2^{\log_2(x-a)}}{|\cos(\pi x)+1|-1}=0.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-a>0, \\ |\cos(\pi x)+1|-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>a, \\ \cos(\pi x)\neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x>a, \\ \pi x\neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>a, \\ x\neq \frac{1}{2}+n,\ n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$

Дріб дорівнює нулю, якщо чисельник дорівнює нулю:

$$3x^2-6ax-a+x-a=0,$$
$$3x^2-x(6a-1)-2a=0,$$
$$D=(6a-1)^2-4\cdot 3\cdot(-2a)=36a^2-12a+1+24a=36a^2+12a+1=(6a+1)^2.$$

Якщо $6a+1\neq 0$, тобто $a\neq -\frac{1}{6}$, то $x_1=\frac{6a-1+6a+1}{6}=2a$, $x_2=\frac{6a-1-6a-1}{6}=-\frac{1}{3}$. При цьому, враховуючи ОДЗ, $x_1=2a>a$, якщо $a>0$ і, крім цього, $2a\neq\frac{1}{2}+n$; $x_2=-\frac{1}{3}>a$, якщо $a<-\frac{1}{3}$.

Якщо $6a+1=0$, то $x=a-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$. У цьому випадку $x=-\frac{1}{3}<-\frac{1}{6}=a$.

Розглянемо числову вісь для параметра a. Із попередніх пояснень зрозуміло, що відповідь залежить від того, в якому з інтервалів $(-\infty,-\frac{1}{3})$, $[-\frac{1}{3},0]$, $(0,+\infty)$ знаходиться параметр a:

Відповідь: якщо $a\in(-\infty,-\frac{1}{3})$, то існує один корінь $x=-\frac{1}{3}$;

якщо $a\in[-\frac{1}{3},0]$ або $a=\frac{1}{4}+\frac{n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$, то коренів немає;

якщо $a\in(0,+\infty)$ і $a\neq\frac{1}{4}+\frac{n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, то є корінь $x=2a$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння четвертого степеня

$$x^4 + (2a-1)x^3 + (a^2+1)x^2 + (a^2-2a)x + a^2 = 0$$

при всіх значеннях параметра a.

Розв'язування. Перепишемо це рівняння як рівняння щодо параметра a:

$$a^2(x^2+x+1) + a(2x^3-2x) + (x^4-x^3+x^2) = 0.$$

Коефіцієнт x^2+x+1 при a^2 завжди додатний, бо $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} > 0$ для всіх значень x (і, крім того, дискримінант цього квадратного тричлена $D=-3<0$). Тому за (спрощеною) формулою коренів квадратного рівняння маємо:

$$a_{1,2} = \frac{x-x^3 \pm \sqrt{x^2+x^6-2x^4-x^6+x^5-x^4-x^5+x^4-x^3-x^4+x^3-x^2}}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{x-x^3 \pm \sqrt{-3x^4}}{x^2+x+1}.$$

Тут дискримінант $D=-3x^4$ невід'ємний тільки при $x=0$. Тоді $a_{1,2}=0$.

Отже, рівняння має розв'язок $x=0$ тільки при $a=0$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння третього степеня

$$x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + 3x + \sqrt{3} - 1 = 0.$$

Застосуємо прийом із розв'язування попереднього прикладу з параметром, хоча в заданому рівнянні немає параметра. Запровадимо параметр, позначивши $a=\sqrt{3}$. Тоді маємо таке рівняння:

$$x^3 + 2ax^2 + a^2x + a - 1 = 0.$$

Можемо вважати, що це квадратне рівняння щодо параметра a:

$$xa^2 + (2x^2+1)a + (x^3-1) = 0.$$

За формулою для коренів квадратного рівняння одержуємо

$$a = \frac{-(2x^2+1) \pm \sqrt{(2x^2+1)^2 - 4x(x^3-1)}}{2x} =$$

$$= \frac{-(2x^2+1) \pm \sqrt{4x^2+4x+1-4x^4+4x}}{2x} = \frac{-(2x^2+1) \pm (2x+1)}{2x},$$

звідки

$$a_1 = 1-x, \qquad a_2 = -\frac{x^2+x+1}{x},$$

$$x_1 = 1-a, \qquad x^2 + (a+1)x + 1 = 0,$$

$$x_{2,3} = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{a^2+2a-3}}{2}.$$

Нарешті, одержуємо

$$x_1 = 1-\sqrt{3}, \qquad x_{2,3} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{3}}).$$

Приклад 8. Чи вираз $\sqrt{m+\sqrt{m+7}}$, де $m \in \mathbb{N}$, може прийняти натуральне значення?

Позначимо $n := \sqrt{m+\sqrt{m+7}}$. Піднесемо обидві частини цієї рівності до квадрата:

$$n^2 = m + \sqrt{m+7},$$

залишимо корінь праворуч і знову піднесемо до квадрата:

$$(n^2-m)^2 = m+7,$$

$$n^4 - 2n^2m + m^2 = m+7.$$

Останню рівність перепишемо як рівняння щодо невідомої величини m:

$$m^2 - (2n^2+1)m + n^4 - 7 = 0.$$

Корені такі:

$$m_{1,2} = \frac{2n^2+1 \pm \sqrt{4n^4+4n^2+1-4n^4+28}}{2} = \frac{2n^2+1 \pm \sqrt{4n^2+29}}{2}.$$

Вираз $2n^2+1$ у чисельнику завжди непарний. Щоб дріб був цілим числом, потрібно щоб вираз з коренем був непарним числом. Тепер виникає таке запитання: чи вираз під знаком кореня може бути квадратом деякого непарного натурального числа? Іншими словами, чи існує таке непарне число p, що $4n^2+29 = p^2$? Останню рівність запишемо так: $(2n)^2+29 = p^2$. Тепер вже зрозуміло, що відповідь на запитання позитивна, причому відповідь однозначна, тобто існує єдине число p, що задовольняє цю вимогу. Це тому, що різниця між двома квадратами натуральних чисел може дорівнювати 29 тільки у випадку $p = 15$, $2n = 14$, тобто $n = 7$.

Справді, квадрати послідовних натуральних чисел такі:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, \ldots$$

Легко перевірити, що для записаних тут чисел різниця може бути 29 тільки в одному випадку, а для більших чисел різниця 29 неможлива.

При $n = 7$ знаходимо значення числа m:

$$m_{1,2} = \frac{99 \pm \sqrt{196+29}}{2} = \frac{99 \pm 15}{2},$$

$$m_1 = \frac{99-15}{2} = 42, \qquad m_2 = \frac{99+15}{2} = 57.$$

Для числа $m_1 = 42$ маємо $\sqrt{42+\sqrt{42+7}} = 7 \in \mathbb{N}$,

а для $m_2 = 57$ маємо $\sqrt{57+\sqrt{57+7}} = \sqrt{65} \notin \mathbb{N}$.

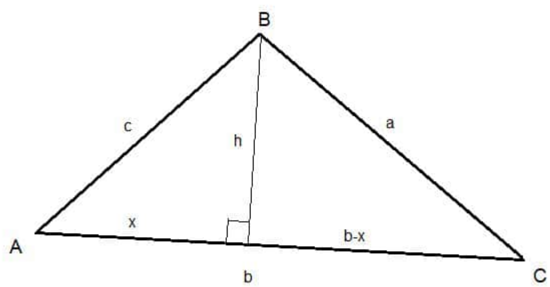
Відповідь: тільки при $m = 42$.

Про формулу Герона

Розглянемо різні підходи до доведення формули Герона для площі трикутника.

1. Елементарне доведення. Вважаємо відомою формулу для площі трикутника як півдобутку основи на висоту і теорему Піфагора.

У трикутнику ABC проведемо висоту $BH = h$ і позначимо довжини відрізків, утворених на стороні AC, x і $b - x$.



Тоді за теоремою Піфагора маємо два рівняння:

$$x^2 + h^2 = c^2,$$

$$(b - x)^2 + h^2 = a^2.$$

Віднімемо від другого рівняння перше:

$$b^2 - 2bx = a^2 - c^2,$$

звідки

$$x = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b}.$$

Знову за теоремою Піфагора

$$h = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2}}{2b} = \frac{\sqrt{(2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}}{2b} =$$

$$= \frac{\sqrt{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}}{2b}.$$

Тому

$$S = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h = \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

2. Тригонометричне доведення. Вважаємо відомою формулу для обчислення площі трикутника як півдобутку двох сторін на синус кута між ними і формулу косинусів.

Нехай дві сторони трикутника a і b, а кут між ними α. Тоді

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha.$$

Для знаходження синуса кута використаємо формулу косинусів

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha.$$

Маємо

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

звідки

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2.$$

Тому

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\alpha = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2\alpha) =$$

$$= \frac{a^2b^2}{4}\left(1 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right) = \frac{1}{16}(4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2) =$$

$$= \frac{1}{16}(2ab-a^2-b^2+c^2)(2ab+a^2+b^2-c^2) = \frac{1}{16}(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2) =$$

$$= \frac{1}{16}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c) =$$

$$= \frac{1}{16}(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)(a+b+c) =$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)\frac{a+b+c}{2}.$$

Позначимо

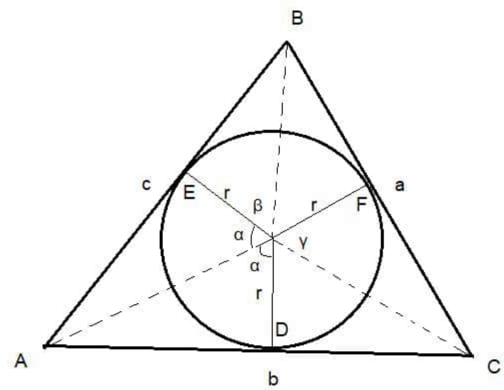
$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Тоді

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

3. Геометричний зміст. Виникає таке природне запитання: у чому полягає геометричний зміст величин, задіяних у формулі Герона? Зрозуміло, що p - це півпериметр. А що означають величини $p-a$, $p-b$, $p-c$?

Розглянемо довільний трикутник зі сторонами a, b, c і вписане в нього коло:



Із рівності трикутників AOD та AOE (за гіпотенузою і катетом) випливає, що $\angle AOD = \angle AOE$. Позначимо цей кут α. Аналогічно $\angle BOE = \angle BOF = \beta$, $\angle COD = \angle COF = \gamma$.

Зрозуміло, що $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$. Тому $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Доведемо, що

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma. \qquad (1)$$

Справді,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(180 - \gamma) = -\operatorname{tg}\gamma$$

за формулою зведення. Тепер за формулою тангенса суми маємо

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma,$$

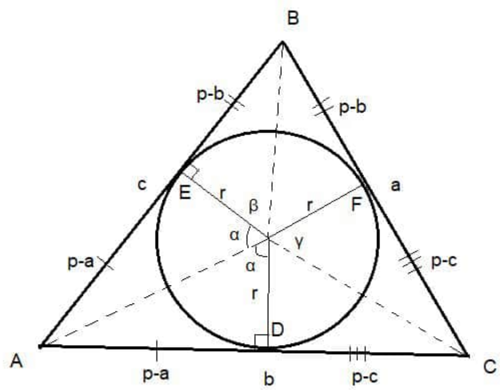
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma, \quad \text{що й т.б.д.}$$

Знайдемо площу трикутника ABC як суму площ трьох трикутників:

$$S_{ABC} = S_{AOC} + S_{AOB} + S_{BOC} = \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} = pr, \qquad (2)$$

де p - півпериметр, а r - радіус вписаного кола.

Тепер знайдемо довжини відрізків AD і AE.



Вони рівні як відрізки дотичних до кола (як катети рівних трикутників). Аналогічно $BE = BF$, $CD = CF$. Крім цього,

$$AD + AE = b + c - a,$$

звідки

$$AD = AE = \frac{b+c-a}{2} = p - a.$$

Аналогічно $BE = BF = p - b$, $CD = CF = p - c$.

Тепер використаємо формули (1) і (2) для доведення формули Герона. Із зображених прямокутних трикутників бачимо, що

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p-a}{r}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{p-b}{r}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{p-c}{r}.$$

Підставимо значення тангенсів у формулу (1):

$$\frac{p-a}{r} + \frac{p-b}{r} + \frac{p-c}{r} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3},$$

$$\frac{3p-(a+b+c)}{r} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3},$$

$$\frac{3p-2p}{r} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3},$$

$$pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Домножимо останню рівність на p:

$$p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Згідно із формулою (2) $p^2r^2 = S^2$. Тому

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Отож, формула Герона є іншою формою запису формули (1), що зв'язує тангенси трьох кутів.

4. Симетричний многочлен. Поставимо завдання знайти формулу для площі трикутника як функції від довжин його сторін, бо зрозуміло, що трикутник однозначно визначений за трьома сторонами.

Для зручності будемо шукати квадрат площі $S^2 = S^2(a,b,c)$. Зрозуміло, що ця функція повинна бути симетричною, тобто не змінювати значення при заміні a на b, b на c і c на a або при іншій перестановці аргументів. Крім цього, квадрат площі буде многочленом четвертого степеня.(Чому? Дивіться перші рядки викладок у частині **2**.) Також зрозуміло, що у випадку виродженого трикутника (тобто якщо сума двох сторін дорівнює третій стороні) площа має бути 0. Тому у виразі для S^2 обов'язково будуть множники $(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$. Як бачимо, вже одержали симетричний многочлен третього степеня. Тут ще бракує симетричного многочлена $a+b+c$ від трьох змінних.

Можливо, що квадрат площі виражається як добуток

$$S^2 = C(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$$

із деякою постійною величиною C. Значення цієї константи можемо уточнити на простому прикладі прямокутного трикутника зі сторонами $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. У цьому випадку маємо

$$S^2 = \left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2 = 36,$$

$$a+b-c = 2, \quad b+c-a = 6, \quad a+c-b = 4, \quad a+b+c = 12,$$

$$2\cdot 12\cdot 2\cdot 6\cdot 4 = 576 = 36\cdot 16.$$

Тому

$$C = \frac{1}{16}.$$

Остаточно одержуємо

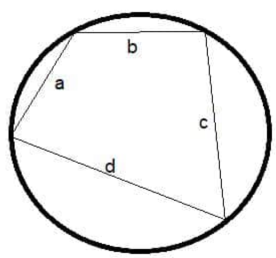
$$S^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b).$$

5. Формула Брахмагупти. Формула Герона є частковим випадком загальнішої формули для площі чотирикутника, вписаного в коло. Формула Брахмагупти має вигляд

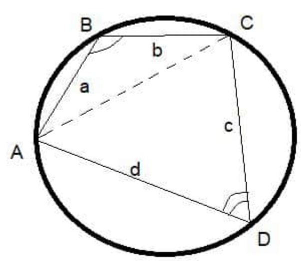
$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d),$$

де

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}.$$



Зауважимо, що сума протилежних кутів такого чотирикутника рівна $180°$, бо ці кути спираються на одну хорду. Отже, (див. рисунок) $\sin\angle B = \sin\angle D = \sin(180-B)$, $\cos D = \cos(180-B) = -\cos B$.



Розглянемо трикутники ABC і ACD і запишемо площу чотирикутника як суму площ цих двох трикутників:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin(180-B) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin B(ab + cd).$$

Звідси

$$S^2 = \frac{1}{4} \sin^2 B(ab + cd)^2 = \frac{1}{4}(1 - \cos^2 B)(ab + cd)^2.$$

Квадрат косинуса знайдемо, застосувавши теорему косинусів до трикутників ABC і ACD:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cos D = c^2 + d^2 + 2cd \cos B,$$

звідки

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Тепер залишається підставити знайдений вираз замість косинуса у вираз для квадрата площі і перетворити вираз праворуч:

$$S^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2}\right)(ab + cd)^2 =$$

$$= \frac{1}{16}(4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2) =$$

$$= \frac{1}{16}(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2) =$$

$$= \frac{1}{16}((a + b)^2 - (c - d)^2)((c + d)^2 - (a - b)^2) =$$

$$= \frac{1}{16}(a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b) =$$

$$= \frac{a + b + c - d}{2} \cdot \frac{a + b - c + d}{2} \cdot \frac{c + d + a - b}{2} \cdot \frac{c + d - a + b}{2} =$$

$$= (p - d)(p - c)(p - b)(p - a).$$

Для тих, хто знає визначники, цікаво зауважити, що

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} a & b & c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & -d & a & b \\ -d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Зауважимо також, що у випадку, коли $d = 0$ (тобто коли чотирикутник вироджується в трикутник) формула Брахмагупти збігається з формулою Герона.

Завдання

1. Векторним методом довести, що медіани довільного трикутника діляться точкою перетину у відношенні 2;1, рахуючи від вершини.

2. Нехай α, β, γ - величини плоских кутів тригранного кута. Довести, що

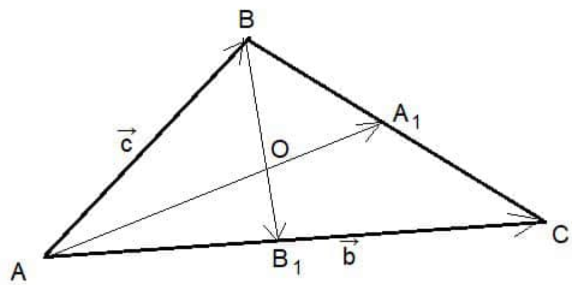
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < \frac{4}{3}\pi^2.$$

3. Задано 3 точки K, L, M перетину площини з ребрами куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причому $K \in AA_1$, $L \in B_1C_1$, $M \in CC_1$. Побудувати переріз куба площиною.

Задача про медіани

Довести векторним методом, що три медіани довільного трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.

Розв'язування. Нехай $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{AC} = \vec{b}$.



Тоді $\vec{BC} = \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{AA_1} = \vec{c} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{BB_1} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$.

Нехай O - точка перетину медіан і $\vec{AO} = m \cdot \vec{AA_1} = \frac{m}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ (де $0 < m < 1$), $\vec{BO} = n \cdot \vec{BB_1} = n(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c})$ (де $0 < n < 1$).

Оскільки $\vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$, то $\frac{m}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + n(\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}) = \vec{c}$.

Звідси одержуємо, що

$$\frac{1}{2}(m - n)\vec{b} + (\frac{m}{2} + n - 1)\vec{c} = \vec{0}.$$

Вектори $\vec{b}$ $\vec{c}$ неколінеарні, тому ця рівність можлива тільки за умови $m - n = 0$ і $\frac{m}{2} + n - 1 = 0$. Звідси знаходимо $m = n = \frac{2}{3}$.

Отже, $AO : OA_1 = \frac{2}{3}AA_1 : \frac{1}{3}AA_1 = 2 : 1$.

Так само можна довести, що інші пари медіан діляться точкою їхнього перетину у відношенні $2 : 1$. Тому всі медіани перетинаються в одній точці O.

Про тригранний кут

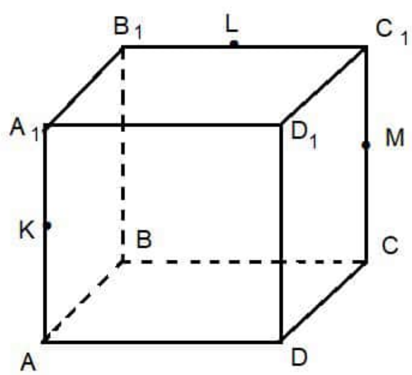
Нехай α, β, γ - величини плоских кутів тригранного кута.
Довести, що
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < \frac{4}{3}\pi^2.$$

Розв'язування. Відомо, що сума плоских кутів тригранного кута менша за 2π:
$$\alpha + \beta + \gamma < 2\pi.$$
Тому
$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 < 4\pi^2$$
і
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) < 4\pi^2.$$
Згадаємо відому нерівність
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$
Тепер додамо дві останні нерівності і одержимо, що
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) < 4\pi^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$
Звідси одержуємо
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < \frac{4}{3}\pi^2,$$
що й т.б.д.

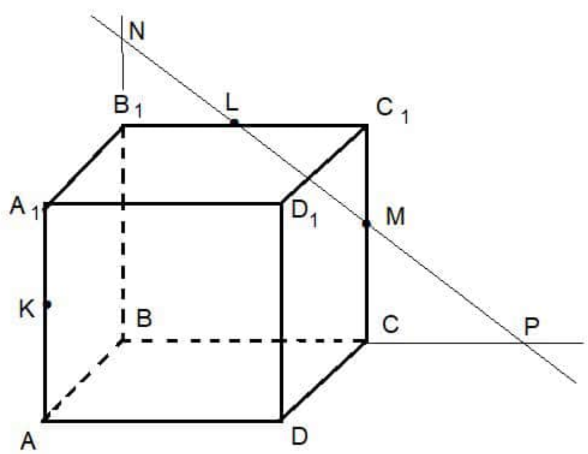
Задача про переріз куба

Площина перетинає куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у точках $K \in AA_1$, $L \in B_1C_1$, $M \in CC_1$. Побудувати переріз куба цією площиною

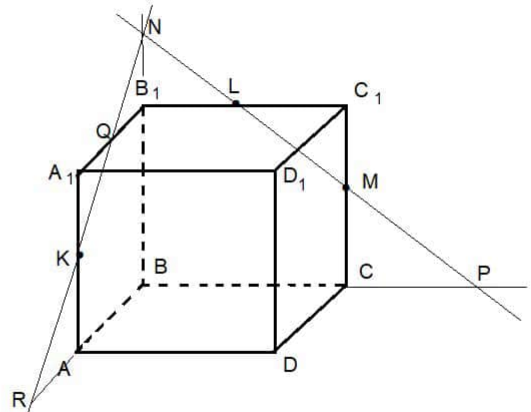
Розв'язування. Зобразимо куб і задані точки:



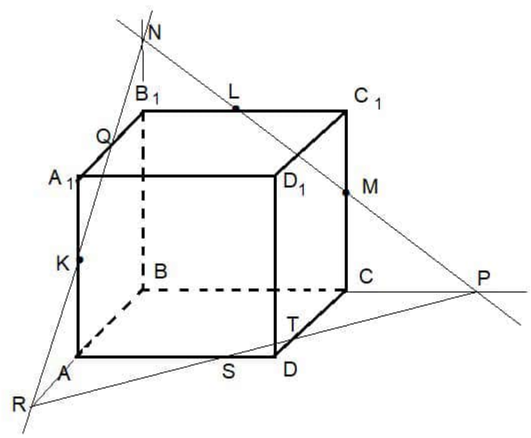
Точки L і M лежать в одній площині BB_1C_1C. Проведемо пряму LM до перетину із прямими BB_1 і BC. Точки перетину позначимо N і P:



Точки N і K лежать в одній площині AA_1B_1BC. Проведемо пряму NK до перетину із прямою AB. Точку перетину із A_1B_1 позначимо Q, а точку перетину із AB позначимо R:

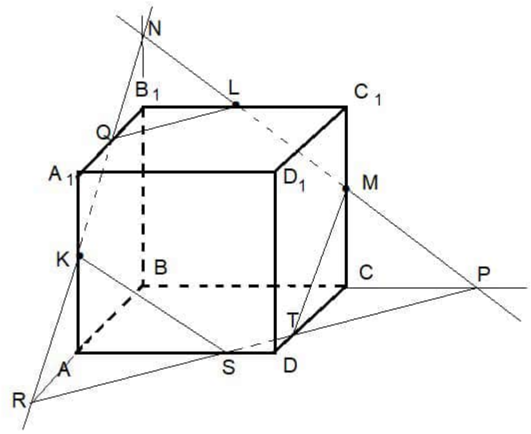


Шукана площина перетинає площину $ABCD$ по прямій RP:



Точки перетину цієї прямої з ребрами нижньої грані куба позначимо S і T.

Одержали шість точок K, Q, L, M, T, S перетину площини з ребрами куба, причому кожні дві сусідні точки належать одній грані куба. Будуємо шестикутник $KQLMTS$:



$KQLMTS$ - шуканий переріз куба площиною.

Числа Фібоначчі.

Задача із тексту італійця Фібоначчі 1228р. (скорочено): Хтось помістив пару кроликів в загородь і хоче дізнатися, скільки пар кроликів буде за рік, якщо за місяць пара народжує другу пару, а народжують кролики з другого місяця після свого народження.

Зрозуміло, що у перший місяць з'явиться ще одна пара і стане дві пари, на другий - дві плюс ще одна, народжена першою парою, на третій - три плюс ще дві, народжені двома парами з першого місяця, на четвертий - п'ять і ще три, народжені трьома парами з другого місяця і т.д.

Одержуємо послідовність чисел 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., у якій кожне число рівне сумі двох попередніх.

Тепер прийнято послідовність чисел Фібоначчі задавати рекурентною формулою так:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \;\; n \geq 2.$$

Далі ми розглянемо декілька різних підходів до знаходження формули загального члена цієї послідовності.

I. Знайдемо формулу для безпосереднього обчислення всіх чисел Фібоначчі. Для цього спочатку дослідимо різні послідовності $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, які задовольняють співвідношення

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1}. \qquad (1)$$

Всі такі послідовності називаємо розв'язками рівняння (1).

Будемо позначати літерами V, V', V'' відповідно послідовності

$$\begin{array}{llll} v_1, & v_2, & v_3, & \ldots \\ v'_1, & v'_2, & v'_3, & \ldots \\ v''_1, & v''_2, & v''_3, & \ldots \end{array}$$

Доведемо дві прості леми.

Лема 1. Якщо V - розв'язок рівняння (1), а c - довільне число, то послідовність cV (тобто послідовність $cv_1, cv_2, cv_3, \ldots$) також є розв'язком рівняння (1).

Доведення. Домножимо співвідношення $v_n = v_{n-2} + v_{n-1}$ почленно на c і одержимо $cv_n = cv_{n-2} + cv_{n-1}$, що й вимагалося.

Лема 2. Якщо послідовності V' і V'' є розв'язками рівняння (1), то і їх сума $V' + V''$ також є розв'язком рівняння (1).

Доведення. За умовою ми маємо $v'_n = v'_{n-2} + v'_{n-1}$ і $v''_n = v''_{n-2} + v''_{n-1}$. Додамо ці дві рівності почленно і одержимо $v'_n + v''_n = (v'_{n-2} + v''_{n-2}) + (v'_{n-1} + v''_{n-1})$, що й т.б.д.

Нехай тепер V' і V'' - два непропорційні розв'язки рівняння (1) (тобто два такі розв'язки, що для будь-якого числа c знайдеться такий номер n, для якого $\frac{v'_n}{v''_n} \neq c$). Доведемо, що кожну послідовність V, яка є розв'язком рівняння (1), можна подати у вигляді

$$c_1 V' + c_2 V'', \qquad (2)$$

де c_1 і c_2 - деякі сталі. Тому прийнято говорити, що (2) є загальним розв'язком рівняння (1).

Попередньо покажемо, що якщо розв'язки V' і V'' непропорційні, то

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2}, \qquad (3)$$

тобто що ця непропорційність виявляється вже у перших двох членах послідовностей V' і V''.

Доведення (3) проведемо від протилежного. Нехай для непропорційних розв'язків V' і V''

$$\frac{v'_1}{v''_1} = \frac{v'_2}{v''_2}. \qquad (4)$$

Записавши похідну пропорцію, одержуємо, що

$$\frac{v'_1 + v'_2}{v''_1 + v''_2} = \frac{v'_2}{v''_2}$$

або, приймаючи до уваги, що V' і V'' є розв'язками,

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_2}{v''_2}.$$

Аналогічно (за індукцією!) переконуємося в тому, що

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_4}{v''_4} = \ldots = \frac{v'_n}{v''_n} = \ldots$$

Отже, із (4) випливає, що послідовності V' і V'' пропорційні, а це суперечить припущенню. Тому виконується (3).

Візьмемо тепер деяку послідовність V, яка є розв'язком (1). Ця послідовність повністю визначена, якщо задані два перших її члени v_1 і v_2.

Знайдемо такі числа c_1 і c_2, щоб мали місце такі рівності:

$$\begin{aligned} c_1v_1' + c_2v_1'' &= v_1, \\ c_1v_2' + c_2v_2'' &= v_2. \end{aligned} \qquad (5)$$

Тоді на підставі лем 1 і 2 $c_1V' + c_2V''$ дасть нам послідовність V.

З огляду на умову (3) система рівнянь (5) розв'язна щодо c_1 і c_2, які би не були числа v_1 і v_2. Легко знайти

$$c_1 = \frac{v_1v_2'' - v_2v_1''}{v_1'v_2'' - v_1''v_2'}, \qquad c_2 = \frac{v_1'v_2 - v_2'v_1}{v_1'v_2'' - v_1''v_2'}.$$

Підставивши обчислені значення c_1 і c_2 в (2), ми й одержимо потрібне зображення послідовності V.

Отже, для опису всіх розв'язків рівняння (1) достатньо знайти які-небудь два його непропорційні розв'язки. Будемо шукати такі розв'язки серед геометричних прогресій. Згідно з лемою 1 достатньо обмежитися прогресіями з першим членом одиницею. Візьмемо прогресію

$$1,\ q,\ q^2,\ \ldots$$

Щоб вона була розв'язком рівняння (1), необхідно, щоб при кожному n виконувалася рівність

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n,$$

або, скоротивши на q^{n-2},

$$1 + q = q^2. \qquad (6)$$

Корені цього квадратного рівняння такі: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ і $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Це і є шукані знаменники прогресій. Зазначимо, що $1 + \alpha = \alpha^2$, $1 + \beta = \beta^2$ і $\alpha\beta = -1$.

Маємо дві прогресії, які є розв'язками (1). Тому всі послідовності вигляду

$$c_1 + c_2,\ c_1\alpha + c_2\beta\,, c_1\alpha^2 + c_2\beta^2,\ \ldots \qquad (7)$$

також є розв'яками рівняння (1). Знайдені прогресії мають різні знаменники, тому формула (7) при різних c_1 і c_2 дає нам всі розв'язки (1).

Зокрема, при деяких c_1 і c_2 формула (7) повинна дати послідовність Фібоначчі. Для цього, як уже зазначалося, потрібно визначити c_1 і c_2 із системи рівнянь

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1. \end{gathered}$$

Розв'язавши її, одержимо

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \qquad c_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Звідси можемо знайти формулу для загального члена F_n послідовності Фібоначчі:

$$\begin{aligned} &F_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} = \\ &= \tfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \tfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

тобто

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \qquad (8)$$

Формулу (8) називають формулою Біне на честь математика, який вивів її. У ній присутній так званий "золотий перерізі" - число $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

II. Знайдемо так звану твірну функцію для послідовності чисел Фібоначчі. (Цю функцію називають також генератрисою.) Для цього розглянемо такий формальний степеневий ряд

$$u_1x + u_2x^2 + \cdots + u_nx^n + \cdots = s(x), \qquad (9)$$

у якому коефіцієнт при x^n є енне число Фібоначчі. Хочемо знайти явний вираз для суми $s(x)$ цього ряду. Легко довести, що цей ряд має сенс тільки при $|x| < \frac{1}{\alpha}$. Домножимо рівність (9) почленно на x і на x^2:

$$u_1x^2 + u_2x^3 + \cdots + u_nx^{n+1} + \cdots = xs(x), \qquad (10)$$
$$u_1x^3 + u_2x^4 + \cdots + u_nx^{n+2} + \cdots = x^2s(x). \qquad (11)$$

Віднімемо від рівності (9) обидві рівності (10) і (11) і приведемо подібні члени:

$$\begin{aligned} &u_1x + (u_2 - u_1)x^2 + (u_3 - u_2 - u_1)x^3 + \\ &+ (u_4 - u_3 - u_2)x^4 + \cdots + (u_n - u_{n-1} - u_{n-2})x^n + \cdots = \\ &= (1 - x - x^2)s(x). \end{aligned}$$

Ліворуч всі вирази в дужках рівні нулю. Тому ця рівність спрощується до такого вигляду:

$$x = (1 - x - x^2)s(x).$$

Функцію
$$s(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$
називають твірною для послідовності Фібоначчі.

III. Ще раз знайдемо твірну функцію і з її допомогою одержимо формулу для загального члена послідовності Фібоначчі.

Тут для зручності вважаємо, що $F_0 = 0$. Запишемо перші два члени і рекурентну формулу у рядках:
$$\begin{aligned}
&F_0 = 0,\\
&F_1 = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2.
\end{aligned}$$
Домножимо кожну рівність на $x^0, x^1, \ldots, x^n$ відповідно:
$$\begin{aligned}
&F_0 = 0,\\
&xF_1 = x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x^n F_n = x^n F_{n-1} + x^n F_{n-2},\ n \geq 2.
\end{aligned}$$
Підсумуємо ці рівності:
$$F_0 + xF_1 + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n,$$
Ліву частину позначимо $G(x) = F_0 + xF_1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} x^n F_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n F_n$. Доданки праворуч такі:
$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n = x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} = xG(x),\\
&\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} = x^2 G(x).
\end{aligned}$$
Маємо рівняння
$$G(x) = x + xG(x) + x^2 G(x),$$
з якого знаходимо
$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Розкладемо цю функцію на суму простіших дробів. Для цього розкладемо знаменник на множники. Корені рівняння $1 - x - x^2 = 0$ такі: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Тому твірну функцію розкладемо так:

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{a}{x_1 - x} + \frac{b}{x_2 - x}.$$

Прирівняємо чисельники:

$$-x = a(x_2 - x) + b(x_1 - x).$$

Підставивши $x = x_1$ і $x = x_2$, знайдемо

$$a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \qquad b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Перетворимо вираз для твірної функції:

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{a}{x_1 - x} + \frac{b}{x_2 - x} = \frac{a}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{b}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}.$$

При цьому маємо, що $\frac{a}{x_1} = -\frac{b}{x_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, а два дроби являють собою суми геометричних прогресій. За формулою

$$\frac{1}{1 - \alpha z} = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \cdots + \alpha^n z^n + \cdots$$

знаходимо, врахувавши, що $\frac{1}{x_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{x_2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) x^n.$$

Але $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n x^n$, тому

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

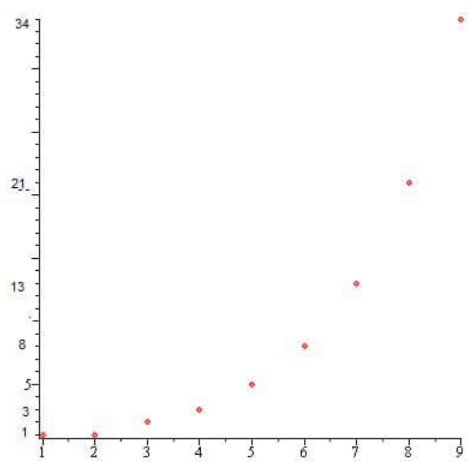
що збігається з формулою Біне (8).

Цю формулу можна записати і без "золотого перерізу":

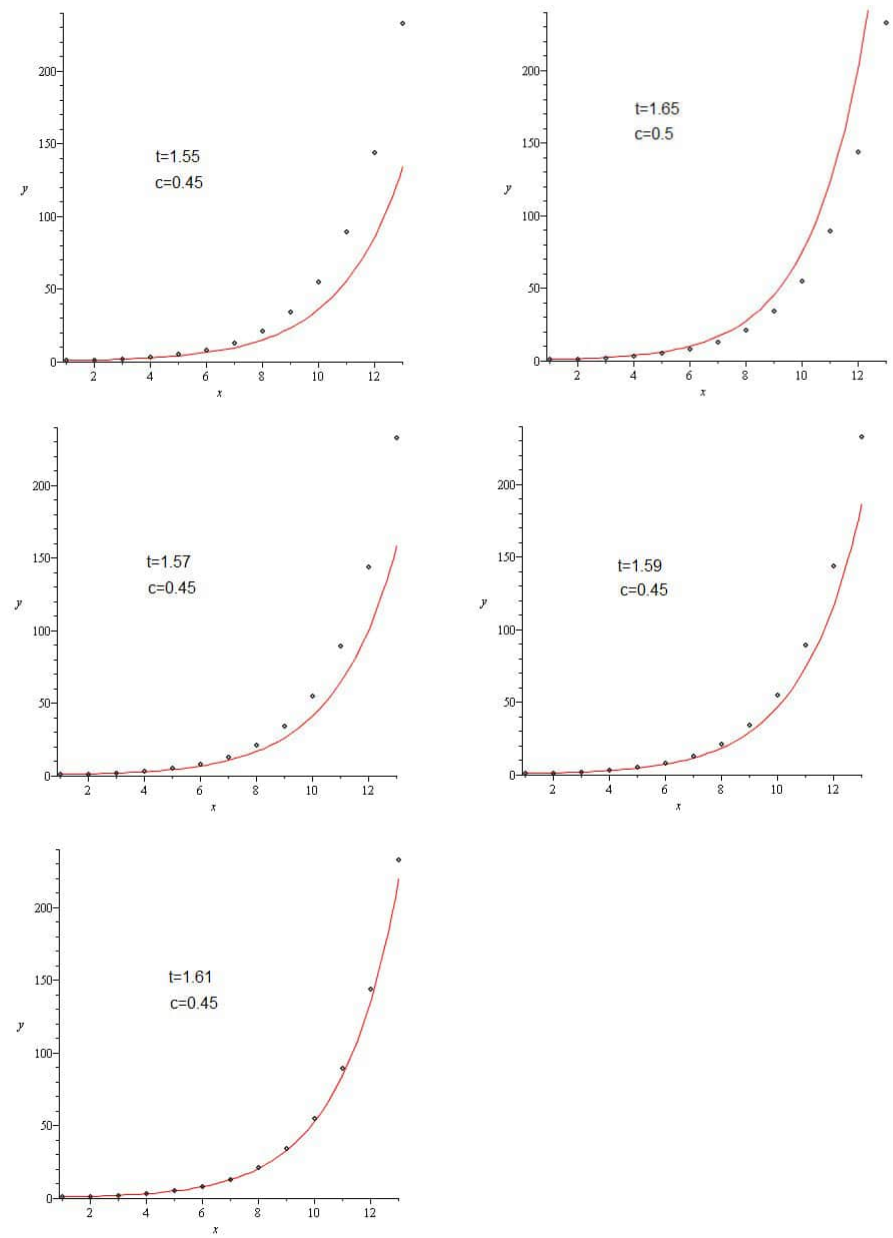
$$F_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right).$$

Явна формула для F_n достатньо несподівана і містить ірраціональні числа, хоча рекурентна формула була дуже проста.

IV. Припустимо, що ми ще не знаємо явної формули Біне для знаходження формули загального члена послідовності Фібоначчі. Підійдемо до задачі з іншого боку. Розглянемо графік функції Фібоначчі, що складається з окремих точок:



Ординати точок зростають експоненційно. Виникає ідея підібрати коефіцієнти c та t так, щоб крива лінія $y = ct^x$ якомога менше відхилялася від вказаних точок при $x = n$. Наприклад, візьмемо $c = 0.5$, $t = 1.5$. Графік відхиляється від вказаних точок. Підбором чисел можна переконатися, що при зменшенні c до приблизно 0,45 і збільшенні t до приблизно 1,61 відхилення буде все менше і менше.



При значенні $c = 0.45$ і $t = 1.61$ графіки близькі один до одного. Проте зрозуміло, що таким способом ми не доб'ємося точного співпадіння. Крім цього, можливо, що відхилення буде дуже велике у тих точках $x = n$, які не зображені на графіку.

Щоб уточнити значення параметра t, підставимо вираз ct^n замість F_n

в рекурентне рівняння $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ і одержимо $ct^{n+2} = ct^{n+1} + ct^n$. Звідси, скоротивши c та t^n, випливає, що t - корінь рівняння $t^2 - t - 1 = 0$. Позначимо корені цього квадратного рівняння $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$, $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618$. Число ψ від'ємне і тому не підходить нам, бо числа Фібоначчі додатні.

Функція $c\varphi^n$ задовольняє рекурентне співвідношення для будь-якого числа c. Проте легко зрозуміти, що ця функція не може задати всю послідовність Фібоначчі 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., тому що при $n = 0$ вийде $c = 0$. Спробуємо виправити формулу, ввівши додатковий доданок dr^n і виберемо замість r число ψ.

Тепер розглянемо вираз $c\varphi^n + d\psi^n$. Залишається лише підібрати коефіцієнти c і d так, щоб для кожного n виконувалася рівність $F_n = c\varphi^n + d\psi^n$. Для цього достатньо розв'язати систему рівнянь

$$c + d = 0,$$
$$c\varphi + d\psi = 1,$$

звідки $d = -c$, $c = \frac{1}{\varphi - \psi} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,447$.

Тому

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (-1)^n \frac{1}{\varphi^n}}{\sqrt{5}},$$

як і в одержаній вище формулі (8) Біне.

V. Послідовність Фібоначчі і лінійна алгебра.

Продемонструємо маніпуляції з матрицями для знаходження формули загального члена послідовності Фібоначчі 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Припускаємо, що поняття множення матриць, визначника матриці, власного значення та власного вектора вже відомі.

Як вже відомо, рекурентна формула для визначення кожного наступного члена цієї послідовності така:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Запишемо ще й таку тривіальну рівність:

$$a_n = a_n,$$

причому її можна записати і так:

$$a_n = a_n + 0.$$

Тепер розглянемо вектор-стовпчик $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ і подамо його як добуток деякої матриці 2×2 на вектор-стовпчик $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + a_{n-1} \\ a_n + 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одержане рекурентне співвідношення застосуємо до вектора $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ і т.д.:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A\left(A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}\right) = \ldots = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Хочемо записати вирази для a_{n+1} і a_n в один рядок. Для цього діагоналізуємо матрицю A^n, а для цього достатньо діагоналізувати матрицю A. Потрібно знайти діагональну матрицю T і деяку матрицю S такі, що

$$AS = ST, \text{або} \quad S^{-1}AS = T,$$

причому $\det S \neq 0$.

Для знаходження власних векторів матриці A розглянемо характеристичний поліном A;

$$\chi_\lambda(A) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Його корені такі: $\lambda_1 = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ і $\lambda_2 = \psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Знайдемо власний вектор $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, що відповідає власному значенню φ. Для цього розглядаємо рівняння

$$(A - \varphi I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тобто
$$\begin{pmatrix} 1-\varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
звідки $(1-\varphi)x + y = 0$, $x - \varphi y = 0$. Якщо прийняти $y = 1$, то $x = \varphi$, $\varphi - \varphi^2 + 1 = 0$, причому остання рівність виконується за означенням числа φ. Тому $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$.

Аналогічно знайдемо власний вектор $v_2 \neq 0$, що відповідає власному значенню ψ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тепер можемо знайти матрицю S:
$$S = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Обернена до S матриця:
$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\varphi - \psi} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{pmatrix},$$
причому $\varphi - \psi = \sqrt{5}$.

Знайдемо матрицю $T = S^{-1}AS$:
$$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi+1 & \psi+1 \\ \varphi & \psi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi+1-\varphi\psi & \psi+1-\psi^2 \\ \varphi^2-\varphi-1 & \varphi\psi-\psi-1 \end{pmatrix} =$$

(при цьому $\varphi\psi = -1$, а елементи на неголовній дігоналі нульові)
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi+2 & 0 \\ 0 & -\psi-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2}+2 & 0 \\ 0 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2}-2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-5+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}.$$

Можемо знайти A^n:

$$A^n = \left(STS^{-1}\right)^n = STS^{-1}STS^{-1}STS^{-1}\cdots STS^{-1} = ST^nS^{-1}.$$

Оскільки

$$T^n = \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = ST^nS^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

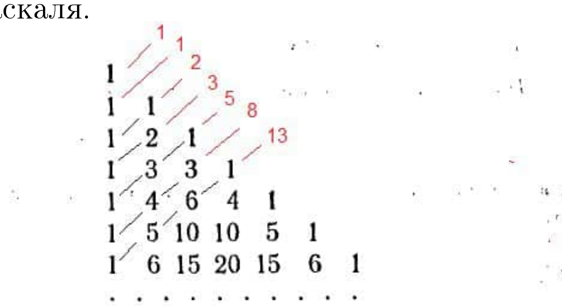
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} ST^n \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} ST^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n \\ -\psi^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} \\ \varphi^n - \psi^n \end{pmatrix}.$$

Отже, в другому рядку одержали, що

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \psi^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

VI. Можна було би цікаво і доступно для школярів розповідати про зв'язок чисел Фібоначчі із біноміальними коефіцієнтами. Наприклад, знайдемо суми біноміальних коефіцієнтів по діагоналях у трикутнику Паскаля.



Запишіть і доведіть відповідну властивість для довільного числа Фібоначчі. Або дайте таке завдання учням.

Крім цього, для самостійної роботи таке завдання. Довести тотожності для чисел Фібоначчі:

а) $f_0 + f_1 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$;
б) $f_0 + f_2 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;
в) $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$;
г) $f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

Можна також розповідати про їх теоретико-числові властивості. А також про те, як ці числа вони проявляються в геометричних задачах. Або про їх зв'язок з неперервними дробами. Або про їх роль в теорії пошуку.

Числа Каталана

Ще одна дуже відома послідовність - це послідовність Каталана. Її перші члени такі: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ...

Цю послідовність визначають рекурентним співвідношенням:

$$c_0 = 1, \qquad c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \cdots + c_n c_0, \;\; n \geq 0.$$

Наприклад, при $n = 4$ $c_4 = 14 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1$. Розглянемо твірну функцію для чисел Каталана:

$$Cat(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots = 1 + s + 2s^2 + 5s^3 + \cdots$$

Із визначального співвідношення для коефіцієнтів легко випливає, що твірна функція задовольняє таке рівняння:

$$Cat(s) = sCat(s)Cat(s) + 1.$$

Із цього рівняння знаходимо саму функцію:

$$Cat(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s}}{2s}$$

(корінь зі знаком плюс сторонній). Тепер із цього вигляду твірної функції легко знайти формулу для чисел Каталана. Згідно із загальною формулою бінома Ньютона маємо:

$$c_n = \frac{(1/2)(1/2)(3/2)\ldots((2n-1)/2)4^{n+1}}{2(n+1)!}.$$

Домножимо чисельник і знаменник на $n!$ і скоротимо на 2^{n+1}:

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n,$$

де C_{2n}^n - біноміальний коефіцієнт.

Ця формула дає змогу знайти простіше рекурентне співвідношення для чисел Каталана:

$$c_{n+1} = c_n \frac{4n+2}{n+2}.$$

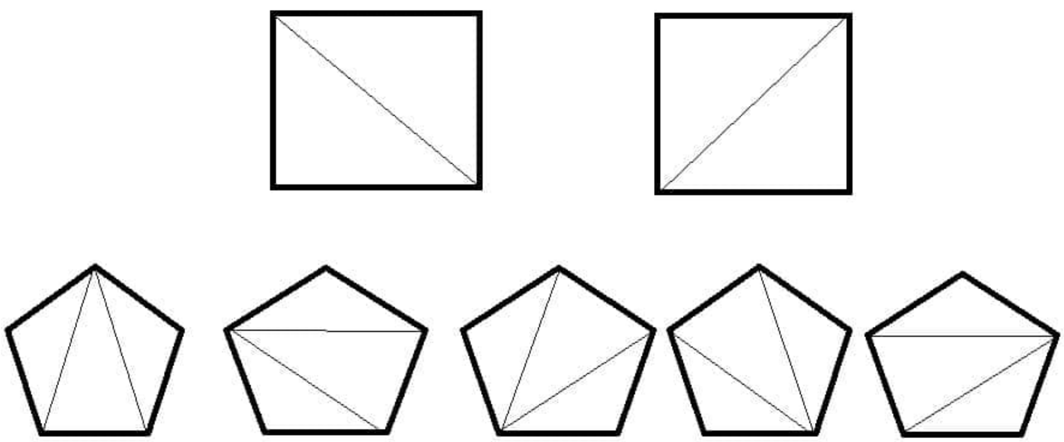
Справді,

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+2} C_{2n+2}^{n+1} = \frac{1}{n+2} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} =$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+2)(n+1)^2} \cdot C_{2n}^{n} = \frac{4n+2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^{n} = \frac{4n+2}{n+2} \cdot c_n.$$

Числа Каталана перелічують дуже багато різних комбінаторних об'-єктів. Відомо більше сорока різних означень цих чисел. Розглянемо одне з них про *діагональні триангуляції багатокутників.*

Розглянемо випуклий $(n+2)$-кутник. Діагональною триангуляцією називають розбиття багатокутника діагоналями на трикутники. Кожна така триангуляція містить $n-1$ діагональ. Наприклад,



Всі триангуляції 4- і 5-кутників

Нехай t_n - число триангуляцій $(n+2)$-кутника, $n \geq 1$, $t_0 = 1$. Доведемо, що $t_n = c_n$. Занумеруємо вершини багатокутника числами від 0 до $n+1$. Розглянемо довільну триангуляцію і виділимо трикутник, що примикає до сторони $[0,1]$. Нехай k - номер третьої вершини цього трикутника. Виділений трикутник розбиває $(n+2)$-кутник на k-кутник і $(n-k+3)$-кутник, кожний з яких триангульований діагоналями. (Випадки $k=2$ і $k=n+1$ розгляньте і обміркуйте окремо!) І навпаки, кожна така пара триангуляцій задає триангуляцію вихідного багатокутника. Тому (подивіться на ілюстрацію!)

$$t_n = t_0 t_{n-1} + t_1 t_{n-2} + \cdots + t_{n-1} t_0,$$

що можна записати і так:

$$t_{n+1} = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + \cdots + t_n t_0.$$

Отже, послідовність t_n збігається з послідовністю Каталана.

Розглянемо ще таку задачу. Задано коло і $2n$ точок на ньому. З'єднаємо всі ці точки попарно n хордами так, щоб хорди не перетиналися. Скількома способами це можна зробити?

Довести, що відповіддю є енне число Каталана.

Розглянемо ще таку задачу. Яка кількість правильних дужкових структур довжини $2n$?

Наприклад, для $n = 3$ існує 5 таких послідовностей дужок:

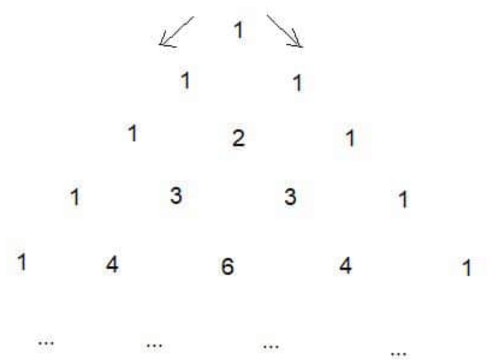
$$((())), \quad ()(()), \quad ()()(), \quad (())(), \quad (()()).$$

Довести, що відповіддю є енне число Каталана.

Твірні функції для трикутника Паскаля

Твірні функції від двох змінних перелічують послідовності, індексовані двома цілочисельними змінними. Такі послідовності зручно записувати у вигляді трикутника.

Як приклад розглянемо трикутник Паскаля:



Числа, які стоять у трикутнику Паскаля, відповідають кількості шляхів, які ведуть із верхньої вершини в дану у вказаних стрілками напрямах.

Твірну функцію можна співставити цьому трикутнику декількома способами. Нехай n - номер рядка в трикутнику, k - номер елемента в рядку. Тоді одержуємо

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} C_n^k x^k y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \right) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}.$$

Другий спосіб відповідає нумерації вздовж стрілок, показаних на ілюстрації. Позначимо $c_{n,m} = C_{n+m}^m = C_{n+m}^n$. Тоді маємо

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} c_{n,m} x^n y^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n+m}^n x^n y^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} C_{n+m}^n x^n y^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (x+y)^k = \frac{1}{1-x-y}.$$

Третій спосіб співставляє трикутнику Паскаля експоненційну твірну функцію. Така функція відрізняється від звичайної тим, що коефіцієнтами степеневого ряду є не елементи послідовності a_n, а $\frac{a_n}{n!}$:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!} C_{n+m}^{n} x^n y^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} C_{n+m}^{n} x^n y^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = e^{x+y}.$$

Для загального розвитку присутніх додам ще коротку інформацію про інші цікаві і важливі в застосуваннях трикутники.

Трикутник Лейбніца

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & & \\
 & & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & & \\
 & & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & & \\
 & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & & \\
 & \frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} & \\
\frac{1}{8} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{8} \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

У цьому трикутнику кожний перший елемент у рядку є обернене число до номера рядка і кожний внутрішній елемент є різницею сусідніх елементів вище і ліворуч. Інакше: кожний елемент є сумою двох, які розміщені під ним.

Нескладно перевірити, що на тому місці, де в трикутнику Паскаля стоїть число C_n^k, у трикутнику Лейбніца стоїть $\frac{1}{(n+1)C_n^k}$. А також і рекурентну формулу

$$\frac{1}{(n+1)C_n^{k-1}} + \frac{1}{(n+1)C_n^k} = \frac{1}{nC_{n-1}^{k-1}}.$$

Трикутник Бернуллі-Ейлера

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 2 & & 1 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 2 & & 4 & & 5 & & 5 & & \\
 & 16 & & 16 & & 14 & & 10 & & 5 & & 0 & \\
0 & & 16 & & 32 & & 46 & & 56 & & 61 & & 61 \\
 & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots &
\end{array}
$$

Ліву сторону цього трикутника називають стороною Бернуллі, а праву - стороною Ейлера. Числа в трикутнику також означають кількість шляхів з верхньої вершини в дану. Але розглядаємо при цьому шляхи, що йдуть зигзагом: непарні кроки ліворуч, парні - праворуч. Тому кожне число у цьому трикутнику рівне сумі чисел, що стоять перед ним, рахуючи зліва направо у непарних рядках, і справа наліво у парних.

Про твірні функції для розглянутих трикутників або про їхнє значення у застосуваннях розглянути самостійно.

Функціональні рівняння

Функціональним рівнянням називають рівняння, в якому невідома функція пов'язана з відомими за допомогою арифметичних операцій та операції утворення складної функції.

У шкільній програмі їх не викладають. Проте в олімпіадних завданнях такі рівняння часто пропонують розв'язати.

Зазвичай невідомі функції є функціями однієї змінної.

Розглянемо приклади таких рівнянь:

а) рівняння Коші

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

використовують у проєктивній геометрії і теорії ймовірностей;

б) рівняння Даламбера

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{2}$$

у проблемі паралелограма сил;

в) рівняння Лобачевського

$$f^2(x)=f(x-y)f(x+y) \tag{3}$$

при визначенні кута паралельності в його геометрії;

г)

$$f(x^2+f(y))=(x-y)^2f(x+y); \tag{4}$$

д)

$$2f(x)+f(1-x)=x^2; \tag{5}$$

е)

$$f(x+f(y))=y^2+f(x). \tag{6}$$

Кількість розв'язків функціонального рівняння може бути різна. Наприклад, рівняння (1) має множину розв'язків $f(x)=cx$, де c - довільна стала; рівняння (4) має два розв'язки: $f(x)=0$ і $f(x)=-x^2$;

рівняння (5) має єдиний розв'язок $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1)$; рівняння (6) не має розв'язків.

Розглянемо приклади розв'язування функціональних рівнянь і найпростіші методи.

1. Метод невизначених коефіцієнтів. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, якщо рівність

$$2f(x) + f(1-x) = x^2 \qquad (5)$$

виконується для всіх дійсних чисел x.

$\triangleleft$ Оскільки в лівій частині рівняння над незалежною змінною x і значеннями функції f виконують лише лінійні операції, а правою частиною є квадратична функція, то логічно припустити, що шукана функція також є квадратичною, тобто

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

де a, b, c -коефіцієнти, які підлягають визначенню. Ця функція має бути розв'язком рівняння (5), тому

$$2(ax^2 + bx + c) + a(1-x)^2 + b(1-x) + c \equiv x^2.$$

Розкриємо дужки:

$$3ax^2 + (b - 2a)x + (a + b + 3c) \equiv x^2.$$

Ця рівність виконується для всіх чисел x т.й т.т.,к. коефіцієнти біля однакових степенів змінної x ліворуч і праворуч рівні, тобто мають виконуватися одночасно три такі рівності:

$$\begin{cases} 3a = 1, \\ b - 2a = 0, \\ a + b + 3c = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$. Тому функція $f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2x-1)$ є розв'язком рівняння (5).

Проте ще не можна стверджувати, що задача розв'язана повністю, бо не виключена можливість, що є інші розв'язки. Тепер припустимо, що функція $g(x)$ задовольняє рівняння (5) і відмінна від функції $f(x)$, тобто існує таке число x_0, що $g(x_0) \neq f(x_0)$. Тоді при $x = x_0$ і $x = 1 - x_0$ повинні виконуватися рівності

$$2g(x_0) + g(1 - x_0) = x_0^2$$

і

$$2g(1 - x_0) + g(x_0) = (1 - x_0)^2.$$

Із цих рівностей одержуємо, що

$$g(x_0) = \frac{1}{3}(x_0^2 + 2x_0 - 1) = f(x_0).$$

Ця рівність суперечить припущенню. Тепер розв'язування завершене. ►

Багато пропонованих на олімпіадах задач достатньо складні.

2. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$f(p + x) - f(p - x) = 4px \qquad (7)$$

де p - довільне фіксоване число.

◁ Легко переконатися за допомогою методу невизначених коефіцієнтів, що квадратичні функції

$$g(x) = ax^2 + 2(1 - a)px + c,$$

де a, c - довільні дійсні числа, є розв'язками.

Нехай тепер $f(x)$ - довільний розв'язок цього рівняння. Розглянемо функцію $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Тоді $f(x) = g(x) + \varphi(x)$. Оскільки $f(x)$ - розв'язок, то рівність $f(p + x) - f(p - x) = 4px$ рівносильна рівності

$$(g(p + x) - g(p - x)) + (\varphi(p + x) - \varphi(p - x)) = 4px,$$

з якої одержуємо, що $\varphi(p+x) - \varphi(p-x) = 0$. Останню рівність задовольняють функції $\varphi(x) = \psi(x - p)$, де ψ - довільна непарна функція, тому що

$$\varphi(p + x) - \varphi(p - x) = \psi(p + x - p) - \psi(p - x - p) = \psi(x) - \psi(-x) = 0.$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (7) можна записати такою формулою:

$$f(x) = ax^2 + 2(1-a)px + c + \psi(x-p),$$

де a, c - довільні дійсні числа, ψ - довільна непарна функція. ▶

3. Метод підстановок. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$x(f(x) + f(-x) + 2) + 2f(-x) = 0 \qquad (8)$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$.

◁ Нехай f - довільний розв'язок рівняння (8). Виконаємо заміну $x \to -x$ у цьому рівнянні. Тоді маємо

$$-x(f(-x) + f(x) + 2) + 2f(x) = 0. \qquad (9)$$

Додамо рівності (8) і (9) і одержимо

$$f(x) + f(-x) = 0,$$

тобто функція $f(x)$ непарна. Тепер наслідком рівняння (9) і непарності функції є рівність $f(x) = x$. Перевіркою переконаємося, що це справді розв'язок рівняння (8):

$$x(x + (-x) + 2) + 2(-x) = 0.$$

Тому $f(x) = x$ - єдиний розв'язок. ▶

Зауваження. Перевірка знайдених розв'язків обов'язкова, якщо користуємося методом підстановок.

Розглянемо функціональне рівняння, яке не має розв'язків.

4. Чи існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задовольняє дві наступні умови:
1) множина значень f співпадає з $\mathbb{R}$;
2) для всіх x виконується рівність

$$f(f(x)) = (f(x) + 1)(x + 1) \ ? \qquad (10)$$

$\triangleleft$ Припустимо, що така функція існує. Тоді для $x = -1$ і $x = 0$ з умови (10) маємо

$$f(f(-1)) = 0 \quad \text{і} \quad f(f(0)) = f(0) + 1. \qquad (11)$$

Згідно з першою умовою задачі існує таке дійсне число a, що $f(a) = -1$. З рівності (10) при $x = a$ знаходимо, що $f(-1) = 0$. Тепер із рівностей (11) одержуємо, що

$$f(0) = 0 \quad \text{і} \quad f(0) = 1,$$

тобто приходимо до суперечності. Тому такої функції не існує. $\blacktriangleright$

5. Метод граничного переходу. Знайти всі неперервні функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що рівність

$$f(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

виконується для всіх $x \neq 1$.

$\triangleleft$ Побудуємо послідовність (x_n), у якій $x_1 \neq 1$ і $x_{n+1} = \frac{x_n}{1-x_n}$, де $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$x_2 = \frac{x_1}{1-x_1}, \quad x_3 = \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{\frac{x_1}{1-x_1}}{1-\frac{x_1}{1-x_1}} = \frac{x_1}{1-2x_1}$$

і для кожного n

$$x_n = \frac{x_1}{1-nx_1},$$

якщо додатково вимагати, щоб $x_1 \neq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що побудована послідовність збіжна і її границя дорівнює 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1}{1-nx_1} = 0.$$

Замінюючи в заданому рівнянні почергово x на x_1, x_2, ..., x_{n-1}, одержимо систему

$$\begin{cases} f(x_1) = f(x_2), \\ f(x_2) = f(x_3), \\ \dots\dots\dots\dots \\ f(x_{n-1}) = f(x_n). \end{cases}$$

Ця система складається з $n-1$-го рівняння і містить n невідомих $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$. З цієї системи знаходимо, що $f(x_n) = f(x_1)$.

Оскільки за умовою задачі функція f неперервна, а послідовність (x_n) збіжна і її границя дорівнює нулю, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(0) = f(x_1)$$

для всіх $x_1 \neq \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Одержали, що $f(x_1) = f(0)$ для всіх $x_1 \neq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Якщо ж $x_1 = \frac{1}{k}$ (тут n замінено на k, щоб ввести ще одну змінну), то для будь-якого натурального числа n сума $\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}$ є ірраціональним числом. Тому $f\left(\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = f(0)$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \frac{1}{k},$$

то

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} f(0) = f(0).$$

Отже, $f(x_1) = C = f(0)$ для всіх $x_1 \neq 1$.

Відповідь: $f(x) = C$, де C - довільна стала. ▶

6. Функціональні рівняння з вільними змінними. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які задовольняють рівняння

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (12)$$

◁ Рівність (12) виконується для всіх $y \in \mathbb{R}$, зокрема для $y = 2$:

$$xf(2) - 2f(x) = f\left(\frac{2}{x}\right).$$

Маємо рівняння з однією змінною. За допомогою заміни $x \to \frac{2}{x}$ зведемо його до системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} xf(2) - 2f(x) = f\left(\frac{2}{x}\right), \\ \frac{2}{x}f(2) - 2f\left(\frac{2}{x}\right) = f\left(x\right). \end{cases}$$

Підставивши $f\left(\frac{2}{x}\right)$ з першого рівняння в друге, одержимо

$$\frac{2}{x} - 2xf(3) + 4f(x) = f(x),$$

звідки знаходимо

$$f(x) = \frac{2f(2)}{3}\left(x - \frac{1}{x}\right) = C\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

Підставимо вираз $C\left(x - \frac{1}{x}\right)$ у рівняння (12):

$$xC\left(y - \frac{1}{y}\right) - yC\left(x - \frac{1}{x}\right) = C\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$$

і спростимо її:

$$Cxy - \frac{Cx}{y} - Cyx + \frac{Cy}{x} = \frac{Cy}{x} - \frac{Cx}{y}.$$

Це тотожність для всіх $x, y \neq 0$. Тому функція $f(x) = C\left(x - \frac{1}{x}\right)$ є розв'язком із довільною константою C за умови $x \neq 0$. Щоб знайти значення функції в точці 0, підставимо в рівняння $x = 2$, $y = 0$. Тоді $2f(0) = f(0)$, тобто $f(0) = 0$.

Відповідь:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x = 0, \\ C\left(x - \frac{1}{x}\right), & \text{якщо} \quad x \neq 0. \end{cases}$$ ▶

7. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які для всіх дійсних x і y задовольняють рівність

$$f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2). \qquad (13)$$

◁ Очевидно, що це рівняння має тривіальний розв'язок $f(x) \equiv 0$. Доведемо єдиність цього розв'язку.

Припустимо, що існує нетривіальний розв'язок $g(x)$ рівняння (13). Тоді $g(x_0) \neq 0$ для деякого x_0 і

$$g(x^2 + y) = g(x) + g(y^2) \qquad (14)$$

для всіх дійсних x і y.

Порівняємо в останній рівності перший і третій аргументи, тобто x^2+y і y^2. Нехай y_0 - корінь квадратного рівняння $y^2 = y + x_0^2$. Такий корінь існує, бо дискримінант $D = 1 + 4x_0^2$ додатний для будь-якого x_0.

За умови $x = x_0$ і $y = y_0$ з рівняння (14) одержуємо

$$g(x_0^2 + y_0) = g(x_0) + g(y_0^2),$$

звідки

$$g(x_0) = 0, \text{ тому що } x_0^2 + y_0 = y_0^2.$$

Рівність $g(x_0)$ суперечить припущенню. ►

8. Знайти всі функції f, які визначені на всій числовій осі та одночасно задовольняють наступні дві умови:

а) рівняння $f(x) = 0$ має єдиний корінь;

б) для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f(y + f(x)) = f(x^2 - y) + 4f(x)y. \qquad (15)$$

◁ Візьмемо довільне фіксоване значення x і вважаємо відомим значення $f(x)$. Тепер виберемо значення y так, щоб $y + f(x) = x^2 - y$, звідки $y = 0,5(x^2 - f(x))$. Тоді з рівняння (15) одержимо

$$2f(x)(x^2 - f(x)) = 0.$$

Оскільки множник $f(x)$ за умовою перетворюється в нуль тільки при одному значенні x, то ця рівність можлива тільки тоді, коли $f(x) = x^2$. Ця функція задовольняє обидві умови задачі, тому що має єдиний корінь $x = 0$ і

$$(y + x^2)^2 = (x^2 - y)^2 + 4x^2y.$$

Відповідь: $f(x) = x^2$. ►

9. Метод відокремлення змінних. Знайти всі пари числових функцій $f(x)$ і $g(x)$, визначених на множині всіх дійсних чисел і таких, що для будь-яких дійсних x і y виконується рівність

$$f(x)+f(y)+g(x)-g(y)=x^3+\sqrt[3]{y}.$$

$\triangleleft$ Відокремимо змінні у рівності, зібравши вирази, що залежать від y, ліворуч, а від x - праворуч:

$$f(y)-g(y)-\sqrt[3]{y}=x^3-f(x)-g(x). \qquad (16)$$

Ця рівність виконується для всіх дійсних значень x і y тільки за умови, що обидві її частини сталі, тобто

$$\begin{cases} x^3-f(x)-g(x)=c, \\ f(y)-g(y)-\sqrt[3]{y}=c. \end{cases}$$

Замінивши в другому рівнянні y на x, одержуємо таку систему:

$$\begin{cases} x^3-f(x)-g(x)=c, \\ f(x)-g(x)-\sqrt[3]{x}=c. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо функції $f(x)$ і $g(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^3+\sqrt[3]{x}), \quad g(x)=\frac{1}{2}(x^3-\sqrt[3]{x})-c.$$

Переконаємося, що ці функції задовольняють задане рівняння при будь-якому значенні c:

$$\frac{1}{2}(x^3+\sqrt[3]{x})+\frac{1}{2}(y^3+\sqrt[3]{y})+\frac{1}{2}(x^3-\sqrt[3]{x})-c-\left(\frac{1}{2}(y^3-\sqrt[3]{x})-c\right)=x^3+\sqrt[3]{y},$$

$$0=0.$$

Відповідь:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^3+\sqrt[3]{x}), \quad g(x)=\frac{1}{2}(x^3-\sqrt[3]{x})-c,$$

де c - довільна стала. ►

10. Функціональні рівняння на дискретних множинах. Функція f визначена на множині цілих невід'ємних чисел і набуває значень в цій самій множині. Для довільного числа n виконується рівність

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3. \qquad (17)$$

Знайти $f(2022)$.

◁ Для відшукання невідомої функції скористаємось методом невизначених коефіцієнтів. Оскільки права частина рівняння є лінійною функцією, а над невідомою f виконуються тільки дії утворення складної функції і додавання. то логічно припустити, що f є лінійною функцією, тобто

$$f(n) = an + b, . \qquad (18)$$

де a і b - невідомі коефіцієнти. Для їх визначення підставимо функцію (18) у рівність (17):

$$a(an + b) + b + an + b = 2n + 3$$

або, звівши подібні доданки,

$$(a^2 + a)n + ab + 2b = 2n + 3.$$

Ця рівність виконується для всіх чисел $n \geq 0$, тому $a^2 + a = 2$, звідки $a = 1$ або $a = -2$. При $a = -2$ функція $f(n) = -2n + b$ набуває від'ємних значень, що суперечить умові задачі. Тому $a = 1$. Тепер із рівності $ab + 2b = 3$ знаходимо $b = 1$.

Отже, $f(n) = n + 1$, а $f(2022) = 2023$.

Не виключено, що існує інша функція, яка задовольняє рівняння (17). Припустимо, що така функція $g(n)$ існує. Тоді рівність

$$g(g(n)) + g(n) = 2n + 3 \qquad (19)$$

виконується для всіх цілих невід'ємних n.

Спочатку з рівності $g(g(0)) + g(0) = 3$ знайдемо $g(0)$. Зрозуміло, що $g(0) \leq 3$.

Тепер розглянемо чотири можливі випадки для значення $g(0)$.

1. Припустивши, що $g(0) = 0$, одержимо, що $0 = 3$. Тому $g(0) \neq 0$.

2. Якщо $g(0) = 1$, то з рівності (19) одержимо $g(1) = 2$.

3. Якщо $g(0) = 2$, то $g(2) + 2 = 3$, $g(2) = 1$, $g(1) + 1 = 7$, $g(1) = 6$, $g(6) + 6 = 5$, $g(6) = -1$, що неможливо.

4. Якщо $g(0) = 3$, то $g(3) + 3 = 3$, $g(3) = 0$, $g(0) + 3 = 9$, $g(0) = 6$ - суперечність.

Отже, можливий тільки випадок 2 і маємо, що $g(0) = f(0)$.

Тепер скористаємось принципом найменшого числа: серед будь-якої множини натуральних чисел є найменше число.

Нехай n_0 - найменше натуральне число, для якого $f(n_0) \neq g(n_0)$. З рівностей (17) і (19) одержуємо рівність, яка виконується для всіх цілих невід'ємних n:

$$f(f(n)) + f(n) = g(g(n)) + g(n).$$

Якщо $n = n_0 - 1$, то з рівності

$$f(f(n_0 - 1)) + f(n_0 - 1) = g(g(n_0 - 1)) + g(n_0 - 1),$$

враховуючи, що $g(n_0 - 1) = f(n_0 - 1) = n_0$, одержуємо $f(n_0) = g(n_0)$. Ця рівність суперечить припущенню. Тому $f(n) = n + 1$ - єдина функція, яка задовольняє рівняння (17).

Відповідь: $f(2022) = 2023$.

11. Метод Коші. Цей метод використовують для відшукання неперервних розв'язків функціональних рівнянь з вільними змінними. Проілюструємо цей метод розв'язуванням рівняння Коші.

Знайдемо всі неперервні на проміжку $(-\infty, +\infty)$ функції f, які задовольняють умову

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \qquad (1)$$

$\triangleleft$ Замінюючи почергово y на x, $2x$, ..., $(n-1)x$, одержуємо

$$f(nx) = nf(x). \qquad (20)$$

Якщо приймемо $x = 1$ і позначимо $f(1) = c$, то одержимо рівність

$$f(n) = cn, \qquad (21)$$

яка визначає функцію f на множині натуральних чисел. Приймемо $x = y = 0$, тоді з (1) маємо $f(0) = 2f(0)$, звідки $f(0) = 0$. Якщо в (1) прийняти $x = n$, а $y = -n$, то $f(-n) = -f(n) = -cn = c(-n)$. Тому рівність (21) визначає функцію f на множині всіх цілих чисел.

Приймемо в рівності (20) $x = \frac{1}{n}$. Тоді

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = c \cdot \frac{1}{n}. \tag{22}$$

Якщо ж $x = \frac{1}{k}$, де $k \in \mathbb{N}$, то з рівності (20), враховуючи умову (22), знаходимо

$$f\left(\frac{n}{k}\right) = c \cdot \frac{n}{k},$$

яка задає функцію f на множині додатних раціональних чисел.

Якщо у рівності (1) прийняти $x = \frac{n}{k}$, а $y = -\frac{n}{k}$, то одержимо, що та сама рівність задає функцію f на множині всіх раціональних чисел.

Отже, на множині $\mathbb{Q}$ раціональних чисел функцію f визначено так:

$$f(x) = c \cdot x.$$

Нехай тепер $x = \alpha$ - ірраціональне число. Візьмемо послідовність $(r_n{}^-)$ десяткових наближень числа α з недостачею. Тоді, по-перше, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n{}^- = \alpha$, і, по-друге, $f(r_n{}^-) = c \cdot r_n{}^-$. Оскільки за умовою функція f неперервна, то

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n{}^-) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n{}^-\right).$$

Тому

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n{}^-\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n{}^-) = \lim_{n\to\infty} (c \cdot r_n{}^-) = c \cdot \alpha.$$

Одержали, що $f(\alpha) = c \cdot \alpha$.

Перевіркою переконуємося, що функції $f(x) = cx$, де c - довільне дійсне число, є розв'язками рівняння Коші:

$$c(x + y) = cx + cy.$$

Рекомендована література

1. Вороний О.М. Функціональні рівняння в олімпіадній математиці. Метод.посібник. - Кіровоград, 2010.

2. Федак І.В. Функціональні рівняння. Навч.посібник. - Івано-Франківськ, 2018.

Домашнє завдання

1. Всередині трапеції проведено відрізок паралельно її основам, довжини яких a і b. Знайдіть довжину цього відрізка, якщо він ділить площу трапеції навпіл.

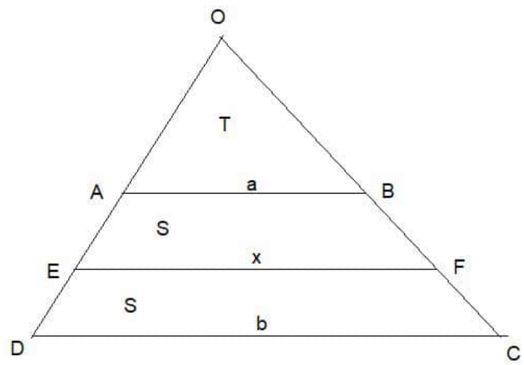
2. В коло радіуса R вписана трапеція, у якої нижня основа вдвічі більша від кожної з інших сторін. Знайти площу трапеції.

3. На кожній медіані трикутника взята точка, що ділить медіану у відношенні 3:1, рахуючи від вершини. У скільки разів площа трикутника з вершинами у цих трьох точках менша від площі початкового трикутника?

4. Певний товар придбано восени і за нього сплачено 825 тис. грн. Кілограм цього товару восени на 1 тис. грн. дешевший, ніж весною, і тому на ту саму суму весною було придбано на 220 кг менше. Скільки коштує 1 кг товару весною і скільки його було придбано восени?

Трапеція і середнє квадратичне

1 спосіб.



Нехай $ABCD$ - трапеція. $AB = a$, $CD = b$, паралельний до основ відрізок EF ділить трапецію на дві рівновеликі трапеції. Позначимо $KL = x$. Нехай $S_{ABFE} = S$, $S_{EFCD} = S$. Продовжимо бічні сторони AD і BC до перетину в точці O. Позначимо T - площа трикутника AOB.

Оскільки трикутники AOB, EOF та DOC подібні, то їх площі відносяться одна до одної як квадрати сторін:

$$\frac{S+T}{T} = \frac{x^2}{a^2},$$

$$\frac{2S+T}{T} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Із першої рівності маємо

$$\frac{S}{T} = \frac{x^2}{a^2} - 1.$$

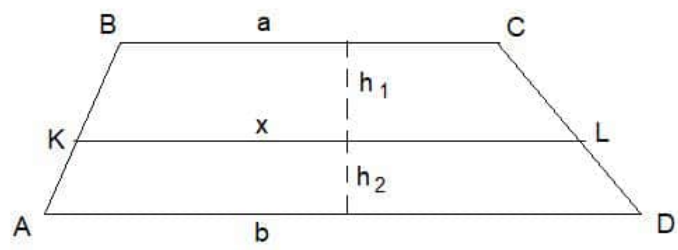
Тепер із другої одержуємо

$$2\frac{x^2}{a^2} - 2 + 1 = \frac{b^2}{a^2}, \qquad 2x^2 - a^2 = b^2,$$

$$x^2 = \frac{a^2+b^2}{2}, \qquad x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

тобто x - середнє квадратичне чисел a і b.

2 спосіб. Позначимо h_1 - висота трапеції $KBCL$, а h_2 - трапеції $AKLD$, x - довжина відрізка KL, що ділить трапецію на дві рівновеликі трапеції.



За умовою площі $KBCL$ і $AKLD$, тому

$$\frac{a+x}{2}h_1 = \frac{b+x}{2}h_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}(h_1+h_2).$$

Маємо два рівняння з трьома невідомими h_1, h_2, x. Спростимо:

$$2ah_1 + 2xh_1 = ah_1 + bh_1 + ah_2 + bh_2,$$

звідки

$$2x = -a + b + \frac{(a+b)h_2}{h_1}, \qquad (*)$$

і

$$2bh_2 + 2xh_2 = ah_1 + bh_1 + ah_2 + bh_2,$$

звідки

$$2x = a - b + \frac{(a+b)h_1}{h_2} \qquad (**)$$

Із рівностей $(*)$ і $(**)$ випливає, що

$$(a+b)\frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 h_2} = 2(b-a).$$

Звідси одержуємо квадратне рівняння для визначення $\frac{h_1}{h_2}$:

$$(a+b)\left(\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1\right) = \frac{h_1}{h_2}\cdot 2(b-a),$$

$$(a+b)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 2(b-a)\left(\frac{h_1}{h_2}\right) - (a+b) = 0,$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{b-a\pm\sqrt{(b-a)^2+(a+b)^2}}{a+b} = \frac{b-a\pm\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

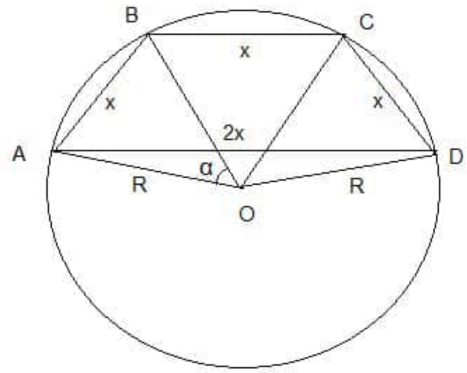
Очевидно, що знак мінус тут сторонній.

Тепер з рівняння $(a+x)\frac{h_1}{h_2} = b + x$ знайдемо x:

$$x = \frac{b - a\frac{h_1}{h_2}}{\frac{h_1}{h_2} - 1} = \frac{ab + b^2 - ab + a^2 - a\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}{-2a + \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}(\sqrt{a^2+b^2} - a\sqrt{2})}{\sqrt{2}(-a\sqrt{2} + \sqrt{a^2+b^2})} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Вписана трапеція



Спочатку встановимо положення центра кола щодо сторони AD трапеції. Позначимо R - радіус кола, $2x$ - довжина AD, $\alpha = \angle AOB$.

Трикутники ABO, BCO, CDO рівні за трьома сторонами. Тому за теоремою косинусів для ΔABO маємо

$$x^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos\alpha = 2R^2(1 - \cos\alpha),$$

а для ΔADO

$$4x^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 3\alpha = 2R^2(1 - \cos 3\alpha).$$

Поділимо другу рівність на першу:

$$4 = \frac{1 - \cos 3\alpha}{1 - \cos\alpha},$$

$$4 - 4\cos\alpha = 1 - \cos 3\alpha,$$

$$4 - 4\cos\alpha = 1 - (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha),$$

$$4\cos^3\alpha - 7\cos\alpha + 3 = 0.$$

Легко знайти корені цього рівняння: $\cos\alpha = 1$, $\cos\alpha = -\frac{3}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Очевидно, що перші два корені сторонні.

Із рівності $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ знаходимо $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $3\alpha = \pi$.

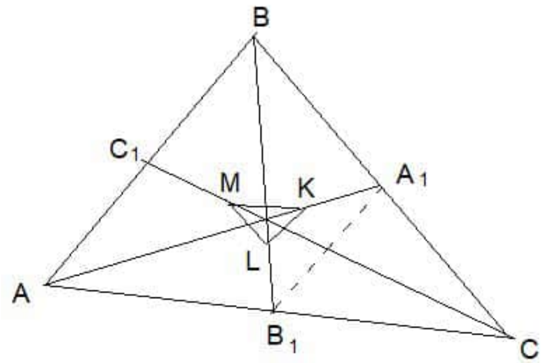
Рівність $3\alpha = \pi$ означає, що точка O лежить на стороні AD, причому рівно посередині.

Тепер легко знайти площу трапеції:

$$S_{ABCD} = 3 \cdot S_{AOB} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Задача про трикутник

Позначимо O - точка перетину медіан трикутника ABC. Точка K ділить медіану AA_1 у відношенні $3:1$, точка L ділить медіану BB_1 у відношенні $3:1$, точка M ділить медіану CC_1 у відношенні $3:1$.



Відрізок A_1B_1 - середня лінія трикутника, яка паралельна до сторони AB і за оберненою теоремою Фалеса

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки точка O ділить медіану AA_1 у відношенні $2:1$, а точка K у відношенні $3:1$, то

$$\frac{OK}{AA_1} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}.$$

Крім цього,

$$\frac{OK}{OA_1} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$$

Аналогічно одержуємо, що

$$\frac{OL}{OB_1} = \frac{1}{4}.$$

Отже, $\Delta OKL \sim \Delta OA_1B_1$ і

$$\frac{KL}{A_1B_1} = \frac{1}{4}.$$

Із цього випливає, що $KL \parallel AB$ і

$$\frac{KL}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Аналогічно доводиться, що $KM \parallel AC$, $LM \parallel BC$.

Тому трикутникиABC і KLM подібні (за трьома кутами) і

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}.$$

Р. Костогриз: як вчителю боротись із прогулами

Автор: Руслан Костогриз, студент.
Гадаю, що кожен класний керівник стикався із такою проблемою, як прогули учнів. Як правило, такі проблеми виникають із учнями старших класів чи учнями професійно-технічних навчальних закладів.

Чудово, якщо така проблема вирішується простим діалогом із їх батьками, але таке буває не завжди. Іноді батьки встають на бік своєї дитини, вважаючи прогули нормою. Як же тоді з цим боротись? Ви думаєте, що я зараз пораджу вам звернутись до адміністрації навчального закладу? Та ні, навіть адміністрація буде безсила проти впертих батьків. Тому хочу запропонувати вам більш радикальний метод.

Давайте звернемось до нормативно-правової бази. Сімейним кодексом України, стаття 150, передбачено, що батьки зобов'язані забезпечити здобуття дитиною повної загальної середньої освіти, готувати її до самостійного життя. Стаття 29 Закону України «Про загальну середню освіту» передбачає, що батьки або особи, які їх замінюють, зобов’язані забезпечувати умови для здобуття дитиною повної загальної середньої освіти за будь-якою формою навчання. Таким чином, якщо батьки допускають прогули своїх дітей, то вони не створюють їм належні умови для здобуття повної загальної середньої освіти, а відповідно, не виконують деякі обов’язки щодо виховання дітей, зокрема, обов’язки, передбачені статтею 150 Сімейного кодексу України та статтею 29 Закону України «Про загальну середню освіту»

Вищенаведені висновки вказують на те, що батьки вчиняють адміністративне правопорушення, передбачене статтею 184 Кодексу України про адміністративні правопорушення, а саме, ухилення батьків або осіб, які їх замінюють, від виконання передбачених законодавством обов’язків щодо забезпечення необхідних умов життя, навчання та виховання неповнолітніх дітей. Санкція даної статті передбачає адміністративне стягнення у вигляді накладення штрафу від п’ятдесяти до ста неоподатковуваних мінімумів доходів громадян, тобто від 850 до 1700 гривень. У відповідності до статті 255 Кодексу України про адміністративні правопорушення протокол про адміністративне правопорушення, передбачене статтею 184, складають уповноважені особи органів внутрішніх справ України, тобто Національної поліції.

Тому алгоритм дій має бути наступним:

1) Класний керівник помічає, що деякий учень прогуляв значну частину уроків.

2) Класний керівник дзвонить за телефоном 102 і повідомляє про це (головне не треба боятись, адже поліція – це не вороги, поліція покликана допомагати людям).

3) До навчального закладу приїжджає поліція і на основі записів у класному журналі в розділі «Облік відвідування» складає адміністративний протокол на батьків того учня за статтею 184 КУпАП.

4) Поліція передає цей протокол до загального місцевого суду.

5) Загальний місцевий суд на основі протоколу призначає адміністративне стягнення батькам у вигляді накладення штрафу в розмірі 1700 гривень.

Запропонований мною алгоритм дозволить класним керівникам вирішити цю проблему всього лише одним дзвінком за номером 102, і їм не доведеться псувати свою нервову систему, постійно переконуючи батьків у чомусь.

А якщо батьків це вдарить по гаманцю, все-таки 1700 - це немала сума, то, можливо, у свідомості батьків, а потім і їх дітей щось зміниться.

А як вважаєте ви: чи можливо кардинально змінити обсяг прогулів, якщо діяти таким радикальним методом?

Р. Костогриз: про шкільну систему оцінювання

Давайте нарешті розберемось із нашою шкільною системою оцінювання через 19 років після її впровадження. Нагадаю, 12-бальна система оцінювання, яка використовується зараз у школах була введена наказом Міністерства освіти і науки №428/48 від 04.09.2000. Так давайте все ж таки прочитаємо й детальніше проаналізуємо цей наказ.

Коли читаєте вищенаведений наказ, помічаєте, що постійно повторюється фраза «оцінювання **навчальних досягнень**». Так, саме **навчальних досягнень**, а не оцінювання знань, не оцінювання швидкості засвоєння навчального матеріалу, не ніщо інше. Також в додатку 1 до цього наказу вказано і зокрема, що «з метою забезпечення ефективних вимірників якості навчальних досягнень та об'єктивного їх оцінювання в основній та старшій школі вводиться 12-бальна шкала оцінювання, побудована за принципом **сумування набутих знань**, умінь і навичок з урахуванням **зростання рівня особистих досягнень учня**. При оцінюванні вчитель має враховувати **рівень досягнень учня**, а **не ступінь його невдач**, до чого вчителя, як правило, спонукала чотирибальна система.. Таким чином, виходячи з цього наказу, оцінювати треба саме рівень навчальних досягнень учня, тобто оцінювати те, що учень урешті-решт досягнув, в цьому ж і полягає суть 12-бальної системи оцінювання.
А тепер давайте розберемось, як вчителі оцінюють учнів зараз. Те що я зараз буду писати, це не означає, що всі вчителі України так роблять, проте так робить більшість. Так ось, розберемось як же виставляють тематичну. Відповідно до інструкції з ведення класного журналу учнів 5-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів, затвердженої наказом МОН №496 від 03.06.2008 при виставленні тематичної оцінки враховуються всі види навчальної діяльності, що підлягали оцінюванню протягом вивчення теми. Як бачимо чіткої формули для виставлення тематичної немає. Як же це роблять учителі? В учня під час теми є певна кількість оцінок, зокрема, оцінки «за активність у класі» (деякі вчителі називають «за роботу в класі», чи «за роботу на уроці»), оцінки за домашні завдання, оцінки за самостійні та контрольні роботи. Вчителі, як правило, просто рахують середнє арифметичне серед цих оцінок, округлюють до цілого і виставляють цю цифру, як тематичну. Також нам відомо, що якщо учня не було в школі в день контрольної роботи, то він її не пише, тематична ставиться на основі попередніх оцінок.

Тепер давайте розберемо ситуацію. Учень А має дві оцінки 10 і 12 «за активність в класі», контрольну роботу не писав, оскільки хворів. Вчитель йому ставить тематичну 11, як середнє 10 і 12. Учень Б має одну оцінку 4 «за активність в класі», одну оцінку 4 за домашнє завдання, оскільки відразу не розібрався в темі, але перед контрольною роботою все опанував і отримав за неї 10. Вчитель ставить йому тематичну 6, як середнє оцінок 4, 4, 10.

Тепер давайте розглянемо аналогію попередньої ситуації із реального життя. Працівнику А і працівнику Б доручили зробити деякі проекти за деякий термін. Працівник А якісно зробив 20% проекту, а потім захворів, тобто іншу частину проекту за нього доробдював інший працівник. Працівник Б спочатку не поспішав робити проект, оскільки був занятий іншими справами, але за день до кінця терміну зробив усе якісно на 100%. Звісно, роботодавець буде більше цінувати працівника Б, оскільки йому важливий результат, що проект зроблений вчасно.

А в нашій ситуації вчитель тематичною оцінкою цінує учня А. Так як же все-таки правильно виставляти тематичну? Як я вказував вище, суть 12-бальної системи оцінювання полягає в тому, що оцінювати треба навчальні досягнення учнів. Так от, на рівень навчальних досягнень учня під час теми вказує оцінка за контрольну роботу, оскільки саме контрольна робота містить усі типи завдань, які вивчались протягом теми, і саме вона відображає те, що учні досягли протягом вивчення теми. Тому тематичну оцінку треба ставити таку саму, як за контрольну роботу. Такий спосіб виставлення тематичної побудований за принципом **сумування набутих знань,** про який ішлося вище. Якщо вчитель рахує середнє арифметичне, то він оцінює не рівень навчальних досягнень, а процес засвоєння навчального матеріалу, що не є правильним.
Ви напевно запитаєте мене: якщо на тематичну впливає лише контрольна, тоді проводити самостійні роботи, задавати домашні завдання, опитувати учнів на уроці не потрібно? Відповідаю: потрібно, навіть потрібно ставити за це оцінки. Але не для того, щоб урахувати їх під час виставлення тематичної, а з іншою метою. По-перше, дивлячись на ці оцінки вчитель аналізує

процес засвоєння матеріалу учнями, робити висновки щодо покращення процесу викладання, аби до контрольної роботи учні засвоїли якомога більше. По-друге, поточні оцінки дають певний стимул учневі, вказують на його слабкі місця, на те, що треба довчити учню до контрольної. Не менш важливо те, що тоді, коли учня викликають до дошки відповідати, він це сприйматиме як додаткову можливість потренуватися перед контрольною роботою, а не як ризик отримати низьку оцінку.

Виходячи з цього, у вищенаведеній ситуації учень Б мав отримати тематичну 10 (як за контрольну роботу). Учню А, який не писав контрольну через хворобу, вчитель має запропонувати її написати і поставити тематичну, аналогічну контрольній, а якщо учень відмовляється її писати, то поставити «не атестований», оскільки на основі двох поточних оцінок неможливо визначити, якого рівня досяг учень наприкінці теми.

Як же виставляти семестрову оцінку? Відповідно до інструкції з ведення класного журналу учнів 5-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів, затвердженої наказом МОН №496 від 03.06.2008 семестрове оцінювання здійснюється на підставі тематичних оцінок, при цьому мають враховуватися динаміка особистих навчальних досягнень учня (учениці) з предмета протягом семестру, важливість теми, тривалість її вивчення, складність змісту тощо. Як правило, учителі знову ж таки просто рахують середнє арифметичне серед тематичних. Але це теж не є зовсім правильним, оскільки в кожній темі різна кількість годин. Узагалі, у вас, учителів розмір заробітньої плати пропорційно залежить від кількості годин, чи не так? То давайте зробимо, щоб семестрова для учнів ставилась з урахуванням кількості годин на певну тему. Як це зробити? Тут усе дуже просто. Треба кожну тематичну множити на коефіцієнт, що чисельно дорівнює відношенню кількості годин на вивчення тієї теми до кількості годин у семестрі. Наприклад у семестрі було три теми. На кожну тему відводиться відповідно 14, 10 і 8 годин. Тоді семестрова має обчислюватись за формулою $C=T1*14/32+T2*10/32+T3*8/32$.

Спеціально пишу цей блог напередодні першого вересня, щиро сподіваючись, що вчителі нарешті зрозуміють суть 12-бальної системи оцінювання через 19 років після її впровадження.

Руслан Костогриз: як учителю боротись зі списуванням

У системі загальної середньої освіти є низка проблем, із якими треба невідкладно боротися. Дві найголовніші, на мою думку, проблеми – це прогули й списування. Як боротись із першою проблемою – прогулами, ми вже розібрались два місяці тому в одному з моїх попередніх блогів (сподіваюсь що вчителі вже спробували діяти запропонованим мною методом).

Тепер щодо другої проблеми. Узагалі, проблема списування набуває достатньо великого масштабу: має місце плагіат у дисертаціях, дипломних, курсових роботах, студенти списують на іспитах. Але давайте опустимось на найнижчий рівень, а саме - списування в школах. Саме там учні звикають списувати, і як наслідок – списують і на наступних етапах навчання та життя. Тому, аби викорінити списування взагалі, треба для початку унеможливити його в школах.

Учні стали дуже хитрими останнім часом. Вони обманюють учителів, щодня, зокрема, списують домашні завдання в однокласників, списують на самостійних та контрольних, придумують різні відмазки, коли не зробили д/з чи погано впорались із контрольною. Вони вважають, що вчителі, - дурні, їх легко «обвести навколо пальця». Але прийшов час довести учням, що це не так. Тому сьогодні пропоную розібратись, як же боротись зі списуванням у школі.

Звертаю вашу увагу, що ці нижченаведені правила треба застосовувати лише під час написання контрольних робіт, оскільки в ідеалі лише контрольна має впливати на тематичну (я про це писав раніше.

ПРАВИЛО №1 – КОЖНОМУ ІНДИВІДУАЛЬНИЙ ВАРІАНТ

Як правило, вчитель готує лише два варіанти для контрольної роботи, а буває й таке, що на весь клас – один варіант. Але вчитель повинен готувати для кожного індивідуальний варіант. Більш того, варіанти повинні змінюватись із року в рік, аби учні не могли взяти завдання у попередників, та, відповідно, не могли заздалегідь підготувати відповіді. Таким чином, учні не зможуть списувати один в одного.

ПРАВИЛО №2 – ЗАВДАННЯ НЕ З ПОСІБНИКІВ

Як правило, вчитель бере завдання для контрольної з посібників та збірників задач. Але ж для усіх збірників існує ГДЗ (готові домашні завдання), із яких учні можуть легко списати. Тому вчитель повинен придумувати всі завдання самостійно, щоб розв'язки цих завдань були лише в нього. У крайньому разі, вчитель має брати завдання із якихось маловідомих посібників чи збірників задач радянських часів (але такі завдання, щоб вони відповідали діючій програмі), щоб учні нізащо не здогадались, звідки взяті ті завдання й, відповідно, не могли знайти відповіді.

ПРАВИЛО №3 – КІЛЬКІСТЬ ЗАВДАНЬ ІЗ НАДЛИШКОМ

Як правило, коли сильний учень справився з усіма завданнями, він допомагає слабшому. Тому потрібно, щоб сильний учень був задіяний до кінця контрольної роботи. Для цього вчитель має дати обсяг завдань з надлишком, тобто трішки більше, ніж потенційно може розв'язати найсильніший учень класу. Тоді найвищу оцінку отримує не той, хто розв'язав усі завдання контрольної, а той, хто розв'язав найбільше завдань серед однокласників, а оцінка інших учнів рахується відносно сильнішого. Наприклад, вчитель дав 9 завдань. Але кращий результат у класі – учень розв'язав 6 завдань. Тоді цей учень отримає 12 балів і, як наслідок кожне завдання буде оцінюватись у 2 бали. Відповідно, той, хто розв'язав 4 завдання, отримає 8 балів. Таким чином, навіть найсильніші учні класу будуть задіяні до кінця контрольної роботи, бо намагатимуться розв'язати всі завдання і в них не буде часу допомогти іншим.

ПРАВИЛО №4 – ЗАВДАННЯ З ПОПЕРЕДНІХ ТЕМ

Потрібно, щоб кілька завдань було з попередніх тем. Таких завдань має бути близько 30% обсягу контрольної. Справа в тому, що коли контрольна дається за обмеженим обсягом матеріалу, то легко зробити шпаргалки, а коли можуть бути завдання з попередніх тем, то обсяг матеріалу стає фактично необмеженим, і шпаргалки зробити неможливо.

ПРАВИЛО №5 – ВЧИТЕЛЬ ЗА СПИНОЮ В УЧНІВ

Як правило, коли вчитель намагається запобігти списуванню, він ходить по класу. Але це – найрозповсюдженіша помилка. Під час написання контрольної вчитель завжди має стояти за спиною в учнів. Коли учні знають, що вчитель за їх спиною, кожен із них постійно відчуває, що саме за ним у цей момент спостерігають і буде боятись дістати шпаргалку. А коли вчитель ходить по класу, то, очевидно, у будь-який момент часу він буде стояти спиною до певної кількості учнів, що допоможе їм скористатися шпаргалкою у відповідний момент.

ПРАВИЛО №6 – МОБІЛЬНІ ТЕЛЕФОНИ

Потрібно забирати в учнів мобільні телефони. Це правило здається очевидним. Але ж якщо ми передбачили для кожного індивідуальний варіант, визначили, що вчитель стоїть за спиною в учнів, тоді навіщо ще забирати телефони? Але ж існують навушники. Дівчата, у яких довге волосся можуть легко їх використати. І тоді, навіть якщо вчитель буде стояти за спиною в учнів, він все одно не помітить навушників, які ховаються за довгим волоссям учениці.

ПРАВИЛО №7 – ЖОРСТОКЕ ПОКАРАННЯ

Чому люди не вбивають одне одного на вулицях? А тому, що за це загрожує жорстоке покарання, а саме від 7 до 15 років позбавлення волі відповідно до ч.1 ст.115 Кримінального Кодексу України. Напевно, можна за такою аналогією запобігти списуванню. Та ні, не хвилюйтесь, я не пропоную саджати у в'язницю за списування, але все одно, карати потрібно.

Якщо вчитель помітив когось на списуванні, він ставить йому оцінку за контрольну, а відповідно, і тематичну -3 бали (мінус три бали). Я маю на увазі не на три бали менше від реальної оцінки, а взагалі -3 бали. Все-таки коли учень чесно визнав, що нічого не знає й нічого не написав на контрольній, це має більше цінуватись, аніж коли учень намагався обманути.

Якщо, наприклад, учень має тематичні 4, 7, 8, -3, то він отримує семестрову (4+7+8+(-3))/4 = 4 бали. Так, відповідно, до Інструкції ведення класних журналів, не можна ставити від'ємні оцінки, але в нашій бюрократичній системі змінити будь-який наказ чи інструкцію не складе значних проблем. Так, коли учень отримає тематичну в -3 бали, для нього це буде значний стрес. Але нехай звикають, у дорослому житті учнів ще скільки тих стресів буде. Батьки того учня, ймовірно, з'їдять того вчителя живцем, якщо той поставить тематичну -3 бали, але останньому треба просто спокійно реагувати. Треба в підростаючого покоління виховати певну дисципліну та відповідальність за свої вчинки. Таким чином, якщо учень усвідомить, яке жорстоке покарання загрожує йому за списування, то в нього й думки не буде списати.

Згоден із тим, що дотримання цих семи правил вимагає від учителя значного часу та зусиль. Але, друзі, без труда нема плода. Ефект буде миттєвим, учні відразу забудуть, що таке списування й почнуть вчити всі дисципліни чесним шляхом.

Як вважаєте ви: чи є цей перелік правил вичерпним? Що б ви додали до нього?

Психологія педагогічної діяльності та психологія вчителя

Продовжуємо опрацьовувати разом із вами стислий курс педагогічної психології. Нагадуємо, що наші матеріали містять як інформацію теоретичного плану, так і деякі прикладні психологічні рекомендації

Контрольні запитання:

1. Специфіка, структура та психологічний зміст педагогічної діяльності.

2. Проблеми психологічної готовності до педагогічної діяльності.

3. Проблема педагогічних здібностей.

4. Вимоги до особистості педагога.

5. Критерії ефективності педагогічної діяльності, основні функції педагога.

6. Структура психологічного аналізу уроку.

7. Особливості психокорекційної роботи з учителями.

8. Специфіка педагогічного колективу.

9. Можливі проблеми взаємодії психолога з учительським колективом.

Психологія педагогічної діяльності
Педагогічна діяльність - це професійна активність учителя, в якій за допомогою різних засобів впливу на учнів реалізуються задачі навчання й виховання (А. Маркова). У загальному вигляді педагогічна діяльність - це особливий, багатогранний і багатоплановий вид діяльності, пов'язаний з навчанням і вихованням.

Види педагогічної діяльності: навчальна, виховна, організаторська, пропагандистська, управлінська, консультативна й самоосвітня.

Психологічна структура педагогічної діяльності включає:

●Мотиваційно-орієнтовну ланку - готовність до діяльності та постановка вчителем цілей і задач.

●Виконавську ланку - вибір і застосування засобів впливу на учнів.

●Контрольно-оцінну ланку - контроль та оцінка своїх власних педагогічних впливів, тобто педагогічний самоаналіз.

Зауважимо, що педагогічна діяльність насправді починається не з мети, а з аналізу вихідної педагогічної ситуації.

Педагогічною ситуацією називають сукупність умов, у яких учитель ставить педагогічні цілі й задачі, приймає та реалізує педагогічні рішення. У принципі, будь-яка ситуація стає педагогічною, якщо в ній реалізуються педагогічні цілі й задачі.

Педагогічна задача (задача в даному випадку розуміється як система, що складається з предмета задачі та моделі необхідного стану предмета) повинна:

●включати характеристику психічного розвитку до впливу й бажані зміни у психічному розвитку після впливу;

●ураховувати учня як активного співучасника процесу (у даному випадку має місце «довизначення» задачі з боку учня в залежності від його особистої мотивації, рівня домагань і т. п. або «перевизначення» - заміна задачі вчителю на свою власну).

«Довизначення» або «перевизначення» - це реальні процеси зміни, активного прийняття й переробки педагогічних задач у свідомості учня в залежності від його можливостей.

Рішення педагогічних задач включає кілька етапів: аналітичний, постановку цілей і конструктивний, на якому відбувається планування способів рішення задач.

Особливістю педагогічних задач є те, що їх рішення вимагає негайних дій, а результат буває відстрочений у часі, що ускладнює контроль. У педагогічному процесі завжди існує ієрархія задач: глобальні, стратегічні, поетапні й тактичні.

Для реалізації педагогічної діяльності необхідні відповідні вміння.

У першу групу вмінь включають: уміння бачити в педагогічній ситуації проблему та формулювати її у вигляді педагогічної задачі; уміння бачити та вивчати педагогічну ситуацію.

Другу групу вмінь складають: уміння «чому учити» (робота зі змістом матеріалу) і «як учити» (ефективне сполучення прийомів і засобів навчання).

Третя група вмінь пов'язана з використанням психологічних знань: уміння хронометрувати процес праці й аналізувати свою діяльність.

Психологія вчителя

Центральною ланкою в усій педагогічній діяльності є особистість учителя.

Одним із великих фахівців у галузі вивчення психології вчительської праці й особистості вчителя є А. Маркова, на яку далі ми й будемо посилатись.

На наш погляд, базовою психологічною вимогою до особистості педагога є любов до дітей. Без цієї умови педагогічна діяльність як така не буде повноцінною. Діти дуже чуйні до того, як до них ставляться. Нелюбов з боку вчителя в остаточному підсумку породжує нелюбов з боку учнів, і тоді не тільки виховання, а й нормальне навчання стане неможливим (за висловлюванням Ксенофонта, «ніхто не може нічому навчитись у людини, яка не подобається»).

Наступною найбільш важливою вимогою до особистості вчителя є наявність спеціальних знань у тій сфері, в якій він навчає дітей, і знань психолого-педагогічного характеру (закономірностей вікового розвитку організму й особистості дитини, володіння різноманітними педагогічними прийомами тощо).

Професійна компетентність педагога складається з багатьох параметрів. Нижче наведена психологічна карта оцінки педагогічної діяльності вчителя (за А. Марковою), в якій автор виділяє три основних блоки:

●педагогічну діяльність;

●педагогічне спілкування;

●особистість учителя.

Необхідні характеристики, якими повинен володіти педагог:

Педагогічна ерудиція - загальний запас сучасних знань і способів, якими ці знання можна ефективно передати.

Педагогічне цілепокладання - потреба у плануванні своєї праці й уміння виробити сплав із цілей суспільства та своїх особистих цілей.

Педагогічне мислення - виявлення посеред зовнішніх, незаданих, прихованих властивостей педагогічної дійсності в ході порівняння та класифікації ситуацій причинно-наслідкових зв'язків.

Практичне педагогічне мислення - аналіз конкретних ситуацій з використанням теоретичних закономірностей і прийняття на їх основі педагогічних рішень.

Педагогічна інтуїція - швидке, одномоментне ухвалення педагогічного рішення з урахуванням передбачення подальшого розвитку ситуації без розгорнутого усвідомленого аналізу.

Педагогічна імпровізація - знаходження несподіваного педагогічного рішення.

Педагогічний такт - почуття розумної міри на основі співвіднесення задач, умов, можливостей учасників спілкування. Такт - це вибір і здійснення такого заходу педагогічного впливу, що заснований на ставленні до особистості дитини як головної цінності. Педагогічний такт - це одна з форм реалізації педагогічної етики.

Педагогічна емпатія - розуміння учня, що спирається на аналіз його особистості, емоційне співпереживання й відгук на його почуття.

Педагогічна творчість - пошук і знаходження нового в педагогічній діяльності.
У цілому ж до інтегральних характеристик особистості вчителя можна віднести: педагогічні здібності, характер і спрямованість особистості, психічні стани.

Ми вважаємо за можливе акцентувати увагу на такій характеристиці особистості вчителя, як уміння стати в рефлексивну позицію стосовно самого себе й до здійснюваної діяльності в цілому. Результатом виходу в таку позицію є здатність педагога зрозуміти, усвідомити свої справжні мотиви, труднощі, причини прояву тієї чи іншої поведінки та стосунків, що дозволяє вчасно скорегувати свою поведінкову програму з метою найбільш ефективного здійснення професійної діяльності.

Розрізняють перцептивно-рефлексивні (визначальну можливість проникнення в особистість учня й розуміння себе) та управлінські педагогічні здібності.

До більш виокремлених педагогічних здібностей відносять здатності:

●бачити й відчувати, чи розуміє учень досліджуваний матеріал, установлювати ступінь і характер такого розуміння;

●самостійно підбирати навчальний матеріал, визначати оптимальні засоби та методи навчання;

●по-різному викладати, доступно пояснювати той самий матеріал, щоб забезпечити його розуміння та засвоєння всіма учнями;

●будувати навчання з урахуванням індивідуальності учнів;

●правильно будувати урок, удосконалюючи свою викладацьку майстерність;

●передати свій досвід іншим учителям і вчитись на їхньому прикладі;

●до самонавчання;

●формувати в учнів потрібну мотивацію та структуру навчальної діяльності;

●вселяти в людину впевненість, заспокоювати її, стимулювати до самовдосконалення;

●знаходити потрібний стиль спілкування;

●викликати до себе повагу з боку вихованців, користуватись неформальним визнанням з їхнього боку.

У літературі, присвяченій педагогічній діяльності, особливо виділяють таку характеристику в особистості вчителя, як педагогічна свідомість, що включає:

●усвідомлення норм, правил і моделей своєї професії;

●усвідомлення цих якостей в інших людях;

●урахування оцінки себе як професіонала іншими людьми;

●самооцінку окремих сторін своєї особистості.

Комунікативна сторона педагогічної діяльності
Величезне значення у процесі навчання й виховання має стиль взаємодії та спілкування вчителя з учнями. Тут можна виділити дві основні позиції:

«Закрита позиція» - це знеособлена, підкреслено об'єктивна манера викладання, відсутність власних суджень і думок.

«Відкрита позиція» характеризується відмовленням від власного педагогічного всевідання та непогрішності, відкриттям свого досвіду учням.

Вибір тієї чи іншої позиції багато в чому залежить від загального рівня особистої психологічної свободи вчителя. Перша позиція може використовуватись просто для маскування якогось «страху», наприклад, у починаючих учителів. Як правило, учителі, які мають достатній досвід роботи й високий ступінь особистісної самореалізації, прагнуть до другої позиції.

Серед необхідних комунікативних умінь учителя відзначають:

●уміння управляти своєю поведінкою;

●уміння спостерігати та переключати увагу;

●уміння соціальної перцепції («читання по обличчю»);

●емпатію - уміння не тільки бачити, а й розуміти, співпереживати;

●хороші навички мовного спілкування.

Комунікативні здібності педагога піддаються розвитку. Добрі результати в їх формуванні дають соціально-психологічний тренінг і тренінг педагогічних умінь.

Висновки про взаємодію педагога з учнями можна будувати на основі аналізу:

●результатів засвоєння знань (рівень засвоєння, перспективне й оперативне значення цього засвоєння);

●результатів засвоєних способів і прийомів розумової діяльності;

●характеристики ставлення учнів до предмета;

●відносин між учнями й між учнями та педагогом;

●загальної оцінки уроку з погляду навчання, розвитку й виховання учнів.

У цілому в діяльності педагога виділяють такі основні функції:

Інформаційну - точність, логічність подачі інформації, уміння виділяти головне, доступність інформації й опора на наявний досвід, зв'язок інформації із практикою й уміння прогнозувати засвоєння матеріалу учнями.

Перцептивну - уміння сприймати психічний стан учнів і «бачити» особистість учня.

Комунікативну - включає стиль спілкування, педагогічний такт, характеристики мови, експресивні якості, контакт із класом.

Організаторську - організація учителем власної діяльності та пізнавальної діяльності учнів.

Розвивальну - робота з формування й розвитку прийомів і способів розумової діяльності учнів, їхньої особистості та колективу.

Контролюючу - різні способи контролю засвоєння інформації, об'єктивність оцінок, навчання самоконтролю.
Реалізація на практиці всіх цих функцій одночасно - досить складна задача. Саме тому за рівнем психічної напруженості праця шкільного вчителя й займає друге місце після роботи авіадиспетчера.

Таким чином, для ефективної професійної діяльності в галузі навчання й виховання необхідні: по-перше, добра підготовка, по-друге, постійне самовдосконалення.

Проблема підготовки педагогічних кадрів
Особливе місце в підготовці педагога займають психологічні знання й уміння. У даний час у галузі психологічної підготовки вчителів і педагогів вищої школи існує ряд проблем:

1. Потреба вчителя у психологічних знаннях може бути великою, але вона не підкріплюється сформованою практикою роботи, тому масив уже готових наукових рекомендацій залишається незатребуваним.

2. Дотепер не розроблена цілісна концепція, що лягла б в основу показників ефективності праці вчителя, викладача. Психологічні дослідження в цьому напрямі роздроблені: одні вивчають діяльність, інші - спілкування, треті - здатності й т. д.

3. Вивчення психології не спрощує роботу педагога, але піднімає її на більш високий рівень і підвищує впевненість учителя в собі, своїх знаннях і здібностях, оскільки розуміння внутрішніх причин поведінки учнів змінює сам тип мислення вчителя.

Дотепер у деяких педагогічних ВНЗ при вивченні циклу психологічних дисциплін переходять із традиційних лекційних занять на тренінги з метою більш глибокого оволодіння майбутніх учителів необхідними вміннями й навичками для навчально-виховавчої роботи з учнями різного віку.

На закінчення хотілося б торкнутись індивідуально стилю діяльності педагога. Обдарована, творча людина - це завжди індивідуальність. А індивідуальність педагога, у свою чергу, сприяє вихованню творчої особистості, чи то дитина чи дорослий. Чим більше серед учителів різноманітних і цікавих особистостей, тим більша ймовірність того, що вони навчать і виховають людей, які володітимуть безліччю різних і корисних індивідуальних якостей.

Індивідуальний стиль педагога виявляється в темпераменті (часі та швидкості реакції, індивідуальному темпі, емоційному відгуку); характері реакції на ті чи інші педагогічні ситуації; виборі методів навчання й засобів виховання; стилі педагогічного спілкування; реагуванні на дії й учинки дітей; манері поведінки; застосуванні засобів психолого-педагогічного впливу на дітей і дорослих.

Індивідуальний стиль діяльності - це насамперед урахування своїх індивідуальних особливостей при виборі тих чи інших засобів і прийомів педагогічної діяльності. Тому при поширенні передового педагогічного досвіду завжди виникає питання про можливості його адаптації до особистості іншого вчителя. Тут головним моментом є творче, індивідуальне опрацювання цього досвіду.

Автор: М. Розенова

Психологія педагогічної діяльності і особистості вчителя

План

•1. Професійно значущі якості особистості вчителя.
•2. Педагогічні здібності вчителя та їх розвиток.
•3. Характеристика педагогічної діяльності:
•4. Структурні компоненти;
•5. Рівні результативності;
•6. Індивідуальний стиль діяльності вчителя.
•7. Психологія педагогічної саморегуляції.
•8. Загальна характеристика педагогічного спілкування.
•9. Ефективність педагогічного спілкування.
•10. Психологічні особливості педагогічного колективу.

Основні поняття

Педагогічні здібності, педагогічна діяльність, педагогічна майстерність, педагогічний такт, педагогічна саморегуляція, стилі педагогічної діяльності, педагогічне спілкування, авторитет учителя.

Рекомендована література

•1. *Аникеева Н.П.* Психологический климат в коллективе. - М., 1989. - С. 184-196.
•2. *Добрович А.В.* Учителю о психологии и психогигиене общения.
•- М., 1987. - 207 с.
•3. *Елканов С.Б.* Основы профессионального самовоспитания будущего учителя. - М., 1989. - 189 с.
•4. *Кан-Калик В.А.* Учителю о педагогическом общении. - М., 1987.
•- С. 155-176.
•5. *Кузьмина Н.В.* Способности, одаренность, талант учителя. - Л., 1985. - С. 14-17.
•6. *Леонтьев А.А.* Педагогическое общение. - М., - С. 39-45.
•7. *Чепелєва Н.В.* Психологічна культура майбутнього вчителя. -К.,1989. - 32 с. - (Сер. 7 "педагогічна", № 8).
•8. *Шакуров Р.Х.* Социально-психологические проблемы руководства педагогическим коллективом. - М., 1982. - С. 33-192.
•9. *Яценко Т.С.* Социально-психологическое обучение в подготовке будущих учителей. - К., 1987. - С. 48-59.

•1

Перш ніж перейти до розгляду основних вимог до особистості вчителя, розглянемо її структурні складові. Зупинимося на структурі особистості, запропонованої К.К. Платоновим.

Перша підструктура особистості включає її соціальну спрямованість, систему провідних ставлень і потреб. Відповідно, першу найважливішу групу вимог до особистості педагога складають вимоги до нього як до представника суспільства і виконавця важливого соціального замовлення: вчитель формує особистість. Це морально-педагогічні якості вчителя, його інтереси, потреби, переконання, ідеали, мотиви поведінки, світогляд, характер. Учитель не повинен вважати свій характер особистою справою. Він тепер відповідає не лише за свою поведінку, а й за почуття.

Інтегральним показником професійної підготовленості майбутнього вчителя є педагогічна спрямованість його особистості: позитивне ставлення до педагогічної діяльності, любов до дітей, психолого-педагогічна культура.

Друга підструктура - це підструктура досвіду. Вимоги до індивідуального досвіду вчителя: професійна підготовленість і загальний розвиток (розвиток емоційно-вольової сфери, процесів педагогічного творчого мислення, сформованості вольових звичок тощо). Компетентність учителя передбачає і практичну підготовленість: оволодіння основними педагогічними знаннями, навичками, вміннями (з фахового предмету, педагогіки, психології).. Н.В.Кузьміна виділяє такі педагогічні вміння: гностичні, проективні, конструктивні, комунікативні, організаторські.

Третя підструктура - підструктура форм відображення. Це вимоги до особливостей розвитку його психічних процесів.

Змістом інтелектуального самовиховання є: розвиток здібностей до педагогічного аналізу і синтезу; розвиток таких якостей мислення, як критичність, самостійність, широта, гнучкість, активність, швидкість; розвиток спостережливості, педагогічної пам'яті та творчої уяви; розвиток культури мовлення вчителя, його словникового запасу.

Четверта підструктура охоплює спадкові індивідуальні особливості особистості. Тут об'єктом професійного самовиховання вчителя є стан його здоров'я, природні дані, зокрема, самовиховання культури темпераменту, сенсорної організації, емоційно-вольових якостей особистості, здатності свідомо керувати своїми емоціями.

2

Виділяють такі педагогічні здібності:

•1. Загальні педагогічні здібності:

•1) дидактичні - це здібності, які складають основу уміння подати матеріал доступно, чітко, ясно, цікаво, здійснення керівництва пізнавальною діяльністю учнів;

•2) академічні - здібності до оволодіння інформацією, певним навчальним предметом, який викладає вчитель;

•3) організаторські - це вміння організувати діяльність учнів, учнівський клас, учбовий процес, свою власну діяльність;

•4) комунікативні - здібності, які дозволяють встановити правильні взаємовідносини з учнями, батьками, колегами;

•5) перцептивні - здібності, які лежать в основі уміння проникнути у внутрішній світ дитини;

•6) сугестивні здібності - здатність вчителя до безпосереднього емоційно-вольового впливу на учнів;

•7) мовні здібності - це здібності чітко висловлювати свої думки й почуття за допомогою різних засобів спілкування.

•2. Спеціальні педагогічні здібності.

Здібності до певних видів діяльності, наприклад, музичні, артистичні тощо.

3

Структурні компоненти педагогічної діяльності (Н.В.Кузьміна):

•1. Гностичний - дослідницький, який передбачає постійне збільшення знань, умінь, навичок. Це здатність досліджувати процес і результат власної праці. Ця сторона діяльності вчителя найбільше цінується старшокласниками.

•2. Конструктивний - планування педагогічної діяльності та прогнозування результатів. Ця сторона діяльності вчителя найбільше цінується підлітками.

•3. Проектувальний - проектування віддалених, перспективних цілей навчання та виховання, а також стратегій та способів їх досягнення.

•4. Організаторський - організація учбово-виховного процесу.

•5. Комунікативний - встановлення взаємовідносин вчителя з іншими. Ця сторона діяльності вчителя найбільше цінується молодшими школярами.

Рівні результативності діяльності вчителя:

•1) репродуктивний рівень: учитель може і вміє розповісти іншим те, що знає сам;

•2) адаптивний рівень: учитель вміє пристосувати своє повідомлення до особливостей аудиторії;

•3) локально-моделюючий рівень: учитель володіє стратегіями научіння знанням, умінням, наукам; вміє формулювати педагогічну ціль, передбачати результат і створювати систему включення учня в учбово-пізнавальну діяльність;

•4) системно-моделюючий рівень: учитель володіє стратегіями формування потрібної системи знань, умінь і навичок учнів зі свого предмету в цілому;

•5) системно-моделюючий діяльність і поведінку рівень: учитель володіє стратегіями перетворення свого предмету в засіб формування особистості учнів, їх потреб у самовихованні, самоосвіті та саморозвитку.

Індивідуальний стиль діяльності вчителя (А. К. Маркова) Змістовні характеристики стилю:

•1. Орієнтація вчителя: на процес навчання, результат навчання та процес і результат навчання.
•2. Адекватність (неадекватність) планування учбово-виховного процесу.
•3. Оперативність (консервативність) у використанні засобів і способів педагогічної діяльності.
•4. Рефлексивність - інтуїтивність. Динамічні характеристики стилю:
•1) гнучкість - традиційність;
•2) імпульсивність - обережність;
•3) стійкість - нестійкість щодо ситуації, яка змінюється;
•4) стабільне емоційно-позитивне ставлення до учнів -нестійке емоційне ставлення;
•5) наявність особистісної тривожності - її відсутність;
•6) спрямованість рефлексії на себе - на обставини - на інших.

Результативні характеристики стилю:
•1) однорідність - неоднорідність рівня знань учнів;
•2) стабільність - нестійкість в учнів навичок учіння;
•3) високий - середній - низький рівень інтересу до предмету.

Види стилів педагогічної діяльності

Стилі діяльності вчителя	**Орієнтація вчителя**	**Адекватність планування навчально-виховного процесу**	**Оперативність у використанні засобів і способів педагогічної діяльності**	**Рефлексив-ність-інтуїтив-ність.**	**Динамічні характе-ристики**
1	2	3	4	5	6
Емоційно-імпровізаційний	На процес навчання	Неадекватність, для уроку відбирається найбільш цікавий матеріал	Висока оперативність	Інтуїтивність	Балакучість, орієнта-ція в основному на сильних учнів
Емоційно-методичний	На процес і на результат навчання	Адекватність	Висока оперативність	Переважання інтуїтивності над рефлексив-ністю	Підвищена тривож-ність, імпульсив-ність, балакучість.
1	2	3	4	5	6
Інтелектуаль-но-імпровіза-ційний	На процес і результат	Адекватність	Висока оператив-ність	Поєднан-ня інтуї-тивності і	Знижена чутливість до учнів,
	навчання			рефлексив-ності	відсутність демонстративності, обережність
Інтелектуально-методичний	На результат	Адекватність	Консервативність	Спонукають учнів до	Знижена чутливість

	навчання			репродуктив-ної діяльності, рефлексив-ністю	до учнів, мала залежність від ситуації, обережність традиційність

4

Характеристика методів особистісного і професійного самоудосконалення педагога

Проблема вчителя	Методи самовиховання	Методи психокорекції
1	2	3
Малодиференційований образ "Я", неадекватна самооцінка.	Самокритика, самоочищення.	Інтроспекція; ідентифікація, розширення засобів самовираження.
Особистісна тривожність, надконтроль.	Самоконтроль, самостимулювання, самонавіювання, педагогічний аналіз діяльності.	Емпатійне слухання; соціальна рефлексія; моделювання поведінки; проби на вибір оптимального темпу, поз, рухів; аналіз уроків колег; рефлексія власних станів на різних етапах уроку; формування мускульної свободи, вправи на зняття напруги.
Дисбаланс культурного і соціального розвитку.	Самокритика, самонавчання.	Релаксація, емоційна децентрація.
Емоційна холодність, формалізм у ставленні до дитини, недостатньо розвинута комунікативна компетентність учителя,	Педагогічні етюди, аналіз конкретних ситуацій.	Вправи на оволодіння елементами педагогічної комунікації та системи спілкування в конкретній педагогічній ситуації;
1	2	3
авторитарність і гіперсоціалізованість.		розвиток позитивного сприймання дітей; оволодіння технікою інтонування, мімікою і пантомімікою.
Недостатня професійна компетентність в окремих аспектах діяльності, невміння організувати свій час, погано розвинуті окремі педагогічні здібності.	Психолого-педагогічний консиліум, планування, дотримання розпорядку дня.	Тренування рефлексивної поведінки, розвиток педагогічної уяви, інтуїції, навичок імпровізації; самодіагностика особистісно-професійних недоліків; ситуаційний аналіз; соціально-психологічний тренінг.

Вирішення проблеми самовдосконалення вчитель повинен починати зі зміни ставлення до себе, уважного ставлення до своїх особистісних потреб, розвитку позитивного мислення, свого інтелекту, уміння управляти своїми емоціями.

5

Виховання - процес, основою якого є спілкування.

Педагогічне спілкування - це професійне спілкування викладача з учнями на уроці і поза ним, спрямоване на створення сприятливого психологічного клімату та досягнення спільної цілі. Це система взаємодії вчителя і класу, змістом якого є обмін інформацією, здійснення навчально-виховного впливу, організація стосунків.

Функції педагогічного спілкування:

•1. Пізнання особистості та її формування.
•2. Обмін інформацією.
•3. Організація діяльності.
•4. Організація міжособистісної взаємодії.
•5. Співпереживання.
•6. Самоутвердження.

Комунікативна діяльність людини є надзвичайно складною. Е.Берн вважає, що в кожній людині існує три "Я": дитина (залежна, підпорядкована і безвідповідальна істота); батьки (незалежна людина, та, що бере відповідальність на себе); дорослий (розуміє інтереси інших, враховує реальну ситуацію). Відповідно до цього, автор виділяє три позиції контакту.

Позиція "зверху" (батьки). Щодо педагогічного спілкування ця позиція вчителя може проявлятися у прагненні домінувати, переважанні дисциплінарних методів і прийомів, егоцентризмі, нетерпимості до помилок і заперечень з боку учнів.

Позиція "знизу" (дитина). Специфічними проявами цієї позиції спілкування вчителя може бути: поступливість, невпевненість у собі, недостатня вимогливість, безініціативність.

Позиція "поруч" (дорослий). Найчастіше така позиція вчителя проявляється у високій ефективності спілкування, поєднанні доброзичливості з довірою до самостійності школярів, природності в спілкуванні, орієнтуванні на діалог з учнями.

Вчитель упродовж своєї педагогічної діяльності може вдаватися до різних позицій, залежно від певної ситуації. Закріплення в спілкуванні вчителя певної позиції багато в чому визначають стиль взаємовідносин з учнями.

В.О.Кан-Калік трактує стиль педагогічного спілкування, як індивідуально-типологічні особливості соціально-психологічної взаємодії вчителя з учнями.

В.С.Мерлін під індивідуальним стилем педагогічного спілкування розуміє цілісну систему операцій педагогічного спілкування, що забезпечує ефективну взаємодію вчителя з учнями, опосередковану цілями, завданнями педагогічної діяльності та властивостями різних рівнів індивідуальності педагога.

У стилі педагогічного спілкування виявляються:

•- особливості комунікативних можливостей учителя;
•- характер стосунків, що склалися між учителем і учнями;
•- творча особистість педагога;
•- особливість учнівського класу.

Виділяють такі стилі педагогічного спілкування:

•1. Спілкування на основі захоплення загальною спільною творчою діяльністю. Цей стиль поєднує високий професіоналізм та гуманізм учителя.

•2. Спілкування на засадах дружніх стосунків. Спілкування - діалог. Розвиваються продуктивні стосунки вчителя з учнями.

•3. Спілкування-дистанція. Дистанція є обмежувальним чинником у стосунках педагога з учнями, базується на авторитеті ролі, а не особистості вчителя.

•4. Спілкування-залякування. Цей стиль виникає в результаті небажання вчителя здійснювати індивідуальний підхід до дитини, наявності специфічних рис характеру вчителя, ворожого ставлення до дітей.

•5. Спілкування-загравання. Цей стиль виникає у результаті нерозуміння вчителем завдань, які стоять перед ним; не володіння навичками спілкування; наявності страху перед спілкуванням з класом і одночасного бажання встановити контакт з ним.

Педагогічний такт - це міра педагогічного цілеспрямованого впливу вчителя на учня, вміння встановити продуктивний стиль спілкування.

Основні етапи педагогічного спілкування:

•1. Моделювання вчителем майбутнього процесу спілкування з учнями.
•2. Організація безпосереднього спілкування з учнями.
•3. Управління спілкуванням у педагогічному процесі.
•4. Аналіз реалізованої системи спілкування, виділення досягнення, недоліків, моделювання майбутньої діяльності.
•6

Бар'єри, які заважають ефективності педагогічного спілкування:

•1. Страх класу, що є характерним для недосвідчених учителів.
•2. Негативна установка на основі минулого досвіду спілкування.
•3. Фізичний бар'єр - дистанція, за допомогою якої вчитель хоче заховатися (стіл, стілець).
•4. Страх допуститися педагогічної помилки.
•5. Механічне перейняття стилю спілкування іншого вчителя.
•6. Негативна установка на клас внаслідок суджень інших вчителів.
•7. Соціальний бар'єр - позиція "зверху", незрозуміло говорить.
•8. Відсутність контакту з класом, розбіжність в установках вчителя і класу.

Для того, щоб зрозуміти сутність основних бар'єрів взаємодії вчителя і учнів, які будуть виникати в процесі педагогічного спілкування, важливим є його аналіз з позицій загальної теорії проблеми спілкування. Зокрема, К. Хорні виділяє такі типи поведінки, які ускладнюють спілкування з іншими людьми:

•1. Надмірна спрямованість на інших - гіперактивність у здобуванні контактів (багато говорять, суєта тощо);
•2. Надмірна спрямованість проти інших (підозрілість, критичність, агресивність, прагнення звинуватити інших тощо).
•3. Надмірна пасивність (людина боїться щось зробити, щоб не бути засудженим, постійний аналіз себе, власних вчинків).

Часто між вчителем і учнями може виникати смисловий бар'єр.

<u>Причини його виникнення:</u>

•1. Різне розуміння дитиною і дорослим смислу вимог, які висуває дорослий.
•2. Неприйняття дитиною форми подання вимог дорослого.
•3. Неприйняття дитиною особистості дорослого.
•4. Невміння вчителя виявити справжні мотиви поведінки.
•5. Постійне застосування вчителем одних і тих самих прийомів виховної роботи.
•6. Негативне емоційне переживання учня в результаті неадекватного покарання або іншої несправедливості вчителя.
•7. Негативна установка проти вчителя.

Можна виділити такі потенційно конфліктогенні педагогічні ситуації:

•- конфлікти діяльності, які виникають через виконання учнем учбових задач, успішності, позаучбової діяльності;
•- конфлікти поведінки, що виникають через порушення учнем правил поведінки в школі і поза нею;
•- конфлікти відносин, які виникають у сфері емоційно-особистісних відносин учнів і вчителів та спілкування в процесі педагогічної діяльності.

Особливості педагогічних конфліктів:

•- професійна відповідальність учителя за педагогічно правильне вирішення ситуації;
•- учасники конфліктів мають різний соціальний статус, і цим визначається їх різна поведінка в конфлікті;
•- різниця віку і життєвого досвіду породжує різну міру відповідальності за помилки при їх вирішенні;

•- через різне розуміння учасниками подій і їх причин вчителю не завжди легко зрозуміти глибину переживань дитини, а учневі - впоратися зі своїми емоціями;

•- присутність інших учнів при конфлікті робить їх не тільки свідками, а й учасниками; конфлікт набуває виховного змісту;

•- професійна позиція вчителя в конфлікті зобов'язує його взяти на себе ініціативу в вирішенні конфлікту і на перше місце поставити інтереси учня;

•- будь-яка помилка вчителя при вирішенні конфлікту породжує нові ситуації та конфлікти;

•- конфлікт в педагогічній діяльності легше попередити, ніж успішно вирішити.

Ефективність педагогічного спілкування залежить від наявності у вчителя таких умінь:

•- подати себе в спілкуванні з учнями;

•- говорити і слухати;

•- мовного і немовного контакту;

•- пізнати власні індивідуально-психологічні особливості, оцінити власний психічний стан;

•- управляти власними емоційними станами;

•- здійснювати сприймання і адекватне пізнання особистості учня;

•- контролювати стан афекту в себе та інших.

Культура педагогічного спілкування починається з самовизначення позиції вчителя відносно до своєї ролі та її функцій. Він повинен визначити, ким є для нього учень. Результативність спілкування залежить від дотримання норм педагогічної етики, від якостей особистості вчителя, рівня розвитку комунікативних умінь.

Часто перед учителем можуть стояти проблеми розвитку словникового запасу, особливостей свого професійного мовлення: виховання культури дихання, покращення дикції, навичок виразного читання і емоційності мови, робота над силою, висотою, темпом мовлення. У вчителя завжди є можливість розвивати свої комунікативні уміння, вдаючись до тренінгів спілкування, індивідуальної та групової роботи.

Є три основні методики формування уміння спілкуватися:

•1. Моделювання педагогічного спілкування (педагогічні ігри).

•2. Мікровикладання, коли для засвоєння кожного педагогічного прийому проводяться мікроуроки з наступним аналізом.

•3. Використання чужого досвіду. Виділяють такі етапи научіння спілкуванню:

•1. Научіння спілкуванню характеризується розвитком здатності до рефлексії, до усвідомлення власної поведінки в спілкуванні.

•2. Оволодіння умінням відчувати інтелектуальні, емоційні, морально-вольові стани учнів, вміння зрозуміти іншу людину.

•3. Розвиток здатності не тільки сприймати і установлювати контакти, але й активно педагогічно впливати на учнів, оволодіти способами впливів.

•7

Психологічний клімат - емоційно-психологічна атмосфера колективу, в якому на емоційному рівні відображаються особисті та ділові взаємовідносини членів колективу, що визначаються їх ціннісними орієнтаціями, моральними нормами та інтересами. Це комплекс психологічних умов, які сприяють ефективній реалізації спільної діяльності та всесторонньому гармонійному розвиткові особистості в групі.

Основні характеристики психологічного клімату педагогічного колективу:

•- задоволеність взаємовідносинами, процесом праці, керівництвом;

•- настрій, що переважає;

•- взаєморозуміння по вертикалі;

•- участь членів колективу в управлінні;

•- згуртованість;

•- свідома дисципліна;

•- продуктивність роботи.

Показники згуртованості педагогічного колективу:

Узгодженість функціонально-рольових очікувань (єдність уявлень про те, що і в якій послідовності повинен робити кожен із членів групи для реалізації спільних для всіх цілей);

Ціннісно-орієнтовна єдність (єдність установок і ціннісних орієнтацій співробітників школи);

Колективіська ідентифікація (ставлення до своїх колег як до самого себе).

Адекватне покладання відповідальності при успіхах і невдачах у спільній діяльності.

Чому сучасні діти не вміють вчитися, не вміють чекати і насилу переносять нудьгу

Дуже крута стаття про виховання дітей і подолання основних проблем у вихованні/навчанні. Прописані як основні проблеми, так і шляхи їх вирішення, що набагато важливіше.

Я ерготерапевт з багаторічним досвідом роботи з дітьми, батьками та викладачами. Я вважаю, що наші діти стають все гірше в багатьох аспектах.

Я чую одне й те саме від кожного вчителя, якого зустрічаю. Як професійний терапевт я бачу зниження соціальної, емоційної та академічної активності у сучасних дітей і водночас — різке збільшення числа дітей зі зниженою здібністю навчатися та іншими порушеннями.

Як ми знаємо, наш мозок податливий. Завдяки навколишньому середовищу ми можемо зробити наш мозок «сильнішим» або «слабкішим». Я щиро вірю, що, незважаючи на всі наші найкращі спонукання, ми, на жаль, розвиваємо мозок наших дітей в невірному напрямку.

І ось чому:

1. ДІТИ ОТРИМУЮТЬ ВСЕ, ЩО ХОЧУТЬ І КОЛИ ХОЧУТЬ

«Я голодний!» — «Через секунду я куплю що-небудь перекусити». "Я хочу пити". — «Ось автомат з напоями». «Мені нудно!» — «Візьми мій телефон».

Здатність відкласти задоволення своїх потреб — це один з ключових чинників успіху. Ми хочемо зробити наших дітей щасливими, але, на жаль, ми робимо їх щасливими тільки зараз і нещасними — в довгостроковій перспективі.

Уміння відкласти задоволення своїх потреб означає здатність функціонувати в стані стресу. Наші діти поступово стають менш підготовленими до боротьби навіть з незначними стресовими ситуаціями, що в підсумку стає величезною перепоною для їхнього успіху в житті.

Ми часто бачимо нездатність дітей відкласти задоволення своїх бажань в класі, торгових центрах, ресторанах і магазинах іграшок, коли дитина чує «Ні», тому що батьки навчили його мозок негайно отримувати все те, що вона хоче.

2. ОБМЕЖЕНА СОЦІАЛЬНА ВЗАЄМОДІЯ

У нас багато справ, тому ми даємо нашим дітям гаджети, щоб вони теж були зайняті. Раніше діти грали на вулиці, де в екстремальних умовах розвивали свої соціальні навички. На жаль, гаджети замінили дітям прогулянки на відкритому повітрі. До того ж технології зробили батьків менш доступними для взаємодії з дітьми.

Телефон, який «сидить» з дитиною замість нас, не навчить її спілкуватися. У більшості успішних людей розвинені соціальні навички. Це пріоритет!

Мозок подібний м’язам, які навчаються і тренуються. Якщо ви хочете, щоб ваша дитина могла їздити на велосипеді, ви вчите її кататися. Якщо ви хочете, щоб дитина могла чекати, її треба навчити терпінню. Якщо ви хочете, щоб дитина могла спілкуватися, необхідно соціалізувати її. Те ж саме відноситься до всіх інших навичок. Нема ніякої різниці!

3. НЕСКІНЧЕННІ ВЕСЕЛОЩІ

Ми створили для наших дітей штучний світ. У ньому немає нудьги. Як тільки дитина затихає, ми біжимо розважати її знову, тому що інакше нам здається, що ми не виконуємо свій батьківський обов’язок.
Ми живемо у двох різних світах: вони у своєму «світі веселощів», а ми в іншому, «світі роботи».

Чому діти не допомагають нам на кухні або в пральні? Чому вони не прибирають свої іграшки?
Це проста монотонна робота, яка тренує мозок функціонувати під час виконання нудних обов’язків. Це той же самий «м’яз», який потрібний для навчання в школі.

Коли діти приходять у школу і настає час для письма, вони відповідають: «Я не можу, це занадто складно, занадто нудно». Чому? Тому що працездатний «м’яз» не тренується нескінченними веселощами. Він тренується тільки під час роботи.

4. ТЕХНОЛОГІЇ

Гаджети стали безкоштовними няньками для наших дітей, але за цю допомогу потрібно платити. Ми розплачуємося нервовою системою наших дітей, їх увагою і здатністю відкласти задоволення своїх бажань.

Повсякденне життя в порівнянні з віртуальною реальністю нудне.

Коли діти приходять в клас, вони стикаються з голосами людей та адекватною візуальною стимуляцією на противагу графічним вибухам і спецефектам, які вони звикли бачити на екранах.

Після годин віртуальної реальності дітям все складніше обробляти інформацію в класі, тому що вони звикли до високого рівня стимуляції, який надають відеоігри. Діти не здатні обробити інформацію з більш низьким рівнем стимуляції, і це негативно впливає на їхню здатність вирішувати академічні завдання.

Технології також емоційно віддаляють нас від наших дітей і наших сімей. Емоційна доступність батьків — це основна поживна речовина для дитячого мозку. На жаль, ми поступово позбавляємо наших дітей цього.

5. ДІТИ ПРАВЛЯТЬ СВІТОМ

«Мій син не любить овочі». «Їй не подобається рано лягати спати». «Він не любить снідати». «Вона не любить іграшки, але добре розбирається в планшеті». «Він не хоче одягатися сам». «Вона лінується їсти сама».

Це те, що я постійно чую від батьків. Відколи діти диктують нам, як їх виховувати? Якщо надати це їм, все, що вони будуть робити — їсти макарони з сиром і тістечка, дивитися телевізор, грати на планшеті й ніколи не будуть лягати спати.

Як ми допомагаємо нашим дітям, якщо даємо їм те, що вони хочуть, а не те, що добре для них? Без правильного харчування і повноцінного нічного сну наші діти приходять в школу роздратованими, тривожними й неуважними. Крім того, ми відправляємо їм неправильне послання.

Вони вчаться, що можуть робити все, що хочуть, і не робити того, що не хочуть. У них немає поняття — «треба робити».

На жаль, щоб досягти наших цілей в житті, нам часто треба робити те, що необхідно, а не те, що хочеться.

Якщо дитина хоче стати студентом, її необхідно вчитися. Якщо вона хоче бути футболістом, необхідно тренуватися щодня.

БІЛЬШЕ ПРО ВИХОВАННЯ ДІТЕЙ:

Наші діти знають, чого хочуть, але їм важко робити те, що необхідно для досягнення цієї мети. Це призводить до недосягнення цілей і залишає дітей розчарованими.

ТРЕНУЙТЕ ЇХ МОЗОК!

Ви можете тренувати мозок дитини та змінити її життя так, що вона буде успішною в соціальній, емоційній і академічній сфері.

Ось як:

1. НЕ БІЙТЕСЯ ВСТАНОВЛЮВАТИ РАМКИ

Діти потребують їх, щоб вирости щасливими та здоровими.

- Складіть розклад прийому їжі, часу сну і часу для гаджетів.
- Думайте про те, що добре для дітей, а не про те, чого вони хочуть або не хочуть. Пізніше вони скажуть вам спасибі за це.
- Виховання — важка робота. Ви повинні бути креативним, щоб змусити їх робити те, що добре для них, хоча більшу частину часу це буде повна протилежність тому, чого їм хочеться.
- Дітям потрібні сніданок і поживна їжа. Їм необхідно гуляти на вулиці й лягати спати вчасно, щоб на наступний день прийти в школу готовими вчитися.
- Перетворіть те, що їм не подобається робити, у веселощі, в емоційно-стимулюючу гру.

2. І ВІДНОВІТЬ ОБМЕЖТЕ ДОСТУП ДО ГАДЖЕТІВ ЕМОЦІЙНУ БЛИЗЬКІСТЬ З ДІТЬМИ

- Подаруйте їм квіти, посміхніться, залоскочіть їх, покладіть записку в рюкзак або під подушку, здивуєте, витягнувши на обід зі школи, танцюйте разом, повзайте разом, бийтеся подушками.
- Влаштовуйте сімейні вечері, грайте в настільні ігри, вирушайте на прогулянку разом на велосипедах і гуляйте з ліхтариком ввечері.

3. НАВЧІТЬ ЇХ ЧЕКАТИ!

- Нудьгувати — нормально, це перший крок до творчості.
- Поступово збільшуйте час очікування між «я хочу» і «я отримую».
- Намагайтеся не використовувати гаджети в машині й ресторанах і навчіть дітей чекати, розмовляючи або граючи.
- Обмежте постійні перекуси.

4. НАВЧІТЬ СВОЮ ДИТИНУ ВИКОНУВАТИ МОНОТОННУ РОБОТУ З РАННЬОГО ВІКУ, ОСКІЛЬКИ ЦЕ ОСНОВА ДЛЯ МАЙБУТНЬОЇ ПРАЦЕЗДАТНОСТІ

- Складати одяг, прибирати іграшки, вішати одяг, розпаковувати продукти, заправляти ліжко.
- Будьте креативними. Зробіть ці обов’язки веселими, щоб мозок асоціював їх з чимось позитивним.

5. НАВЧІТЬ ЇХ СОЦІАЛЬНИХ НАВИЧОК

Навчіть ділитися, вміти програвати й вигравати, хвалити інших, говорити «спасибі» і «будь ласка».

Виходячи з мого досвіду роботи терапевтом, можу сказати, що діти міняються в той момент, коли батьки змінюють свої підходи до виховання.

Допоможіть своїм дітям досягти успіху в житті шляхом навчання і тренування їх мозку, поки не стало пізно.

Автор: Victoria Prooday

Задачі для дом.завд.

1. Довести, що при довільному n ($|n| \geq 2$) сума

$$S_n = \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{(n-1)\pi}{n} = 0.$$

2. Довести, що коефіцієнти кубічного рівняння, коренями якого є числа

$$\cos\frac{2\pi}{7}, \quad \cos\frac{4\pi}{7}, \quad \cos\frac{6\pi}{7},$$

всі є раціональнмми числами або всі є ірраціональними.

3. Якщо точку M вибрано довільно на дузі AB кола, яке описане навколо правильного шестикутника $ABCDEF$, то $MD + ME = MA + MB + MC + MF$. Довести.

4. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}.$$

5. Довести, що різниця між квадратом середнього за величиною кореня і меншим коренем рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ рівна 2.

6. Довести, що сума дробів $m_1 = \frac{a-b}{1+ab}$, $m_2 = \frac{b-c}{1+bc}$, $m_3 = \frac{c-a}{1+ac}$ рівна їх добутку, якщо $ab \neq -1$, $bc \neq -1$, $ac \neq -1$.

7. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + y = a + b - 2, \\ 2x^2 + 2xy + 3x + y = ab - 1 \end{cases}$$

при довільних дійсних значеннях параметрів a і b.

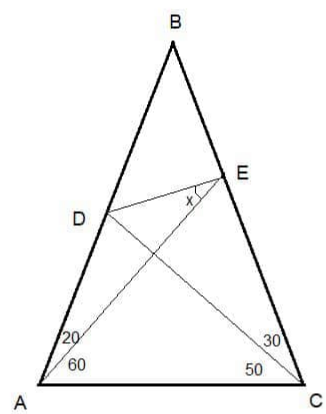
8. Знайти формулу загального члена числової послідовності -2, -7, 2, 67, 254, 653, 1378, 2567, 4382, ..., якщо відомо, що це є значення деякого полінома при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Різні задачі

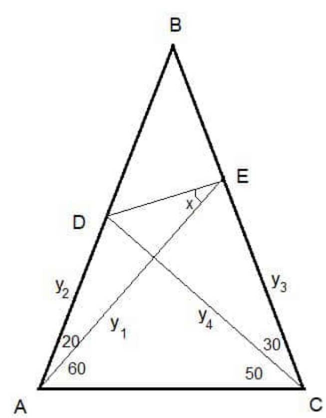
1. Різні методи

На прикладі однієї задачі порівняємо різні методи розв'язування.

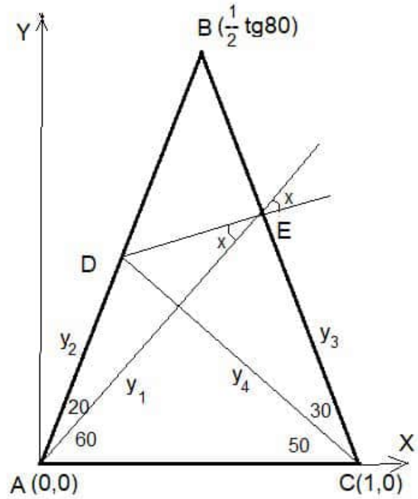
Задано трикутник ABC, у якому відрізок AE утворює кути 60° і 20° зі сторонами, а відрізок CD - кути 50 і 30. Знайти кут x, утворений AE і DE.



Добре підготовлений (навчений) учень міг би підійти до розв'язування цієї задачі, використавши координатний метод. Позначимо на рисунку прямі лінії AE, AB, BC і CD відповідно y_1, y_2, y_3, y_4.



Потрібно знайти кут між прямими y_1 та DE. Знайдемо цей кут, обчисливши його тангенс. Із наступного рисунка бачимо, що кут x - це різниця кутів, які ці дві прямі утворюють з віссю абсцис.



Отже, план розв'язування такий:
а) записати рівняння прямих y_1, y_2, y_3, y_4;
б) знайти координати точки E як точки перетину прямих y_1 і y_3;
в) знайти координати точки D як точки перетину прямих y_2 і y_4;
г) знайти кутовий коефіцієнт прямої DE;
д) знайти тангенс кута x.

Нехай довжина відрізка AB рівна 1. Спрямуємо осі координат як на рисунку. Тоді точка A має координати $(0,0)$, C - $(1,0)$. Оскільки трикутник рівнобедрений, то B має координати $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{tg}80)$.

Запишемо рівняння прямої y_1:

$$y_1 = \mathrm{tg}60 \cdot x = \sqrt{3} \cdot x$$

і y_2:

$$y_2 = \mathrm{tg}80 \cdot x.$$

Пряма y_3 проходить через точки $(1,0)$ і $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{tg}80)$, тому при $x = 1$ $y_3 = kx+\ell = k+\ell = 0$, звідки $\ell = -k$, а при $x = \frac{1}{2}$ $y_3 = \frac{k}{2}-k = -\frac{k}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{tg}80$, звідки $k = -\mathrm{tg}80$. Тому $y_3 = -\mathrm{tg}80 \cdot x + \mathrm{tg}80$.

Пряма y_4 проходить через точку $(1,0)$ і утворює кут 50 з від'ємним напрямом осі абсцис, тому $y_4 = -\mathrm{tg}50 \cdot x + \mathrm{tg}50$.

Знайдемо координати точки E, прирівнявши y_1 і y_3:

$$E\left(\frac{\mathrm{tg}80}{\mathrm{tg}60 + \mathrm{tg}80}; \frac{\mathrm{tg}60 \cdot \mathrm{tg}80}{\mathrm{tg}60 + \mathrm{tg}80}\right).$$

Знайдемо координати точки D, прирівнявши y_2 і y_4:

$$D\left(\frac{\text{tg}50}{\text{tg}50+\text{tg}80};\frac{\text{tg}50\cdot\text{tg}80}{\text{tg}50+\text{tg}80}\right).$$

Кутовий коефіцієнт прямої DE знайдемо як відношення різниці ординат точок E і D до різниці абсцис:

$$k=\frac{\frac{\text{tg}60\text{tg}80}{\text{tg}60+\text{tg}80}-\frac{\text{tg}50\text{tg}80}{\text{tg}50+\text{tg}80}}{\frac{\text{tg}80}{\text{tg}60+\text{tg}80}-\frac{\text{tg}50}{\text{tg}50+\text{tg}80}}=\frac{(\text{tg}60-\text{tg}50)\text{tg}^2 80}{\text{tg}^2 80-\text{tg}50\cdot\text{tg}60}.$$

Тепер можемо обчислити тангенс кута x за формулою тангенса різниці двох кутів 60 і α, де $\text{tg}\alpha=k$:

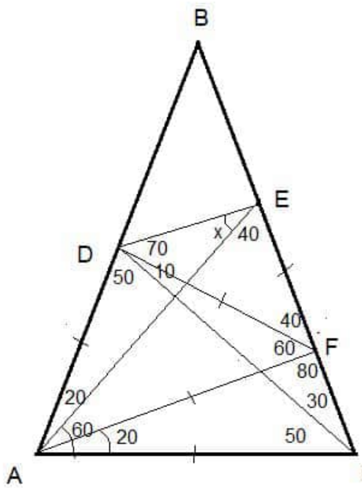
$$\text{tg}x=\frac{\text{tg}60-\frac{(\text{tg}60-\text{tg}50)\text{tg}^2 80}{\text{tg}^2 80-\text{tg}50\cdot\text{tg}60}}{1+\text{tg}60\cdot\frac{(\text{tg}60-\text{tg}50)\text{tg}^2 80}{\text{tg}^2 80-\text{tg}50\cdot\text{tg}60}}=$$

$$=\frac{-\text{tg}50\text{tg}^2 60+\text{tg}50\text{tg}^2 80}{\text{tg}^2 80-\text{tg}50\text{tg}60-\text{tg}50\text{tg}60\text{tg}^2 80+\text{tg}^2 60\text{tg}^2 80}\approx 0,57735$$

(обчислення на калькуляторі або за допомогою тригонометричних таблиць). Виявилося, що знайдене число підозріло подібне на десяткове наближення числа $\frac{1}{\sqrt{3}}$, тобто тангенс 30°.

Ця відповідь вказує на те, що має існувати якийсь інший спосіб розв'язування, що міг би привести до точної відповіді.

Повернемося до початкового рисунка і зробимо на ньому допоміжні побудови. Проведемо відрізок AF під кутом 20 до сторони AC, щоб утворився рівнобедрений трикутник AFC. Маємо рівність двох відрізків: $AC = AF$. З'єднаємо точки D та F.



Тепер розглянемо деякі трикутники. У трикутнику ADC відомі кути 80 і 50. Тому третій кут $\quad ADC =$ $= 180 - 80 - 50 = 50$. Тому цей трикутник рівнобедрений і $AD = AC = AF$. Трикутник ADF рівнобедрений і $\quad DAF = 80 - 20 = 60$, тому він рівносторонній і $\quad ADF = \quad AFD = 60$ і $\quad CDF = 60 - 50 = 10$, $AF = AD = DF$.
Знайдемо кут DFE: $\quad DFE = 180 - 80 - 60 = 40$.
Розглянемо трикутник AFE. У ньому відомі кути $\quad FAE = 60 - 20 = 40$ і $\quad AFE = 60 + 40 = 100$.
Тому $\quad AEF = 180 - 40 - 100 = 40$ і цей трикутник рівнобедрений, $AF = EF$.

Розглянемо трикутник DEF. Він рівнобедрений, тому що $DF = EF$. Кут при вершині F вже відомий - 40. Тому $\quad FDE = \quad FED = \frac{180-40}{2} = 70$.

Нарешті,

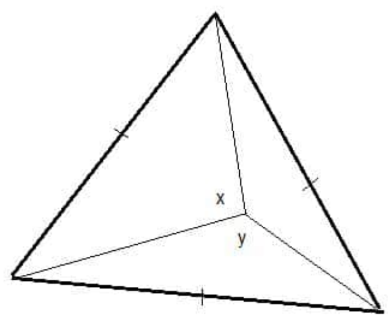
$$x = \quad DEF - \quad AEF = 70 - 40 = 30.$$

Мораль цієї задачі така: буває корисно провести допоміжні лінії або розглянути певні допоміжні кути, які на перший погляд можуть бути неочевидні.

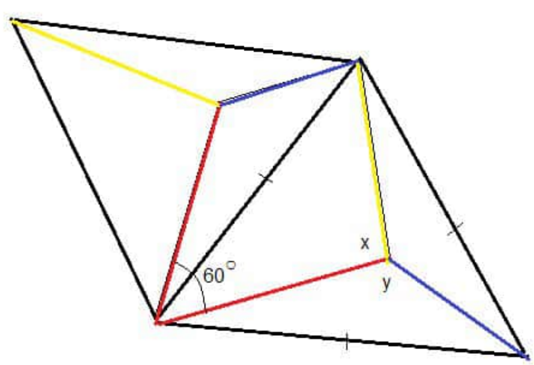
2. Про повороти

Розглянемо задачу, яку навряд чи можна розв'язати без запропонованого тут прийому.

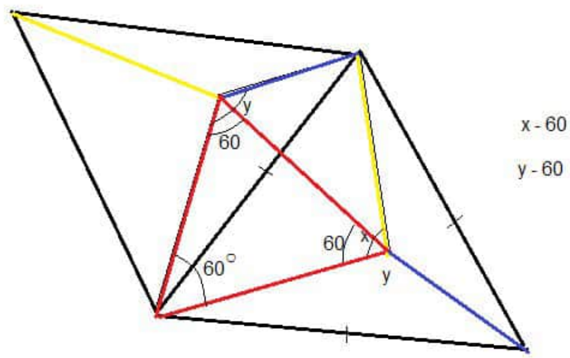
Задано рівносторонній трикутник. Довільна точка всередині нього сполучена з вершинами. Припустимо, що відомі два кути x і y. Тепер винесемо три відрізки, які сполучають точку з вершинами трикутника, назовні і утворимо з них новий трикутник. Знайти кути утвореного трикутника.



Основна ідея така: повернути весь трикутник навколо однієї з вершин на кут 60°. Для кращої наочності зобразимо три відрізки різними кольорами. Повернемо навколо лівої нижньої вершини проти руху годинникової стрілки.



Оскільки відрізок червоного кольору повернутий на кут60°, то зрозуміло, що відрізок, який з'єднує початкову точку із її образом при повороті, буде тої самої довжини, що й червоний відрізок. Отже, в результаті повороту ми одержали трикутник із трьома заданими відрізками різних кольорів.



Тепер із рисунка бачимо, що два кути "кольорового" трикутника є такі: $x-60$ і $y-60$. Тому третій кут буде такий: $180-(x-60)-(y-60) = 300-x-y$.

А тепер задачі для швидкого самостійного розв'язування ("на засипку"):

3. Андрій і Борис виконують певну роботу разом за 2 години, Андрій і Віктор - за 3 години, а Борис і Віктор - за 4 години. За який час вони виконають цю роботу всі разом?

4. Знайти значення виразу $x^{15}+2x^{10}+x^5$, якщо

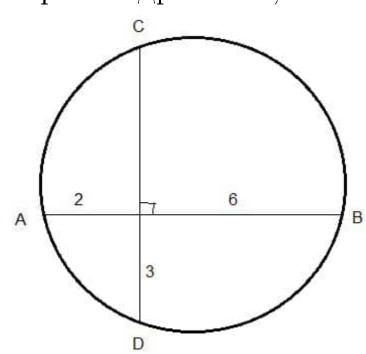
$$x(1-x)=\frac{1}{x^2+1}.$$

5. У прямокутному трикутнику гіпотенуза рівна 10 см, а висота, опущена на гіпотенузу - 6 см. Знайти площу цього трикутника.

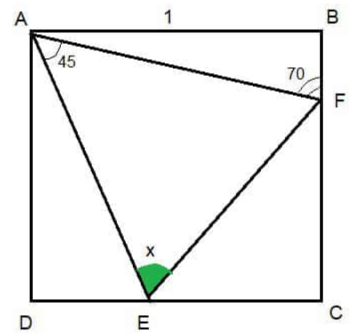
6. Розв'язати ірраціональне рівняння

$$\sqrt[4]{25+x}+\sqrt[3]{18-x}=5.$$

7. Проведено дві хорди кола AB і CD, які перетинаються під прямим кутом. Задано довжини трьох відрізків: 2, 3 і 6. Знайти радіус кола.



8. Ця задача за методами розв'язування подібна до задачі 2. У квадраті $ABCD$ зі стороною 1 вибрано точку E на стороні CD і точку F на стороні BC так, шо кут EAF рівний 45°, а кут AFB - 70°. Знайти: а) величину кута AEF; б) периметр трикутника EFC.

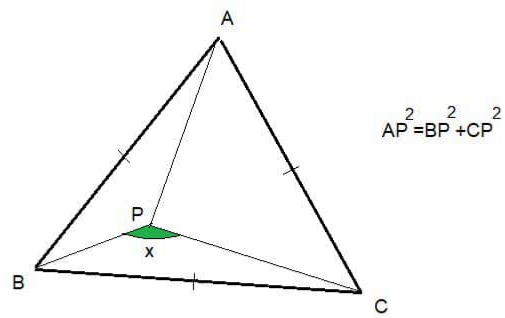


9. Розв'язати рівняння

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1+\frac{1}{2022}\right)^{2022}.$$

10. У квадраті $ABCD$ вибрано точки E і F на сторонах BC і CD так, що AF є бісектрисою кута EAD, причому $BE = 36$, $FD = 64$. Знайти довжину відрізка AE.

11. У рівносторонньому трикутнику ABC вибрано точку P так, що $AP^2 = BP^2 + CP^2$. Знайти кут BPC.



12. Знайти формулу загального члена числової послідовності -2, -7, 2, 67, 254, 653, 1378, 2567, 4382, ..., якщо відомо, що це є значення деякого полінома при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

13. Нехай $a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0$ і $b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$. Знайти $a + b$ - суму дійсних коренів.

14. Знайти за допомогою елементарних методів площу фігури, обмеженої кривою

$$x^2 + y^2 = |x| + |y|.$$

15. Нехай $\dfrac{a^3 + 3ab^2}{b^3 + 3a^2b} = \dfrac{63}{62}$. Знайти $\dfrac{a}{b}$.

Вказівка до **задачі 3**.

Розв'язувати за аналогією із задачами на рух, тобто припустити, що кожен виконує всю роботу за певний час; записати три рівняння і визначити з них ті невідомі часи; тоді час спільної роботи такий: $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Можна інакше: припустити, що кожен за одну годину виконує певний відсоток роботи.

Вказівка до **задачі 4**.

Записати рівняння четвертого степеня і зрозуміти, що $x^5 = -1$ (бо там сума членів геометричної прогресії).

Вказівка до **задачі 5**: такий трикутник не існує.

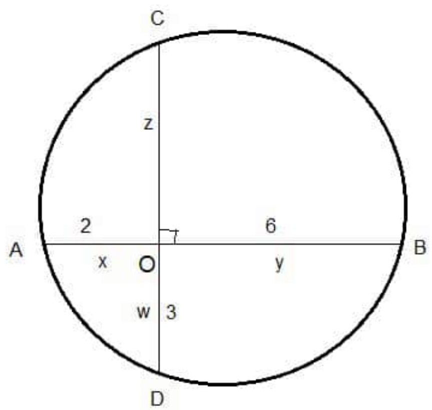
У **задачі 6** один цілий корінь легко знайти. Другий корінь знайти хоча би наближено.

2 методи розв'язування **задачі 7**:

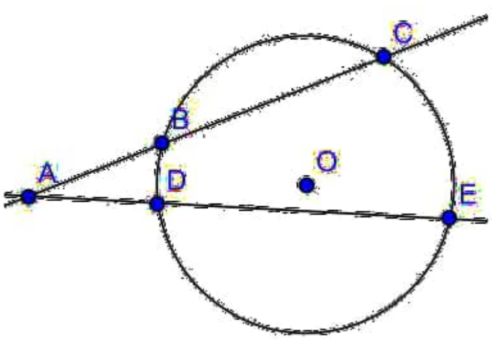
1) запровадити координатну систему вздовж цих двох хорд; записати три рівняння, які означають, що три точки із заданими координатами належать колу; із цієї системи виключити змінні x і y і знайти радіус;

2) використати рівності $xy = zw$ (див. рисунок) і $x^2+y^2+z^2+w^2 = 4r^2$, які легко довести.

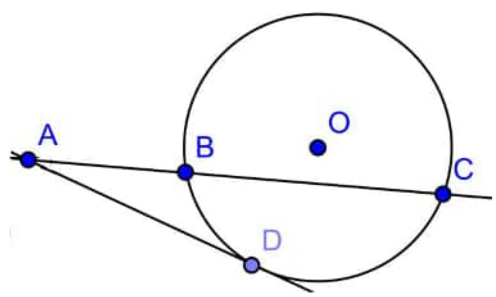
Якщо ці рівності невідомі вам, то даю вказівку. Щодо першої - це за теоремою про хорди, що перетинаються. Це легко довнсти за допомогою подібних трикутників. Теорема про хорди, що перетинаються, і теорема про січні, що перетинаються, є частковими випадками загальної теореми про степінь точки. Є безліч задач на ці теми, зокрема на математичних олімпіадах.



$AO \cdot BO = CO \cdot DO$,
причому кут перетину може бути довільним.



$AB \cdot AC = AD \cdot AE$



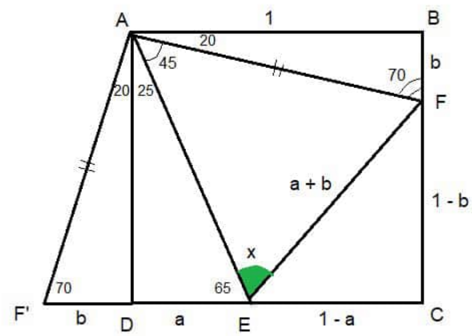
$AB \cdot AC = AD^2$

Значення цих добутків називають степенем точки A щодо даного кола.

Завдання для самостійної роботи: знайти степінь точки щодо кола. Як цей степінь виражається через координати точки і радіус кола? Або як степінь виражається через відстань від точки до центра кола і його радіус?

Вказівка до **задачі 8**:

Звісно, можна використати громіздку тригонометрію. Проте існує просте геометричне розв'язування. Ідея така: вийти за межі квадрата, повернути трикутник ABF на $90°$ за рухом годинникової стрілки. Утворився трикутник ADF'.



Кути 20, 25 і 65 вже відомі за умовою задачі. Позначимо $DE = a$, $BF = b$. Розглянемо трикутники $AF'E$ і AEF. Вони рівні за двома сторонами і кутом між ними. Тому кут AEF рівний куту AEF', тобто $x = 65°$.

Крім цього, маємо рівність сторін $F'E$ і EF:

$$F'E = EF = a + b.$$

Очевидно, що $EC = 1 - a$, $FC = 1 - b$. Можемо знайти периметр трикутника EFC:

$$p = EF + EC + FC = a + b + 1 - a + 1 - b = 2.$$

Ще можна провести такий уявний експеримент: забути про кут 70 і повертати кут 45 навколо точки A. Який буде периметр трикутника EFC у крайніх (граничних) позиціях, коли трикутник вироджується в двокутник?

Вказівка до **задачі 9**.

Ліву частину рівняння виразити через $x+1$:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1} =$$
$$= \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-(x+1)} = \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}.$$

Прирівнюючи до правої частини рівняння, бачимо, що

$$-x-1=2022,$$

звідки

$$x=-2023.$$

Вказівка до **задачі 10**.

Є принаймні три способи розв'язування: один чисто геометричний із поворотом трикутника ABE на $90°$, другий тригонометричний полягає в тому, щоб записати тангенси кута і подвійного кута, третій з використанням теореми косинусів.

Вказівка до **задачі 11**.

Перший спосіб розв'язування - координатний метод. Вибрати точку B як початок координат, вісь OX вздовж сторони BC. Точка $P(x,y)$. З умови випливає, що точка P лежить на колі з центром $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, яке проходить через точки B і C. Кут BPC спирається на хорду BC цього кола. Тому він рівний $180-\frac{60}{2}=150°$.

Другий спосіб за допомогою добудови. Побудувати рівносторонній трикутник PCQ (вниз) на стороні PC. Тоді з рівності трикутників APC і BCQ випливає, що $AP=BQ$. Із умови випливає, що трикутник BPQ прямокутний (за оберненою теоремою Піфагора). Тому кут $BPC=90+60=150$.

Вказівка до **задачі 12**.

Знайти послідовні різниці членів цієї послідовності, різниці знайдених різниць, потім різниці різниць попередніх різниць і т.д. І так до одержання однакових чисел у всіх різницях. Кількість разів обчислення різниць дорівнює степеню многочлена. Його коефіцієнти знайти із системи лінійних рівнянь.

Вказівка до **задачі 13**.

Використати симетрію; розглянути функцію $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$; виразити цю функцію через $x - 1$; ввести функцію $g(x) = f(x+1)$, яка є непарною; з умови $g(a-1) = 14 = -g(b-1)$ випливає, що $a - 1 = 1 - b$.

Вказівка до **задачі 14**.

Розглянути випадки: а) $x \geq 0$, $y \geq 0$, б) $x \geq 0$, $y < 0$, ...; зобразити на координатній площині 4 круги, які частково накладаються; шукана площа є сумою площі квадрата зі стороною $\sqrt{2}$ і чотирьох півкругів радіуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Вказівка до **задачі 15**.

а) Використати таку властивість пропорції:
якщо $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{w}$, то $\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{z+w}{z-w}$.

б) Звести до розв'язування кубічного рівняння. Для цього можна поділити чисельник і знаменник на b^3 або позначити $a = kb$.

Додаток

Крім тем, розглянутих на заняттях, для зацікавлення учнів математикою і для загального розвитку бажано показати хоча би кращим з них на гуртках або факультативах **багато інших цікавих тем**, які не входять до стандартної програми. Наприклад, на доступному для учнів рівні розповісти про такі теми:

• Ознаки подільності цілих чисел на 2, 3, 5, 7, 11, 13, .. Доведення нескінченності множини простих чисел. Знаходження всіх піфагорових трійок. Основна теорема арифметики, мала теорема Ферма, теорема Ейлера.

• Задачі на логіку.

• Побудови за допомогою циркуля і лінійки. Про три класичні задачі: подвоєння куба, трисекцію кута, квадратуру круга і їх розв'язки.

• Різні способи доведення важливих нерівностей. Зокрема, нерівностей Коші про суму добутків довільних чисел, про співвідношення між середнім арифметичним, середнім геометричним, середнім гармонійним та середнім квадратичним n додатних чисел. Середнє арифметичне, середнє геометричне та середнє гармонійне як часткові випадки середнього степеневого.

• Елементи комбінаторики про знаходження числа комбінацій і розміщень.

• Рекурсія. Спосіб знаходження формул для обчислення степенів перших натуральних чисел:

$$
\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+n &= \tfrac{n(n+1)}{2} &&= \tfrac{n^2}{2}+\tfrac{n}{2},\\
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} &&= \tfrac{n^3}{3}+\tfrac{n^2}{2}+\tfrac{n}{6},\\
1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 &= \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 &&= \tfrac{n^4}{4}+\tfrac{n^3}{2}+\tfrac{n^2}{4}
\end{aligned}
$$

і т.д.

Звісно, якщо формула вже відома, то її легко довести методом математичної індукції. Як знайти формули для вищих степенів?

• Полярні координати на площині. Побудова графіків.

• Розв'язування систем лінійних рівнянь з двома і трьома невідомими, метод Гауса і метод Крамера.

• Розв'язування рівнянь третього і четвертого степеня за допомогою резольвент.

• Конічні перерізи: еліпс, парабола, гіпербола. Означення та властивості.

• Діагональний метод в математиці. Зокрема, доведення незліченності множини всіх дійсних чисел (поняття "нескінченна множина" $\neq$ "незліченна множина").

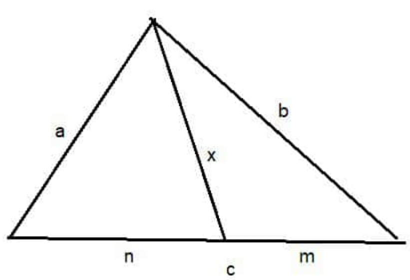
• Розв'язування різного типу рівнянь і нерівностей. Для правильного розв'язування учні повинні засвоїти і запам'ятати властивості основних елементарних функцій.

• Крім цього, є безліч олімпіадних задач для охоплення інших галузей математики, які тут не згадано. Див., наприклад, М.Л.Крайзман, "Деякі методи та прийоми розв'язування задач із математики", та інші збірники задач.

• І, можливо, найважливіше - стимулювати самостійне обдумування учнями задач. Корисно підібрати теми і декілька десятків задач для розв'язування відповідно до рівня 5-го, 6-го, ... класів (з якими працюєте) і організовувати тривалі конкурси для учнів (дайте їм час для самостійного обдумування!), вказувати на допущені помилки.

• Детальніше про геометрію. У середніх класах школи необхідно, щоб учні добре засвоїли базові поняття і твердження, вміли довести теорему Фалеса, теореми Піфагора, синусів, косинусів, тригонометричні формули та інше. Крім основного матеріалу з геометрії і тригонометрії, доцільно показати теореми Менелая, Паппа та інші. Або поставити задачу довести якісь з подібних тверджень.

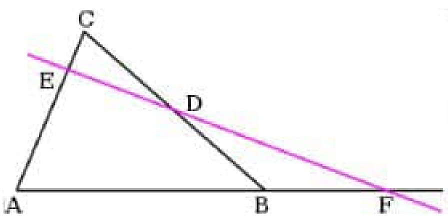
Почнемо із **теореми Стюарта**, яку легко довести, використавши тільки теорему Піфвгора:



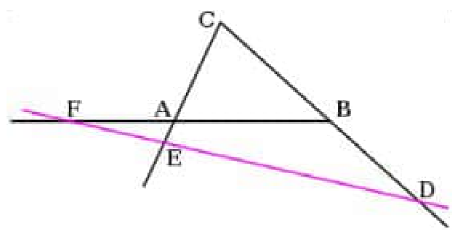
$$cx^2 = a^2m + b^2n - mnc$$

Приведемо формулювання теорем Менелая, Паппа та ін. та вказівки на деякі способи їх доведення. Доведення продумати самостійно або знайти в математичній літературі. Є корисні сайти в Інтернеті і канали в YouTube.

Теорема Менелая



Теорема Менелая. Вип.1



Теорема Менелая. Вип.2

Точки D, E, F лежать на сторонах BC, AC, AB трикутника ABC. Ці точки колінеарні тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

Якщо вважати, що довжина відрізка AB додатна або від'ємна залежно від того, чи точка A розміщена ліворуч чи праворуч від точки B у певній вибраній орієнтації прямої, то знакова версія теореми М. виглядає так:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1.$$

Доведення цієї теореми можна виконати, розглядаючи подібні трикутники або за допомогою теореми Фалеса.

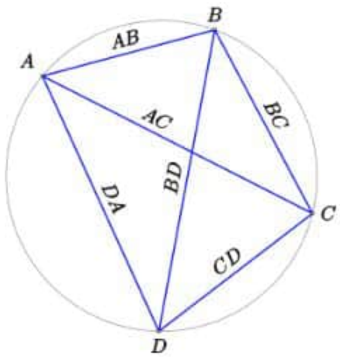
Тригонометрична версія цієї самої теореми:

$$\frac{\sin\quad ACF}{\sin\quad FCB}\cdot\frac{\sin\quad BAD}{\sin\quad DAC}\cdot\frac{\sin\quad CBE}{\sin\quad EBA}=-1,$$

де всі кути орієнтовані.

Зауважимо, що сам Менелай формулював і сферичний варіант цієї теореми, причому не на мові співвідношень синусів, а на мові співвідношень хорд.

Теорема Птолемея — теорема елементарної геометрії, яка стверджує, що добуток довжин діагоналей вписаного в коло чотирикутника дорівнює сумі добутків довжин його протилежних сторін:

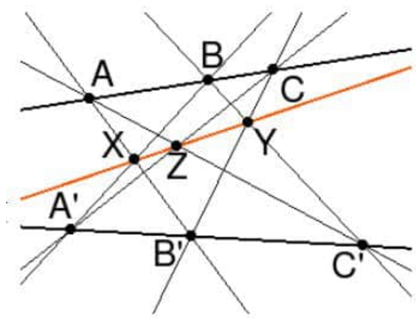


$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$$

Два способи доведення див. у книзі М.Крайзмана.

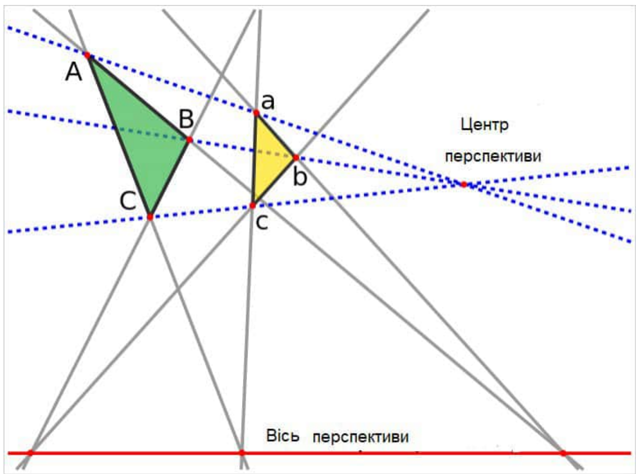
Теорема Паппа — це класична теорема проєктивної геометрії. Вона формулюється так:

Нехай A, B, C — три точки на одній прямій, A' , B' , C' — три точки на іншій прямій. Нехай три прямі AB' , BC' , CA' перетинають три прямі A'B, B'C, C'A, відповідно у точках X, Y, Z. Тоді точки X, Y, Z лежать на одній прямій.



Це твердження можна довести за допомогою видалення точок на нескінченність або за допомогою теореми Менелая.

Теорема Дезарга - теорема проєктивної геометрії.

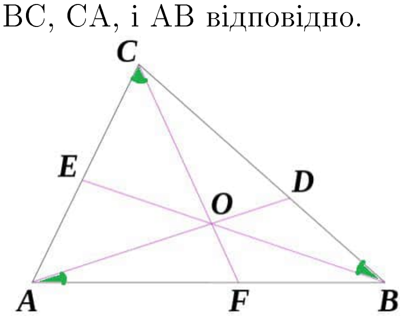


На рисунку два перспективні трикутники. Відповідні сторони трикутника після продовження перетинаються в точках, які лежать на прямій, яку називають віссю перспективи. Прямі, проведені через відповідні вершини трикутників, перетинаються в точці, яку називають центром перспективи. Теорема Дезарга стверджує, що перша умова є необхідною і достатньою для другої умови.

Доведення за допомогою переходу до тривимірного простору.

Теорема Чеви - відома теорема класичної геометрії.

Нехай дано трикутник ABC і точки D, E, і F, що лежать на прямих BC, CA, і AB відповідно.



Теорема стверджує, що лінії AD, BE і CF конкурентні (тобто перетинаються в одній точці) тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Цю теорему можна довести, розглядаючи площі утворених трикутників, або двічі застосувавши теорему Менелая або методом геометрії мас (як це зробив сам Чева).

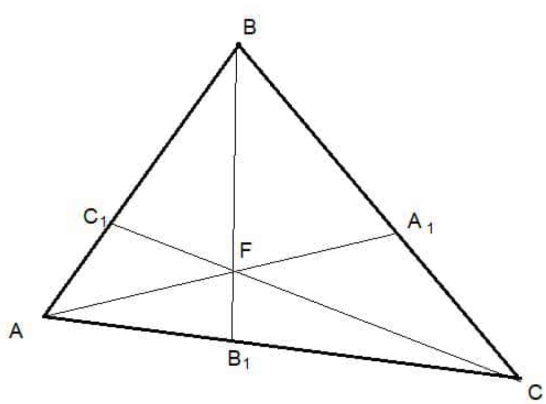
Є тригонометричне формулювання цієї теореми:

$$\frac{\sin \quad BAD}{\sin \quad CAD} \cdot \frac{\sin \quad ACF}{\sin \quad BCF} \cdot \frac{\sin \quad CBE}{\sin \quad ABE} = 1.$$

Теорема Понселе. Теорему Чеви можна узагальнити на випадок багатокутника з непарною кількістю сторін. Відповідне твердження називають теоремою Понселе. Її формулювання таке. Прямі, що з'єднують яку-небудь точку з вершинами багатокутника з непарною кількістю сторін, утворюють на його протилежних сторонах такі відрізки, що добуток відрізків, які не мають спільних кінців, дорівнює добутку решти відрізків.

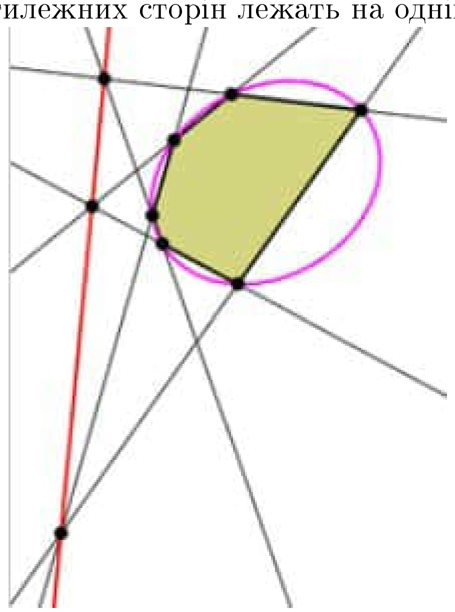
Із тим самим автором пов'язаний і такий результат. Теорема Штейнера — Понселе — теорема з галузі геометричних побудов стверджує, що будь-яку побудову, що виконується на площині циркулем і лінійкою, можна виконати за допомогою одної лише лінійки, якщо нарисовано хоча би одне коло і позначено його центр.

Теорема Ван-Обеля про властивість чевіанів, що перетинаються.



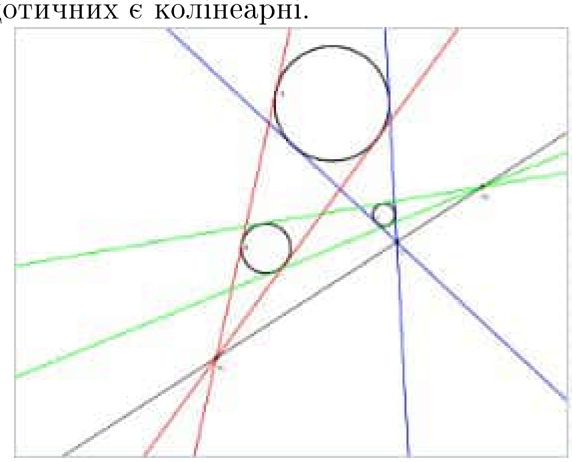
$$\frac{BF}{FB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} + \frac{BC_1}{C_1A}$$

Теорема Паскаля — теорема проєктивної геометрії, яка стверджує, що якщо шестикутник вписаний в коло або будь-який інший конічний переріз (еліпс, параболу, гіперболу, навіть пару прямих), то точки перетину трьох пар протилежних сторін лежать на одній прямій.



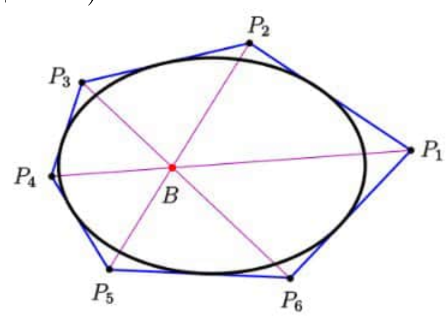
Це узагальнення теореми Паппа можна довести за допомогою підрахунку подвійних відношень або теореми Менелая або проєктивного перетворення описаної коніки в коло.

Теорема Монже (Монжа). Для будь-яких трьох кіл на площині, жодне з яких не знаходиться всередині інших, три точки перетину трьох пар зовнішніх дотичних є колінеарні.



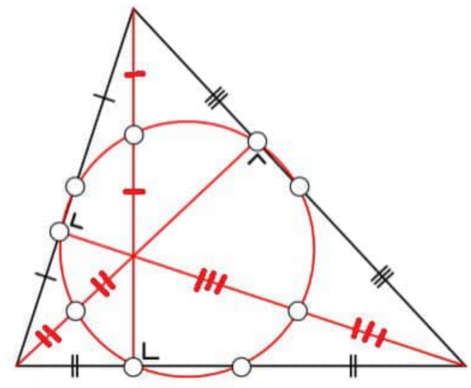
Це ще один приклад корисності переходу до тривимірного простору для доведення планіметричнго результату. Аналогічно і щодо наступного твердження.

Теорема Бріаншона. Три прямі, які сполучають у пари протилежні вершини шестикутника, описаного навколо конічного перерізу, мають спільну точку, т. з. точку Бріаншона (або паралельні; тоді їх спільна точка безмежно віддалена).



Разом з теоремою Паскаля теорема Бріаншона встановлює основні проєктивні властивості конічних перерізів.

Ще одна цікава тема: про **коло дев'яти точок** (або коло Ейлера, або Ейлера-Фейєрбаха), яке можна побудувати для довільного трикутника. Див. ілюстрацію:

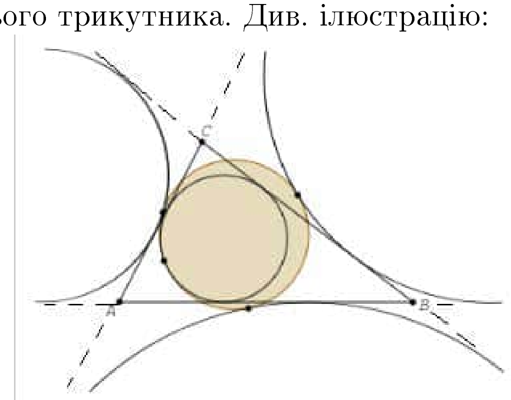


Дев'ять точок

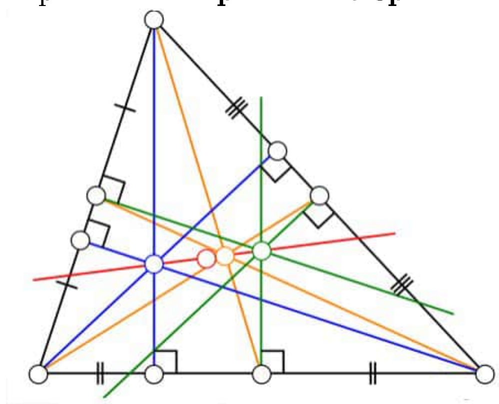
Довести самостійно або знайти доведення такого твердження: у довільному трикутнику основи висот, середини сторін та середини відрізків, що сполучають ортоцентр трикутника з відповідними вершинами, лежать на одному колі.

(Див. доведення, наприклад, у Вікіпедії або на сайтах в Інтернеті.)

Можна також довести таку теорему Файєрбаха: коло дев'яти точок довільного трикутника дотикається до вписаного кола і всіх трьох зовнівписаних кіл цього трикутника. Див. ілюстрацію:



Ще один цікавий геометричний об'єкт у довільному трикутнику, відмінному від рівностороннього - **пряма Ейлера**:



Пряма Ейлера (червона) — це пряма, яка проходить через центроїд (помаранчевий), ортоцентр (синій), центр описаного кола (зелений) та центр кола дев'яти точок (червоний).

За допомогою векторів можна довести, що центр описаного кола, центроїд та ортоцентр лежать на прямій Ейлера. Також доведено, що точка Лонгшампа, точка Шифлера, точка Ексетера та перспектор Госсара знаходяться на тій самій прямій. Проте центр вписаного кола, взагалі кажучи, не лежить на ній. Він лежить на прямій Ейлера тільки у випадку рівнобедреного трикутника.

У рівносторонньому трикутнику вказані точки збігаються і тому не можна говорити про таку пряму. Самостійно подумайте, що можна стверджувати про пряму Ейлера у випадку прямокутного трикутника або рівнобедреного трикутника.

Формули Мольвейде - це співвідношення, що пов'язують довжини сторін довільного трикутника і тригонометричні функції кутів. Якщо позначити кути трикутника A, B, C, а довжини сторін a, b, c, то

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Аналогічні формули для суми і різниці інших сторін.

Формула Бретшнайдера - формула для площі довільного чотирикутника, яка узагальнює формули Брахмагупти та Герона. Якщо a, b, c, d - довжини сторін, p - півпериметр, α і γ - два протилежні кути, то

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot \cos^2(\frac{\alpha+\gamma}{2})}$$

або ж, в термінах довжин сторін і діагоналей e, f,

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2 - (b^2+d^2-a^2-c^2)} =$$

$$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)}.$$

Цю формулу можна довести за допомогою відомої формули для площі трикутника та теореми косинусів.

Доведення згаданих вище теорем або хоча би частини з них було би надзвичайно корисним для учнів.

• І це лише окремі теми вже давно відомої класичної математики. Для повноцінної підготовки до вивчення сучасної математики було би добре ознайомлювати учнів і з новими проблемними галузями. Наприклад, із інформатики, теорії алгоритмів, обчислювальної математики, теорії ігор.

Про математичну літературу

Можу порекомендувати підручник "Авторская геометрия" Г.Філіповського, вчителя математики київського фізико-математичного ліцею, у якому багато цікавих задач. А також книги Крайзмана "Розв'язування...", "Деякі методи та прийоми розв'язування...", Кушніра "Методи розв'язування..." та ін., Глейзера "Історія математики в школі", Кованцова "Математика і романтика", Конфоровича "Колумби математики", "Визначні математичні задачі", D$\ddot{o}$rrie "100 great problems of elementary mathematics". І ще книги таких авторів як Понарин, Савватеев, Пойа (Polya), Курант (Courant), Радемахер (Rademacher), Нельсен (Nelsen), Айгнер (Aigner).

Крім цього, є багато корисних статей в журналах "Математика в рідній школі" (попередні назви "Математика в школі", Математика в сучасній школі"), "Математика в школах України", рос.мовою "Математика", "Математика в школе", "Математическое просвещение", "Квант", а також англ. "American Mathematical Monthly". (За копіями вказаних вище та багатьох інших книг та журналів звертатися до Т.С. Запис на флешку.)

Є багато книг - збірників олімпіадних задач. На наступних двох сторінках показано задачі Міжнародної математичної олімпіади 2022р. Задачі та статистику за минулі роки див. на сайті https://www.imo-official.org.

Ukrainian (ukr), day 1

понеділок, 11 липня 2022

Задача 1. Ощадбанк Осло випускає два типи монет: алюмінієві (позначаються як A) та бронзові (позначаються як B). У Михайлини є n алюмінієвих та n бронзових монет, які деяким чином викладено в рядок. *Ланцюжком* назвемо будь-яку послідовну групу монет одного типу. Для фіксованого натурального числа $k \leqslant 2n$, Михайлина повторює таку операцію: вона вибирає найдовший ланцюжок, що містить k-ту монету зліва, і переміщує всі монети з цього ланцюжку до лівого краю рядка. Наприклад, процес для $n = 4$ та $k = 4$, починаючи з рядка $AABBBABA$, мав би вигляд

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Знайдіть усі такі пари натуральних чисел (n, k) з $1 \leqslant k \leqslant 2n$, що для довільного можливого початкового розташування монет в рядок, в деякий момент перші n монет будуть одного типу.

Задача 2. Через $\mathbb{R}^+$ позначимо множину додатних дійсних чисел. Знайдіть усі функції $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такі, що для всіх чисел $x \in \mathbb{R}^+$ існує єдине число $y \in \mathbb{R}^+$, для якого справджується нерівність

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Задача 3. Задано натуральне число k та скінченну множину S, що складається з непарних простих чисел. Доведіть, що існує не більше одного способу (з точністю до поворотів та симетрій) розставити всі елементи множини S по колу таким чином, щоб добуток довільних двох сусідніх чисел подавався у вигляді $x^2 + x + k$ для деякого натурального числа x.

вівторок, 12 липня 2022

Задача 4. Дано опуклий п'ятикутник $ABCDE$, в якому $BC = DE$. Нехай всередині $ABCDE$ знайшлась така точка T, що $TB = TD$, $TC = TE$ і $\angle ABT = \angle TEA$. Нехай пряма AB перетинає прямі CD та CT в точках P та Q, відповідно. Припустимо, що точки P, B, A, Q лежать на прямій AB у вказаному порядку. Нехай пряма AE перетинає прямі CD та DT в точках R та S, відповідно. Припустимо, що точки R, E, A, S лежать на прямій AE в цьому порядку. Доведіть, що точки P, S, Q, R лежать на одному колі.

Задача 5. Знайдіть усі трійки (a, b, p) натуральних чисел, де p є простим числом і виконується рівність

$$a^p = b! + p.$$

Задача 6. Дано натуральне число n. Дошку $n \times n$, в клітинках якої записано по одному числу, назвемо *Нордичним Квадратом*, якщо вона містить усі натуральні числа від 1 до n^2. Дві різні клітинки вважаються сусідніми, якщо у них є спільна сторона. Назвемо клітинку *долиною*, якщо число в кожній сусідній до неї клітинці більше за число в цій клітинці.

Назвемо *підйомом* послідовність з однієї чи більше клітинок таку, що:

(i) перша клітинка в послідовності є долиною,

(ii) кожна наступна клітинка послідовності є сусідньою до попередньої,

(iii) числа в клітинках послідовності йдуть в зростаючому порядку.

Знайдіть, як функцію від n, мінімальну можливу кількість підйомів в Нордичному квадраті.

Про реферат і підготовку до іспиту

Завдання до сесії: написати реферат на тему "Типові учнівські помилки при роз'язування задач із геометрії, алгебри, початків аналізу".

Надіслати на е-мейл taras.kudryk@lnu.edu.ua за 5 днів до іспиту, який має бути в січні.

Можна користуватися будь-якими джерелами, але писати свій власний реферат, а не просто скопіювати чийсь. Обов'язково вказати всі використані джерела: літературу, сайти в Інтернеті.

Майже всі вказані вище книги виставлено на сайті Teams.

Книги Конфоровича, Кушніра, Крайзмана та декілька інших українською мовою.

Більшість книг російською мовою. Перекладати грамотно!

Для тих, хто хоч трохи володіє англійською мовою, є одна книга англійською.

Для підготовки до іспиту рекомендую придбати книгу Крайзмана М.Л. "Деякі методи та прийоми розв'язування задач із математики", для якої немає електронної копії, на сайті

www.chyslo.com.ua, e-mail: zakaz@chyslo.com.ua

або https://www.facebook.com/chyslo