Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу

Ярослав Микитюк

Теорія міри та інтеграла

Конспект лекцій та практичних занять

Львів 2023

1. Вступ.

В даному рукописі викладений основний зміст лекцій і практичних занять з курсу теорії міри та інтеграла.

Теорія міри та інтеграла виникла в результаті досліджень цілого ряду математиків. Але у першу чергу її пов'язують з іменем французького математика Анрі Лебега. Його теорія, яку тепер називають теорією інтеграла Лебега, була створена в 1900-1910 роках і є основою сучасних курсів теорії міри та інтеграла.

Потрібно відзначити, що математики Львова дуже швидко оцінили важливість теорії і вже у 1911/1912 н. році Вацлав Серпінський прочитав у львівському університеті курс "Поняття міри точкових множин", у 1913/14 н. році – "Інтеграл Лебега". Г. Штайнгауз теорію інтеграла Лебега читав у курсі "Вступ до теорії функцій дійсної змінної" у 1917 році, а у 1918 році оголосив окремий курс "Інтеграл Лебега". Наскільки у Львові знання теорії інтеграла Лебега було необхідне бачимо з першого речення монографії С. Банаха "Припускаємо, що читач знає теорію міри і теорію інтеграла Лебега". Тому львівські математики були добре обізнані з даним предметом. У 1938 році сенат Львівського університету надав Анрі Лебегу ступінь почесного доктора за його наукові заслуги. У травні 1938 року Лебег приїхав до Львова на вручення диплому почесного доктора і прочитав дві лекції.

Література

[1] Березанський Ю., Ус Г., Шефтель З. *Функціональний аналіз.* Підручник. Університетська бібліотека, Львів, 2014.

[2] Лянце В. Кудрик Т, Чуйко Г. *Функціональний аналіз.* Навч. посібник. - Львів, Видавничий центр ЛНУ, 2007.

[3] Кадець В. *Курс функціонального аналізу та теорії міри.* Навч. посібник. - 2012.

[4] Сторож О. *Збірник задач з теорії міри і функціонального аналізу.* Навч. посібник. - Львів, Видавничий центр ЛНУ, 2011.

2. Системи множин.

Операції над множинами. Для множин A і B через $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ і $A \Delta B$ позначаються відповідно об'єднання, перетин, різниця і симетрична різниця цих множин, які вводяться такими рівностями:

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}, \qquad A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$
$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}, \qquad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Основними теоретико-множинними операціями є операції об'єднання, перетину та різниці. Операція симетричної різниці є додатковою операцією. Вона є зручною, оскільки дозволяє скоротити записи і спростити викладки.

Операції $\cup, \cap$ і Δ комутативні і асоціативні. Крім того, виконуються дистрибутивні закони

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Рівність $A \cap B = \emptyset$ означає, що множини A і B не мають спільних елементів або, іншими словами, не перетинаються. Такі множини називають неперетинними або **диз'юнктними**. Об'єднання двох неперетинних множин A і B називається **диз'юнктним** і позначається символом $A \sqcup B$. Таким чином, запис $C = A \sqcup B$ означає, що $C = A \cup B$ і $A \cap B = \emptyset$.

Якщо ми розглядаємо множини A, які є підмножинами деякої фіксованої множини X, то різниця $X \setminus A$ називається доповненням множини A в множині X або просто доповненням множини A. Доповнення $X \setminus A$ ми будемо коротко позначати A'.

Перехід до доповнення можна розглядати як п'яту теоретико-множинну операцію (в доповнення до чотирьох вже згаданих).

Ясно, що $A'' = A$, $X' = \emptyset$, $\emptyset' = X$.

Системи і сім'ї множин. Під системою множин розуміють множину, елементи якої є множинами. Нехай $\mathcal{A}$ – деяка система множин. Якщо всі її елементи є підмножинами множини X, то кажуть, що $\mathcal{A}$ – це система множин в X. Найбільша з таких систем – це множина 2^X, яка складається з усіх підмножин множини X.

Нехай $\mathcal{A}$ – система множин. Множина

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} \quad x \in A\}$$

називається об'єднанням множин системи $\mathcal{A}$.

Множина

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} \quad x \in A\}$$

називається перетином множин системи $\mathcal{A}$.

Система множин $\mathcal{A}$ називається диз'юнктною, якщо будь-які її різні елементи не перетинаються. Об'єднання множин диз'юнктної системи $\mathcal{A}$ позначається символом

$$\bigsqcup_{A\in\mathcal{A}} A.$$

Нехай I – довільна множина індексів. Припустимо, що кожному індексу i множини I поставлено у відповідність деяку множину A_i. Тоді кажуть, що задано сім'ю множин $\{A_i\}_{i\in I}$. У випадку $I = \mathbb{N}$ сім'ю $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ називають послідовністю множин і позначають ще $(A_n)_{n=1}^{\infty}$.

Операції об'єднання і перетину переносяться на довільні сім'ї множин. А саме, множина

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \quad x \in A_i\}$$

називається об'єднанням множин сім'ї $\{A_i\}_{i\in I}$, а множина

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I \quad x \in A_i\}$$

називається перетином множин сім'ї $\{A_i\}_{i\in I}$.

Справедливі закони де Моргана:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' = \bigcap_{i\in I} A_i', \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)' = \bigcup_{i\in I} A_i'.$$

Для об'єднання і перетину скінченних і нескінченних послідовностей множин вживаються позначення

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad \bigcap_{k=1}^{n} A_k, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Якщо $A_j \cap A_k = \emptyset$ при $i \neq k$, то сім'я $(A_i)_{i\in I}$ називається диз'юнктною, а її об'єднання позначається символом $\bigsqcup_{i\in I} A_i$.

Справедлива наступна проста і корисна формула

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \left(A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right). \tag{2.1}$$

Доведемо цю рівність. Нехай $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $B_0 := \emptyset$ і $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Тоді

$$\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset B_3 \ldots$$

Очевидно, що $B_n = (B_n \setminus B_{n-1}) \bigsqcup B_{n-1}$ і $B_1 = B_1 \setminus B_0$. Тому, використовуючи математичну індукцію, отримуємо рівність

$$B_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} (B_k \setminus B_{k-1}).$$

Нехай $B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(B_k \setminus B_{k-1})$. Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$A_n \subset B_n \subset B \quad \text{і} \quad B_n \setminus B_{n-1} \subset A_n \subset A,$$

то $A \subset B \subset A$, тобто $A = B$. Враховуючи, що $B_n \setminus B_{n-1} = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, отримуємо потрібну нам рівність.

Якщо $A_n \subset A_{n+1}$ ($A_{n+1} \supset A_n$) для кожного номера n, то кажуть, що послідовність множин $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ зростає (спадає) і записують це у вигляді $A_n \uparrow$ ($A_n \downarrow$) .

З формули (2.1) негайно випливає, що при $A_n \uparrow$ і $A_0 = \emptyset$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(A_k \setminus A_{k-1}). \tag{2.2}$$

Якщо $A_n \downarrow$, то, як легко перевірити,

$$A_1 = \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(A_k \setminus A_{k+1})\right) \bigsqcup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right). \tag{2.3}$$

Верхньою границею $\overline{\lim}$ послідовності множин $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ називається множина всіх тих точок, які входять в нескінченне число множин A_n. Нижньою границею $\underline{\lim}$ послідовності множин $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ називається множина всіх тих точок, які входять у кожну множину A_n за винятком скінченного їх числа. З означення негайно випливають формули

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \tag{2.4}$$

Якщо верхня і нижня границі послідовності множин $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівні, то кажуть, що послідовність збіжна і покладають

$$\lim A_n := \overline{\lim}\, A_n = \underline{\lim}\, A_n.$$

Домовимося далі розглядати різні системи підмножин деякої фіксованої множини X.

Кільця і алгебри множин.

Означення 2.1. *Непорожня система множин $\mathcal{A}$ називається кільцем, якщо з $A \in \mathcal{A}$ і $B \in \mathcal{A}$ випливає, що $A \cup B \in \mathcal{A}$ і $A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

Якщо $\mathcal{A}$ - кільце, то для будь-яких $A, B \in \mathcal{A}$ маємо $A\Delta B \in \mathcal{A}$ і $A \cap B \in \mathcal{A}$. Це випливає з рівностей

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,, \qquad A \cap B = (A \cup B) \setminus (A\Delta B)\,.$$

Крім того, $\emptyset \in \mathcal{A}$, бо $\emptyset = A \setminus A$.

Вправа 2.2. *Нехай система множин $\mathcal{A}$ для будь-яких $A, B \in \mathcal{A}$ задовольняє одну з умов :*

(1) $A\Delta B, A\cap B\in\mathcal{A}$;
(2) $A\Delta B, A\cup B\in\mathcal{A}$;
(3) $A\Delta B, A\setminus B\in\mathcal{A}$.

Доведіть, що $\mathcal{A}$ - кільце.

Означення 2.3. *Кільце $\mathcal{A}$ називається алгеброю, якщо воно містить X. При цьому X називають одиницею алгебри $\mathcal{A}$.*

Зрозуміло, що кільце є замкнене стосовно довільних скінченних об'єднань і перетинів, тобто, якщо $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{A}$, то $\cup_{i=1}^n A_i$ і $\cap_{i=1}^n A_i$ теж належать $\mathcal{A}$.

Приклад 2.4. (1) *Сім'я 2^X всіх підмножин множини X є алгеброю множин.*
(2) *Сім'я всіх скінченних множин натуральних чисел є кільцем (але не алгеброю).*
(3) *Сім'я всіх обмежених підмножин дійсної прямої є кільцем (але не алгеброю).*

2.0.1. **σ-кільця і σ-алгебри.** У теорії міри виникає потреба в розгляді не тільки скінченних, але й зліченних об'єднань та перетинів.

Означення 2.5. *Кільце $\mathcal{A}$ називається σ-кільцем, якщо для довільної послідовності множин $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, що належить до цього кільця, їхнє об'єднання $\cup_{n=1}^\infty A_n$ також належить до $\mathcal{A}$.*

Означення 2.6. *Алгебра $\mathcal{A}$ називається σ-алгеброю, якщо вона є також σ-кільцем.*

Вправа 2.7. *Нехай $\mathcal{A}$ - система множин. Доведіть, що :*
(1) *існує єдине кільце (σ-кільце), яке містить $\mathcal{A}$ і міститься в кожному кільці (σ-кільці), що містить $\mathcal{A}$;*
(2) *існує єдина алгебра (σ-алгебра), яка містить $\mathcal{A}$ і міститься в кожній алгебрі (σ-алгебрі), що містить $\mathcal{A}$.*

Означення 2.8. *Нехай $\mathcal{A}$ - система множин. Кільце (σ-кільце), яке містить $\mathcal{A}$ і міститься в кожному кільці (σ-кільці), що містить $\mathcal{A}$, називається кільцем (σ-кільцем) породженим системою $\mathcal{A}$. Алгебра (σ-алгебра), яка містить $\mathcal{A}$ і міститься в кожній алгебрі (σ-алгебрі), що містить $\mathcal{A}$, називається алгеброю (σ-алгеброю) породженою системою $\mathcal{A}$.*

Вправа 2.9. *Нехай $\mathcal{A}$ - система множин. Доведіть, що $\mathcal{A}$ є алгеброю, якщо виконані умови :*
(1) $X\in\mathcal{A}$;
(2) $A\cup B\in\mathcal{A}$ *для довільних* $A,B\in\mathcal{A}$;
(3) $A'\in\mathcal{A}$ *для довільних* $A\in\mathcal{A}$.

Півкільця та їх властивості. При конструюванні мір доводиться спочатку визначати міру на системах множин, які не є кільцями або алгебрами, а є більш загальними структурами.

Означення 2.10. *Нехай $\mathcal{A}$ - система множин. Система $\mathcal{A}$ називаєтся півкільцем, якщо виконані умови:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
(2) $A \cap B \in \mathcal{A}$ *для довільних* $A, B \in \mathcal{A}$;
(3) *для будь-яких* $A \in \mathcal{A}$ *і* $B \in \mathcal{A}$, *існує така диз'юнктна послідовність множин* $(P_j)_{j=1}^n$, *що* $A \setminus B = \bigsqcup_{j=1}^n P_j$.

Означення 2.11. *Нехай $\mathcal{A}$ - система множин. Система $\mathcal{A}$ називаєтся півкільцем з одиницею, якщо $\mathcal{A}$ є півкільцем і $X \in \mathcal{A}$.*

Приклад 2.12. *Назвемо інтервалами на дійсній прямій множини вигляду*

$$(a,b),\ [a,b),(a,b],\ [a,b],\ (-\infty,a),\ (-\infty,a],\ (a,\infty),\ [a,\infty),\ (-\infty,\infty),$$

де $a, b \in \mathbb{R}$ і $a \leq b$. Прямокутником в $\mathbb{R}^2$ назвемо декартів добуток $\Delta_1 \times \Delta_2$ двох довільних інтервалів Δ_1 і Δ_2 в $\mathbb{R}$. Легко перевірити, що множина всіх інтервалів на прямій утворює півкільце. Також множина всіх прямокутників в $\mathbb{R}^2$ утворює півкільце.

Вправа 2.13. *Нехай $\mathcal{A}_j$ $(j = 1, 2)$ - півкільця. Доведіть, що система*

$$\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1,\ \ A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

є півкільцем.

Вправа 2.14. *Нехай $\mathcal{P}$ - півкільце і $P \in \mathcal{P}$. Доведіть, що довільну диз'юнктивну скінченну послідовність $(Q_j)_{j=1}^m$ підмножин в P можна доповнити елементами $Q_{m+1}, \ldots, Q_n$ з $\mathcal{P}$ таким чином, що $P = \bigsqcup_{j=1}^n Q_j$.*

Вправа 2.15. *Нехай $\mathcal{P}$ - півкільце і $A_1, \ldots, A_n$ – елементи півкільця $\mathcal{P}$. Тоді в $\mathcal{P}$ існує вписана в систему $(A_j)_{j=1}^n$ диз'юнктна система $(P_j)_{j=1}^m$, така, що для кожного $k = 1, \ldots, n$ існує така підмножина J_k множини $1, \ldots, m$, що $A_k = \bigsqcup_{j \in J_k} P_j$.*

Вправа 2.16. *Нехай $\mathcal{P}$ - півкільце і $\mathcal{R}$ – кільце, що породжене півкільцем $\mathcal{P}$. Тоді $\mathcal{R}$ складаєтся з усіх множин вигляду $\bigsqcup_{j=1}^n P_j$, де $(P_j)_{j=1}^n$ - довільна скінченна диз'юнктивна послідовність в $\mathcal{P}$.*

2.1. **Практичне заняття: Системи множин.**

Задача 2.17. *Довести, що*

$$(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2).$$

Розв'язок. Нехай x належить лівій частині співвідношення. Тоді, очевидно, що x належить одній з множин A_1, A_2, B_1, B_2. Нехай $x \in A_1$. (Інші три випадки розглядаються аналогічно.) Тоді обов'язково x не належить $B_1 \cup B_2$. Зокрема, $x \notin B_1$. А це означає, що $x \in (A_1 \Delta B_1)$, тобто x належить правій частині співвідношення. Включення доведене.

Нехай $f : X \to Y$ - деяка функція і $A \subset X,\ B \subset Y$. Тоді множина

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

називається образом множини A при відображенні f, а множина

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

називається прообразом множини B при відображенні f.

Задача 2.18. *Довести, що*

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

Розв'язок.

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = \{x \mid f(x) \in B_1 \cup B_2\} =$$
$$= \{x \mid f(x) \in B_1\} \cup \{x \mid f(x) \in B_2\} = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Задача 2.19. *Довести, що*

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

Розв'язок.

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = \{x \mid f(x) \in B_1 \cap B_2\} =$$
$$= \{x \mid f(x) \in B_1\} \cap \{x \mid f(x) \in B_2\} = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Задача 2.20. *Довести, що*

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$$

Розв'язок.

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = \{x \mid f(x) \in B_1 \setminus B_2\} =$$
$$= \{x \mid f(x) \in B_1\} \setminus \{x \mid f(x) \in B_2\} = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2).$$

Задача 2.21. *Довести, що*

$$f^{-1}(B_1 \Delta B_2) = f^{-1}(B_1) \Delta f^{-1}(B_2).$$

Розв'язок.

$$f^{-1}(B_1 \Delta B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \cup f^{-1}(B_2 \setminus B_1) =$$
$$= \big(f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)\big) \cup \big(f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1)\big) = f^{-1}(B_1) \Delta f^{-1}(B_2).$$

Задача 2.22. *Якщо* $\operatorname{dom} f = X$, *то*

$$f^{-1}(B') = (f^{-1}(B))'.$$

Розв'язок.
$$f^{-1}(B') = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B) = (f^{-1}(B))'.$$

Задача 2.23. *Довести, що*
$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

Розв'язок.

$$f(A_1 \cup A_2) = \{f(x) \mid x \in A_1 \cup A_2\} =$$
$$= \{f(x) \mid x \in A_1\} \cup \{f(x) \mid x \in A_2\} = f(A_1) \cup f(A_2).$$

Задача 2.24. *Довести, що рівність*
$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$
справедлива для довільних $A_1, A_2 \subset X$ *лише , коли* f *- ін'єкція.*

Розв'язок. Очевидно, що завжди виконується співвідношення
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$
Обернене включення може не виконуватися, якщо f не є ін'єкція. Дійсно, припустимо, що f не є ін'єкція. Тоді існують $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = y = f(x_2)$ і $x_1 \neq x_2$. Розглянемо множини $A_j = \{x_j\}$. Тоді $f(A_1) \cap f(A_2) = \{y\}$, а $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$.

Якщо f - ін'єкція і $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, то $f^{-1}(y) \in A_1$ і $f^{-1}(y) \in A_2$, тобто $f^{-1}(y) \in A_1 \cap A_2$. А, отже, $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Таким чином
$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2).$$

Задача 2.25. *Довести, що*
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

Розв'язок. З означення випливає, що
$$A\setminus(B\cup C) = \{x \mid (x \in A)\wedge(x \notin (B\cup C))\} = \{x \mid (x \in A)\wedge(x \notin B)\wedge(x \notin C)\} = \{x \mid (x \in A \setminus B) \wedge (x \notin C)\} = (A \setminus B) \setminus C.$$

Задача 2.26. *Довести, що*
$$(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2).$$

Розв'язок. Зауважимо, що
$$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \setminus (B_1 \cup B_2)) \cup (A_2 \setminus (B_1 \cup B_2))$$
і
$$(A_1 \setminus (B_1 \cup B_2)) \subset A_1 \setminus B_1$$
$$(A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset A_2 \setminus B_2.$$
Отже,
$$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2).$$
Отримане співвідношення є вірним для довільних A_1, A_2, B_1, B_2. Тому вірно і співвідношення
$$(B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2) \subset (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2).$$
З останніх двох співвідношень отримуємо
$$(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) = [(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)] \cup [(B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2)] \subset$$
$$\subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2) \cup (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2) = (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2).$$

Задача 2.27. *Довести, що*
$$(A_1 \cap A_2)\Delta(B_1 \cap B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2).$$

Розв'язок. Припустимо, що $x \in A_1 \cap A_2$ і $x \notin B_1 \cap B_2$. Тоді, або $x \notin B_1$, або $x \notin B_2$. Тому або $x \in A_1 \setminus B_1$ або $x \in A_2 \setminus B_2$. Зі сказаного випливає, що
$$(A_1 \cap A_2) \setminus (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2).$$
Отримане співвідношення є вірним для довільних A_1, A_2, B_1, B_2. Тому вірним є також співвідношення
$$(B_1 \cap B_2) \setminus (A_1 \cap A_2) \subset (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2).$$
З останніх двох співвідношень отримуємо
$$(A_1 \cap A_2)\Delta(B_1 \cap B_2) = [(A_1 \cap A_2) \setminus (B_1 \cap B_2)] \cup [(B_1 \cap B_2) \setminus (A_1 \cap A_2)] \subset$$
$$\subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2) \cup (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2) = (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2).$$

Зліченні і незліченні множини.

Множини A і B називаються рівнопотужними, якщо існує бієкція $f : A \to B$. Множини, які рівнопотужні множині натуральних чисел називаються зліченними. Нескінченні множини, які не є рівнопотужні множині натуральних чисел називаються незліченними. Множини цілих чисел, раціональних чисел є зліченними. Множини дійсних чисел, ірраціональних чисел є незліченними. Множина $(0,1)$ має потужність континууму. Потужність континууму мають множини $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$.

Задача 2.28. *Довести, що нескінченна підмножина зліченої множини A є злічення.*

Розв'язок. Нам досить довести, що нескінченна підмножина $B \subset \mathbb{N}$ є злічення. Задамо відображення f рекурентною формулою

$$f(1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \in B\}, \qquad f(n+1) = \min\{k \in B \mid k > f(n)\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Легко бачити, що відображення f строго зростає, а тому є ін'єктивним. Очевидно, що його образ рівний B. Отже, f - бієкція $\mathbb{N}$ на B.

Задача 2.29. *Довести, що множина $\mathbb{Z}$ цілих чисел є злічення.*

Розв'язок. Легко перевірити, що відображення f, яке діє за формулою

$$f(n) := \begin{cases} k, & \text{якщо } n = 2k-1; \\ -k+1, & \text{якщо } n = 2k. \end{cases}$$

є бієкцією множини $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$. Отже, множина $\mathbb{Z}$ є злічення.

Множина A називається не більш як зліченною, якщо вона є злічення або скінченна.

Задача 2.30. *Довести, що злічене об'єднання не більш як злічених множин є множина не більш як злічена.*

Розв'язок. Можна вважати, що множини A_n попарно не перетинаються і є непорожні. Дійсно, якщо це не так, то розглянемо множини

$$B_1 = A_1, \qquad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \left(\cup_{j=1}^{n} A_j\right).$$

Вони вже не перетинаються і кожна з них є не більш як злічення. Порожні множини можна видалити і зробити перенумерацію.

Нехай $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ і $A_n = \{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty(N_k)}$. Нехай $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовність простих чисел. Побудуємо відображення $f : A \to \mathbb{N}$ за формулою

$$f(x_{n,k}) = p_n^k, \qquad n, k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що f - ін'єкція $A \to \mathbb{N}$. Отже, множина A має потужність нескінченної підмножини в $\mathbb{N}$. Остання згідно з вже доведеним є зліченою. Тому зліченою є і множина A.

Задача 2.31. *Декартів добуток двох зліченних множин є зліченною множиною.*

Розв'язок. Нехай $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $Y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тоді

$$X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

де

$$B_n := \{(x_n, x_k)\}_{k=1}^{\infty}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Кожна з множин B_n є зліченною. Отже, зліченною буде і множина $X \times Y$.

(Переглянути всі задачі з розділу 1 задачника О. Сторожа. Написати детальні розв'язки задач 1.7 - 1.14.)

3. Загальне означення міри.

Означення 3.1. *Нехай $\mathcal{A}$ - система підмножин множини X. Числову функцію*

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \qquad (\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C})$$

назвемо дійснозначною (комплекснозначною) мірою, якщо вона є зліченно адитивною, тобто:

(1) *для довільної диз'юнктивної послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{A}$, для якої $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, виконується рівність*

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{3.1}$$

Зауваження 3.2. *Якщо виконана умова* (1)*, то ряд в правій частині* (3.1) *збігається абсолютно. Дійсно, з умови* (1) *випливає, що від перестановки членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ його сума не змінюється. З огляду на відому теорему Рімана про умовно збіжні ряди це можливо лише у випадку, коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ є абсолютно збіжним.*

1. Невід'ємні міри. Невід'ємними мірами ми назвемо міри, які приймають тільки невід'ємні значення. Виявляється (це буде показано згодом), що вивчення дійснозначних (комплекснозначних) мір можна звести до вивченні невід'мних мір. Зрозуміло, що вивчати невід'мні міри простіше, оскільки наш практичний життєвий досвід в основному базується на використанні таких мір (довжина, площа, об'єм, вага, маса). Тому ми зосередимо свою в перше чергу на вивченні невід'ємних мір.

В загальному означенні міри ми не висуваємо якихось вимог до області визначення міри, однак, щоб отримати більш змістовну теорію, нам доведеться домовитися, що область визначення міри є щонайменше півкільцем. Виявляється, що це дуже слабке обмеження, яке на практиці завжди виконується.

І так, нехай $\mathcal{P}$ півкільце підмножин непорожньої множини X. Зауважимо, що півкільце $\mathcal{P}$ містить порожню множину $\emptyset$. Розглянемо довільну невід'ємну міру

$$\mu : \mathcal{P} \to [0, \infty).$$

Насамперед відзначимо, що обов'язково

$$\mu(\emptyset) = 0. \tag{3.2}$$

Це випливає з формули (3.1). Дійсно, якщо у формулі (3.1) покласти $A_n = \emptyset$ при всіх $n \in \mathbb{N}$, то з огляду на невід'ємність міри

$$\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2) = 2\mu(\emptyset),$$

тобто $\mu(\emptyset) \leq 0$, що можливо лише при $\mu(\emptyset) = 0$.

1. Скінченна адитивність. Для довільної скінченної диз'юнктивної послідовності $(A_j)_{j=1}^{n}$ в $\mathcal{P}$, для якої $\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$, виконується рівність

$$\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j). \tag{3.3}$$

Доведення. Доповнимо диз'юнктивну послідовність $(A_j)_{j=1}^{n}$ до диз'юнктивної послідовності $(A_j)_{j=1}^{\infty}$, покладаючи $A_j = \emptyset$ при $j > n$. Оскільки при $j > n$ $\mu(A_j) = \mu(\emptyset) = 0$, то з формули (3.1) отримуємо, що

$$\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

□

2. Монотонність. Якщо $A, B \in \mathcal{P}$ і $A \subset B$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Доведення. Нехай $A, B \in \mathcal{P}$. З властивостей півкільця випливає, що в $\mathcal{P}$ існує диз'юнктна система $(P_j)_{j=1}^{n}$, така, що $B \setminus A = \bigsqcup_{j=1}^{n} P_j$. Покладемо $P_0 := A$. Тоді

$$B = \bigsqcup_{j=0}^{m} P_j.$$

Тому з огляду на скінченну адитивність міри μ і її невід'ємність

$$\mu(B) = \mu\left(\bigsqcup_{j=0}^{m} P_j\right) = \sum_{j=0}^{m} \mu(P_j) \geq \mu(P_0) = \mu(A).$$

$\square$

Вправа 3.3. *Нехай $\mathcal{P}$ - півкільце, $B \in \mathcal{P}$ і $(P_j)_{j=1}^{n}$ послідовність в $\mathcal{P}$. Тоді існує диз'юнктивна послідовність $(Q_k)_{k=1}^{m}$ така, що*

$$B \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} P_j\right) = \bigsqcup_{k=1}^{m} Q_j.$$

Вправа 3.4. *Нехай $\mathcal{P}$ - півкільце, $A \in \mathcal{P}$, $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ - послідовність в $\mathcal{P}$ і $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Тоді існує диз'юнктивна послідовність $(B_j)_{j=1}^{\infty}$ в $\mathcal{P}$, для якої $B_j \subset A_j$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ і $A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j$.*

3. Зліченна напівадитивність.

Теорема 3.5. *Нехай $A \in \mathcal{P}$, $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ - послідовність в $\mathcal{P}$ і $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Тоді*

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j). \tag{3.4}$$

Доведення. З вправи 3.4 випливає, що існує диз'юнктивна послідовність $(B_j)_{j=1}^{\infty}$ в $\mathcal{P}$, для якої $B_j \subset A_j$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ і $A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Зі зліченної адитивності міри μ маємо, що

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).$$

Оскільки $B_j \subset A_j$, то $\mu(B_j) \leq \mu(A_j)$ $(j \in \mathbb{N})$. Тому

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

$\square$

4. Скінченна напівадитивність. Нехай $A \in \mathcal{P}$, $(A_j)_{j=1}^{n}$ - послідовність в $\mathcal{P}$ і $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Тоді

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j). \tag{3.5}$$

Доведення. Доповнимо послідовність $(A_j)_{j=1}^n$ до послідовності $(A_j)_{j=1}^\infty$, покладаючи $A_j = \emptyset$ при $j > n$. Оскільки при $j > n$ $\mu(A_j) = \mu(\emptyset) = 0$, то з формули (3.4) отримуємо, що

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

□

Вправа 3.6. *Нехай $\mathcal{P}$ - півкільце, $B \in \mathcal{P}$, $(A_j)_{j=1}^n$ - диз'юнктивна послідовність в $\mathcal{P}$ і μ - невід'ємна міра на $\mathcal{P}$. Довести, що справедлива імплікація*

$$\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j \subset B \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \leq \mu(B). \tag{3.6}$$

Зовнішна міра. Дуже важливим моментом в теорії мір є процес побудови міри. Вся справа в тому, що початково міру ми задаємо на досить вузькій системі елементарних множин (півкільці елементарних множин). А вже після цього переходимо до продовження міри на множини більш складної природи. Наприклад, знаходження площі прямокутника проблем не викликає. Натомість обгрунтування формули площі плоскої фігури, що обмежена гладкою кривою, потребує значних зусиль. А що вже казати про знаходження площі більш складних множин в $\mathbb{R}^2$. А як бути з n-вимірним об'ємом складних множин в $\mathbb{R}^n$? Добре би було мати загальний підхід до процедури побудови мір, точніше до процедури продовження міри з півкільця елементарних множин на якомога щирше σ-кільце або ширшу σ-алгебру множин. На початку 20 століття такий підхід був розроблений. Значний вклад в його розробку вніс французький математик Анрі Лебег. Запропоновану ним процедуру продовження міри стали називати лебеговим продоженням міри. Центральним пунктом в лебеговому продовженні є поняття зовнішної (верхньої) міри.

Означення 3.7. *Нехай невід'ємна міра μ задана на півкільці $\mathcal{P}$ з одиницею X і $A \subset X$. Послідовність $(P_j)_{j=1}^\infty$ в $\mathcal{P}$ називається зліченним покриттям множини A, якщо $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty P_j$. Для довільної $A \subset X$ покладемо*

$$\mu^*(A) := \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j), \tag{3.7}$$

де точна нижня грань береться по всеможливих зліченних покриттях $(P_j)_{j=1}^\infty$ множини A. Функція μ^* називається зовнішною мірою побудованою за мірою μ; вона задана на алгебрі 2^X всіх підмножин множини X:

$$X \supset A \mapsto \mu^*(A) \in [0, \infty).$$

Властивості зовнішної міри.

Теорема 3.8. *Зовнішна міра володіє наступними властивостями:*

(1) $\forall A \in 2^X \quad 0 \le \mu^*(A) \le \mu(X)$;
(2) $\forall A, B \in 2^X \quad A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$;
(3) $\forall A \in \mathcal{P} \quad \mu^*(A) = \mu(A)$;
(4) *зовнішна міра є зліченно напівадитивна, тобто для довільних множин* $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *в* X *справедлива імплікація*

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Longrightarrow \mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j). \tag{3.8}$$

Доведення. (1) Нехай $A \subset X$. Оскільки для довільного покриття $(P_j)_{j=1}^{\infty}$ множини A

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \ge 0,$$

то з означення точної нижньої грані випливає, що $\mu^*(A) \ge 0$. Розглянемо послідовність $(P_j)_{j=1}^{\infty}$, що задана наступним чином

$$P_1 := X, \qquad P_j := \emptyset, \qquad j \ge 2.$$

Вона є зліченним покриттям множини A. Оскільки $\mu(\emptyset) = 0$, то

$$\mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) = \mu(P_1) = \mu(X).$$

(2) Нехай $A \subset B \subset X$. Оскільки кожне покриття множини B є також покриттям множини A, то $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

(3). Нехай $A \in \mathcal{P}$. Розглянемо послідовність $(P_j)_{j=1}^{\infty}$, що задана наступним чином

$$P_1 := A, \qquad P_j := \emptyset, \qquad j \ge 2.$$

Вона є зліченним покриттям множини A. Оскільки $\mu(\emptyset) = 0$, то

$$\mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) = \mu(P_1) = \mu(A).$$

Припустимо, що $(P_j)_{j=1}^{\infty}$ є довільним зліченним покриттям множини A. Тоді з теореми 3.5 випливає, що

$$\mu(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j).$$

Отже, $\mu(A) \le \mu^*(A)$. Зі сказаного отримуємо, що $\mu^*(A) = \mu(A)$.

(4) Нехай множин $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ множини в X і $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ Якщо ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$ розбіжний, то нерівність, очевидно, виконується. Припустимо, що вказаний ряд збіжний. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням зовнішної міри для кожного $j \in \mathbb{N}$ існує послідовність $(P_{j,k})_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{P}$ така, що $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{j,k}$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_{j,k}) \leq \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Оскільки

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{j,k},$$

то

$$\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_{j,k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Таким чином для довільних $\varepsilon > 0$

$$\mu^*(A) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Звідки випливає, що $\mu^*(A) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$. □

Зауваження 3.9. *З теореми 3.8 випливає , що зовнішна міра є також скінченно напівадитивна, тобто для довільних множин $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ в X справедлива імплікація*

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j). \tag{3.9}$$

Лебегове продовження міри. На початку 20 століття французський математик Анрі Лебег запропонував спосіб продовження міри з півкільця на σ-алгебру. Пізніше отриману в результаті продовження міру стали називати лебеговим продовженням міри. Опишемо суть ідеї Лебега.

Зафіксуємо деяку міру μ на півкільці $\mathcal{P}$ з одиницею X. Нехай μ^* - зовнішна міра побудована за мірою μ.

Означення 3.10. *Позначимо через $\mathcal{U}_\mu$ множину всіх підмножин в X для яких виконуєтьса рівність*

$$\mu^*(A) + \mu^*(A') = \mu(X). \tag{3.10}$$

Теорема Лебега про продовження міри.

Теорема 3.11. *$\mathcal{U}_\mu$ є σ-алгеброю з одиницею X, а звуження $\widetilde{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{U}_\mu}$ зовнішної міри μ^* на $\mathcal{U}_\mu$ є мірою.*

Міра $\widetilde{\mu}$ називається лебеговим продовженням міри μ, а елементи алгебри $\mathcal{U}_\mu$ називаються вимірними за Лебегом множинами.

Доведення сформульованої вище теореми є довгим і доволі складним. За браком часу ми його розглядати не будемо.

Треба відзначити, що Лебег сформулював свою теорему в менш загальному вигляді. А власне, він розглядав випадок, коли $X = [a, b]$, $\mathcal{P}$ - півкільце всіх інтервалів проміжку $[a, b]$, а міра μ - довжина інтервала, тобто для довільного інтервала $\Delta \subset [a, b]$ з кінцями α, β

$$\mu(\Delta) = |\beta - \alpha|.$$

(Виявляється, що остання формула задає міру, тобто μ є зліченно адитивною.) Отриману в результаті міру стали називати мірою Лебега на відрізку $[a, b]$, а множини з $\mathcal{U}_L$ вимірними за Лебегом. Домовимося позначати міру Лебега на відрізку через через μ_1.

Оскільки для довільних вимірних множин $A \subset [a, b]$

$$\mu_1(A) = \mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup_{j=1}^{\infty} P_j} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j),$$

то, як легко бачити, міра $\mu_1(A)$ не залежить від вибору проміжка $[a, b]$, тобто міру Лебега можна розглядати на всіх обмежених вимірних за Лебегом множинах. Більше того, її можна поширити на σ-алгебру

$$\mathcal{U}(\mu_1) := \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad A \cap [-n, n] \quad \text{вимірна за Лебегом}\},$$

покладаючи

$$\mu_1(A) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(A \cap [-n, n]).$$

Зауважимо, що в $\mathcal{U}(\mu_1)$ є множини нескінченної міри. При цьому μ_1 є σ-адитивною, тобто

$$\mu_1\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n). \tag{3.11}$$

Тільки тепер рівність (3.11) потрібно розуміти в більш загальному сенсі. А власне, обидві частини можуть одночасно бути рівними ∞.

Аналогічно можна побудувати міру Лебега в $\mathbb{R}^n$. А власне, нехай $X = [a, b]^n$ - n-вимірний куб в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}$ - півкільце всіх n-вимірних паралепіпедів в X, а міра μ - об'єм (в $\mathbb{R}^n$) паралепіпеда P, тобто

$$\mu(P) = \prod_{j=1}^{n} |P_j|, \qquad P = P_1 \times \cdots P_n,$$

$|P_j|$ - довжина інтервала P_j. (Остання формула дійсно задає міру, тобто μ є зліченно адитивною.)

Застосовуючи теорему про лебегове продовження міри отримуємо міру Лебега μ_n на довільному кубі в $\mathbb{R}^n$, а потім поширюємо її на σ-алгебру

$$\mathcal{U}(\mu_n) := \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall j \in \mathbb{N} \quad A \cap [-j, j]^n \quad \text{вимірна за Лебегом}\},$$

покладаючи

$$\mu_n(A) := \sup_{j \in \mathbb{N}} \mu_n(A \cap [-j, j]^n).$$

Зрозуміло, що в $\mathcal{U}(\mu_n)$ є множини нескінченної міри, але μ_n є σ-адитивною, тобто

$$\mu_n\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n). \tag{3.12}$$

Аналогічно можна побудувати міру Лебега на колі, на кривих, на n-вимірній сфері, на торі, на досить гладких поверхнях. Відповідні міри називаються мірами Лебега.

4. Практичне заняття: Елементарні властивості міри.

Означення 4.1. *Нехай міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$. Міра μ називається повною, якщо*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad (\mu(A) = 0) \Longrightarrow (\forall B \subset A \quad (B \in \mathcal{A}) \wedge (\mu(B) = 0))\,.$$

Вправа 4.2. *Довести, що міра Лебега μ_n в $\mathbb{R}^n$ є повною.*

Задача 4.3. *Довести, що міра μ_n довільної скінченної або зліченної множини в $\mathbb{R}^n$ рівна нулеві.*

Розв'язок. Досить розглянути випадок зліченної множини. Нехай A зліченна множина. Тоді її можна занумерувати, тобто $A = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$. Тоді A є зліченним диз'юнктивним об'єднанням одноточкових множин:

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \{x_j\}.$$

Оскільки одноточкова множина $\{x_j\}$ є n-вимірних паралепіпедом нульової міри, то з зліченної адитивності випливає, що

$$\mu_n(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(\{x_j\}) = 0.$$

Задача 4.4. *Знайдіть міру Лебега μ_1 множини*

$$A := \{x \in (0,1) \mid x - \textit{раціональне число}\}.$$

Розв'язок. Множина A є зліченна. А тому вона вимірна за мірою μ_1 і

$$\mu_1(A) = 0.$$

Задача 4.5. *Знайдіть міру Лебега μ_2 множини*

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Розв'язок. Множина A є зліченна. Дійсно, вона є декартовим добутком двох зліченних множин. Тому A є μ_2 - вимірна і

$$\mu_2(A) = 0.$$

Задача 4.6. *Знайдіть міру μ_2 Лебега множини*

$$A := \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, \quad y \in \mathbb{Q}\}.$$

Розв'язок. Множину A можна подати у вигляді зліченного диз'юнктивного об'єднання

$$A = \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}}^{\infty} A_r,$$

де $A_r = [0,1] \times [r,r]$. Кожна множина A_r є прямокутником нульової площі, тобто $\mu_2(A_r) = 0$. Зі зліченної адитивності міри μ_2 випливає, що

$$\mu_2(A) = \sum_{r \in \mathbb{Q}}^{\infty} \mu_2(A_r) = 0.$$

Задача 4.7. *Знайдіть міру Лебега μ_1 множини*

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, 1 + 1/n].$$

Розв'язок. Намалювавши декілька відрізків $[1/n, 1 + 1/n]$ неважко помітити, що $A = (0,2]$. Тому $\mu_1(A) = 2$.

Задача 4.8. *Доведіть, що множина*

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n + 2^{-n}]$$

є борелівською і знайдіть її міру Лебега μ_1.

Розв'язок. Кожен інтервал на прямій є борелівською множиною. А зліченне об'єднання борелівських множин є борелівською множиною. Отже, A є борелівською множиною.

Намалювавши декілька відрізків $[n, n+2^{-n}]$ ми бачимо, що вони попарно не перетинаються. Тому

$$\mu_1(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1([n, n+2^{-n}]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 1.$$

Задача 4.9. *Доведіть, що множина*

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+2^{-n+2})$$

є борелівською і знайдіть її μ_1 *міру Лебега.*

Розв'язок. Кожен інтервал на прямій є борелівською множиною. А зліченне об'єднання борелівських множин є борелівською множиною. Отже, A є борелівською множиною.

Намалювавши декілька відрізків $(n, n+2^{-n+2})$ ми бачимо:

$$\Delta_1 = (1,3), \quad \Delta_2 = (2,3), \quad \Delta_3 = (3, 3+1/2), \quad \Delta_3 = (4, 4+1/4), ...$$

Отже,

$$A = (1,3) \bigcup \left(\bigcup_{j=3}^{\infty} \Delta_j \right).$$

Видно, що це об'єднання є диз'юнктивним. Тому

$$\mu_1(A) = 2 + \sum_{j=3}^{\infty} \mu_1(\Delta_j) = 2 + \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 3.$$

Задача 4.10. *Доведіть, що множина*

$$A := (-2,5] \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left((n, n+2^{-n}) \setminus \mathbb{Q} \right) \right)$$

є борелівською і знайдіть її μ_1 *міру Лебега.*

Розв'язок. Кожен інтервал на прямій є борелівською множиною і кожна зліченна множина є борелівською (як зліченне об'єднання замкнених множин). Отже, кожна множина

$$A_0 := (-2,5], \quad A_n = (n, n+2^{-n}) \setminus \mathbb{Q}$$

є борелівською. А зліченне об'єднання бореліських множин є борелівською множиною. Отже, A є борелівською множиною.

Легко бачити, що множини A_n при $n \geq 1$ попарно не перетинаються. Але, деякі з них перетинаються з A_0. Більше того,

$$A_j \subset A_0 \qquad \text{при} \quad j \leq 4$$

і

$$A_0 \cap A_j = \emptyset \qquad \text{при} \quad j \geq 5.$$

Тому

$$A = (-2, 5] \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n=5}^{\infty} A_j \right).$$

Оскільки $\mu_1(\mathbb{Q}) = 0$, то

$$\mu_1(A_n) = \mu_1((n, n + 2^{-n})) = 2^{-n}.$$

Тому

$$\mu_1(A) = 7 + \sum_{j=5}^{\infty} 2^{-j} = 7 + 2^{-4}.$$

Задача 4.11. *Доведіть, що множина*

$$A := (-3, 0) \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (1/(n+1), 1/n) \right)$$

є борелівською і знайдіть її μ_1 міру Лебега.

Розв'язок. Кожен інтервал на прямій є борелівською множиною Крім того, зліченне об'єднання борелиських множин є борелівською множиною. Отже, A є борелівською множиною.

Легко бачити, що

$$A = ((-3, 0) \cup (0, 1)) \setminus \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Оскільки μ_1-міра зліченної множини рівна нулеві, то

$$\mu_1(A) = 4.$$

Задача 4.12. *Доведіть, що множина*

$$A := \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

є борелівською і знайдіть її μ_2 міру Лебега.

Розв'язок. Множина A є замкненою, а, отже, борелівською. Покажемо, що її μ_2-міра рівна нулеві. Розглянемо множини

$$A_n := \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [n, n+1)\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що

$$A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n.$$

Якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ $\mu_2(A_n) = 0$, то

$$\mu_2(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu_2(A_n) = 0.$$

Покажемо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ $\mu_2(A_n) = 0$. Зафіксуємо довільні $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. очевидно, що набір квадратів

$$P_{n,j} := [n + (j-1)/m, n + j/m]^2, \qquad j = 1, \ldots, m.,$$

покриває множину A_n. Тому

$$\mu_2(A_n) \le \sum_{j=1}^{n} \mu_2(P_{n,j}) = m \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m}.$$

З довільності числа $m \in \mathbb{N}$ випливає, що

$$\mu_2(A_n) = 0.$$

Таким чином ми довели, що $\mu_2(A) = 0$.

Задача 4.13. *Доведіть, що множина*

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx, \quad k \in \mathbb{N}\}$$

є борелівською і знайдіть її μ_2 міру Лебега.

Розв'язок. Множини

$$A_k := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx\}, \qquad k \in \mathbb{N} \in,$$

є замкнені, а, отже, борелівські. А злічене об'єднання борелівських множин є множина борелівська. Тому A є борелівською. Покажемо, що її μ_2-міра рівна нулеві. Подібно як і в попередній задачі, можна переконатися, що для кожної A_k μ_2-міра рівна нулеві. Використовуючи зліченну напівадитивність міри μ_n, маємо

$$\mu_2(A) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_2(A_k) = 0,$$

тобто $\mu_2(A) = 0$.

Міри Лебега і Жордана. Міра Лебега є продовженням міри Жордана. Кожна множина A, яка вимірна за Жорданом є вимірна за Лебегом і міра Лебега множини A збігається з мірою Жордана множини A.

Задача 4.14. *Доведіть, що множина*
$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], \quad 0 \le |y| \le x^2\}$$
є борелівською і знайдіть її μ_2 міру Лебега.

Розв'язок. Множина A є замкненою, а, отже, борелівською. Вона вимірна за Жорданом. Тому для знаходження міри $\mu_2(A)$ можна використати інтеграл Рімана.
$$\mu_2(A) = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2/3.$$

Задача 4.15. *Доведіть, що множина*
$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,\pi], \quad 0 \le y \le \sin x\}$$
є борелівською і знайдіть її μ_2 міру Лебега.

Розв'язок. Множина A є замкненою, а, отже, борелівською. Вона вимірна за Жорданом. Тому для знаходження міри $\mu_2(A)$ можна використати інтеграл Рімана.
$$\mu_2(A) = \int_0^\pi \sin x\,dx = 2.$$

Задача 4.16. *Доведіть, що множина*
$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,4\pi], \quad 0 \le |y| \le |\cos x|\}$$
є борелівською і знайдіть її μ_2 міру Лебега.

Розв'язок. Множина A є замкненою. Дійсно, нехай $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ збіжна послідовність в множині A і $x_n \to x$ і $y_n \to y$. Для доведення замкненості потрібно переконатися, що точка (x,y) належить множині A. Оскільки
$$0 \le |y_n| \le |\cos x_n|, \qquad n \in \mathbb{N},$$
то, враховуючи неперервність модуля і функції cos і здійснюючи граничний перехід в нерівності, отримуємо, що
$$0 \le |y| \le |\cos x|,$$
тобто $(x,y) \in A$. Замкненість множини A доведена.

Множина A є криволінійною трапецією, що обмежена неперервними кривими. Тому вона вимірна за Жорданом і її міру Жордана ($= \mu_2(A)$) можна знайти з допомогою інтеграла Рімана. Зробивши малюнок, з врахуванням симетрії множини A стосовно осі Ox і періодичності функції cos, отримуємо, що
$$\mu_2(A) = 2\int_0^{4\pi} |\cos x|\,dx = 16\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 16.$$

Задача 4.17. *Доведіть, що множина*

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2, \quad |x| + |y| \leq 2\}$$

є борелівською і знайдіть її μ_2 *міру Лебега.*

Розв'язок. Множина A є замкненою. Доведення є аналогічне до доведення в попередній задачі. Множина A квадратом, в якому вирізано круг. Знайти площу легко (знайдіть самостійно).

Конструювання послідовностей множин.

Задача 4.18. *Побудуйте послідовність* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *борелівських множин в* $\mathbb{R}$ *таку, що для всіх n виконуються співвідношення:*

$$\mu_1(A_n) = 1, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [0, \infty).$$

Розв'язок. Можна, наприклад, взяти множини

$$A_n := [n-1, n], \qquad n \in \mathbb{N}$$

Задача 4.19. *Побудуйте послідовність* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *борелівських множин в* $\mathbb{R}$ *таку, що для всіх n виконуються співвідношення:*

$$\mu_1(A_n) = 1, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Можна, наприклад, взяти множини

$$A_{2n-1} := [n-1, n], \quad A_{2n} = [-n, -n+1], \qquad n \in \mathbb{N}$$

Задача 4.20. *Побудуйте послідовність* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *борелівських множин в* $\mathbb{R}$ *таку, що для всіх n виконуються співвідношення:*

$$\mu_1(A_n) = +\infty, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset.$$

Розв'язок. Можна, наприклад, взяти множини

$$A_n := [n, \infty), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Задача 4.21. *Побудуйте послідовність* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *борелівських множин в* R *таку, що для всіх n виконуються співвідношення:*

$$\mu_1(A_n) = +\infty, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}.$$

Розв'язок. Можна, наприклад, взяти множини

$$A_n := [n, \infty) \cup \mathbb{N}, \qquad \in \mathbb{N}.$$

5. Лекція. Вимірні функції та їх властивості.

Означення 5.1. *Нехай X - метричний простір. Домовимося через $B(X)$ позначати найменшу σ-алгебру в X, що містить всі відкриті і замкнені множини. Множини алгебри $B(X)$ називаються борелівськими множинами в X.*

Зауважимо, що всі злічені або скінченні множини в метричному просторі є борелівськими. Зліченні або скінченні об'єднання інтервалів (паралепіпедів в $\mathbb{R}^n$) є борелівськими множинами в $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$).

Структура множин алгебри $\mathcal{U}(\mu_n)$.

Теорема 5.2. *Кожна борелівська множина $A \in B(\mathbb{R}^n)$ належить алгебрі $\mathcal{U}(\mu_n)$, тобто $B(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{U}(\mu_n)$. Якщо $A \in \mathcal{U}(\mu_n)$, то:*

(1) *існує борелівська множина $B \subset A$ така, що $\mu_n(A \setminus B) = 0$.*
(2) *у випадку $\mu_n(A) < \infty$ для довільного $\varepsilon > 0$ в $\mathbb{R}^n$ існують компакт F і відкрита множина $\mathcal{O}$ такі, що $F \subset A \subset \mathcal{O}$ і $\mu_n(\mathcal{O} \setminus F) < \varepsilon$.*

Таким чином, кожна множина $A \in \mathcal{U}(\mu_n)$ об'єднанням борелівської множини і множини нульової міри.

Означення 5.3. *Простором з мірою називається трійка $(X, \mathcal{U}, \mu)$, де X - непорожня множина, $\mathcal{U}$ - клас підмножин множини X, μ - невід'ємна міра, що задана на $\mathcal{U}$. Міра μ називається повною, якщо*

$$\forall A \in \mathcal{U} \quad \forall B \subset A \qquad (\mu(A) = 0) \Rightarrow (B \in \mathcal{U} \wedge \mu(B) = 0)$$

Якщо не сказане протилежне, то під простором з мірою ми будемо вважати трійка $(X, \mathcal{U}, \mu)$, в якій $\mathcal{U}$ - σ-алгебра, а μ - повна міра.

Вправа 5.4. *Кожна множина $A \in \mathcal{U}(\mu_n)$ нульової міри міститься в борелівській множині нульової μ_n-міри.*

Неперервність міри.

Теорема 5.5. *Нехай заданий простір з мірою $(X, \mathcal{U}, \mu)$ і $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ монотонна послідовність множин в $\mathcal{U}$. Тоді*

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n \to \infty} A_n).$$

Зокрема, для монотонно спадної послідовності

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n),$$

а для монотонно зростаючої послідовності $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n).$$

Доведення. Розглянемо випадок монотонно спадної послідовності $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Покладемо за означенням

$$B=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n,\qquad B_n=A_n\setminus A_{n+1},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Тоді

$$A_n=\left(\bigsqcup_{k=n}^{\infty}B_k\right)\bigsqcup B.$$

Зі зліченної адитивності міри μ випливає, що

$$\mu(A_n)=\mu(B)+\sum_{k=n}^{\infty}\mu(B_k).$$

Зі збіжності ряду випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mu(B_k)=0.$$

А, отже,

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(B)=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=\mu(\lim_{n\to\infty}A_n).$$

Випадок монотонно зростаючої послідовності розглядається аналогічно. □

Означення 5.6. *Нехай заданий простір з мірою* $(X,\mathcal{U},\mu)$, $f:X\to\mathbb{R}$. *Функція* f *називається* μ- *вимірною, якщо прообраз кожної борелівської множини* $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *є множина вимірна, тобто* $f^{-1}(A)\in\mathcal{U}$. *Множину всіх* μ-*вимірних функцій ми будемо позначати через* $\mathcal{V}(X,\mu)$.

Означення 5.7. *Нехай заданий простір з мірою* $(X,\mathcal{U},\mu)$, $f:X\to\mathbb{R}$ *і* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Позначимо через* $\{f<\lambda\}$ *прообраз множини* $(-\infty,\lambda)$ *при відображенні* f, *тобто*

$$\{f<\lambda\}=\{x\in X\mid f(x)<\lambda\}.$$

Аналогічно означуємо множини $\{f\le\lambda\}$, $\{f>\lambda\}$ *і* $\{f\ge\lambda\}$. *Всі такі множини називають лебеговими множинами.*

Теорема 5.8. *Нехай заданий простір з мірою* $(X,\mathcal{U},\mu)$ *і* $f:X\to\mathbb{R}$. *Щоб функція* f *була* μ-*вимірна необхідно і досить, що виконувалася умова*

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad\{f<\lambda\}\in\mathcal{U}.$$

Доведення. Розглянемо сімейство $\mathcal{A}$ всіх підмножин $A \subset \mathbb{R}$ таких, що $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$. Оскільки операція взяття прообразу комутує з усіма теоретико-множинними операціями, то $\mathcal{A}$ є σ-алгеброю (бо такою є $\mathcal{U}$). З умови теореми випливає, що $\mathcal{A}$ містить всі множини вигляду $(-\infty, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$. Оскільки $\mathcal{A}$ є σ-алгеброю, то вона містить також множини вигляду

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, a + 1/n), \qquad a \in \mathbb{R},$$

а, отже, і множини

$$(a, b) = (-\infty, b) \setminus \{-\infty, a],$$

а, отже, всі відкриті множини, а, отже, і всі борелівські множини. Таким чином, $B(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$. Звідки (див. означення) випливає, що $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$. □

Теорема 5.9. *Нехай* $(X,\mathcal{U}, \mu)$ *- простір з мірою. Тоді* $\mathcal{V}(X, \mu)$ *є лінійним простором над* $\mathbb{R}$.

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$ і $a \in \mathbb{R}$. Тоді $(f + a) \in \mathcal{V}(X, \mu)$. Дійсно, для довільних $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{f + a < \lambda\} = \{f < \lambda - a\} \in \mathcal{U}.$$

Якщо $a = 0$, то $af \equiv 0$, а, отже, $af \in \mathcal{V}(X, \mu)$. Якщо $a > 0$, то для довільних $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{af < \lambda\} = \{f < \lambda/a\} \in \mathcal{U}.$$

Якщо $a < 0$ то для довільних $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{af < \lambda\} = \{f > \lambda/a\} \in \mathcal{U}.$$

Таким чином

$$\forall f \in \mathcal{V}(X, \mu) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad af \in \mathcal{V}(X, \mu).$$

Нехай $f, g \in \mathcal{V}(X, \mu)$. Оскільки, як легко переконатися,

$$\{f < g\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{r < g\} \in \mathcal{U},$$

то для довільних $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{f + g < \lambda\} = \{f < -g + \lambda\} \in \mathcal{U}$$

(бо $(-g + \lambda) \in \mathcal{V}(X, \mu)$ з огляду на вже доведене), тобто $f + g \in \mathcal{V}(X, \mu)$. Теорема доведена. □

Означення 5.10. *Функція* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *називається борелівською, якщо прообраз кожної борелівської множини є множина борелівська.*

Вправа 5.11. *Доведіть, що:*

(1) *всі неперервні на $\mathbb{R}$ функції є борелівськими;*
(2) *всі монотонні функції на $\mathbb{R}$ функції є борелівськими;*
(3) *функція $x \mapsto 1/x$ (що задана на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) є борелівською.*

Теорема 5.12. *Нехай $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$, а функція $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є борелівська. Якщо $\operatorname{ran} f \subset \operatorname{dom} \varphi$, то композиция $g(x) := \varphi(f(x))$ є μ-вимірною.*

Доведення. Нехай $A \in B(\mathbb{R})$. Оскільки

$$g^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(f(x)) \in A\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \varphi^{-1}(A)\} = f^{-1}(\varphi^{-1}(A))$$

і функція $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є борелівська, то $f^{-1}(\varphi^{-1}(A)) \in \mathcal{U}$. Отже, g є μ-вимірною. □

Наслідок 5.13. *Якщо $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$, то $f^2, |f|, \operatorname{sign} f$ є μ-вимірними. А якщо g не обертається в нуль, то $1/g$ є μ-вимірною функцією.*

Теорема 5.14. *Якщо $f, g \in \mathcal{V}(X, \mu)$ то $fg \in \mathcal{V}(X, \mu)$. А якщо g не обертається в нуль, то і частка f/g є μ-вимірною функцією.*

Доведення. Нехай $f, g \in \mathcal{V}(X, \mu)$. З наслідку і рівності

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2))$$

випливає, що $fg \in \mathcal{V}(X, \mu)$. Якщо g не обертається в нуль, то згідно наслідку $1/g$ є μ-вимірною функцією . Тому частка f/g є добутком μ-вимірних функцій, а, отже, вона теж є μ-вимірною функцією. □

Виявляється, поточкова границя вимірних функцій є вимірною функцією.

Теорема 5.15. *Якщо послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X, \mu)$ поточково збігається до функції f, то $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$.*

Доведення. Нехай виконана умова теореми. Зафіксуємо довільне λ і покажемо, що лебегова множина $\{f < \lambda\}$ належить $\mathcal{U}$. Все доведення зводиться до встановлення рівності

$$\{f < \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m>n} \{f_m < \lambda - 1/k\}.$$

Припустимо, що x належить лівій частині. Тоді $f(x) < \lambda$. При деякому $\delta > 0$ ми маємо, що

$$f(x) < \lambda - 2\delta,$$

З означення границі випливає, що при деяких $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$

$$f_m(x) < f(x) + \delta, \qquad 1/k < \delta, \qquad m > m_0, \quad k > k_0.$$

Тому
$$f_m(x) < f(x) + \delta < \lambda - \delta < \lambda - 1/k, \qquad m > m_0, \quad k > k_0.$$
Отже, при $k > k_0$ x належить множині
$$\bigcap_{m>m_0} \{f_m < \lambda - 1/k\},$$
тобто x належить правій частині.

Припустимо, що x належить правій частині. Тоді при деяких $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$
$$f_m(x) < \lambda - 1/k, \qquad m > m_0, \quad k > k_0.$$
Переходячи до границі при $m \to \infty$ отримуємо, що
$$f(x) \le \lambda - 1/k < \lambda,$$
тобто x належить лівій частині. Рівність доведена. Оскільки всі множини $\{f_m < \lambda - 1/k\}$ є вимірні, то вимірною є і множина $\{f < \lambda\}$ (бо $\mathcal{U}$ є σ-алгеброю).

□

μ-еквівалентність.

Означення 5.16. *Функції $f, g : X \to \mathbb{R}$ (які задані на всьому X) називаються μ-еквівалентними (скорочено $f \sim g$), якщо множина $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ має міру 0.*

Теорема 5.17. *Нехай $(X, \mathcal{U}, \mu)$ - простір з мірою і міра μ є повна. Нехай функції $f, g : X \to \mathbb{R}$ (які задані на всьому X) є μ-еквівалентними. Якщо $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$, то $g \in \mathcal{V}(X, \mu)$.*

Доведення. Нехай виконана умова теореми. Зафіксуємо довільне λ. Нехай
$$A := \{f < \lambda\}, \qquad B := \{g < \lambda\}.$$
Легко бачити, що
$$A \setminus B, B \setminus A \subset \{x \mid f(x) \neq g(x)\}.$$
Отже, $A \setminus B$ і $B \setminus A$ є вимірними множинами нульової міри. Звідси випливає, що якщо $A \in \mathcal{U}$, то і $B \in \mathcal{U}$. Теорема доведена. □

Вправа 5.18. *Покажіть, що на просторі $\mathcal{V}(X, \mu)$ відношення $f \sim g$ є відношенням еквівалентності.*

Збіжність майже скрізь.

Означення 5.19. *Ми скажемо, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X, \mu)$ збігається майже скрізь до функції $f : X \to \mathbb{R}$, якщо*
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
для всіх $x \in X$ за винятком, можливо, множини нульової μ-міри.

Вправа 5.20. *Якщо послідовність* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *в* $\mathcal{V}(X,\mu)$ *збігається майже скрізь до функції* $f : X \to \mathbb{R}$, *то* $f \in \mathcal{V}(X,\mu)$.

Теорема Єгорова.

Означення 5.21. *Ми скажемо, що послідовність* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *в* $\mathcal{V}(X,\mu)$ *збігається до функції* f *майже рівномірно, якщо для довільного* $\delta > 0$ *існує вимірна множина* X_δ *така, що:*

(1) $\mu(X_\delta) < \delta$;

(2) *на множині* $X \setminus X_\delta$ *послідовність* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *збігається до* f *рівномірно.*

Єгоров встановив (понад сто років тому), що справедлива

Теорема 5.22. *Нехай* $(X,\mathcal{U},\mu)$ *- простір з мірою і* $\mu(X) < \infty$. *Якщо послідовність* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *в* $\mathcal{V}(X,\mu)$ *збігається майже скрізь до деякої* $f \in \mathcal{V}(X,\mu)$, *то вона збігається до* f *майже рівномірно.*

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається всюди на X. Дійсно, якщо це не так, то цього можна добитися шляхом вилучення з X множини нульової міри.

Розглянемо множини

$$E_n^m = \bigcap_{k>n} \{x \mid |f_k(x) - f(x)| < 1/m\}, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Всі вони є μ-вимірні (чому?) Тому μ-вимірними є множини

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m.$$

З означення множин E_n^m випливає, що при фіксованому m

$$E_1^m \subset \cdots \subset E_n^m \subset \ldots$$

З неперервності міри μ випливає, що

$$\mu(E^m) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n^m).$$

Тому для довільного $\delta > 0$ і довільного $m \in \mathbb{N}$ існує таке натуральне $n_0(m)$, що

$$\mu(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) < \delta/2^m.$$

Покажемо, що множина

$$X_\delta := \bigcup_{m=1}^{\infty} (E^m \setminus E_{n_0(m)}^m)$$

володіє властивостями:

(1) $\mu(X_\delta) < \delta$;

(2) на множині $X \setminus X_\delta$ послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до f рівномірно.

Перша властивість випливає зі зліченної напівадитивності міри μ, тобто

$$\mu(X_\delta) \le \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) < \sum_{m\in\mathbb{N}} \delta/2^m = \delta.$$

Покажемо, що на множині $X \setminus X_\delta$ послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до f рівномірно.

Спочатку зауважимо, що для довільного $m \in \mathbb{N}$ виконується рівність $E^m = X$. Дійсно, якщо $x \in X \setminus E^m$, то нерівність

$$|f_k(x) - f(x)| \ge 1/m$$

повинна виконуватися для нескінченної кількості номерів k. А це означає, що

$$f(x) \ne \lim_{n\to\infty} f_k(x)$$

і це суперечить збіжності всюди. Тому $E^m = X$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Враховуючи це, за правилами де-Моргана маємо

$$X \setminus X_\delta = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E^m \setminus E^m_{n_0(m)})\right)' = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (X \setminus E^m_{n_0(m)})\right)' = \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}.$$

Нехай $x \in X \setminus X_\delta$. Тоді для кожного $m \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності

$$|f_k(x) - f(x)| < 1/m, \qquad k > n_0(m).$$

А це означає, що послідовність $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до f на множині $X \setminus X_\delta$. Теорема доведена. $\square$

Збіжність за мірою. Введемо ще один вид збіжності послідовності функцій. Він називається збіжністю за мірою і відіграє важливу роль в теорії ймовірностей (там цей вид збіжності називають збіжністю за ймовірністю).

Означення 5.23. *Ми скажемо, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X,\mu)$ збігається до функції f за мірою, якщо для довільного $\delta > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \ge \delta\}) = 0.$$

Теорема 5.24. *Якщо послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X,\mu)$ збігається до функції f майже скрізь, то вона збігається до f і за мірою.*

Доведення. Зауважимо, що функція f є вимірна (див. вправу). Зафіксуємо довільне $\delta > 0$ і розглянемо множини

$$E_k(\delta) = \{x \mid |f_k(x) - f(x)| \ge \delta\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Покладемо за означенням

$$R_n(\delta) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\delta), \qquad M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\delta)$$

Оскільки всі функції f, f_k є вимірні, то вимірними є всі множини $E_k(\delta), R_n(\delta)$ і M. Очевидно, що

$$R_1(\delta) \supset \ldots R_n(\delta) \supset \ldots.$$

Тому з огляду на неперервність міри μ маємо

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\delta)) = \mu(M).$$

Переконаємося, що $\mu(M) = 0$. Дійсно, якщо $x \in M$, то нерівність

$$|f_k(x) - f(x)| \geq \delta$$

виконується для нескінченного числа номерів k, а, отже, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) \neq f(x)$. Таким чином

$$M \subset \{x \mid f(x) \neq \lim_{k\to\infty} f_k(x)\}$$

А оскільки послідовність $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ збігається майже скрізь, то $\mu(M) = 0$ (поясніть чому). Зі сказаного отримуємо, що

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\delta)) = 0.$$

Оскільки $E_k(\delta) \subset R_k(\delta)$, то $\mu(E_k(\delta)) \leq \mu(R_k(\delta))$. А, отже,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(E_k(\delta)) = 0.$$

А це означає, що послідовність $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до f за мірою. $\square$

Зі збіжності за мірою не випливає збіжність майже скрізь.

Вправа 5.25. *Придумайте приклад послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X,\mu)$, яка збігається за мірою до функції $f : X \to \mathbb{R}$, то $f \in \mathcal{V}(X,\mu)$, але не збігається до неї майже скрізь.*

Однак, справедлива наступна

Теорема 5.26. *Якщо послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathcal{V}(X,\mu)$ збігається до функції $f \in \mathcal{V}(X,\mu)$ за мірою, то з неї можна вибрати підпослідовність, яка збігається до функції f майже скрізь.*

Таким чином у просторі $\mathcal{V}(X,\mu)$ ми маємо цілий набір видів збіжності:
(A_1) - рівномірна збіжність;
(A_2) - поточкова збіжність;
(A_3) - збіжність майже скрізь;
(A_4) - майже рівномірна збіжність;
(A_5) - збіжність за мірою.
Справедливі імплікації

$$(A_1) \Rightarrow (A_2) \Rightarrow (A_3) \Rightarrow (A_4) \Rightarrow (A_5).$$

6. Практичне заняття: Загальне поняття міри. Вимірні Функції. Еквівалентні функції.

Задача 6.1. *Доведіть скінченну напівадитивність зовнішної міри:*

$$\forall A \subset X \quad \forall A_1, \ldots, A_n \subset X \qquad \left(A \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) \Longrightarrow \left(\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j) \right).$$

Розв'язок. Нехай $A \subset \bigcup_{j=1}^n A_j$. Додамо до послідовності $(A_j)_{j=1}^n$ порожні множини $A_j; = \emptyset,\ j > n$. З зліченної напівадитивності зовнішної міри випливає, що

$$\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

А оскільки при $j > n$ $\mu^*(A_j) = \mu^*(\emptyset) = 0$, то

$$\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j).$$

Задача 6.2. *Нехай $A, B \subset X$. Доведіть нерівність*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B).$$

Розв'язок. Зауважимо, що

$$A \subset B \cup (A \setminus B) \subset B \cup (A\Delta B)\,.$$

З скінченної напівадитивності зовнішної міри випливає, що

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B).$$

А, отже,

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \mu^*(A\Delta B).$$

Оскільки множини A і B є довільними, то, переставляючи їх місцями, отримуємо
$$\mu^*(B) - \mu^*(A) \leq \mu^*(B\Delta A) = \mu^*(A\Delta B).$$
Отже,
$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B).$$

Задача 6.3. *Нехай $A, B, C \subset X$. Доведіть нерівність*
$$\mu^*(A\Delta B) \leq \mu^*(A\Delta C) + \mu^*(C\Delta B).$$

Розв'язок. Досить довести включення
$$A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (C\Delta B).$$
і скористатися скінченною напівадитивністю зовнішної міри. Щоб довести це включення нам досить довести, що
$$A \setminus B \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$$
і
$$B \setminus A \subset (C \setminus A) \cup (B \setminus C)$$
Очевидно, що досить довести тільки перше включення. Довести самостійно.

Далі $(X, \mathcal{U}, \mu)$ - простір з мірою.

Задача 6.4. *Нехай $A, B \in \mathcal{U}$ доведіть рівність*
$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B).$$

Розв'язок. Оскільки $A = (A \setminus B) \sqcup A \cap B$, то
$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B).$$
Звідки випливає рівність
$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B).$$

Задача 6.5. *Нехай $A, B \in \mathcal{U}$ доведіть рівність*
$$\mu(A\Delta B) = \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B).$$

Розв'язок. Оскільки $A\Delta B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$, то
$$\mu(A\Delta B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A).$$
Враховуючи, що
$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \cap A)), \qquad \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B),$$

отримуємо рівність

$$\mu(A\Delta B) = \mu(A) + \mu(B)) - 2\mu(A \cap B).$$

Задача 6.6. *Нехай $A, B \in \mathcal{U}$ доведіть рівність*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Розв'язок. Оскільки $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$, то

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B).$$

Враховуючи, що

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \cap A)), \qquad \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B),$$

отримуємо рівність

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)) - \mu(A \cap B).$$

Означення 6.7. *Нехай Y - метричний простір. Функція $f : Y \to \mathbb{R}$ називається борелівською, якщо прообраз $f^{-1}(A)$ кожної борелівської множини $A \in B(\mathbb{R})$ є борелівською множиною (належить $B(Y)$).*

Зокрема,

Означення 6.8. *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається борелівською, якщо прообраз $f^{-1}(A)$ кожної множини $A \in B(\mathbb{R})$ належить $B(\mathbb{R})$.*

Задача 6.9. *Нехай $f : X \to \mathbb{R}$. Щоб функція f була борелівською необхідно і досить, що для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ борелівською була множина $\{f < \lambda\}$.*

Розв'язок. Розглянемо сімейство $\mathcal{A}$ всіх підмножин $A \subset \mathbb{R}$ таких, що $f^{-1}(A) \in B(X)$. Оскільки операція взяття прообразу комутує з усіма теоретико-множинними операціями, то $\mathcal{A}$ є σ-алгеброю (бо такою є $B(\mathbb{R})$). З умови задачі випливає, що $\mathcal{A}$ містить всі множини вигляду $(-\infty, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$. Оскільки $\mathcal{A}$ є σ-алгеброю, то вона містить також множини вигляду

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, a + 1/n), \qquad a \in \mathbb{R},$$

а, отже, і множини

$$(a, b) = (-\infty, b) \setminus \{-\infty, a],$$

а, отже, всі відкриті множини, а, отже, і всі борелівські множини. Таким чином, $B(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$. Звідки (див. означення) випливає, що f - борелівська функція.

Задача 6.10. *1) Нехай A - відкрита множина в $\mathbb{R}^n$. Кожна неперервна функція функція $f : A \to \mathbb{R}$ є борелівською. 2) Кожна борелівська функція $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є μ_1-вимірною. 3) Композиція борелівських функцій є борелівською.*

Розв'язок. 1) Якщо функція f неперервна, то прообраз $f^{-1}(B)$ відкритої множини B є множина відкрита. Тому множина $\{f < \lambda\}$ відкрита, а, отже, борелівська при довільному $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Нехай f, g є борелівськими функціями. Зауважимо, що кожна борелівська множина є μ_1-вимірною. Оскільки f є борелівською функцією, то для довільної борелівської множини $A \in B(\mathbb{R})$ прообраз $f^{-1}(A)$ є борелівською множиною, а отже, μ_1-вимірною. Тому f є μ_1-вимірною.

Розглянемо композицію $h(x) = f(g(x))$. Для довільної борелівської множини $A \in B(\mathbb{R})$

$$h^{-1}(A) = \{x \mid f(g(x)) \in A\} = \{x \mid g(x) \in f^{-1}(A)\} = g^{-1}(f^{-1}(A)).$$

Оскільки f і g борелівські, то $f^{-1}(A)$ є борелівська множина, а, отже, і $g^{-1}(f^{-1}(A))$ є борелівська множина. Звідси випливає, що h є борелівська функція.

Задача 6.11. *1) Чи є функція $\mathbb{R} \ni x \mapsto [x]$ борелівською. 2) Чи є функція $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto [x]$ борелівською.*

Розв'язок. 1) Функція $\mathbb{R} \ni x \mapsto [x]$ є борелівською. Для цього досить показати, що для довільного $c \in \mathbb{R}$ множина

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] < c\}$$

є борелівська. Легко бачити, A є піввіссю. Отже, A борелівська. Тому функція $x \mapsto [x]$ є борелівською.

2) Функція $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto [x]$ є борелівською. Дійсно, для довільного $c \in \mathbb{R}$ розглянемо множину

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid [x] < c\}.$$

Легко переконатися, що ця множина є відкрита, а, отже, боролівська. Тому функція $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto [x]$ є борелівською.

Задача 6.12. *Чи є μ_1-вимірною функція $f(x) = \sin[x]$ (тут $[x]$ - ціла частина числа $x \in \mathbb{R}$).*

Розв'язок. Ми вже знаємо, що функція $[x]$ є борелівська. Функція $\sin$ є неперервна, а отже вона теж борелівська. Композиція борелівських функцій є борелівською. Отже, функція f є борелівська. Але, борелівська функція є μ_1-вимірною.

Задача 6.13. *Чи є μ_2-вимірною функція $f(x, y))) = ([x] + [y])e^{x+y}$ (тут $[x]$ - ціла частина числа $x \in \mathbb{R}$).*

Розв'язок. Ця функція є борелівською функцією, що діє з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$. Але кожна множина з $B(\mathbb{R}^2)$ є вимірна за мірою μ_2. Тому f є μ_2-вимірна.

Задача 6.14. *Нехай $f_1, \ldots, f_n$ вимірні функції, що діють з X в $\mathbb{R}$. Чи є μ-вимірною функція*

$$f(x) = \max_{1 \leq j \leq n} f_j(x).$$

Розв'язок. Ця функція є вимірною. Дійсно, для довільного $c \in \mathbb{R}$

$$\{f < c\} = \bigcap_{j=1}^{n} \{f_j < c\}.$$

Оскільки функції f_j є вимірні, то $\{f_j < c\} \in \mathcal{U}$. А, отже, $\{f < c\} \in \mathcal{U}$, тобто f є μ-вимірна.

Задача 6.15. *Нехай $f_1, \ldots, f_n$ вимірні функції, що діють з X в $\mathbb{R}$. Чи є μ-вимірною функція*

$$f(x) = \min_{1 \leq j \leq n} f_j(x).$$

Розв'язок. Ця функція є вимірною. Дійсно, для довільного $c \in \mathbb{R}$

$$\{f < c\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{f_j < c\}.$$

Оскільки функції f_j є вимірні, то $\{f_j < c\} \in \mathcal{U}$. А, отже, $\{f < c\} \in \mathcal{U}$, тобто f є μ-вимірна.

Задача 6.16. *Чи є μ_1-вимірною функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задана формулою*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x| + n}.$$

Розв'язок. Зауважимо, що кожна функція

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{|x| + n}$$

є неперервна, а, отже, є μ_1-вимірною. Тому вимірними є і функції

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{|x| + n}.$$

При кожному $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x| + n}.$$

збігається (за ознакою Лейбніца). Тому послідовність вимірних функцій s_N поточково збігається до f. А, отже, f є вимірна як поточкова границя вимірних функцій.

Задача 6.17. *Чи є μ_1-вимірною функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задана формулою*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}.$$

Розв'язок. Зауважимо, що кожна функція

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$$

є неперервна, а, отже, є μ_1-вимірною. Тому вимірними є і функції

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{x}{x^2 + n^2}.$$

При кожному $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

збігається за ознакою порівняння. Дійсно,

$$|f_n(x)| \le \frac{|x|}{n^2} = O(n^{-2}), \qquad n \to \infty.$$

Тому послідовність вимірних функцій s_N поточково збігається до f. А, отже, f є вимірна як поточкова границя вимірних функцій.

Задача 6.18. *Чи є μ_1-вимірною функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задана формулою*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin xn}{x^2 + n^4}$$

Розв'язок. Зауважимо, що кожна функція

$$f_n(x) = \frac{\sin xn}{x^2 + n^4}$$

є неперервна, а, отже, є μ_1-вимірною. Тому вимірними є і функції

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin xn}{x^2 + n^4}.$$

При кожному $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin xn}{x^2 + n^4}$$

збігається за ознакою порівняння. Дійсно,

$$f_n(x) = \frac{\sin xn}{x^2 + n^4} = O(n^{-4}), \qquad n \to \infty.$$

Тому послідовність вимірних функцій s_N поточково збігається до f. А, отже, f є вимірна як поточкова границя вимірних функцій.

Задача 6.19. *Чи є μ_1-вимірною функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задана формулою*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\operatorname{sign} x}}{|x| + n^{3/2}}.$$

Розв'язок. Зауважимо, що кожна функція

$$f_n(x) = \frac{e^{\operatorname{sign} x}}{|x| + n^{3/2}}$$

є кусково неперервна, а, отже, є μ_1-вимірною. Тому вимірними є і функції

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{\operatorname{sign} x}}{|x| + n^{3/2}}.$$

При кожному $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\operatorname{sign} x}}{|x| + n^{3/2}}$$

збігається за ознакою порівняння. Дійсно,

$$f_n(x) = \frac{e^{\operatorname{sign} x}}{|x| + n^{3/2}} \le \frac{e}{n^{3/2}} = O(n^{-3/2}) \qquad n \to \infty.$$

Тому послідовність вимірних функцій s_N поточково збігається до f. А, отже, f є вимірна як поточкова границя вимірних функцій.

Задача 6.20. *Чи є μ_1-вимірною функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задана формулою*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|^3 + n^4}\right)$$

Розв'язок. Зауважимо, що кожна функція

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|^3 + n^4}\right)$$

є неперервна, а, отже, є μ_1-вимірною. Тому вимірними є і функції

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|^3 + n^4}\right).$$

При кожному $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|^3 + n^4}\right)$$

збігається за ознакою порівняння. Дійсно, оскільки

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \qquad x \to 0,$$

то
$$f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|^3+n^4}\right) \sim \frac{1}{|x|^3+n^4} = O(n^{-4}), \qquad n \to \infty.$$
Тому послідовність вимірних функцій s_N поточково збігається до f. А, отже, f є вимірна як поточкова границя вимірних функцій.

Задача 6.21. *Знайти функцію $f \in C(\mathbb{R})$ до якої збігається майже скрізь стосовно міри μ_1 послідовність функцій*
$$f_n(x) = x^2 + \sin^n x.$$

Розв'язок. Зауважимо, що
$$\lim_{n\to\infty} \sin^n x = 0,$$
якщо $|\sin x| < 1$, тобто, якщо $x \notin A := \{\pi/2 + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Оскільки множина A є зліченна, то $\mu_1(A) = 0$. Крім того, при $x \notin A$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^2 + \lim_{n\to\infty} \sin^n x = x^2.$$
Отже, послідовність функцій f_n збігається майже скрізь до неперервної функції $f(x) = x^2$.

Задача 6.22. *Знайти функцію $f \in C(\mathbb{R})$ до якої збігається майже скрізь за мірою μ_1 послідовність функцій*
$$f_n(x) = e^x(1 + \sin^n x + \cos^n x).$$

Розв'язок. Зауважимо, що
$$\lim_{n\to\infty} \sin^n x = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \cos^n x = 0,$$
якщо $|\sin x| < 1$ і $|\cos x| < 1$, тобто, якщо $x \notin A := \{\pi n/2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Оскільки множина A є зліченна, то $\mu_1(A) = 0$. Крім того, при $x \notin A$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x.$$
Отже, послідовність функцій f_n збігається майже скрізь до неперервної функції $f(x) = e^x$.

Задача 6.23. *Знайти функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ до якої збігається майже скрізь стосовно μ_1 послідовність функцій*
$$f_n(x) = e^{\sin^n x} + \frac{nx+1}{x+n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Зауважимо, що
$$\lim_{n\to\infty} \sin^n x = 0,$$

якщо $|\sin x| < 1$, тобто, якщо $x \notin A := \{\pi/2 + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Оскільки множина A є злічення, то $\mu_1(A) = 0$. Крім того, при $x \notin A$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 + x.$$

Отже, послідовність функцій f_n збігається майже скрізь до неперервної функції $f(x) = 1 + x$.

Задача 6.24. *Знайти функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ до якої збігається майже скрізь стосовно міри μ_1 послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{x + x^n}{1 + x^{2n}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x + x^n}{1 + x^{2n}}.$$

Потрібно розглянути декілька випадків. Якщо $|x| > 1$, то

$$\left|\frac{x + x^n}{1 + x^{2n}}\right| \le \frac{1}{|x|^{2n-1}} + \frac{1}{|x|^n} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Отже, при $|x| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x + x^n}{1 + x^{2n}} = 0.$$

Якщо $|x| < 1$, то

$$x^n \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Тому при $|x| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x + x^n}{1 + x^{2n}} = x.$$

Залишається випадок точок множини $\{x \mid |x| = 1\}$. Але, це скінченна множина, а, отже, має міру нуль. Тому наша послідовність збігається до кусково неперервної функції

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } |x| \le 1; \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$$

Задача 6.25. *Знайти функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ до якої збігається майже скрізь стосовно міри μ_1 послідовність функцій*

$$f_n(x) = e^{-x^{2n}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^{2n}}.$$

Потрібно розглянути декілька випадків. Якщо $|x| > 1$, то

$$-x^{2n} \to -\infty, \qquad n \to \infty.$$

Отже, при $|x| > 1$
$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^{2n}} = 0.$$
Якщо $|x| < 1$, то
$$-x^{2n} \to 0, \qquad n \to \infty.$$
Тому при $|x| < 1$
$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^{2n}} = e^0 = 1.$$
Залишається випадок точок множини $\{x \mid |x| = 1\}$. Але, це скінченна множина, а, отже, має міру нуль. Тому наша послідовність збігається до кусково неперервної функції
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x| \le 1; \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$$

7. Інтеграл Лебега та його властивості.

Сьогодні ми дамо означення і вивчимо властивості інтеграла Лебега.

Означення 7.1. *Нехай $(X, \mathcal{U}, \mu)$ простір з мірою (X - непорожня множина, $\mathcal{U}$ - σ-алгебра, μ - невід'ємна повна міра на $\mathcal{U}$). Функцію $f : X \to \mathbb{R}$ ми назвемо простою, якщо вона приймає не більш ніж зліченну кількість значень. Через $\Pi(X, \mu)$ позначимо множину всіх простих функцій в $\mathcal{V}(X, \mu)$, тобто*
$$\Pi(X, \mu) := \{f \in \mathcal{V}(X, \mu) \mid f - \textit{проста функція}\}.$$

Вправа 7.2. $\Pi(X, \mu)$ *є лінійним простором. Крім того добуток функцій з $f, g \in \Pi(X, \mu)$ теж належить $\Pi(X, \mu)$.*

Вправа 7.3. *Щоб проста функція $f : X \to \mathbb{R}$ належала до $\Pi(X, \mu)$ необхідно і досить, щоб прообраз $f^{-1}(\{y\})$ кожного значення y функції f був вимірною множиною, тобто щоб*
$$\forall y \in \operatorname{ran} f \quad f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{U}.$$

Теорема 7.4. *Кожна функція $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$ є границею рівномірно збіжної до f послідовності функцій з $\Pi(X, \mu)$.*

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{V}(X, \mu)$. Позначимо через $f_m (m \in \mathbb{N})$ функцію, що задана формулою
$$f_m(x) := \frac{n}{m}, \qquad \text{якщо} \quad f(x) \in [n/m, (n+1)/m), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки множини

$$\{x \in X \mid f(x) \in [n/m, (n+1)/m)\} = f^{-1}([n/m, (n+1)/m)),$$

є вимірними (належать $\mathcal{U}$), то кожна функція f_m є простою вимірною, тобто $f_m \in \Pi(X, \mu)$. З означення функцій f_m випливає, що

$$0 \leq f(x) - f_m(x) \leq 1/m, \qquad x \in X, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Звідки очевидним чином випливає, що послідовність $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ при $m \to \infty$ рівномірно збігається до f. □

Інтеграл Лебега простої функції.

Означення 7.5. *Нехай $f \in \Pi(X, \mu)$ і $\{y_n\}_{n=1}^N$ множина значень функції f (тут $N \in \mathbb{N}$ або $N = \infty$). Ми скажемо, що функція f є інтегровною за Лебегом, якщо ряд*

$$\sum_n y_n \mu(f^{-1}(y_n))$$

є абсолютно збіжним (це стосується випадку, коли $N = \infty$). Якщо f є інтегровною, то її інтеграл по множині X ми задаємо формулою

$$\int_X f\, d\mu := \sum_n y_n \mu(f^{-1}(y_n)).$$

Множину всіх інтегровних за Лебегом функцій $f \in \Pi(X, \mu)$ ми позначимо через $L\Pi(X, \mu)$

Теорема 7.6. *Нехай $f \in \Pi(X, \mu), X = \bigsqcup_n A_n, A_n \in \mathcal{U}$, і функція f на кожній множині A_n є постійна і приймає значення a_n. Щоб f була інтегровна необхідно і досить, що був абсолютно збіжним ряд*

$$\sum_n a_n \mu(A_n).$$

При цьому

$$\int_X f\, d\mu = \sum_n a_n \mu(A_n).$$

Доведення. Зауважимо, що для кожного значення y_k функції f маємо

$$f^{-1}(\{y_k\}) = \bigsqcup_{a_n = y_k} A_n.$$

А, отже,

$$\mu(f^{-1}(\{y_k\})) = \sum_{a_n = y_k} \mu(A_n).$$

Тому
$$\sum_k |y_k|\mu(f^{-1}(y_k)) = \sum_n |a_n|\mu(A_n).$$
Звідки випливає, що ряди
$$\sum_k y_k\mu(f^{-1}(y_k)), \qquad \sum_n a_n\mu(A_n)$$
одночасно абсолютно збіжні або розбіжні. $\square$

Теорема 7.7. *$L\Pi(X,\mu)$ лінійним простором. При цьому для довільних $f, g \in L\Pi(X,\mu)$ і довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ маємо:*

(1) $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$;
(2) $\int_X \lambda f\,d\mu = \lambda \int_X f\,d\mu$;
(3) *якщо $f \in L\Pi(X,\mu)$ є обмежена, то* $\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \left(\sup_{x\in X}|f(x)|\right)\mu(X)$.

Доведення. Доведемо лише, що для довільних $f, g \in L\Pi(X,\mu)$ сума $f+g$ є інтегровною функцією і
$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$
Решта тверджень теореми є майже очевидними. Нехай $f, g \in L\Pi(X,\mu)$ і нехай
$$\{a_j\}_j = \operatorname{ran} f, \quad \{b_k\}_k = \operatorname{ran} g.$$
Покладемо
$$A_j := f^{-1}(a_j), \qquad B_k := g^{-1}(b_k), \qquad C_{jk} = A_j \cap B_k.$$
Очевидно, що
$$X = \bigsqcup_j A_j, \quad X = \bigsqcup_k B_k.$$
А, отже,
$$X = \bigsqcup_{j,k} C_{jk}, \quad A_j = \bigsqcup_k C_{jk}, \quad B_k = \bigsqcup_j C_{jk}.$$
Звідси, зокрема, маємо, що
$$\sum_k \mu(C_{jk}) = \mu(A_j), \qquad \sum_j \mu(C_{jk}) = \mu(B_k)$$
Зауважимо, що на множині C_{jk} функція $f+g$ є постійна і приймає значення $a_j + b_k$. Оскільки
$$\sum_{j,k} |a_j + b_k|\mu(C_{jk}) \le \sum_{j,k} |a_j|\mu(C_{jk}) + \sum_{j,k} |b_k|\mu(C_{jk}) =$$
$$= \sum_j |a_j|\mu(A_j) + \sum_k |b_k|\mu(B_k) < \infty,$$

то з теореми 7.6 випливає, що $f+g$ є інтегровна. Зі сказаного вище також випливає, що

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \sum_{j,k}(a_j+b_k)\mu(C_{jk}) = \sum_{j,k} a_j\mu(C_{jk}) + \sum_{j,k} b_k\mu(C_{jk}) =$$

$$= \sum_j a_j\mu(A_j) + \sum_k b_k\mu(B_k) = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

□

Загальне означення інтеграла Лебега.

Означення 7.8. *Позначимо через $L(X,\mu)$ множину всіх функцій, які є границями рівномірно збіжних послідовностей простору $L\Pi(X,\mu)$, тобто функція $f : X \to \mathbb{R}$ належить $L(X,\mu)$ тоді і тільки тоді, коли в $L\Pi(X,\mu)$ існує послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, яка рівномірно на X збігається до f.*

Домовимося для довільної множини $A \subset X$ через χ_A позначати характеристичну функцію множини A, тобто функцію, що задана формулою

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A; \\ 0, & \text{якщо } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Вправа 7.9. *1) Доведіть, що $L(X,\mu)$ є лінійним простором.*
2) Якщо $f \in L(X,\mu)$ і $A \in \mathcal{U}$, то $\chi_A f \in L(X,\mu)$.

Означення 7.10. *Нехай $f \in L(X,\mu)$ і є рівномірною границею послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ функцій з $L\Pi(X,\mu)$. За означенням ми покладаємо*

$$\int_X f\,d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu. \tag{7.1}$$

Якщо $A \in \mathcal{U}$, то

$$\int_A f\,d\mu := \int_X \chi_A f\,d\mu.$$

Коректність означення.
Переконаємося, що означення 7.10 є коректним. Для цього потрібно показати, що:

(1) границя в (7.1) існує;

(2) при фіксованій функції $f \in L(X,\mu)$ границя в (7.1) не залежить від вибору послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

(3) для функцій $f \in L\Pi(X,\mu)$ означення 7.10 є рівносильне означенню 7.5.

1. З властивостей інтеграла Лебега від простої функції випливає, що

$$\left|\int_X f_n\,d\mu - \int_X f_m\,d\mu\right| = \left|\int_X (f_n - f_m)\,d\mu\right| \le (\sup|f_n - f_m|)\mu(X), \qquad n,m \in \mathbb{N}.$$

Оскільки послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно збіжною, то

$$\sup|f_n - f_m| \to 0 \qquad \text{при} \quad n,m \to \infty.$$

Тому послідовність інтегралів $\int_X f_n\,d\mu$ є фундаментальною, а, отже, збіжною.

2. Нехай послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $L\Pi(X,\mu)$ рівномірно збігаються до f. Розглянемо послідовність $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, що задана формулою

$$h_{2n-1} = f_n, \qquad h_{2n} = g_n.$$

Очевидно, що послідовність $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ належить $L\Pi(X,\mu)$ і рівномірно збігається до f. Тому існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X h_n\,d\mu.$$

Оскільки всі підпослідовності послідовності $\left(\int_X f_n\,d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ мають однакові границі, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X h_{2n-1}\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X h_{2n}\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X g_n\,d\mu.$$

3. Якщо $f \in L\Pi(X,\mu)$, то послідовність $f_n \equiv f$ рівномірно збігається до f. Звідси, враховуючи доведене вище, випливає, що для функцій $f \in L\Pi(X,\mu)$ означення 7.10 і 7.5 є рівносильними.

Властивості інтеграла Лебега.

Ми вже говорили про властивості інтеграла Лебега від простої функції. Властивості інтеграла Лебега у загальному випадку ми обсудимо більш детально.

Теорема 7.11. *Нехай $f,g \in L(X,\mu)$ і $A,B \in \mathcal{U}$. Тоді:*

(1) $\chi_A \in L(X,\mu), \qquad \int_X \chi_A\,d\mu = \mu(A)$;

Лінійність інтеграла.

(2) $\int_A \lambda f\,d\mu = \lambda \int_A f\,d\mu$ *для довільних* $\lambda \in \mathbb{R}$;

(3) $\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu$;

Адитивність по області інтегрування.

(4) *якщо* $A \cap B = \emptyset$, *то* $\int_{A\sqcup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu$;

Інтеграл невід'ємної функції невід'ємний.

(5) *якщо* $f(x) \geq 0$ *при* $x \in A$, *то* $\int_A f\,d\mu \geq 0$;

Монотонність інтеграла.

(6) *якщо* $f(x) \leq g(x)$*при* $x \in A$, *то* $\int_A f\,d\mu \leq \int_A g\,d\mu$;

Оцінка інтеграла.

(7) *якщо* $m \leq f(x) \leq M$ *при* $x \in A$, *то*

$$m\mu(A) \leq \int_A f\,d\mu \leq M\mu(A);$$

(8) *якщо* $\mu(A) = 0$, *то* $\int_A f\,d\mu = 0$;

Інтеграли еквівалентних функцій.

(9) *якщо* $h \in \mathcal{V}(X,\mu)$ *і* $h \sim f$, *то* $h \in L(X,\mu)$ *і* $\int_X h\,d\mu = \int_X f\,d\mu$;

Достатня ознака інтегровності вимірної функції.

(10) *якщо* $h \in \mathcal{V}(X,\mu)$, $f \geq 0$ *і* $|h| \leq f$, *то* $h \in L(X,\mu)$;

(11) *для довільних* $h \in \mathcal{V}(X,\mu)$, *то* $(h \in L(X,\mu)) \Leftrightarrow (|h| \in L(X,\mu))$;

Оцінка модуля інтеграла.

(12) $\left|\int_A f\,d\mu\right| \leq \int_A |f|\,d\mu \leq (\operatorname{supp}|f|)\mu(A)$.

Доведення. Більшість перерахованих властивостей очевидним чином випливають з означень. Тому ми обмежимося доведенням тільки властивостей $(3), (9), (10)$.

(3) Нехай послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $L\Pi(X,\mu)$ рівномірно збігаються до f і g. З властивостей інтеграла для простих функцій маємо, що

$$\int_A (f_n + g_n)\,d\mu = \int_A f_n\,d\mu + \int_A g_n\,d\mu, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Переходячи в останній рівності до границі при $n \to \infty$, отримуємо, що

$$\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu.$$

(9) Нехай $f \in L(X,\mu), h \in \mathcal{V}(X,\mu)$ і $h \sim f$. Розглянемо функцію $\varphi := f - h$. Вона вимірна і майже скрізь дорівнює нулеві. Нам досить переконатися, що вона належить $L(X,\mu)$ і $\int_X \varphi\,d\mu = 0$. Розглянемо послідовність функцій

$$\varphi_m(x) := \frac{n}{m}, \qquad \text{якщо} \quad \varphi(x) \in [n/m, (n+1)/m), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Легко бачити, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ проста функція φ_m рівна нулеві майже скрізь. Це означає, що всі члени ряду

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{n}{m}\mu(\varphi^{-1}(\tfrac{n}{m}))$$

рівні нулеві. А, отже, $\varphi_m \in L\Pi(X,\mu)$ і $\int_X \varphi_m \, d\mu = 0$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Оскільки послідовність $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до φ, то $\varphi \in L(X,\mu)$ і

$$\int_X \varphi \, d\mu = 0.$$

(10) Нехай $f \in L(X,\mu)$, $f \geq 0$, $h \in \mathcal{V}(X,\mu)$ і $|h| \leq f$. Переконаємося, що функція h інтегровна.

Покладемо за означенням

$$h_m(x) := \frac{n}{m}, \qquad \text{якщо} \quad h(x) \in [n/m,(n+1)/m), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, що

$$|h_m(x)| \leq f(x)+1, \qquad x \in X, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що кожна функція h_m є інтегровна. Зафіксуємо m і нехай

$$A_{n,m} = \{x \in X \mid h(x) \in [n/m,(n+1)/m)\}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки для довільних $n \in \mathbb{Z}$

$$|h_m(x)| = \frac{|n|}{m} \leq f(x)+1, \qquad x \in A_{n,m},$$

то

$$\frac{|n|}{m}\mu(A_{n,m}) \leq \int_{A_{n,m}} (f+1)\, d\mu.$$

Отже, для довільних $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{|n|\leq N} \frac{|n|}{m}\mu(A_{n,m}) \leq \sum_{|n|\leq N} \int_{A_{n,m}} (f+1)\, d\mu = \int\limits_{\bigsqcup_{|n|\leq N} A_{n,m}} (f+1)\, d\mu \leq \int\limits_X (f+1)\, d\mu < \infty.$$

А це означає, що ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|n|}{m}\mu(A_{n,m})$ є збіжний, тобто $h_m \in L(X,\mu)$. Оскільки h є рівномірною границею послідовності $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$, то $h \in L(X,\mu)$.

Теорема доведена. □

Абсолютна неперервність інтеграла.

Теорема 7.12. *Нехай $f \in L(X,\mu)$. Тоді*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{U} \quad (\mu(A) < \delta) \Rightarrow \left|\int_A f\, d\mu\right| < \varepsilon.$$

Доведення. Спочатку доведемо, що справедливе наступне допоміжне твердження:

$$\forall f \in L(X,\mu)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists g, h \in L(X,\mu)\ (f = g+h) \wedge (g - \text{обмежена}) \wedge \left(\int_X |h|\, d\mu < \varepsilon \right).$$

Нехай $f \in L(X,\mu)$. Оскільки f є рівномірною границею послідовності простих інтегровних, то існує проста інтегровна функція φ така, що $f - \varphi$ є обмежена. Тому без обмеження загальності можна вважати, що f є проста інтегровна функція.

Нехай $X = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_n$ і f приймає значення a_n на множині A_n. Тоді

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_n| \mu(A_n) < \infty$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |a_n| \mu(A_n) < \varepsilon.$$

Покладемо

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in \bigsqcup_{j=1}^{N} A_n; \\ 0, & \text{якщо } x \in \bigsqcup_{j=N+1}^{\infty} A_n, \end{cases} \qquad h = f - g.$$

Очевидно, що g є обмежена і

$$\left| \int\limits_X h\, d\mu \right| \le \int\limits_X |h|\, d\mu = \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_n| \mu(A_n) < \varepsilon.$$

Тим самим допоміжне твердження доведене.

Доведемо тепер теорему. Нехай $f \in L(X,\mu)$ і $\varepsilon > 0$. Згідно допоміжного твердження існують $g, h \in L(X,\mu)$ такі, що $f = g + h$ і

$$\sup |g| + 1 = M < \infty, \qquad \int_X |h|\, d\mu < \varepsilon/2$$

Покладемо
$$\delta = \frac{\varepsilon}{2M}.$$
Нехай $A \in \mathcal{U}$ і $\mu(A) < \delta$. Тоді
$$\left|\int_A f\,d\mu\right| \le \int_A |f|\,d\mu = \int_A |g+h|\,d\mu \le \int_A |g|\,d\mu + \int_A |h|\,d\mu \le \int_A |g|\,d\mu + \int_X (|h|\,d\mu.$$
Оскільки
$$\int_X (|h|\,d\mu < \varepsilon/2, \qquad \int_A |g|\,d\mu \le M\mu(A) < M\delta = \varepsilon/2,$$
то
$$\left|\int_A f\,d\mu\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$
Теорема доведена. □

σ-адитивність інтеграла.

Теорема 7.13. *Нехай $f \in L(X,\mu)$ і $A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$, де $A, A_j \in \mathcal{U} (j \in \mathbb{N})$. Тоді*

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\mu, \tag{7.2}$$

причому ряд в (7.2) *є абсолютно збіжний.*

Доведення. Спочатку доведемо рівність (7.2). Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. З абсолютної неперервності інтеграла випливає, що існує $\delta > 0$ таке, що якщо $C \in \mathcal{U}$ і $\mu(C) < \delta$, то
$$\left|\int_C f\,d\mu\right| < \varepsilon.$$

Зі зліченної адитивності міри μ випливає, що
$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A) < \infty.$$
Тому існує $N_0 \in \mathbb{N}$ таке, що
$$\sum_{j=N_0+1}^{\infty} \mu(A_n) < \delta.$$

Нехай $N > N_0$ і
$$B = \bigsqcup_{j=1}^{N} A_j, \qquad C = \bigsqcup_{j=N+1}^{\infty} A_j.$$
Оскільки $A = B \sqcup C$, то з адитивності інтеграла випливає, що
$$\int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu + \int_C f\,d\mu$$
і
$$\int_B f\,d\mu = \sum_{j=1}^{N} \int_{A_j} f\,d\mu.$$
Тому
$$\left| \int_A f\,d\mu - \sum_{j=1}^{N} \int_{A_j} f\,d\mu \right| = \left| \int_C f\,d\mu \right|.$$
Враховуючи, що
$$\mu(C) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \mu(A_n) \le \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \mu(A_n) < \delta$$
отримуємо
$$\left| \int_C f\,d\mu \right| < \varepsilon.$$
Таким чином
$$\left| \int_A f\,d\mu - \sum_{j=1}^{N} \int_{A_j} f\,d\mu \right| < \varepsilon \qquad \text{при} \quad N > N_0.$$
Звідки випливає, що
$$\int_A f\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\mu.$$
Заміняючи f на $|f|$ маємо, що
$$\int_A |f|\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_n} |f|\,d\mu.$$
Оскільки
$$\left| \int_{A_n} f\,d\mu \right| \le \int_{A_n} |f|\,d\mu, \qquad n \in \mathbb{N},$$
то
$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} f\,d\mu \right| \le \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_n} |f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu < \infty.$$
Отже, ряд у рівності (7.2) збігається абсолютно. Теорема доведена.

□

Нерівність Чебишева.

Теорема 7.14. *Нехай* $f \in L(X,\mu)$, $f \geq 0$ *і* $c > 0$. *Тоді*

$$\mu(\{f \geq c\}) \leq \frac{1}{c}\int_X f\,d\mu.$$

Доведення. Нехай $A := \{f \geq c\}$. Тоді

$$c\chi_A \leq f, \qquad x \in X.$$

А, отже,

$$c\mu(A) = \int_X c\chi_A\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu,$$

тобто

$$\mu(\{f \geq c\}) \leq \frac{1}{c}\int_X f\,d\mu.$$

□

Наслідок 7.15. *Якщо* $f \in L(X,\mu)$ *і* $\int_X |f|\,d\mu = 0$, *то* $f(x) = 0$ *майже скрізь на* X.

Доведення. З нерівності Чебишева випливає, що

$$\mu(\{|f| \geq 1/n\}) \leq n\int_X |f|\,d\mu = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки

$$\{|f| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{|f| \geq 1/n\},$$

то

$$\mu(\{|f| > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{|f| \geq 1/n\}) = 0.$$

Отже, $f(x) = 0$ майже скрізь. □

8. Практичне заняття. Обчислення інтеграла Лебега.

Задача 8.1. *Нехай проста функція* f *задана формулою*

$$f(x) = 2\operatorname{sign} x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Знайдіть інтеграл

$$\int_{-1}^{2} f\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що наша функція є проста вимірна (за мірою μ_1) і приймає три значення:

$$f(x) = -2, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_1 := [-1, 0);$$
$$f(x) = 0, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_2 := \{0\};$$
$$f(x) = 2, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_3 := (0, 2].$$

Тому згідно означення інтеграла від простої функції маємо:

$$\int_{-1}^{2} f, d\mu_1 = (-2)\cdot\mu_1(A_1) + 0\cdot\mu_1(A_2) + 2\cdot\mu_1(A_3) = -2 + 4 = 2.$$

Задача 8.2. *Нехай проста функція f задана формулою*

$$f(x) = \operatorname{sign}(1 - x^2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Знайдіть інтеграл

$$\int_{-3}^{5} f\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що наша функція є проста вимірна (за мірою μ_1) і приймає три значення:

$$f(x) = -1, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_1 := [-3, -1) \cup (1, 5];$$
$$f(x) = 0, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_2 := \{-1, 1\};$$
$$f(x) = 1, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_3 := (-1, 1).$$

Тому згідно означення інтеграла від простої функції маємо:

$$\int_{-1}^{2} f, d\mu_1 = (-1)\cdot\mu_1(A_1) + 0\cdot\mu_1(A_2) + 1\cdot\mu_1(A_3) = -6 + 2 = -4.$$

Задача 8.3. *Нехай проста функція f задана формулою*

$$f(x,y) = \mathrm{sign}(x-y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

і $A := [-1,1] \times [0,1]$. Знайдіть інтеграл

$$\int\limits_A f\, d\mu_2.$$

Розв'язок. Зауважимо, що наша функція є проста вимірна (за мірою μ_1) і приймає три значення:

$$f(x) = -1, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_1 := \{(x,y) \in A \mid x < y\};$$
$$f(x) = 0, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_2 := \{(x,y) \in A \mid x = y\};$$
$$f(x) = 1, \qquad \text{якщо} \quad x \in A_3 := \{(x,y) \in A \mid x > y\}.$$

Тому згідно означення інтеграла від простої функції маємо:

$$\int\limits_{-1}^{2} f d\mu_1 = (-1)\cdot\mu_1(A_1) + 0\cdot\mu_1(A_2) + 1\cdot\mu_1(A_3) = -\mu_1(A_1) + \mu_1(A_3).$$

Роблячи нескладний малюнок, бачимо, що

$$\mu_1(A_3) = 1/2, \qquad \mu_1(A_1) = 2 - \mu_1(A_3) = 3/2.$$

Тому

$$\int\limits_{-1}^{2} f, d\mu_1 = -1.$$

Задача 8.4. *Нехай A і B μ-вимірні множини скінченної міри. Знайдіть інтеграл*

$$\int_X |\chi_A - \chi_B|\, d\mu,$$

вважаючи, що відомі величини $\mu(A), \mu(B), \mu(A \cap B)$.

Розв'язок. Функції χ_A, χ_B приймають значення 0 і 1. Тому функція

$$f(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$$

може приймати лише два значення. А власне:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A\Delta B; \\ 0, & \text{якщо } x \notin A\Delta B. \end{cases}$$

Тому

$$\int_X |\chi_A - \chi_B|\, d\mu = \mu(A\Delta B) = \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B).$$

Задача 8.5. *Нехай A і B μ-вимірні множини скінченної міри. Знайдіть інтеграл*

$$\int_X |4\chi_A - \chi_B|\, d\mu,$$

вважаючи, що відомі величини $\mu(A), \mu(B), \mu(A \cap B)$.

Розв'язок. Зауважимо, що

$$f(x) = |4\chi_A(x) - \chi_B(x)| = \begin{cases} 4, & \text{якщо } x \in A \setminus B; \\ 1, & \text{якщо } x \in B \setminus A; \\ 3, & \text{якщо } x \in A \cap B; \\ 0, & \text{якщо } x \notin A \cup B. \end{cases}$$

Отже,

$$\int_X |4\chi_A - \chi_B|\, d\mu = 4\mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + 3\mu(A \cap B) =$$
$$= 4(\mu(A) - \mu(A \cap B)) + (\mu(B) - \mu(A \cap B)) + 3\mu(A \cap B) = 4\mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B).$$

Задача 8.6. *Нехай A і B μ-вимірні множини скінченної міри. Знайдіть інтеграл*

$$\int_X (|3\chi_A - \chi_B| - 2\chi_B)\, d\mu,$$

вважаючи, що відомі величини $\mu(A), \mu(B), \mu(A \cap B)$.

Розв'язок. Нехай

$$f = |3\chi_A - \chi_B| - 2\chi_B.$$

Зауважимо, що

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{якщо } x \in A \setminus B; \\ -1, & \text{якщо } x \in B \setminus A; \\ 0, & \text{якщо } x \in A \cap B; \\ 0, & \text{якщо } x \notin A \cup B. \end{cases}$$

Отже,

$$\int_X f\,d\mu = 3\mu(A \setminus B) - \mu(B \setminus A) =$$
$$= 3(\mu(A) - \mu(A \cap B)) - (\mu(B) - \mu(A \cap B)) = 3\mu(A) - \mu(B) - 2\mu(A \cap B).$$

Задача 8.7. *Нехай A і B μ-вимірні множини скінченної міри. Знайдіть інтеграл*

$$\int_X (|2\chi_A - \chi_B| + 2\chi_A\chi_B)\,d\mu,$$

вважаючи, що відомі величини $\mu(A), \mu(B), \mu(A \cap B)$.

Розв'язок. Нехай

$$f = |2\chi_A - \chi_B| + 2\chi_A\chi_B$$

Зауважимо, що

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } x \in A \setminus B; \\ 1, & \text{якщо } x \in B \setminus A; \\ 3, & \text{якщо } x \in A \cap B; \\ 0, & \text{якщо } x \notin A \cup B. \end{cases}$$

Отже,

$$\int_X f\,d\mu = 2\mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + 3\mu(A \cap B) =$$
$$= 2(\mu(A) - \mu(A \cap B)) + (\mu(B) - \mu(A \cap B)) + 3\mu(A \cap B) = 2\mu(A) + \mu(B).$$

Задача 8.8. *Нехай A і B μ-вимірні множини скінченної міри. Знайдіть інтеграл*

$$\int_X (|2\chi_A - \chi_B| + 2\chi_A\chi_B + 2\chi_X)\,d\mu,$$

вважаючи, що відомі величини $\mu(A), \mu(B), \mu(A \cap B), \mu(X)$.

Розв'язок. Нехай
$$f = |2\chi_A - \chi_B| + 2\chi_A\chi_B + 2\chi_X$$
Зауважимо, що
$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{якщо } x \in A \setminus B; \\ 3, & \text{якщо } x \in B \setminus A; \\ 5, & \text{якщо } x \in A \cap B; \\ 2, & \text{якщо } x \notin A \cup B. \end{cases}$$
Отже,
$$\int_X f\,d\mu = 4\mu(A \setminus B) + 3\mu(B \setminus A) + 5\mu(A \cap B) + 2\mu(X \setminus (A \cup B)) =$$
$$= 4(\mu(A) - \mu(A \cap B)) + 3(\mu(B) - \mu(A \cap B)) + 5\mu(A \cap B) + 2(\mu(X) - \mu(A \cup B)) =$$
$$= 2\mu(A) + \mu(B) + 2\mu(X).$$
Оскільки
$$\mu(X) - \mu(A \cup B) = \mu(X) - \mu(A) - \mu(B) + \mu(A \cup B).$$

Задача 8.9. *Нехай проста функція f задана формулою*
$$f(x) = [2\sin x], \qquad x \in [-\pi, \pi].$$
Знайдіть інтеграл
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що $|f(x) \leq 2$. Тому фунція f може приймати лише п'ять значень $(\pm 2, \pm 1, 0)$. Очевидно, що значення 2 приймається на одноточковій множині
$$A_1 := \{\pi/2\};$$
значення 1 приймається на множині
$$A_2 := \{x \in [-\pi, \pi] \mid 1 \leq 2\sin x < 2\} = [\pi/6, \pi/2) \cup (\pi/2, 5\pi/6];$$
значення 0 приймається на множині
$$A_3 := \{x \in [-\pi, \pi] \mid 0 \leq 2\sin x < 1\} = [0, \pi/6) \cup (5\pi/6, \pi];$$

значення -1 приймається на множині

$$A_4 := \{x \in [-\pi, \pi] \mid -1 \leq 2\sin x < 0\} = [-\pi/6, 0) \cup (-\pi, -5\pi/6];$$

значення -2 приймається на множині

$$A_5 := \{x \in [-\pi, \pi] \mid -2 \leq 2\sin x < -1\} = (-5\pi/6, -\pi/6).$$

Оскільки

$$\mu_1(A_1) = 0, \quad \mu_1(A_2) = \frac{2}{3}\pi, \quad \mu_1(A_3) = \pi/3, \quad \mu_1(A_4) = \pi/3, \quad \mu_1(A_5) = \frac{2}{3}\pi,$$

то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\mu_1 = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (2\pi/3) + 0(\pi/3) - 1 \cdot (\pi/3) - 2 \cdot (2\pi/3) = -\pi.$$

Задача 8.10. *Нехай проста функція f задана формуло*

$$f(x) = [2/x], \qquad x \in [1/2, 2].$$

Знайдіть інтеграл

$$\int\limits_{[1/2,2]} f \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що функція f є монотонна і її область значень є проміжок $[1, 4]$. Тому фунція f може приймати лише чотири значення $(1, 2, 3, 4)$. Очевидно, що значення 4 приймається на одноточковій множині

$$A_1 := \{1/2\};$$

значення 3 приймається на множині

$$A_2 := \{x \in [1/2, 2] \mid 3 \leq 2/x < 4\} = (1/2, 2/3];$$

значення 2 приймається на множині

$$A_3 := \{x \in [1/2, 2] \mid 2 \leq 2/x < 3\} = (2/3, 1];$$

значення 1 приймається на множині

$$A_4 := \{x \in [1/2, 2] \mid 1 \leq 2/x < 2\} = (1, 2];$$

Тому

$$\int\limits_{[1/2,2]} f \, d\mu_1 = 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{6}.$$

Задача 8.11. *Нехай проста функція f задана формулою*

$$f(x,y) = (-1)^{(1+[x^2+y^2])}, \qquad (x,y) \in A := \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 4\}.$$

Знайдіть інтеграл

$$\int\limits_A f\,d\mu_2.$$

Розв'язок. Зауважимо, що функція f є постійна на множинах

$$A_n := \{(x,y) \mid n \le x^2+y^2 < n+1\}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Легко бачити, що $\mu_2(A_n) = \pi$ і

$$f(x) = (-1)^{1+n}, \qquad x \in A_n.$$

Тому

$$\int\limits_A f\,d\mu_1 = -1 \cdot \pi + 1 \cdot \pi - 1 \cdot \pi + 1 \cdot \pi = 0.$$

Задача 8.12. *Нехай проста функція f задана формулою*

$$f(x) = \frac{1}{(1+[x])(2+[x])}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Знайдіть інтеграл

$$\int\limits_{[0,\infty)} f\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що функція f на множинах

$$A_n := [n, n+1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

приймає значення

$$a_n = \frac{1}{(1+n)(2+n)}.$$

Оскільки $\mu_1(A_n) = 1$ при довільних n і

$$[0,\infty) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$

то

$$\int\limits_{[0,\infty)} f\,d\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)(2+n)}.$$

Оскільки
$$\frac{1}{(1+n)(2+n)} = \frac{1}{(1+n)} - \frac{1}{(2+n)},$$
то
$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(1+n)(2+n)} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(1+n)} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2+n)} = 1 - \frac{1}{(2+N)} \to 1 \quad \text{при } N \to \infty.$$
Тому
$$\int\limits_{[0,\infty)} f\, d\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)(2+n)} = 1.$$

Задача 8.13. *Нехай проста функція f задана формулою*
$$f(x) = 2^{-[2x]}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Знайдіть інтеграл
$$\int\limits_{[0,\infty)} f\, d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що функція f на множинах
$$A_n := \{x \mid 2x \in [n, n+1)\} = [n/2, (n+1)/2), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
приймає значення
$$a_n = 2^{-n}.$$
Оскільки $\mu_1(A_n) = 1/2$ при довільних n і
$$[0, \infty) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$
то
$$\int\limits_{[0,\infty)} f\, d\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu_1(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Задача 8.14. *Нехай проста функція f задана формулою*
$$f(x) = [x^2], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Знайдіть інтеграл
$$\int\limits_{[0,2]} f\, d\mu_1.$$

Розв'язок. Зауважимо, що функція f на множинах
$$A_n := \{x \geq 0 \mid x^2 \in [n, n+1)\} = [\sqrt{n}, \sqrt{n+1}) \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$
приймає значення
$$a_n = n.$$
Оскільки
$$A_0 = [0,1), \quad A_1 = [1, \sqrt{2}), \quad A_2 = [\sqrt{2}, \sqrt{3}), \quad A_3 = [\sqrt{3}, 2), \quad A_4 = [2,2]$$
і
$$[0,2] = \bigsqcup_{n=0}^{4} A_n,$$
то
$$\int\limits_{[0,\infty)} f\, d\mu_1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 3(2 - \sqrt{3}) + 0.$$

9. Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла.

Багато розділів математики, зокрема, математичний аналіз, не можуть обійтися без граничного переходу. Тому теореми, що описують умови, при яких можна здійснювати граничний перехід, є важливими.

Сьогодні ми розглянемо теореми, які дозволяють коректно здійснювати перехід під знаком інтеграла Лебега. Зазначимо, що для інтеграла Рімана теж є подібні теореми, але вони вимагають виконання сильної умови - рівномірної збіжності. У теоремах, про які піде мова, умови більш слабкі.

Теорема Лебега про мажоровану збіжність.

Теорема 9.1. *Якщо послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $L(X,\mu)$ майже скрізь збігається до функції $f : X \to \mathbb{R}$ і існує $\varphi \in L(X,\mu)$ така, що при всіх $n \in \mathbb{N}$*
$$|f_n(x)| \leq \varphi(x) \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in X,$$
то $f \in L(X,\mu)$ і
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до функції f поточково і нерівність $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$. Тоді f є вимірна як поточкова границя вимірних і

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \le \varphi(x), \qquad x \in X,$$

тобто f має інтегровну мажоранту. З достатньої умови інтегровності випливає, що $f \in L(X,\mu)$.

Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$.

З абсолютної неперервності інтеграла Лебега випливає, що

$$\exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{U} \quad (\mu(A) < \delta) \Rightarrow \int_A \varphi \, d\mu < \varepsilon/4.$$

А з теореми Єгорова випливає, що існує множина $A \in \mathcal{U}$ така, що $\mu(A) < \delta$ і послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до f на множині $X \setminus A$. Зі сказаного робимо висновок, що існує n_0 таке, що

$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}, \qquad x \in X \setminus A, \quad n \ge n_0.$$

Тоді, враховуючи, що

$$|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2\varphi,$$

отримуємо, що для всіх $n \ge n_0$

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| \le \int_X |f_n - f| \, d\mu =$$
$$= \int_{X\setminus A} |f_n - f| \, d\mu + \int_A |f_n - f| \, d\mu \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2\mu(X)} \mu(X \setminus A) + \int_A 2\varphi \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

З довільності $\varepsilon > 0$ випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

□

Теорема Леві про монотонну збіжність.

Теорема 9.2. *Якщо послідовність* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *в* $L(X,\mu)$ *така, що при всіх* $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x), \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in X,$$

і

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu = M < \infty,$$

то майже для всіх $x \in X$ *існує скінченна границя*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

причому $f \in L(X,\mu)$ *і*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що $f_1 \ge 0$. Дійсно, загальний випадок зводиться до цього, якщо перейти до послідовності $g_n := f_n - f_1$.

З монотонності послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ випливає, що всіх $x \in X$ або існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ або $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$.

Розглянемо лебегові множини

$$\Omega_n^r := \{f_n > r\}, \qquad n, r \in \mathbb{N},$$

і множину

$$\Omega := \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}.$$

Зауважимо (перевірити самостійно), що

$$\Omega = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^r.$$

Звідки, зокрема, робимо висновок, що $\Omega \in \mathcal{U}$. З огляду на нерівність Чебишева

$$\mu(\Omega_n^r) \le \frac{1}{r} \int_X f_n \, d\mu \le \frac{M}{r}.$$

Оскільки $f_n \le f_{n+1}$, то

$$\Omega_n^r \subset \Omega_{n+1}^r, \qquad n, r \in \mathbb{N}.$$

Тому з врахуванням неперервності міри μ маємо, що

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n^r\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(\Omega_n^r) \le \frac{M}{r}.$$

Беручи до уваги, що

$$\Omega \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n^r, \qquad r \in \mathbb{N},$$

отримуємо нерівність

$$\mu(\Omega) \le \frac{M}{r}, \qquad r \in \mathbb{N}.$$

З довільності r випливає, що $\mu(\Omega) = 0$.

Покладемо

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & \text{якщо } x \in X \setminus \Omega; \\ 0, & \text{якщо } x \in \Omega. \end{cases}$$

З означення функції f випливає, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається майже скрізь до f. А, отже, f є вимірна.

Розглянемо просту вимірну функцію $g(x) := [f(x)] + 1$ і множини

$$A_r := \{f \le r\}, \qquad r \in \mathbb{N}.$$

Тут $[y]$ - ціла частина числа y. Оскільки функції f і g є вимірні і обмежені на A_r, то вони є інтегровні на A_r.

Використовуючи теорему про мажоровану збіжність, маємо

$$\int_{A_r} g\,d\mu \le \int_{A_r}(f+1)\,d\mu = \mu(A_r) + \int_{A_r} f\,d\mu = \mu(A_r) + \lim_{n\to\infty}\int_{A_r} f_n\,d\mu \le \mu(X) + M.$$

Оскільки $f \ge 0$, то значеннями функції g можуть бути тільки натуральні числа. Легко бачити, що

$$\sum_{j=1}^{r+1} j g^{-1}(\{j\}) = \int_{A_r} g\,d\mu \le \mu(X) + M.$$

А, отже, ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j g^{-1}(\{j\})$ є збіжний, тобто $g \in L(X,\mu)$. Очевидно, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| \le g(x) \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in X.$$

Тоді твердження теореми випливає з теореми про мажоровану збіжність. $\square$

Інтегрування рядів.

Наслідок 9.3. *Нехай послідовність невід'ємних функцій $f_n \in L(X,\mu)$ така, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu < \infty.$$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається майже для всіх $x \in X$, а його сума є інтегровною функцією і

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Теорема Фату.

Теорема 9.4. *Якщо послідовність невід'ємних функцій $f_n \in L(X,\mu)$ збігається майже скрізь до функції f і*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu = M < \infty,$$

то $f \in L(X,\mu)$ і

$$\int_X f \, d\mu \le M.$$

Доведення. Розглянемо допоміжну послідовність функцій

$$\varphi_n(x) := \inf_{j\ge n} f_j(x), \qquad x \in X.$$

Функції φ_n є вимірними. Дійсно, неважко бачити, що для довільного $c \in \mathbb{R}$

$$\{\varphi_n < c)\} = \bigcup_{j=n}^{\infty} \{f_j < c\}.$$

Оскільки $0 \le \varphi_n \le f_n$ і $f_n \in L(X,\mu)$, то $\varphi_n \in L(X,\mu)$ і

$$\int_X \varphi_n \, d\mu \le \int_X f_n \, d\mu \le M.$$

Очевидно, що

$$\varphi_n \le \varphi_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

і послідовність $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається майже скрізь до функції f.

Тому з теореми Леві випливає, що $f \in L(X,\mu)$ і

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \, d\mu \le M.$$

$\square$

Вправа 9.5. *Нехай* $(X, \mathcal{U}, \mu)$ *простір з мірою,* $f \in L(X, \mu)$ *і* $f \geq 0$.

1) Доведіть, що формула

$$\nu(A) := \int\limits_A f\,d\mu$$

задає зліченно адитивну міру на σ*-алгебрі* $\mathcal{U}$.

2) Доведіть, що для довільної зростаючої послідовності $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *множин алгебри* $\mathcal{U}$ *справедлива рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\,d\mu =: \int_A f\,d\mu,$$

де $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

10. Зв'язок між інтегралом Лебега і Рімана. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри. Прямий добуток мір. Теорема Фубіні.

Зв'язок між інтегралом Лебега і Рімана.

Нехай множина $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ є обмежена і вимірна за Жорданом, а функція $f : \Omega \to \mathbb{R}$ інтегровна на Ω за Ріманом. Виявляється, що тоді функція f інтегровна на Ω за Лебегом і при цьому інтеграл Лебега $\int_\Omega f\,d\mu_n$ є рівний інтегралу Рімана $\int_\Omega f(x)\,dx$.

Ми переконаємося в цьому лише у випадку функції $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Теорема 10.1. *Якщо функція* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *інтегровна на проміжку* $[a, b]$ *за Ріманом, то вона інтегровна на проміжку* $[a, b]$ *за Лебегом і інтеграли Лебега і Рімана рівні:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b]} f\,d\mu_1.$$

Доведення. Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ інтегровна на проміжку $[a, b]$ за Ріманом. Позначимо через $\tau_n\,(n \in \mathbb{N})$ розбиття проміжка $[a, b]$ на 2^n рівних частин точками

$$x_{n,k} = a + \frac{k}{2^n}(b - a).$$

Цьому розбиттю відповідають верхня та нижня суми Дарбу:

$$S_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{n,k}, \qquad s_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{n,k}.$$

Тут

$$M_{n,k} := \sup_{x\in\Delta_k} f(x), \qquad m_{n,k} := \inf_{x\in\Delta_k} f(x),$$

де $\Delta_{n,k} = [x_{n,k-1}, x_{n,k}]$. Згідно означення інтеграла Рімана

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Розглянемо функції

$$F_n(x) = M_{n,k}, \quad \text{якщо} \quad x \in [x_{n,k-1}, x_{n,k}),$$

$$f_n(x) = m_{n,k}, \quad \text{якщо} \quad x \in [x_{n,k-1}, x_{n,k}).$$

В точці $x = b$ функції F_n і f_n покладаємо рівними $f(b)$. Функції F_n і f_n є простими інтегровними за Лебегом функціями, причому

$$\int\limits_{[a,b]} F_n\,d\mu_1 = S_n, \qquad \int\limits_{[a,b]} f_n\,d\mu_1 = s_n.$$

Звідси, зокрема випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{[a,b]} F_n\,d\mu_1 = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[a,b]} f_n\,d\mu_1. \tag{10.1}$$

З побудови функцій F_n і f_n випливає, що для всіх $n\in\mathbb{N}$

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x), \qquad F_{n+1}(x) \le F_n(x)$$

і

$$f_n(x) \le f(x) \le F_n(x).$$

Тому для всіх $n\in\mathbb{N}$

$$\int\limits_{[a,b]} f_1\,d\mu_1 \le \int\limits_{[a,b]} f_n\,d\mu_1 \le \int\limits_{[a,b]} F_n\,d\mu_1 \le \int\limits_{[a,b]} F_1\,d\mu_1.$$

Отже, для послідовностей $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ виконані умови теореми Леві. З теореми Леві про монотонну збіжність випливає, що майже для всіх $x\in[a,b]$ (стосовно міри μ_1) існують границі

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x), \qquad g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

причому функції G і g є μ_1-інтегровними на $[a,b]$ і:

$$g(x) \le f(x) \le G(x) \qquad \text{майже для всіх} \quad x\in[a,b], \tag{10.2}$$

$$\int\limits_{[a,b]} G\,d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} F_n\,d\mu_1 = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} f_n\,d\mu_1 = \int_a^b g(x)\,d\mu_1.$$

Зі сказаного отримуємо, що $G(x) - g(x) \geq 0$ майже для всіх $x \in [a,b]$ і

$$\int\limits_{[a,b]} (G - g)\,d\mu_1 = 0.$$

З наслідку 7.15, що випливає з нерівності Чебишева, отримуємо, що функція $G - g$ рівна нулю майже для всіх $x \in [a,b]$. Отже, (див. нерівність 10.2)

$$G(x) = f(x) = g(x) \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a,b],$$

тобто f є еквівалентна μ_1-інтегровній функції. Тому з властивостей інтеграла Лебега випливає, що f є μ_1-інтегровна, причому

$$\int\limits_{[a,b]} f\,d\mu_1 = \int\limits_{[a,b]} G\,d\mu_1 = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри. Обмежені міри є дуже зручним інструментом, проте, часто доводиться працювати з мірами, що можуть приймати нескінченні значення. Наприклад, такою є міра Лебега μ_n в $\mathbb{R}^n$.

Означення 10.2. *Нехай $(X,\mathcal{U},\mu)$ - простір з мірою, де $\mathcal{U}$ є σ-алгеброю, а μ невід'ємна σ-адитивна міра, яка може приймати значення $+\infty$. Міру μ ми назвемо σ-скінченною, якщо X можна подати у вигляді зліченного об'єднання $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ вимірних множин скінченної міри ($\mu(X_j) < \infty$).*

Нехай $(X,\mathcal{U},\mu)$ - простір з σ-скінченною мірою. Послідовність (X_n) в $\mathcal{U}$ ми назвемо вичерпною, якщо $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ і

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (X_n \subset X_{n+1}) \wedge (\mu(X_n) < \infty).$$

Позначимо через $L(X,\mu)$ множину всіх $f : X \to \mathbb{R}$ таких, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція f інтегровна на X_n і

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{X_n} |f|\,d\mu < \infty.$$

Вправа 10.3. *1) Множина $L(X,\mu)$ не залежить від вибору вичерпної послідовності $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

2) Для кожної функції $f\in L(X,\mu)$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\int_{X_n} f\,d\mu =: \int_X f\,d\mu,$$

яка теж не залежить від вибору вичерпної послідовності $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Прямий добуток мір. Теорема Фубіні.

Нехай $(X_1,\mathcal{U}_1,\nu_1)$ і $(X_2,\mathcal{U}_2,\nu_2)$ простори з мірою ($\mathcal{U}_j$ - σ-алгебри). Розглянемо систему підмножин

$$\Pi_2 := \{A = A_1\times A_2 \mid A_1\in\mathcal{U}_1, \quad A_2\in\mathcal{U}_2\}$$

множини $X\times Y$. Елементи системи Π_2 можна сприймати як абстрактні прямокутники.

Система Π_2 утворює півкільце з одиницею. Дійсно, одиницею в Π_2 є множина $X_1\times X_2$ і, як легко бачити, справедливі рівності

$$(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2) = (A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2).$$

$$(A_1\times A_2)\setminus(B_1\times B_2) = (A_1\setminus B_1)\times A_2 \sqcup (A_1\cap B_1)\times(A_2\setminus B_2).$$

Теорема 10.4. *Для довільного $A = A_1\times A_2$ з півкільця Π_2 покладемо за означенням*

$$\mu(A) := \nu_1(A_1)\cdot\nu_2(A_2). \tag{10.3}$$

Формула (10.3) *задає на Π_2 міру на півкільці Π_2.*

Доведення. Нехай $C, C_n\in\Pi_2$, причому

$$C = A\times B, \qquad C_n = A_n\times B_n, \quad n\in\mathbb{N},$$

і

$$C = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C_n. \tag{10.4}$$

Покажемо, що виконується рівність

$$\mu(C) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(C_n).$$

Розглянемо функції

$$f(x,y) := \chi_A(x)\chi_B(y), \qquad f_n(x,y) := \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y), \qquad x \in X_1, \quad y \in X_2.$$

З формули (10.4) випливає, що

$$f_n(x,y) \le f_{n+1}(x,y) \le f(x,y)$$

і

$$f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x,y).$$

Зауважимо, що функції f і f_n приймають скінченну кількість значень і є інтегровні за кожною змінною. Зокрема,

$$\int_A f_n(x,y)\,d\nu_1(x) \le \int_A f(x,y)\,d\nu_1(x), \qquad y \in B,$$

$$\int_B \left(\int_A f_n(x,y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) \le \int_B \left(\int_A f(x,y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) =$$

$$= \left(\int_B \chi_B\,d\nu_2\right)\left(\int_A \chi_A\,d\nu_1\right) = \nu_1(A)\nu_2(B).$$

Бачимо, що виконані умови теореми Леві про монотонну збіжність. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \int_B \left(\int_A f_n(x,y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) =$$

$$= \int_B \left(\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x,y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) = \int_B \left(\int_A f(x,y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) = \nu_1(A)\nu_2(B).$$

Оскільки

$$\int_B \left(\int_A f_n(x,y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_B \left(\int_A \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)\,d\nu_1(x)\right) d\nu_2(y) = \sum_{j=1}^{n} \nu_1(A_j)\nu_2(B_j),$$

то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu_1(A_j)\nu_2(B_j) = \nu_1(A)\nu_2(B).$$

Отже, μ - міра. □

Означення 10.5. *Лебегове продовження міри μ, що задана формулою* (10.3), *ми назвемо прямим добутком мір ν_1 та ν_2 і позначимо через $\nu_1 \otimes \nu_2$.*

Нехай $(X_j, \mathcal{U}_j, \nu_j)$ - простори з мірою ($j = 1, \ldots, n$). Розглянемо систему підмножин

$$\Pi_n := \{A = A_1 \times \cdots \times A_n \mid A_1 \in \mathcal{U}_1, \ldots, \quad A_n \in \mathcal{U}_n\}$$

множини $X \times Y$. Елементи системи Π_n можна сприймати як абстрактні паралепіпеди. Для довільного $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ з півкільця Π_n покладемо за означенням

$$\mu(A) := \prod_{j=1}^{n} \nu_j(A_j). \tag{10.5}$$

Формула (10.5) задає на Π_n міру. Лебегове продовження міри μ ми назвемо прямим добутком мір $\nu_j, j = 1, \ldots, n.$, і позначимо через

$$\nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n.$$

Наприклад, n-та степінь міри Лебега μ_1 дає міру Лебега μ_n:

$$\mu_n := \underbrace{\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_1}_{n}.$$

Теорема Фубіні. Теорема Фубіні це теорема про зведення подвійного інтеграла до повторного. Ми сформулюємо цю теорему в дещо спрощеній формі.

Теорема 10.6. *Нехай $(X, \mathcal{U}_x, \nu_x)$ і $(Y, \mathcal{U}_y, \nu_y)$ - простори з мірами і $\nu := \nu_x \otimes \nu_y$. Нехай функція*

$$X \times Y \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

інтегровна на $X \times Y$ за мірою ν. Тоді

$$\int\limits_{X\times Y} f\, d\nu = \int\limits_{X} \left(\int\limits_{Y} f(x, y)\, d\nu_y \right) d\nu_x = \int\limits_{Y} \left(\int\limits_{X} f(x, y)\, d\nu_x \right) d\nu_y. \tag{10.6}$$

При цьому твердження теореми включає в себе існування внутрішніх інтегралів при майже всіх значеннях змінної, за якою беруться зовнішні інтеграли.

11. Практичне заняття. Інтеграл Лебега. Граничний перехід під знаком інтеграла.

Граничний перехід під знаком інтеграла.

Задача 11.1. *Розглянемо на проміжку* $X = [0, 1]$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n збігається до нульової функції всюди, крім точки

$$x = 1,$$

тобто збігається до нуля майже скрізь на X. Крім того,

$$|f_n(x)| = |x^n| \leq 1, \qquad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N},$$

тобто функції f_n мають спільну інтегровну мажоранту. Виконані умови теореми про мажоровану збіжність. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \, d\mu_1 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu_1 = \int_0^1 0 \, d\mu_1 = 0.$$

Задача 11.2. *Розглянемо на проміжку* $X = [0, 4]$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n поточково збігається до функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (1, 4]); \\ 1/2, & \text{якщо } x = 1; \\ 0, & \text{якщо } x \in [0, 1). \end{cases}$$

Крім того,

$$|f_n(x)| = |x^n| \leq 1, \qquad x \in [0, 4], \quad n \in \mathbb{N},$$

тобто функції f_n мають спільну інтегровну мажоранту. Виконані умови теореми про мажоровану збіжність. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu_1 = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu_1 = \int_1^4 1 \, d\mu_1 = 3.$$

Задача 11.3. *Розглянемо на проміжку* $X = [0, 2]$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Вияснимо до якої функції збігається послідовність f_n. При $x \in [0,1)$ ми маємо

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = 1;$$

при $x = 1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = 1/2;$$

при $x \in (1,2]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = 0.$$

Отже, майже скрізь (за мірою μ_1) наша послідовність збігається до функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [0,1); \\ 0, & \text{якщо } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Крім того, видно, що

$$|f_n(x)| \le 1, \qquad x \in [0,2], \quad n \in \mathbb{N},$$

тобто функції f_n мають спільну інтегровну мажоранту. Виконані умови теореми про мажоровану збіжність. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu_1 = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu_1 = \int_{[0,1)} 1 \, d\mu_1 = 1.$$

Задача 11.4. *Розглянемо на проміжку $X = [0, 2\pi]$ послідовність функцій*

$$f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n збігається до нульової функції всюди, крім точок

$$\pi k/2, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

тобто збігається до нуля майже скрізь на X. Оскільки

$$|f_n(x)| \le 2, \qquad x \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

то функції f_n мають спільну інтегровну мажоранту. Виконані умови теореми про мажоровану збіжність. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_1 = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu_1 = \int_X 0\,d\mu_1 = 0.$$

Задача 11.5. *Розглянемо на проміжку* $X = [0,2]$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n збігається до функції

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [0,1);\\ 1/2, & \text{якщо } x = 1;\\ 0, & \text{якщо } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Крім того,

$$f_n(x) \le 2, \qquad x \in [0,2], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, виконані умови теореми про мажоровану збіжність. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_1 = \int_X f\,d\mu_1 = \int_0^1 x\,dx = 1/2.$$

Задача 11.6. *Розглянемо на проміжку* $X = [0,\infty]$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{1}{2+x^{2n}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n поточково збігається до функції

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{якщо } x \in [0,1);\\ 1/3, & \text{якщо } x = 1;\\ 0, & \text{якщо } x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Крім того,

$$f_n(x) = \frac{1}{2+x^{2n}} \le 1/2, \qquad x \in [0,1],$$

і

$$f_n(x) = \frac{1}{2+x^{2n}} \le \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in [1,\infty).$$

Оскільки

$$\frac{1}{1+x^2} \geq 1/2, \qquad x \in [0,1],$$

то

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x) := \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in [0,\infty).$$

Отже, послідовність (f_n) має спільну інтегровну мажоранту.

Тому виконуються умови теореми про мажоровану збіжність φ. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1 = \int_0^1 1/2 \, d\mu_1 = 1/2.$$

Задача 11.7. *Розглянемо на проміжку* $X = [0,\infty]$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+\sin^{2n} x}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \sin^{2n} x = 0$$

для всіх x, крім точок множини

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\}.$$

Множина A є зліченна, а, отже, $\mu_1(A) = 0$. Тому послідовність f_n збігається майже скрізь до функції

$$f(x) = e^{-x}, \qquad x \geq 0.$$

Крім того,

$$|f_n(x)| \leq e^{-x}, \qquad x \geq 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, послідовність (f_n) має спільну інтегровну мажоранту $\varphi(x) = e^{-x}$.

Тому виконуються умови теореми про мажоровану збіжність φ. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1 = \int_0^\infty e^{-x} \, d\mu_1 = 1.$$

Задача 11.8. *Розглянемо на проміжку* $X = [0,\infty)$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = e^{-nx} \operatorname{arctg} x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n поточково збігається до нульової функції. Дійсно,

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nx} \operatorname{arctg} x = 0.$$

Тут окремо потрібно розглянути випадки $x > 0$ і $x = 0$. Крім того, оскільки

$$e^{-nx} \leq e^{-x}, \qquad \operatorname{arctg} x \leq \pi/2 \leq 2, \qquad x \geq 0,$$

то

$$|f_n(x)| \leq 2e^{-x}, \qquad x \geq 0.$$

Функція $2e^{-x}$ є інтегровною на $[0, \infty)$. Тому виконуються умови теореми про мажоровану збіжність. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1 = \int_0^\infty 0 \, d\mu_1 = 0.$$

Задача 11.9. *Розглянемо на проміжку* $X = \mathbb{R}$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{e^{-|x|}}{1 + x^{2n}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-|x|}}{1 + x^{2n}}.$$

Оскільки при $|x| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0,$$

а при $|x| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = +\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} e^{-|x|}, & \text{якщо } |x| < 1; \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1; \\ 1/2e, & \text{якщо } x = 1 \text{ або } x = -1. \end{cases}$$

Крім того,

$$|f_n(x)| \leq e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

і функція $e^{-|x|}$ є інтегровна.

Тому виконуються всі умови теореми про мажоровану збіжність. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu_1 = \int_{-1}^1 e^{-|x|} \, dx = 2 \int_0^1 e^{-x} \, dx = 2(1 - e^{-1}).$$

Задача 11.10. *Розглянемо на проміжку* $X = [0, \infty)$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = \frac{e^{-x/n}}{1+x^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n поточково збігається до функції

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Крім того, оскільки

$$e^{-x/n} \leq 1, \qquad x \geq 0,$$

то

$$f_n(x) \leq \frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

Зауважимо, що функція f є інтегровна і

$$\int_0^\infty f \, d\mu_1 = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \pi/2.$$

Тому виконуються всі умови теореми про мажоровану збіжність. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1 = \int_0^\infty f \, d\mu_1 = \pi/2.$$

Задача 11.11. *Розглянемо на проміжку* $X = \mathbb{R}$ *послідовність функцій*

$$f_n(x) = e^{-|x|} \cos^n x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1.$$

Розв'язок. Послідовність f_n поточково збігається до нульової функції. Крім того, оскільки

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x) := e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що функція φ. Отже, наша послідовність має спільну інтегровну мажоранту. Тому виконуються всі умови теореми про мажоровану збіжність. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, d\mu_1 = \int_0^\infty 0 \, d\mu_1 = 0.$$

12. Функції обмеженої варіації. Міри Лебега-Стільтьєса.

Функції обмеженої варіації.

Означення 12.1. *Функція $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ називається функцією обмеженої варіації на проміжку $[a, b]$, якщо існує стала $C > 0$ така, що для довільного розбиття $\tau = \{x_j\}_{j=0}^n$ проміжка $[a, b]$ ($a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$) виконується нерівність*

$$\sigma(f, \tau) := \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \le C. \tag{12.1}$$

Означення 12.2. *Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ є функцією обмеженої варіації на проміжку $[a, b]$. Тоді величина*

$$\sup_{\tau} \sigma(f, \tau)$$

називається варіацією функції f на проміжку $[a, b]$ і позначається через $V_a^b[f]$, тобто

$$V_a^b[f] = \sup_{\tau} \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|, \tag{12.2}$$

де точна верхня грань береться по множині всіх розбиттів τ відрізка $[a, b]$.

Очевидно, що кожна монотонна функція f на проміжку $[a, b]$ є функцією обмеженої варіації, причому для неї виконується рівність

$$V_a^b[f] = |f(b) - f(a)|.$$

Множину всіх функцій обмеженої варіації на проміжку $[a, b]$ позначимо через $V[a, b]$.

Теорема 12.3. *$V[a, b]$ є лінійним простором над полем комлексних чисел, причому для довільних $f, g \in V[a, b]$ і довільних $\lambda \in \mathbb{C}$ маємо*

$$V_a^b[f + g] \le V_a^b[f] + V_a^b[g], \qquad V_a^b[\lambda f] = |\lambda| V_a^b[f].$$

Якщо для деякої $f \in V[a, b]$ маємо $V_a^b[f] = 0$, то функція f є сталою.

Доведення. Нехай $f, g \in V[a,b]$ і $\tau = \{x_j\}_{j=0}^n$ - довільне розбиття проміжка $[a,b]$. Оскільки

$$|(f+g)(x_j) - (f+g)(x_{j-1})| \leq |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |g(x_j) - g(x_{j-1})|,$$

то

$$\sigma(f+g,\tau) \leq \sigma(f,\tau) + \sigma(g,\tau).$$

Звідки випливає, що

$$\sigma(f+g,\tau) \leq \sup_{\tau} \sigma(f,\tau) + \sup_{\tau} \sigma(g,\tau) = V_a^b[f] + V_a^b[g].$$

А, отже,

$$V_a^b[f+g] \leq V_a^b[f] + V_a^b[g].$$

Нехай $\lambda \in \mathbb{C}$. Оскільки

$$\sigma(\lambda f,\tau) = |\lambda| \sigma(f,\tau),$$

то

$$V_a^b[\lambda f] = \sup_{\tau} \sigma(\lambda f,\tau) = |\lambda| \sup_{\tau} \sigma(f,\tau) = |\lambda| V_a^b[f].$$

Якщо f не є постійна, то, як легко бачити, $V_a^b[f] > 0$. Тому з умови $V_a^b[f] = 0$ випливає, що f є постійна. $\square$

Теорема 12.4. *Нехай $f \in V[a,b]$ і $c \in (a,b)$. Тоді*

$$V_a^b[f] = V_a^c[f] + V_c^b[f].$$

Доведення. Нехай $\tau = \{x_j\}_{j=0}^n$ - довільне розбиття проміжка $[a,b]$. Позначимо через $\widetilde{\tau}$ розбиття τ з доданою точкою c, тобто $\widetilde{\tau} = \tau \cup \{c\}$. Нехай точка c потрапляє між точками x_{j-1} і x_j. Оскільки

$$|f(x_{j-1}) - f(x_j)| \leq |f(x_{j-1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_j)|,$$

то

$$\sigma(f,\tau) \leq \sigma(f,\widetilde{\tau}).$$

Розбиття $\widetilde{\tau}$ є об'єднанням розбиття $\tau' = \{x_k\}_{k=0}^{j-1} \cup \{c\}$ проміжка $[a,c]$ і розбиття $\tau'' = \{x_k\}_{k=j}^n \cup \{c\}$ проміжка $[c,b]$. Оскільки

$$\sigma(f,\widetilde{\tau}) = \sigma(f,\tau',[a,c]) + \sigma(f,\tau'',[c,b]) \leq V_a^c[f] + V_c^b[f],$$

то

$$\sigma(f,\tau) \leq \sigma(f,\widetilde{\tau}) \leq V_a^c[f] + V_c^b[f].$$

А, отже,

$$V_a^b[f] \leq V_a^c[f] + V_c^b[f].$$

Оскільки
$$\sigma(f,\tau',[a,c])+\sigma(f,\tau'',[c,b])=\sigma(f,\widetilde{\tau})\le V_a^b[f],$$
то
$$\sigma(f,\tau',[a,c])+\sigma(f,\tau'',[c,b])\le V_a^b[f],$$
для довільних розбиттів τ' і τ'' проміжків $[a,c]$ і $[c,b]$ відповідно. Тому
$$V_a^b[f]\ge\sup_{\tau'}\sup_{\tau''}(\sigma(f,\tau',[a,c])+\sigma(f,\tau'',[c,b]))=V_a^c[f]+V_c^b[f].$$
Тим самим теорема доведена. □

Теорема 12.5. *Кожну дійснозначну функцію $f\in V[a,b]$ можна подати як різницю двох монотонно неспадних функцій на проміжку $[a,b]$.*

Доведення. Нехай $f\in V[a,b]$. Розглянемо функцію
$$g(x):=V_a^x[f],\qquad x\in[a,b].$$
Нехай $a\le x_1<x_2\le b$. З попередньої теореми випливає, що
$$g(x_2)-g(x_1)=V_{x_1}^{x_2}[f]\ge 0.$$
Тому g є монотонно неспадна. Покажемо, що функція
$$h(x)=g(x)-f(x),\qquad x\in[a,b]$$
теж є монотонно неспадна. Якщо $a\le x_1<x_2\le b$, то
$$h(x_2)-h(x_1)=g(x_2)-g(x_1)-(f(x_2)-f(x_1))=V_{x_1}^{x_2}[f]-(f(x_2)-f(x_1)).$$
Оскільки
$$V_{x_1}^{x_2}[f]\ge|f(x_2)-f(x_1)|,$$
то
$$h(x_2)-h(x_1)=V_{x_1}^{x_2}[f]-(f(x_2)-f(x_1))\ge 0,$$
тобто h є монотонно неспадною. Враховуючи, що
$$g-h=g-(g-f)=f$$
отримуємо твердження теореми. □

Теорема 12.6. *Кожна функція $f\in V[a,b]$ має тільки точки розриву першого роду і їх є не більше ніж зліченна кількість.*

Доведення. Нехай $f \in V[a,b]$. Очевидно, що функції

$$u(x) := \operatorname{Re} f(x), \quad v(x) := \operatorname{Im} f(x)$$

є дійснозначними функціями обмеженої варіації. Кожну з них можна подати у вигляді різниці монотонно неспадних:

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x), \qquad v(x) = v_1(x) - v_2(x), \qquad x \in [a,b].$$

Отже, f є лінійною комбінацією монотонних функцій:

$$f(x) = u_1(x) - u_2(x) + iv_1(x) - iv_2(x).$$

Тому теорему досить довести для монотонно неспадної функції. Нехай f монотонно неспадна функція. Тоді існування границь

$$f(x+0) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(x+\varepsilon), \qquad f(x-0) := \lim_{\varepsilon \to +0} f(x-\varepsilon)$$

випливає з теореми Вейєрштраса про існування границі монотонної послідовності. Нехай

$$h(x) = f(x+0) - f(x-0)$$

стрибок функції f в точці x. Для довільного $m \in \mathbb{N}$ множина

$$\{x \in (a,b) \mid h(x) > 1/m\}$$

скінченна, причому число її елементів не перевищує число

$$(f(b) - f(a))m.$$

Зі сказаного випливає, що множина точок розриву

$$\{x \in (a,b) \mid h(x) > 0\}$$

є не більш як зліченна. Дійсно:

$$\{x \in (a,b) \mid h(x) > 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in (a,b) \mid h(x) > 1/m\}.$$

Тим самим теорема доведена. $\square$

Означення 12.7. *Ми скажемо, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ має обмежену варіацію на $\mathbb{R}$, якщо вона має обмежену варіацію на кожному скінченному проміжку і існує стала $C > 0$ така, що для всіх $n \in \mathbb{N}$*

$$V_{-n}^{n}[f] \leq C.$$

Ми покладаємо за означенням

$$V_{-\infty}^{\infty}[f] := \lim_{n \to \infty} V_{-n}^{n}[f].$$

Множину всіх функцій обмеженої варіації на $\mathbb{R}$ ми позначаємо через $V(\mathbb{R})$.

Вправа 12.8. *Довести, що для функції $f \in V(\mathbb{R})$, існують границі*

$$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

13. Практичне заняття: Задачі на знаходження варіації функції.

Нидче ми розглянемо ряд нескладних задач на обчислення варіації функції на проміжку $[a, b]$.

Ми використаємо просте спостереження: Варіація монотонної функції на проміжку $[a, b]$ є рівна модулю її приросту на цьому проміжку.

А що робити, якщо функція f не є монотонна на проміжку $[a, b]$. У цьому випадку потрібно спробувати розбити $[a, b]$ на проміжки монотонності і обчислити варіацію на кожному з цих проміжків, а потім знайти суму.

Задача 13.1. *Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$ на проміжку $[0, \pi]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Функція f є монотонна на проміжках $[0, \pi/2]$ і $[\pi/2, \pi]$. Варіація f на кожному з цих проміжків дорівнює одиниці (модуль приросту). Тому варіація на всьому проміжку є рівна 2.

Задача 13.2. *Розглянемо функцію $f(x) = |\sin x|$ на проміжку $[0, 6\pi]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Функція f є неперервна і періодична з періодом π. Тому досить обчислити варіацію на проміжку $[0, \pi]$ і помножити на 6. Отже, варіація рівна 12.

Задача 13.3. *Розглянемо функцію $f(x) = x^2$ на проміжку $[-2, 3]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Функція f є монотонна на проміжках $[-2, 0]$ і $[0, 3]$. Варіація f на першому рівна 4, а на другому 9. Тому варіація на всьому проміжку рівна 13.

Задача 13.4. *Розглянемо функцію $f(x) = |x-2|$ на проміжку $[-2,4]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Проміжків монотонності є два. А власне, $[-2,2],[2,4]$. Варіація на проміжку $[-2,2]$ рівна 4, а варіація на проміжку $[2,4]$ рівна 2. Тому варіація на проміжку $[-2,4]$ рівна сумі $4+2=6$.

Задача 13.5. *Розглянемо функцію $f(x) = |x^2-1|$ на проміжку $[-2,3]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Проміжків монотонності є чотири. А власне, $[-2,-1],[-1,0],[0,1],[1,3]$. Тому варіація на проміжку $[-2,3]$. рівна сумі $3+1+1+8=13$.

Задача 13.6. *Розглянемо функцію $f(x) = |x^2-4|$ на проміжку $[-4,5]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Проміжків монотонності є чотири. А власне, $[-4,-2],[-2,0],[0,2],[2,5]$. Тому варіація на проміжку $[-4,5]$ рівна сумі $12+4+4+21=41$.

Задача 13.7. *Розглянемо функцію $f(x) = x^3-3x$ на проміжку $[-3,2]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Проміжків монотонності є три. А власне, $[-3,-1],[-1,1],[1,2]$. Тому варіація на проміжку $[-3,2]$ рівна сумі

$$|f(-3)-f(-1)|+|f(-1)-f(1)|+|f(1)-f(2)| = 20+4+4 = 28.$$

Задача 13.8. *Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ на проміжку $[-2,2]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Зробити самостійно.

Задача 13.9. *Розглянемо функцію $f(x) = x[x]$ на проміжку $[-1,4]$. Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Зробити самостійно.

Задача 13.10. *Розглянемо функцію* $f(x) = x^3 - 12x$ *на проміжку* $[-3, 3]$. *Знайдіть її варіацію на цьому проміжку.*

Розв'язок. Зробити самостійно.

Вправа 13.11. *Нехай* $f \in V([a,b])$ *. Тоді* $|f| \in V([a,b])$ *і*

$$V_a^b[|f|] \leq V_a^b[f].$$

А коли справедлива рівність?

14. Дійснозначні та комплекснозначні міри.

Означення 14.1. *Комплекснозначну міру на* $\mathbb{R}^n$ *назвемо борелівською, якщо вона задана на всіх борелівських множинах* $\mathbb{R}^n$ *і приймає скінченні значення. Множину всіх борелівських мір на* $\mathbb{R}^n$ *позначимо через* $\boldsymbol{M}(\mathbb{R}^n)$.

Сьогодні ми перейдемо до розгляду дійснозначних мір і скажемо декілька слів про комплекснозначні міри. Ми вже давали загальне означення міри на системі множин. Для зручності наведемо його ще раз.

Означення 14.2. *Нехай* $\mathcal{A}$ *- система підмножин множини* X. *Числову функцію*

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \qquad (\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C})$$

назвемо дійснозначною (комплекснозначною) мірою, якщо вона є зліченно адитивною, тобто:

(1) *для довільної диз'юнктивної послідовності* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *в* $\mathcal{A}$, *для якої* $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, *виконується рівність*

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{14.1}$$

Дійснозначні міри часто називають зарядами. Така термінологія прийшла з фізики (електричні заряди). Однак, ми будемо вживати термін "міра"і стосовно невід'ємних мір, і стосовно дійснозначних або комплекснозначних мір.

В даній лекції ми будемо розглядати міри, що задані виключно на σ-алгебрах множин і приймають скінченні значення. Це значною мірою спростить формулювання і доведення наших тверджень. Випадок, коли міра може приймати нескінченнні значення теж можна розглядати (дивись рекомендований підручник).

Нагадаємо, що для невід'мних мір виконується властивість, яку ми називаємо неперервністю міри. Виявляється, що вона виконується і для дійснозначних (комплекснозначних) мір.

Теорема 14.3. *Нехай дійснозначна (комплекснозначна) міра* μ *задана на* σ*-алгебрі* $\mathcal{A}$*. Тоді для довільної монотонно зростаючої послідовності* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *в* $\mathcal{A}$ *маємо, що*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{14.2}$$

А для довільної монотонно спадної послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *в* $\mathcal{A}$ *маємо, що*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{14.3}$$

Доведення. Нехай $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ є монотонно зростаючою. Розглянемо допоміжну послідовність

$$B_n := A_n \setminus A_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N} \quad (A_0 := \emptyset).$$

Очевидно, що послідовність $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ є диз'юнктивною і

$$\bigsqcup_{j=1}^{n} B_j = A_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Оскільки з (14.1) випливає скінченна адитивність, то

$$\mu(A_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тому з врахуванням (14.1) маємо

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Нехай тепер $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ є монотонно спадною. Покладемо

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

і розглянемо допоміжну послідовність

$$B_n := A_n \setminus A_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що послідовність $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ є диз'юнктивною і справедливі рівності (подумайте чому?)

$$\bigsqcup_{j=n}^{\infty} B_j = A_n \setminus A, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

З огляду на (14.1)

$$\mu(A_n \setminus A) = \sum_{j=n}^{\infty} \mu(B_j) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Враховуючи, що $A_n = (A_n \setminus A) \sqcup A$, маємо

$$\mu(A_n) = \mu(A_n \setminus A) + \mu(A).$$

А, отже,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) + \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \setminus A) = \mu(A).$$

$\square$

Нехай у нас є дві невід'ємні міри μ_1 і μ_2, що задані на σ-алгебрі $\mathcal{A}$. Розглянемо їх різницю

$$\mu := \mu_1 - \mu_2.$$

Очевидно, що μ є дійснозначною мірою. Виникає закономірне питання: "Чи кожна дійснозначна міра є різницею двох невід'ємних мір?"Виявляється, що так. Але, доведення цього факту є нетривіальним і потребує значних зусиль.

Означення 14.4. *Нехай дійснозначна міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$. Множину $A \in \mathcal{A}$ назвемо позитивною (стосовно міри μ), якщо*

$$\forall B \in \mathcal{A} \quad B \subset A \Longrightarrow \mu(B) \geq 0.$$

Аналогічно множину $A \in \mathcal{A}$ назвемо негативною (стосовно міри μ), якщо

$$\forall B \in \mathcal{A} \quad B \subset A \Longrightarrow \mu(B) \leq 0.$$

Лема 14.5. *Нехай дійснозначна міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$. Якщо $E \in \mathcal{A}$ і $\mu(E) > 0$, то в E міститься позитивна множина A така, що $\mu(A) > 0$.*

Доведення. Нехай $E \in \mathcal{A}$ і $\mu(E) > 0$. Якщо E є позитивною, то доведення завершене. Нехай E не є позитивною множиною. Тоді в E є підмножини, що мають від'ємну міру. Позначимо через n_1 найменше натуральне число, для якого існує $B_1 \subset E$ таке, що

$$\mu(B_1) \leq -\frac{1}{n_1}.$$

Розглянемо множину $E_1 = E \setminus B_1$. Очевидно, що $\mu(E_1) > \mu(E) > 0$. Якщо E_1 є позитивною, то доведення завершене. Якщо ні, то позначимо через n_2 найменше натуральне число, для якого існує $B_2 \subset E_1$ таке, що

$$\mu(B_2) \leq -\frac{1}{n_2}.$$

Покладемо $E_2 = E_1 \setminus B_2$. Повторюючи вказану процедуру за індукцією будуємо послідовність (E_j). Вона може обірватися на якомусь кроці. Це означає, що останнє E_n є позитивною множиною і на цьому доведення завершується. Якщо послідовність не обривається, то ми отримуємо послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ таку, що

$$E_{n+1} \subset E_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

і

$$\mu(E_{n+1}) > \mu(E_n) > \mu(E) > 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{14.4}$$

а також диз'юнктивну послідовність $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ таку, що

$$\mu(B_k) \leq -\frac{1}{n_k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Зі зліченної адитивності випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$. Оскільки

$$\frac{1}{n_k} \leq -\mu(B_k), \qquad k \in \mathbb{N}$$

то збігається також і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$. А зі збіжності цього ряду випливає, що

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} = 0. \tag{14.5}$$

Розглянемо множину $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. З неперервності міри з врахуванням (14.4) випливає, що

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) \geq \mu(E) > 0.$$

Припустимо, що множина A не є позитивна. Тоді в ній є підмножина B така, що

$$\mu(B) < 0.$$

Тоді існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\mu(B) \leq -\frac{1}{m}.$$

Зауважимо, що B належить кожному E_n. Тому з означень чисел n_k випливає, що

$$n_k \leq m, \qquad k \in \mathbb{N},$$

тобто

$$\frac{1}{n_k} \geq \frac{1}{m}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

А це суперечить (14.5). Лема доведена. $\square$

Вправа 14.6. *Нехай дійснозначна міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ і $A \in \mathcal{A}$. Якщо A є підмножиною позитивної множини, то A є позитивною. Якщо A є скінченним або зліченним об'єднанням позитивних множин, то A є позитивною.*

Розклад Гана.

Теорема 14.7. *Нехай дійснозначна міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ і X - одиниця в $\mathcal{A}$. Тоді в $\mathcal{A}$ існують позитивна множина X_+ і негативна X_- такі, що*

$$X = X_+ \bigsqcup X_-. \tag{14.6}$$

Такий розклад множини X називають розкладом Гана.

Доведення. Позначимо через Σ_+ сімейство всіх позитивних стосовно міри μ множин. Покладемо

$$\alpha := \sup_{A \in \Sigma_+} \mu(A).$$

Припустимо, що $\alpha = +\infty$. Тоді з означення супремуму випливає, що існує послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ позитивних множин, для якої

$$\mu(A_n) \geq n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Згідно вправи 14.6 множина $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ є позитивною. Але, оскільки $A_n \subset A$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то

$$\mu(A) \geq \mu(A_n) \geq n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

А це неможливо, бо $\mu(A) \in \mathbb{R}$. Суперечність. Тому $\alpha < \infty$. З означення супремума випливає, що існує послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ позитивних множин, для яких

$$\mu(A_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}.$$

Згідно вправи 14.6 множина $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ є позитивною. Але, оскільки $A_n \subset A$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то

$$\mu(A) \geq \mu(A_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

А, отже, $\mu(A) \geq \alpha$. Тому з огляду на означення числа α маємо, що $\mu(A) = \alpha$.

Покажемо тепер, що множина $A' = X \setminus A$ є негативною. Припустимо, що це не так. Тоді в A' існує підмножина $D \in \mathcal{A}$ така, що $\mu(D) > 0$. Тоді згідно леми 14.5 в D є позитивна множина B з $\mu(B) > 0$. Розглянемо множину $\widetilde{A} = A \cup B$ вона є позитивна (див. вправу 14.6). Оскільки $A \cap B = \emptyset$, то

$$\mu(\widetilde{A}) = \mu(A) + \mu(B) \geq \alpha + \mu(B) > \alpha.$$

Але, згідно означення числа α маємо, що $\mu(\widetilde{A}) \leq \alpha$. Суперечність. Отже множина A' є негативною. Залишається покласти за означенням

$$X_+ := A, \qquad X_- := A'.$$

$\square$

Зауваження 14.8. *Розклад Гана не є єдиним. Подумайте, чому.*

Розклад Жордана.

Означення 14.9. *Нехай μ_1 і μ_2 невід'ємні міри, що задані на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ з одиницею X. Ми скажемо, що вони є взаємно сингулярними (скорочений запис $\mu_1 \perp \mu_2$), якщо X можна подати у вигляді $X = X_1 \bigsqcup X_2$, де $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$ і*

$$\mu_1(X_2) = 0, \qquad \mu_2(X_1) = 0.$$

Теорема 14.10. *Нехай дійснозначна міра μ задана на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ і X - одиниця в $\mathcal{A}$. Тоді існує єдина пара взаємно сингулярних невід'ємних мір μ_+, μ_- на $\mathcal{A}$ таких, що*

$$\mu = \mu_+ - \mu_-.$$

Такий розклад дійснозначної міри μ називають розкладом Жордана.

Доведення. Нехай $X = X_+ \bigsqcup X_-$ – розклад Гана для міри μ. Покладемо за означенням

$$\mu_+(A) := \mu(A \cap X_+), \qquad \mu_-(A) := -\mu(A \cap X_-), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Очевидно, що μ_+ і μ_- є невід'ємними мірами на $\mathcal{A}$, причому

$$(\mu_+ - \mu_-)(A) = \mu_+(A) - \mu_-(A) = \mu(A \cap X_+) + \mu(A \cap X_-) = \mu(A),$$

тобто $\mu = \mu_+ - \mu_-$. Крім того, з означень випливає, що $\mu_+ \perp \mu_-$. Тим самим існування розкладу Жордана доведено. Доведемо єдиність. Припустимо, що є друга пара мір $\widetilde{\mu}_+$ і $\widetilde{\mu}_-$ така, що $\mu = \widetilde{\mu}_+ - \widetilde{\mu}_-$ і $\widetilde{\mu}_+ \perp \widetilde{\mu}_-$. Нехай другій парі відповідає розклад $X = \widetilde{X}_+ \bigsqcup \widetilde{X}_-$, тобто

$$\widetilde{\mu}_+(\widetilde{X}_-) = 0, \qquad \widetilde{\mu}_-(\widetilde{X}_+) = 0.$$

Зауважимо, що розклад $X = \widetilde{X}_+ \bigsqcup \widetilde{X}_-$ є розкладом Гана. Припустимо, що $A \in \mathcal{A}$ і

$$A \subset X_+ \setminus \widetilde{X}_+.$$

Тоді

$$\mu_+(A) = \mu(A) = -\widetilde{\mu}_-(A),$$

а, отже, $\mu(A) = 0$. Аналогічно показуємо, що якщо $A \subset \widetilde{X}_+ \setminus X_+$, то $\mu(A) = 0$. Тому для довільних $B \in \mathcal{A}$ таких, що $B \subset X_+ \cup \widetilde{X}_+$ маємо

$$\mu(B) = \mu(A \cap X_+ \cap \widetilde{X}_+) + \mu(A \setminus X_+) + \mu(A \setminus \widetilde{X}_+) =$$

$$\mu(A \cap X_+ \cap \widetilde{X}_+) + 0 + 0 = \mu(A \cap X_+ \cap \widetilde{X}_+).$$

Звідки отримуємо, що

$$\mu_+(B) = \widetilde{\mu}_+(B).$$

Звідки випливає, що $\mu_+ = \widetilde{\mu}_+$. А це означає, що $\mu_- = \widetilde{\mu}_-$. Єдиність доведена. $\square$

Декілька слів скажемо за комплексні міри. Нехай μ – комплексна міра. Покладемо

$$\mu_R(A) := \operatorname{Re} \mu(A), \qquad \mu_I(A) := \operatorname{Im} \mu(A), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Легко переконатися, що μ_R і μ_I є дійснозначними міра і

$$\mu = \mu_R + i\mu_I.$$

таким чином перехід від дійснозначних мір до комплексних є дуже простим.

Борелівські міри. Нехай X - метричний простір. Нагадаємо, що через $B(X)$ ми позначаємо σ- алгебру всіх борелівських множин, тобто σ- алгебру, що породжена всіма відкритими і замкненими множинами.

Міру, яка задана на σ- алгебрі $B(X)$ ми назвемо борелівською мірою.

Позначимо через $\boldsymbol{M}(X)$ множину всіх обмежених комплекснозначних борелівських мір, тобто

$$\boldsymbol{M}(X) := \boldsymbol{M}(B(X), X).$$

Як ми вже знаємо $\boldsymbol{M}(X)$ є лінійним простором над полем комплексних чисел.

15. Неозначений інтеграл Лебега. Теорія диференціювання.

У даній лекції ми розглянемо основні факти теорії диференціювання.
В курсі математичного аналізу були доведені наступні важливі факти:

(1) для довільної функції $f \in C[a,b]$ виконується рівність

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x), \qquad x \in [a,b].$$

(2) для довільної функції $f \in C^1[a,b]$ виконується рівність

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a), \qquad x \in [a,b].$$

Ми покажемо, що в теорії інтеграла Лебега є природні аналоги цих результатів.

Почнемо ми з формулювання важливої теореми Лебега про похідну монотонної функції.

Теорема 15.1. *Нехай f монотонна функція на проміжку $[a,b]$. Тоді вона має скінченну похідну майже у всіх точках проміжку $[a,b]$.*

Доведення цієї теореми є складним і довгим. Тому за браком часу ми його не розглядаємо. З ним можна ознайомитися у підручнику.

З сформульованої вище теореми Лебега випливає простий

Наслідок 15.2. *Нехай f - функція обмеженої варіації на проміжку $[a,b]$. Тоді вона має скінченну похідну майже у всіх точках проміжку $[a,b]$.*

Доведення. Кожна комплекснозначна функція f обмеженої варіації є лінійною комбінацією чотирьох монотонних функцій. А власне,

$$f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4,$$

де f_j монотонно неспадні функції на $[a,b]$. Звідси, враховуючи теорему Лебега, очевидним чином отримуємо твердження наслідку. $\square$

Теорема 15.3. *Нехай f - неспадна функція на проміжку $[a,b]$. Тоді її похідна f' є інтегровна за Лебегом і*

$$\int_a^b f'\,d\mu_1 \le f(b) - f(a).$$

Доведення. Розглянемо послідовність функцій

$$f_n(x) = \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n}, \qquad x \in [a,b].$$

Тут ми вважаємо, що $f(x) = f(b)$ при $x > b$.

Монотонна функція є вимірна. Крім того, вона обмежена. Тому всі функції f_n є інтегровними за Лебегом. Зауважимо, що монотонна функція є інтегровна за Ріманом. Тому всі функції f_n є інтегровними і за Ріманом. З теореми про зв'язок між інтегралами Рімана і Лебега випливає, що

$$\int_{[a,b]} f_n\,d\mu_1 = \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Оцінимо інтеграл

$$\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Маємо

$$\int_a^b f_n\,dx = n\int_a^b f(x+1/n)\,dx - n\int_a^b f(x)\,dx =$$
$$= n\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)\,dx - n\int_a^b f(x)\,dx = n\int_b^{b+1/n} f(x)\,dx - n\int_a^{a+1/n} f(x)\,dx.$$

Оскільки

$$n\int_b^{b+1/n} f(x)\,dx = n\int_b^{b+1/n} f(b)\,dx = f(b)$$

і

$$n\int_a^{a+1/n} f(x)\,dx \ge nf(a)\frac{1}{n} = f(a),$$

то

$$\int_{[a,b]} f_n\,d\mu_1 \le f(b) - f(a).$$

Згідно з теоремою Лебега про похідну монотонної функції послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається майже скрізь до функції f'. Крім того, оскільки f неспадна, то

$$f_n \ge 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тому, враховуючи теорему Фату, ми отримуємо, що $f' \in L([a,b],\mu_1)$ і

$$\int_{[a,b]} f'\,d\mu_1 \le f(b) - f(a).$$

$\square$

Розглянемо кусково постійну функцію f на $[a,b]$. Очевидно, що її похідна рівна нулеві у всіх точках на $[a,b]$, крім скінченного числа їх числа. Зрозуміло, що відновити таку функцію за її похідною неможливо. Можна подумати, що причина в тому, що функція f є розривна. Однак, можна побудувати монотонну функцію, яка є неперервна, але її похідна дорівнює нулеві майже скрізь.

Драбина Кантора. Георг Кантор перший побудував приклад неперервної монотонної функції, похідна якої рівна нулеві майже скрізь. В процесі побудови він використав множину, яку пізніше назвали множиною Кантора.

Процес побудови є наступним. Розіб'ємо проміжок $J^0 = [0,1]$ на три рівні частини і покладемо $f(x) = 1/2$ при $x \in [1/3, 2/3]$. Відрізок $J_1^1 = [0, 1/3]$ розіб'ємо на три частини і на середній покладемо $f(x) = 1/4$. Відрізок $J_2^1 = [2/3, 1]$ теж розіб'ємо на три частини і на середній покладемо $f(x) = 3/4$. На відрізках, які залишилися, тобто на відрізках 2-го рангу:

$$J_1^2 = [0, 1/9], \quad J_2^2 = [2/9, 1/3], \quad J_3^2 = [2/3, 7/9], \quad J_1^2 = [8/9, 1]$$

повторимо ту саму процедуру. Розб'ємо їх на три рівні частини і на середній покладемо функцію рівною послідовно $1/8, 3/8, 5/8, 7/8$. Продовжуючи цей процес ми задамо функцію f на проміжку $[0,1]$. Всюди по множиною Кантора похідна нашої функції є рівна нулю. Множина Кантора є ніде не щільна і замкнена. Крім того, її міра Лебега (як неважко зрозуміти) є рівна нулеві. Отримана функція є неперервна і монотонна на $[0,1]$. А на доповненні до множини K похідна функції f є рівна нулеві.

Абсолютно неперервні функції.

Означення 15.4. *Функцію $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ми назвемо абсолютно неперервною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільної скінченної* *системи* $((a_j, b_j))_{j=1}^n$ *попарно неперетинних інтервалів таких, що*

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| < \delta,$$

виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Очевидно, що кожна абсолютно неперервна функція є неперервною. Проте, не кожна неперервна функція є абсолютно неперервною. Легко бачити, що драбина Кантора не є абсолютно неперервною функцією.

Позначимо через $AC[a, b]$ множину всіх абсолютно неперервних функцій на проміжку $[a, b]$.

Вправа 15.5. *Доведіть, що* $AC[a, b]$ *є лінійним простором.*

Вправа 15.6. *Доведіть, що кожна функція* $f \in AC[a, b]$ *є функцією обмеженої варіації, тобто*

$$AC[a, b] \subset V[a, b].$$

Вправа 15.7. *Кожна неперервно диференційовна функція* $f \in C^1[a, b]$ *є абсолютно неперервною функцією на* $[a, b]$.

Вправа 15.8. *Доведіть, що добуток* fg *функцій* $f, g \in AC[a, b]$ *є абсолютно неперервною функцією.*

Для абсолютно неперервних функцій справедлива наступна важлива і нетривіальна

Теорема 15.9. *Нехай* $f \in AC[a, b]$ *і* $f'(x) = 0$ *майже для всіх* $x \in [a, b]$. *Тоді функція* f *є постійною на* $[a, b]$ *(*$f \equiv \mathrm{const}$*).*

Доведення даної теореми красиве, але складне і довге. Ми його розглянемо дещо пізніше, якщо у нас буде час.

Натомість, ми доведемо іншу важливу теорему.

Домовимося через $L(a,b)$ позначати простір $L((a,b),\mu_1)$, а замість $d\mu_1$ писати dx.

Теорема 15.10. *Нехай* $f \in L(a,b)$ *і*

$$F(x) := \int_a^x f\,dx, \qquad x \in [a,b].$$

Тоді функція F *є абсолютно неперервна на* $[a,b]$ *і майже для всіх* $x \in [a,b]$ $F'(x) = f(x)$, *тобто*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f\,dx = f(x) \qquad \text{майже для всіх } x \in [a,b].$$

Доведення теореми розіб'ємо на частини, які оформимо у вигляді лем.

Лема 15.11. *Нехай* $f \in L(a,b)$ *і*

$$F(x) := \int_a^x f\,dx, \qquad x \in [a,b].$$

Тоді функція F *є абсолютно неперервна на* $[a,b]$.

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. З абсолютної неперервності інтеграла Лебега випливає, що існує таке $\delta > 0$, що для кожної вимірної множини $A \subset [a,b]$ з мірою $\mu_1(A) < \delta$, виконується нарівність

$$\int_A |f|\,dx < \varepsilon.$$

Нехай $A = \bigsqcup_{j=1}^n (a_j,b_j)$ і $\mu_1(A) < \delta$. Тоді

$$\int_A |f|\,dx = \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} |f|\,dx < \varepsilon.$$

Оскільки

$$|F(b_j) - F(a_j)| = \left|\int_{a_j}^{b_j} f\,dx\right| \le \int_{a_j}^{b_j} |f|\,dx,$$

то

$$\sum_{j=1}^n |F(b_j) - F(a_j)| \le \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} |f|\,dx < \varepsilon.$$

Тим самим лема доведена. $\square$

Вправа 15.12. *Нехай $f \in L(a,b)$ і*

$$\int_a^x f\,dx = 0$$

для всіх $x \in [a,b]$. Тоді $f(x) = 0$ майже для всіх $x \in [a,b]$.

Лема 15.13. *Нехай $f \in L(a,b)$ і*

$$F(x) := \int_a^x f\,dx, \qquad x \in [a,b].$$

Якщо f є обмежена ($|f| \le K$), то $F'(x) = f(x)$ майже для всіх $x \in [a,b]$.

Доведення. З попередньої леми випливає, що функція F є абсолютно неперервна. А кожна абсолютно неперервна функція є функцією обмеженої варіації. Тому похідна F' існує майже скрізь на $[a,b]$ і є інтегровна на $[a,b]$.

Покладемо

$$f_n(x) = \frac{F(x+1/n) - F(x)}{1/n}, \qquad x \in [a,b].$$

Тоді

$$f_n(x) = n\left(\int_x^{x+1/n} f\,dx\right).$$

Тому

$$|f_n(x)| \le n\left|\int_x^{x+1/n} f\,dx\right| \le n(\sup|f|)\frac{1}{n} \le K, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [a,b].$$

З означення функцій f_n випливає, що вони збігаються до F' майже скрізь на $[a,b]$. З теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає, що для довільного $c \in (a,b]$

$$\int\limits_a^c F'\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^c f_n\,dx = \lim_{n\to\infty} n \int\limits_a^c (F(x+1/n) - F(x))\,dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\int\limits_a^c F(x+1/n)\,dx - \int\limits_a^c F(x)\,dx \right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(n \int\limits_c^{c+1/n} F(x)\,dx - n \int\limits_a^{a+1/n} F(x)\,dx \right).$$

Оскільки функція F є неперервна, то

$$\lim_{n\to\infty} n \int\limits_c^{c+1/n} F(x)\,dx = F(c)$$

і

$$\lim_{n\to\infty} n \int\limits_a^{a+1/n} F(x)\,dx = F(a) = 0.$$

Тому

$$\int\limits_a^c F'\,dx = F(c) - F(a) = F(c) = \int\limits_a^c f(x)\,dx,$$

тобто

$$\int\limits_a^c (F' - f)(x)\,dx = 0, \qquad c \in [a,b].$$

Звідси, враховуючи вправу 15.12, отримаємо, що функція $F' - f$ дорівнює нулю майже скрізь, тобто $F'(x) = f(x)$ майже для всіх $x \in [a,b]$. $\square$

Доведення теореми 15.10. Кожну дійснозначну інтегровну функцію можна подати у вигляді $f = f_+ - f_-$, де

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}, \qquad f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}, \qquad x \in (a,b).$$

Функції f_+, f_- є невід'ємні. Легко переконатися, що вони також є вимірні. Оскільки функція $|f|$ є інтегровною мажорантою для функцій f_+ і f_-, то

$f_+, f_- \in L(a,b)$. Зі сказаного випливає, що кожну комплекснозначну інтегровну функцію можна подати у вигляді

$$f = h_+ - h_- + i(g_+ - g_-),$$

де h_+, h_-, g_+, g_- - невід'ємні інтегровні функції. Звідси, враховуючи лінійність інтеграла Лебега, бачимо, що теорему досить довести у припущенні, що $f \geq 0$.

Тому без втрати загальності можна вважати, що $f \geq 0$.

Розглянемо послідовність функцій

$$f_n(x) := \min\{f(x), n\}, \qquad x \in (a,b), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Кожна з функцій f_n інтегровною та обмеженою. Крім того, послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ поточково збігається до функції f. Розглянемо допоміжні функції

$$F_n(x) := \int\limits_a^x f_n(t)\,dt, \qquad G_n(x) = \int\limits_a^x (f - f_n)(t)\,dt, \qquad x \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Функції G_n, F_n є неспадними, а, отже, мають похідну майже скрізь. З попередньої леми випливає, що для всіх n

$$F_n'(x) = f_n(x), \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a,b].$$

Оскільки $F = G_n + F_n$, і $G_n' \geq 0$, то

$$F'(x) = G_n'(x) + F_n'(x) \geq F_n'(x) = f_n(x), \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a,b].$$

Переходячи в нерівності $F'(x) \geq f_n(x)$ до границі при $n \to \infty$, отримуємо, що

$$F'(x) \geq f(x), \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a,b].$$

З теореми 15.3 випливає, що

$$\int\limits_a^b F'\,dx \leq F(b) - F(a) = F(b) = \int\limits_a^b f\,dx.$$

Отже,

$$\int\limits_a^b (F' - f)\,dx \leq 0.$$

Але $F'(x) - f(x) \geq 0$ майже для всіх $x \in [a, b]$. Це означає, що

$$\int_a^b (F' - f)\, dx \geq 0,$$

а, отже,

$$\int_a^b (F' - f)\, dx = 0.$$

Оскільки $F'(x) - f(x) \geq 0$ майже скрізь, то з наслідку з нерівності Чебишева випливає, що

$$F'(x) - f(x) = 0, \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a, b].$$

Теорема доведена. $\square$

Рівність Ньютона-Лейбніца.

Теорема 15.14. *Нехай* $f \in AC[a, b]$. *Тоді справедлива рівність*

$$\int_a^b f'\, dx = f(b) - f(a).$$

Доведення. Розглянемо функції

$$g(x) := \int_a^x f'\, dx, \qquad \varphi(x) := f(x) - g(x), \qquad x \in [a, b].$$

Згідно з лемою 15.11 функція g є абсолютно неперервна на $[a, b]$. Тому функція φ є абсолютно неперервна як різниця абсолютно неперервних функцій f і g. З огляду на теорему 15.10

$$g'(x) = f'(x), \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a, b].$$

Тому

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x) = 0, \qquad \text{майже для всіх} \quad x \in [a, b].$$

Оскільки $\varphi \in AC[a, b]$, то з теореми 15.9 випливає, що $\varphi \equiv \mathrm{const}$. Враховуючи, що

$$\varphi(a) = f(a) - g(a) = f(a),$$

отримуємо рівність

$$f(x) = f(a) + g(x), \qquad x \in [a, b],$$

з якої випливає, що

$$\int\limits_a^b f'\,dx = g(b) = f(b) - f(a).$$

Теорема доведена. $\square$

Абсолютно неперервні міри. Теорема Радона-Нікодима.

Означення 15.15. *Нехай $\boldsymbol{M}(\mathcal{U}, X)$ простір комплекснозначних обмежених мір, що задані на σ-алгебрі $\mathcal{U}$ підмножин множини X. Нехай $\mu, \nu \in \boldsymbol{M}(\mathcal{U}, X)$, причому міра ν є невід'ємна.*

1) Ми скажемо, що міра μ є зосереджена на множині $A \in \mathcal{U}$, якщо

$$\forall B \in \mathcal{U} \quad (B \subset X \setminus A) \Rightarrow (\mu(B) = 0).$$

2) Ми скажемо, що міра μ є абсолютно неперервна стосовно невід'ємної міри ν, якщо

$$\forall A \in \mathcal{U} \quad (\nu(A) = 0) \Rightarrow (\mu(A) = 0).$$

Теорема Радона-Нікодима.

Теорема 15.16. *Нехай $\mu, \nu \in \boldsymbol{M}(\mathcal{U}, X)$, причому міра ν є невід'ємна. Якщо міра μ є абсолютно неперервна стосовно невід'ємної міри ν, то існує інтегровна стосовно міри ν функція f така, що*

$$\mu(A) = \int\limits_A f\,d\nu, \qquad A \in \mathcal{U}.$$

Функція f, яка визначається однозначно з точністю до ν-еквівалентоності, називається похідною Радона-Нікодима міри μ по невід'ємній мірі ν і позначається через

$$\frac{d\mu}{d\nu}.$$

Доведення теореми досить складне і за браком часу ми його не наводимо.

З теореми Радона-Нікодима випливає наступний

Наслідок 15.17. *Нехай $\mu \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$, тобто μ - обмежена борелівська міра на $\mathbb{R}$. Міра μ є абсолютно неперервна стосовно міри Лебега μ_1 тоді і тільки тоді, коли її функція розподілу*

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x)), \qquad x \in \mathbb{R},$$

є абсолютно неперервною на кожному скінченному проміжку.

Довести самостійно.

Означення 15.18. *Дельта-мірою Дірака, що зосереджена в точці $\xi \in \mathbb{R}$ називається міра δ_ξ (стандартне позначення), яка задана формулою*

$$\delta_\xi(A) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \xi \in A; \\ 0, & \text{якщо } \xi \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

на всіх множинах $A \subset \mathbb{R}$.

Зауважимо, що $\delta_\xi \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$, тобто міра δ_ξ є борелівською і вона зосереджена в одноточковій множині $\{\xi\}$.

Означення 15.19. *Борелівська міра $\mu \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$ називається:*

(1) *неперервною, якщо $\mu(\{\xi\}) = 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}$;*
(2) *дискретною (або атомарною), якщо вона зосереджена на зліченній або скінченній множині.*

Вправа 15.20. *Кожна ненульова дискретна міра $\mu \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$ однозначно зображається у вигляді*

$$\mu = \sum_{j=1}^{N} h_j \delta_{\xi_j},$$

де $(h_j)_{j=1}^N$ - послідовність в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $(\xi_j)_{j=1}^N$ - послідовність попарно різних чисел в $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ або $N = \infty$ і

$$\sum_{j=1}^{N} |h_j| < \infty \qquad (\text{якщо } N = \infty).$$

Вправа 15.21. *Кожну міра $\mu \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$ можна однозначно подати у вигляді суми $\mu = \mu_a + \mu_s$, де μ_a - абсолютно неперервна стосовно міри Лебега μ_1, а μ_s*

- сингулярна стосовно міри μ_1. В свою чергу μ_s можна однозначно подати у вигляді суми $\mu_s = \mu_d + \mu_{sc}$, де μ_d - дискретна міра, а μ_{sc} - неперервна міра та сингулярна стосовно μ_1.

З вправи 15.21 випливає, кожну міра $\mu \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$ можна однозначно подати у вигляді

$$\mu = \mu_a + \mu_{sc} + \mu_d,$$

де μ_a - абсолютно неперервна стосовно міри Лебега μ_1, μ_d - дискретна міра, а μ_{sc} - неперервна сингулярна стосовно μ_1.

16. Інтеграл Лебега-Стільтьєса.

Нехай $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функція обмеженої варіації на $\mathbb{R}$, тобто $F \in V(\mathbb{R})$. Як ми вже говорили функція F породжує борелівську міру на прямій. Позначимо її через μ_F. На всіх інтервалах прямої (і необмежених теж) вона задана формулами:

$$\begin{aligned} \mu_F((a,b)) &= F(b-0) - F(a+0), \\ \mu_F([a,b)) &= F(b-0) - F(a-0), \\ \mu_F((a,b]) &= F(b+0) - F(a+0), \\ \mu_F([a,b]) &= F(b+0) - F(a-0). \end{aligned} \tag{16.1}$$

Формули (16.1) однозначно визначають міру μ_F. Міра μ_F є обмеженою борелівською мірою. Цю міру ми будемо називати мірою Лебега-Стільтьєса. Міру μ_F можна однозначно продовжити до повної міри $\bar{\mu}_F$, що задана на σ-алгебрі, яка містить алгебру $B(\mathbb{R})$. Міру $\bar{\mu}_F$ можна також отримати, якщо взяти лебегове продовження міри μ_F, заданої на півкільці інтервалів. Часто якраз повну міру $\bar{\mu}_F$ і називають мірою Лебега-Стільтьєса. Однак, оскільки процедура поповнення довільної міри є зовсім проста, то ми не будемо робити різниці між мірами μ_F та $\bar{\mu}_F$. Будемо вважати, що борелівська міра μ_F є повна, тобто автоматично поповнена.

Означення 16.1. *Ми скажемо, що борелівська міра $\mu \in \boldsymbol{M}(\mathbb{R})$ зосереджена на множині $C \in B(\mathbb{R})$, якщо $\mu(A) = 0$ для всіх $A \in B(\mathbb{R})$, що не перетинаються з C $(A \cap C = \emptyset)$.*

Зрозуміло, що міру μ_F можна також розглядати на відрізку $[a,b]$. Для цього досить знати функцію F тільки на відрізку $[a,b]$.

Означення 16.2. *Нехай числова функція f задана на проміжку $[a,b]$. Ми назвемо її:*

(1) *неперервною зліва (справа) на проміжку $[a,b]$, якщо для всіх $\xi \in [a,b]$*

$$\lim_{x\to\xi-0} f(x) = f(\xi) \qquad (\lim_{x\to\xi+0} f(x) = f(\xi));$$

(2) *кусково неперервною на $[a,b]$, якщо вона має лише скінченну кількість точок розриву, причому всі вони є точками розриву першого роду;*
(3) *кусково постійною на $[a,b]$, якщо вона є кусково неперервною на $[a,b]$ і приймає лише скінченну кількість значень.*

Теорема 16.3. *Якщо функція F є неспадною кусково постійною на $[a,b]$, то*

$$\mu_F = \sum_{j=1}^{n} h_j \delta_{\xi_j},$$

де $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ множина точок розриву функції F, а h_j - стрибок функції F в точці $x = \xi_j$, тобто

$$h_j := F(\xi_j + 0) - F(\xi_j - 0), \qquad j = 1, \dots, n.$$

Доведення. Нехай функція F постійна на інтервалі $[a,b]$. Тоді вона рівна нулю на всіх інтервалах, що містяться в $[a,b]$. Тому $\mu_F = 0$ (лебегове продовження нульової міри приводить нас, очевидно, до нульової міри). Розглянемо тепер загальний випадок. Нехай $G = \{\xi_j\}_{j=1}^n$ множина точок розриву функції F. Якщо функція F постійна на деякому інтервалі $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$, тобто

$$(\alpha,\beta) \cap \{\xi_j\}_{j=1}^n = \emptyset,$$

то зі сказаного вище випливає, що $\mu_F(A) = 0$ для кожної множини $A \subset (\alpha,\beta)$. Це означає, що якщо множина A не перетинається з G, то $\mu_F(A) = 0$, тобто міра μ_F зосереджена на G. З іншого боку, за означенням

$$\mu_F(\{\xi_j\}) := F(\xi_j + 0) - F(\xi_j - 0) = h_j.$$

Довільну множину $A \subset [a,b]$ можна подати у вигляді

$$A = \left(\bigsqcup_{\xi_j \in A} \{\xi_j\} \right) \bigsqcup B,$$

де $B \cap G = \emptyset$. Тому

$$\mu_F(A) = \mu_F(B) + \sum_{\xi_j \in A} \mu_F(\{\xi_j\}) = \sum_{\xi_j \in A} h_j = \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \delta_{\xi_j} \right)(A).$$

□

Зауважимо, що якщо функція F є неспадною, то міра μ_F є невід'ємною. Нехай функція F є неспадною. Інтеграл Лебега

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu_F,$$

взятий по мірі μ_F, що побудована за функцією F, називають інтегралом Лебега-Стільтьєса і позначають символом

$$\int_a^b f \, dF$$

або символом

$$\int_a^b f(x) \, dF(x).$$

Таким чином, інтеграл Лебега-Стільтьєса це інтеграл Лебега, який записаний з допомогою функції розподілу міри. У цьому є сенс, оскільки такий запис часто дозволяє спростити і прискорити обчислення.

Клас функцій f, які інтегровні за мірою μ_F залежить від функції F, проте, він завжди містить всі обмежені борелівські функції. Зокрема, інтегровними за мірою μ_F є всі $f \in C[a,b]$.

Інтеграл Лебега-Стільтьєса можна означити і у випадку дійснозначної функції F обмеженої варіації. Нехай $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ - функція обмеженої варіації на $[a,b]$. Тоді, як відомо, її можна подати у вигляді - різниці неспадних функцій F_1 і F_2. Покладемо

$$\int_a^b f \, dF = \int_a^b f \, dF_1 - \int_a^b f \, dF_2 \tag{16.2}$$

в припущенні, що існують інтеграли у правій частині. Виявляється, що якщо f - обмежена борелівська функція, то права частина в (16.2) не залежить від вибору функцій F_1 і F_2 в зображенні $F = F_1 - F_2$.

Інтеграл Лебега-Стільтьєса можна означити і у випадку комплекснозначної функції F обмеженої варіації. Нехай $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ - функція обмеженої варіації на $[a,b]$. Тоді, як відомо, її можна подати у вигляді $F = F_1 + iF_2$, де F_1 і F_2 дійснозначні функції обмеженої варіації. Покладемо

$$\int_a^b f\,dF = \int_a^b f\,dF_1 + i\int_a^b f\,dF_2. \tag{16.3}$$

Розглянемо декілька окремих випадків, коли інтеграл Лебега-Стільтьєса обчислюється доволі просто.

Вправа 16.4. *Якщо функція F є кусково неперервною на $[a,b]$, то її можна подати у вигляді рівномірної границі кусково постійних функцій.*

Теорема 16.5. *Нехай $F \in AC[a,b]$ і неспадна, а f - кусково неперервна функція на проміжку $[a,b]$. Тоді*

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)\,dx. \tag{16.4}$$

Доведення. 1. Нехай функція f є кусково постійною на $[a,b]$. Тоді проміжок $[a,b]$ можна розбити на інтервали Δ_j, на яких f є постійною, тобто і подати у вигляді

$$[a,b] = \bigsqcup_{j=1}^{n} \Delta_j, \qquad f(x) = p_k, \quad x \in \Delta_k.$$

Тому

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f\,d\mu_F = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Delta_j} f\,d\mu_F =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{\Delta_j} p_j\,d\mu_F = \sum_{j=1}^{n} p_j \mu_F(\Delta_j).$$

Оскільки F є абсолютно неперервна, то

$$\mu_F(\Delta_j) = F(\beta_j) - F(\alpha_j) = \int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} F'(x)\,dx, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Тут α_j і β_j кінці інтервала Δ_j. Тому

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \mu_F(\Delta_j) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Delta_j} p_j F'(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Delta_j} f(x)F'(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)F'(x)\,dx.$$

2. Нехай f кусково неперервна на $[a, b]$. Тоді (див. вправу 16.4) її можна подати у вигляді рівномірної границі послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кусково постійних функцій. З огляду на вже доведене, маємо, що

$$\int\limits_a^b f_n(x)\,dF(x) = \int\limits_a^b f_n(x)F'(x)\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{16.5}$$

З рівномірної збіжності послідовності (f_n) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dF(x) = \int\limits_a^b f(x)\,dF(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)F'(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)F'(x)\,dx,$$

а, отже,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dF(x) = \int\limits_a^b f(x)F'(x)\,dx.$$

□

Теорема 16.6. *Нехай функція $f \in C[a, b]$ є кусково неперервна, а F є кусково постійна на проміжку $[a, b]$ і має розриви у точках $\xi_j \in (a, b)$, $j = 1, \dots, n$. Якщо функція f неперервна у всіх точках ξ_j, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dF(x) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)h_j, \qquad h_j := F(\xi_j + 0) - F(\xi_j - 0). \tag{16.6}$$

Доведення. Розіб'ємо проміжок $[a, b]$ на інтервали Δ_k $(k = 1, \dots, m)$, на яких f є неперервна. Очевидно, що можна зробити так, що в кожному інтервалі Δ_k буде міститися не більше однієї точки розриву функції F.

Оскільки

$$\int\limits_a^b f(x)\, dF(x) = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Delta_k} f(x)\, dF(x) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Delta_k} f\, d\mu_F,$$

то досить переконатися, що

$$\int\limits_{\Delta_k} f\, d\mu_F = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \Delta_k \cap \{\xi_j\}_{j=1}^n = \emptyset; \\ f(\xi_j) h_j, & \text{якщо } \xi_j \in \Delta_k. \end{cases}$$

Якщо $\Delta_k \cap \{\xi_j\}_{j=1}^n = \emptyset$, то функція F постійна в Δ_k, а, отже, $\mu_F(A) = 0$, якщо $A \subset \Delta_k$. Тому

$$\int\limits_{\Delta_k} f\, d\mu_F = 0.$$

Якщо $\xi_j \in \Delta_k$, інтервал Δ_k можна подати у вигляді

$$\Delta_k = \Delta_k' \bigsqcup \Delta_k'' \bigsqcup \{\xi_j\},$$

де Δ_k' і Δ_k'' інтервали, що не містять точок розриву функції F. Тоді, враховуючи сказане, маємо, що

$$\int\limits_{\Delta_k} f\, d\mu_F = \int\limits_{\Delta_k'} f\, d\mu_F + \int\limits_{\Delta_k''} f\, d\mu_F + \int\limits_{\{\xi_j\}} f\, d\mu_F = 0 + 0 + f(\xi_j)\mu_F(\{\xi_j\}) = f(\xi_j) h_j.$$

□

Теорема 16.7. *Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ є кусково неперервна, а F неспадна і її можна подати у вигляді суми $F = F_1 + F_2$, де F_1 кусково постійна на проміжку $[a, b]$ і має розриви у точках $\xi_j \in (a, b)$, $j = 1, \dots, n$, а F_2 є абсолютно неперервна. Тоді*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dF(x) = \int\limits_a^b f(x) F'(x)\, dx + \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) h_j, \tag{16.7}$$

де

$$h_j := F(\xi_j + 0) - F(\xi_j - 0).$$

Доведення. Оскільки $\mu_F = \mu_{F_1} + \mu_{F_2}$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dF(x) = \int\limits_a^b f\,\mu_F = \int\limits_a^b f\,\mu_{F_1} + \int\limits_a^b f\,\mu_{F_2}.$$

Тому з огляду на попередні дві теореми маємо, що

$$\int\limits_a^b f\,\mu_{F_1} = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F_1(\xi_j+0) - F_1(\xi_j-0))$$

і

$$\int\limits_a^b f\,\mu_{F_2} = \int\limits_a^b f(x)F_2'(x)\,dx.$$

Залишається зауважити, що F_2 є неперервна і для всіх $x \in [a,b] \setminus \{\xi_j\}_{j=1}^n$ $F_1'(x) = 0$.

Тому

$$F_1(\xi_j+0) - F_1(\xi_j-0) = F(\xi_j+0) - F(\xi_j-0) = h_j$$

і $F'(x) = F_2'(x)$ для всіх $x \in [a,b] \setminus \{\xi_j\}_{j=1}^n$. А, отже,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dF(x) = \int\limits_a^b f(x)F'(x)\,dx + \sum_{j=1}^n f(\xi_j)h_j. \tag{16.8}$$

□

Зауваження 16.8. *Щоб функція F задовольняла умови попередньої теореми досить, що функція F була кусково неперервною і її похідна була обмежена поза скінченною або зліченною множиною. Наприклад, такими є функції:*

$$F(x) = [x]x, \qquad F(x) = [2\sin x]\cos x, \qquad F(x) = x^2\,\mathrm{sign}(\sin x).$$

Теорема 16.9. *Нехай $F \in V[a,b]$ і $f \in C[a,b]$. Тоді*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dF(x)\right| \le \big(\max_{x\in[a,b]} |f(x)|\big)\,V_a^b[F]. \tag{16.9}$$

Доведення. Нехай f є кусково постійна і її точки розриву є точками неперервності функції F. Функцію f можна подати у вигляді суми

$$f = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{\Delta_k},$$

де Δ_j - інтервали, $[a,b]=\bigsqcup_{k=1}^m \Delta_k$. З лінійності інтеграла випливає, що

$$\int\limits_a^b f(x)\,dF(x)=\int\limits_{[a,b]} f\,d\mu_F=\sum_{k=1}^m \alpha_k \int\limits_{[a,b]} \chi_{\Delta_k}\,d\mu_F=\sum_{k=1}^m \alpha_k\mu_F(\Delta_k).$$

А, отже,

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dF(x)\right|\le \sum_{k=1}^m |\alpha_k||\mu_F(\Delta_k)|\le \max_k |\alpha_k|\sum_{k=1}^m |\mu_F(\Delta_k)|.$$

Нехай інтервал Δ_k має кінці γ_k,β_k. Оскільки вони є точками неперервності для F, то $|\mu_F(\Delta_k)|=|F(\gamma_k)-F(\beta_k)|$. Оскільки $[a,b]=\bigsqcup_{k=1}^m \Delta_k$, то

$$\sum_{k=1}^m |\mu_F(\Delta_k)|\le V_a^b[F].$$

Отже, оцінка (16.9) виконується для функції f.

Якщо $f\in C[a,b]$, то існує послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кусково постійних функцій, яка рівномірно збігається до f на $[a,b]$. Очевидно, що можна вважати, що точки розриву функцій f_n є точками неперервності функції F. З вже доведеного маємо, що

$$\left|\int\limits_{[a,b]} f_n\,d\mu_F\right|\le (\max_{x\in[a,b]}|f_n(x)|)\,V_a^b[F].$$

Здійснюючи граничний перехід при $n\to\infty$, отримуємо, що

$$\left|\int\limits_{[a,b]} f\,d\mu_F\right|\le (\max_{x\in[a,b]}|f(x)|)\,V_a^b[F],$$

тобто оцінка (16.9) виконується для функції $f\in C[a,b]$. □

Зауваження 16.10. *Попередню теорему можна посилити. А власне, якщо $F\in V[a,b]$ і функція $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ є обмеженою борелівською, то*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dF(x)\right|\le (\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|)\,V_a^b[F]. \tag{16.10}$$

Зауваження 16.11. *Інтеграл Лебега-Стільтьєса* $\int_a^b f\,dF$ *є лінійним і за змінною* f *і за змінною* F*, тобто*

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dF(x) = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dF(x) + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dF(x), \tag{16.11}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,d(\alpha F + \beta G)(x) = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dF(x) + \beta \int\limits_a^b f(x)\,dG(x). \tag{16.12}$$

17. Практичне заняття: Інтеграл Лебега-Стільтьєса.

Задача 17.1. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int\limits_{0,5}^{10,5} x\,d[x].$$

Розв'язок. Функція $F(x) = [x]$ на проміжку $[0; 10,5]$ є кусково постійна і має точки розриву

$$\xi_j = j, \qquad j = 1, \ldots, 10.$$

Стрибок функції F у точці ξ_j дорівнює 1. Тому

$$\int\limits_{0,5}^{10,5} x\,d[x] = \sum_{j=1}^{10} f(j)h_j = \sum_{j=1}^{10} j = 55.$$

Задача 17.2. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int\limits_{0}^{2-0} 2x\,d[x^2].$$

Розв'язок. Функція $F(x) = [x^2]$ на інтервалі $[0, 2)$ є кусково постійна і має точки розриву в точках:

$$\xi_j = \sqrt{j}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Стрибок функції F у точці ξ_j дорівнює 1. Тому

$$\int\limits_{0}^{2-0} 2x\, d[x^2] = 2 \cdot 1 + 2\sqrt{2} \cdot 1 + 2\sqrt{3} \cdot 1 = 2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

Задача 17.3. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int\limits_{(0,\pi)} x\, d[2\sin x].$$

Розв'язок. Функція $F(x) = [2\sin x]$ на інтервалі $[0, \pi]$ є кусково постійна і має точки розриву в точках:

$$\xi_1 = \pi/6, \qquad \xi_2 = \pi/2, \qquad \xi_3 = 5\pi/6.$$

Стрибок функції F у точці ξ_1 дорівнює 1, стрибок функції F у точці ξ_2 дорівнює 0, стрибок функції F у точці ξ_3 дорівнює -1 Тому

$$\int\limits_{(0,\pi)} x\, d[2\sin x] = \frac{\pi}{6} \cdot 1 + \frac{\pi}{2} \cdot 0 - \frac{5\pi}{6} \cdot 1 = -\frac{2\pi}{3}.$$

Задача 17.4. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int\limits_{0}^{3} x^2\, d[x + 1/2].$$

Розв'язок. Функція $F(x) = [x + 1/2]$ на інтервалі $[0, 3]$ є кусково постійна і має точки розриву в точках:

$$\xi_j = 1/2 + j, \qquad j = 0, 1, 2.$$

Стрибок у всіх точках розриву дорівнює 1. Тому

$$\int\limits_{0}^{3} x^2\, d[x + 1/2] = (1/2)^2 + (3/2)^2 + (5/2)^2 = 35/4.$$

Задача 17.5. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (x^2 + x)\, d\,\mathrm{sign}\,(\cos x).$$

Розв'язок. Функція $F(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$ є кусково постійна і має точки розриву в точках:

$$\xi_1 = -\pi/2, \qquad \xi_2 = \pi/2.$$

При цьому стрибок у точці ξ_1 дорівнює 2, а стрибок у точці ξ_2 дорівнює -2 . Тому

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + x)\, d \operatorname{sign}(\cos x) = ((-\pi/2)^2 - \pi/2)2 - ((\pi/2)^2 + \pi/2)2 = -2\pi.$$

Задача 17.6. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int_{-2}^{2} (x + 2)\, d \operatorname{sign}(x^2 - 1).$$

Розв'язок. Функція $F(x) = \operatorname{sign}(x^2 - 1)$ на інтервалі $[-2, 2]$ є кусково постійна і має точки розриву в точках:

$$\xi_1 = -1, \qquad \xi_2 = 1.$$

При цьому стрибок у точці ξ_1 дорівнює -2, а стрибок у точці ξ_2 дорівнює 2 . Тому

$$\int_{-2}^{2} (x + 2)\, d \operatorname{sign}(x^2 - 1) = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 4.$$

Задача 17.7. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int_{-2}^{2} (x + 1)\, d(x^2 + \operatorname{sign} x).$$

Розв'язок. Функція $F(x) = x^2 + \operatorname{sign} x$ є сумою функцій $F_1(x) = x^2$ і $F_2(x) = \operatorname{sign} x$. При цьому $F_1 \in C^1[-2, 2]$, а F_2 є кусково постійна і має точку розриву

$$\xi = 0.$$

При цьому стрибок у точці ξ дорівнює 2. Тому

$$\int\limits_{-2}^{2}(x+1)\,d(x^2+\operatorname{sign}x)=\int\limits_{-2}^{2}(x+1)\,dx^2+\int\limits_{-2}^{2}(x+1)\,d(\operatorname{sign}x)=$$

$$=\int\limits_{-2}^{2}2x(x+1)\,dx+1\cdot 2=38/3.$$

Задача 17.8. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьеса:*

$$\int\limits_{0}^{2\pi}x\,d(3x^2+\operatorname{sign}\cos x).$$

Розв'язок. Функція $F(x)=3x^2+\operatorname{sign}\cos x$ є сумою функцій $F_1(x)=3x^2$ і $F_2(x)=\operatorname{sign}\cos x$. Тому

$$\int\limits_{0}^{2\pi}xd(3x^2+\operatorname{sign}\cos(\pi x))=\int\limits_{0}^{2\pi}x\,d3x^2+\int\limits_{0}^{2\pi}x\,d\operatorname{sign}\cos(\pi x).$$

Перший інтеграл обчислюється легко.

$$\int\limits_{0}^{2\pi}x\,d3x^2=6\int\limits_{0}^{2\pi}x^2\,dx=2(2\pi)^3.$$

Перейдемо до другого інтеграла. Оскільки функція $F(x)=\operatorname{sign}\cos x$ є кусково постійна і має на проміжку $[0,2\pi]$ розриви лише у точках $\xi_1=\pi/2$ і $\xi_2=3\pi/2$, причому стрибок в точці ξ_1 рівний -2, а в ξ_2 рівний 2, то

$$\int\limits_{0}^{2\pi}x\,d\operatorname{sign}\cos x=\frac{\pi}{2}\cdot(-2)+\frac{3\pi}{2}\cdot 2=2\pi.$$

Отже,

$$\int\limits_{0}^{2\pi}xd(3x^2+\operatorname{sign}\cos(\pi x))=2(2\pi)^3+2\pi.$$

Задача 17.9. *Обчисліть інтеграл Лебега-Стільтьєса:*

$$\int\limits_{5/2}^{7/2} x\, d(x[x]).$$

Розв'язок. Функція $F(x) = x[x]$ є кусково гладкою функцією з єдиною точкою розриву в точці $x = 3$. При цьому

$$F(3+0) = \lim_{x\to 3+0} = 3\cdot 3 = 9, \quad F(3-0) = \lim_{x\to 3-0} = 3\cdot 2 = 6$$

і

$$F'(x) = [x], \qquad x \in [5/2, 7/2], \quad x \neq 3.$$

Тому

$$\int_{5/2}^{7/2} x\, d(x[x]) = 3(F(3+0) - F(3-0)) + \int_{5/2}^{7/2} x[x]\, dx =$$

$$= 9 + \int_{5/2}^{3} 2x\, dx + \int_{3}^{7/2} 3x\, dx = 6 + (3^2 - (7/2)^2) + \frac{3}{2}((7/2)^2 - 3^2).$$

18. Інтеграл Лебега-Стільтьєса і інтеграл Рімана-Стільтьєса.

Інтеграл Рімана-Стільтьєса. Поряд з інтегралом Лебега-Стільтьєса ми розглянемо також інтеграл Рімана-Стільтьєса, який будується подібно до інтеграла Рімана.

Нехай функція $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ має обмежену варіацію на проміжку $[a,b]$ і є неперервна зліва (тобто $F(x) = F(x-0)$ для всіх $x \in (a,b]$). Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ і $\tau = \{x_j\}_{j=0}^n$ розбиття проміжку $[a,b]$, тобто

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Виберемо у кожному проміжку $[x_{j-1}, x_j]$ точку ξ_j. Тепер розбиттю τ з послідовністю $\xi = (\xi_j)_{j=1}^n$ вибраних точок поставимо у відповідність інтегральну суму

$$S(\tau,\xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(F(x_j) - F(x_{j-1})).$$

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{d(\tau)\to 0} S(\tau,\xi)$$

($d(\tau)$ - діаметр розбиття τ), яка не залежить від вибору послідовності ξ, то ми кажемо, що існує інтеграл Рімана-Стільтьєса

$$(RS)\int_a^b f(x)\,dF(x) := \lim_{d(\tau)\to 0} S(\tau,\xi).$$

Теорема 18.1. *Нехай $F \in V[a,b]$ і $f \in C[a,b]$. Тоді інтеграл Рімана-Стільтьєса*

$$(RS)\int_a^b f(x)\,dF(x)$$

існує і збігається з відповідним інтегралом Лебега-Стільтьєса, тобто

$$(RS)\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f\,dF.$$

Доведення. Виберемо послідовність $(\tau_n, \xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ розбиттів τ_n з з фіксованим послідовностями $\xi^{(n)}$ вибраних точок і таку, що $d(\tau_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Кожній парі $(\tau_n, \xi^{(n)})$ поставимо у відповідність східчасту функцію

$$f_n(x) = f(\xi_j), \qquad x \in \Delta_j := [x_{j-1}, x_j).$$

Тоді інтеграл Лебега-Стільтьєса $\int_a^b f_n\,dF$ неважко обчислити :

$$\int\limits_a^b f_n\,dF = \sum_{j=1}^n \int\limits_{\Delta_j} f_n\,dF = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \int\limits_{\Delta_j} dF = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F(x_j) - F(x_{j-1})),$$

тобто

$$\int\limits_a^b f_n\,dF = S(\tau_n, \xi^{(n)}).$$

Оскільки функція f є неперервна на $[a,b]$, то за теоремою Кантора вона є рівномірно неперервною на $[a,b]$. Звідси, враховуючи, що $d(\tau_n) \to 0$ при $n \to \infty$, отримуємо, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до функції f. Отже, інтеграл Лебега-Стільтьєса $\int_a^b f\,dF$ існує і

$$\int\limits_a^b f\,dF = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n\,dF = \lim_{n\to\infty} S(\tau_n, \xi^{(n)}.$$

тобто

$$\int\limits_a^b f\,dF = (RS)\int_a^b f(x)\,dF(x).$$

□

Щоб не ускладнювати позначення, далі ми будемо позначати інтеграл Рімана-Стільтьєса символом
$$\int_a^b f(x)\,dF(x)$$

Відзначимо деякі елементарні властивості властивості інтеграла Рімана-Стільтьєса.

1. Аналогічно як і у випадку інтеграла Лебега-Стільтьєса справедлива оцінка (теорема про середнє)
$$\left|\int_a^b f(x)\,dF(x)\right| \le \max_{x\in[a,b]} |f(x)| V_a^b[F].$$
Для інтеграла Лебега-Стільтьєса ми її не доводили. У випадку інтеграла Рімана-Стільтьєса її доведення є нескладним і ми його подамо.

Очевидно, що нам достатньо оцінити суму $S(\tau,\xi)$. Маємо
$$|S(\tau,\xi)| = \left|\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F(x_j)-F(x_{j-1}))\right| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)||F(x_j)-F(x_{j-1})| \le \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \sum_{j=1}^n |F(x_j)-F(x_{j-1})| \le$$
$$\le \max_{x\in[a,b]} |f(x)| V_a^b[F].$$
Отже, для довільних розбиттів маємо, що
$$|S(\tau,\xi)| \le \max_{x\in[a,b]} |f(x)| V_a^b[F].$$
Здійснюючи тепер граничний перехід при $d(\tau)\to 0$ отримуємо потрібну нам оцінку.

2. Якщо $F = F_1 + F_2$, то
$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f(x)\,dF_1(x) + \int_a^b f(x)\,dF_2(x).$$
Дійсно, досить лише помітити, що справедлива рівність
$$\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F(x_j)-F(x_{j-1})) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F_1(x_j)-F_1(x_{j-1})) + \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F_2(x_j)-F_2(x_{j-1})).$$
Здійснюючи в цій рівності граничний перехід при $d(\tau)\to 0$ отримуємо потрібну рівність.

Зауваження 18.2. *Ми дали означення інтеграла Рімана-Стільтьєса для функції F, яка є неперервна зліва. Насправді це обмеження не є суттєвим і від нього можна відмовитися.*

Теореми Хеллі. Австрійський математик Едуард Хеллі довів ряд важливих теорем. Дві з них стосуються теорії міри і інтеграла.

Перша теорема Хеллі. Під першою теоремою Хеллі розуміють його теорему про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега-Стільтьєса.

Теорема 18.3. *Нехай $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - послідовність в $V[a,b]$, тобто послідовність функцій обмеженої варіації на проміжку $[a,b]$. Нехай послідовність $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ поточково збігається до деякої функції $F:[a,b]\to\mathbb{C}$ і*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} V_a^b[F_n] < \infty.$$

Тоді $F \in V[a,b]$ і для довільної функції $f \in C[a,b]$ виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dF_n(x) = \int_a^b f(x)\,dF(x). \tag{18.1}$$

Доведення. Нехай

$$C := \sup_{n\in\mathbb{N}} V_a^b[F_n].$$

Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ і довільного розбиття $\tau = \{x_j\}_{j=0}^n$ (розбиття проміжку $[a,b]$) маємо, що

$$\sum_{j=1}^m |F_n(x_j) - F_n(x_{j-1})| \le C. \tag{18.2}$$

Переходячи в (18.2) до границі при $n\to\infty$, отримуємо, що

$$\sum_{j=1}^m |F(x_j) - F(x_{j-1})| \le C \tag{18.3}$$

для довільного розбиття τ. А, отже, $F \in V[a,b]$ і $V_a^b[f] \le C$.

Доведемо тепер рівність (18.1). Спочатку покажемо, що вона виконується для кусково постійних функцій f. Нехай f приймає значення α_k на інтервалі $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k),\ k = 1, \ldots, m.$, і точки x_k є точками неперервності функцій F і F_n. Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dF_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} f(x)\,dF_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(F_n(x_k) - F_n(x_{k-1})),$$

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} f(x)\,dF(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(F(x_k) - F(x_{k-1})),$$

З поточкової збіжності послідовності $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dF_n(x) = \int_a^b f(x)\,dF(x).$$

Нехай тепер $f \in C[a, b]$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує кусково постійна функція φ така, що її точки розриву на потрапляють на точки розриву функцій F та F_n і

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3C}, \qquad x \in [a, b].$$

З оцінки інтеграла Лебега-Стільтьєса випливає, що

$$\left|\int_a^b f(x)\,dF_n(x) - \int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x)\right| = \left|\int_a^b (f-\varphi)(x)\,dF_n(x)\right| \le$$
$$\le \sup|f-\varphi|\,V_a^b[F_n] \le \frac{\varepsilon}{3C}C = \frac{\varepsilon}{3}$$

і аналогічно

$$\left|\int_a^b f(x)\,dF(x) - \int_a^b \varphi(x)\,dF(x)\right| = \left|\int_a^b (f-\varphi)(x)\,dF(x)\right| \le$$
$$\le \sup|f-\varphi|\,V_a^b[F] \le \frac{\varepsilon}{3C}C = \frac{\varepsilon}{3}.$$

З доведеного раніше випливає, що існує n_0 таке, що

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x) - \int_a^b \varphi(x)\,dF(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n > n_0.$$

Тому при всіх $n > n_0$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dF_n(x) - \int_a^b f(x)\,dF(x)\right| \le$$

$$\le \left|\int_a^b f(x)\,dF_n(x) - \int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x)\right| +$$

$$+ \left|\int_a^b f(x)\,dF(x) - \int_a^b \varphi(x)\,dF(x)\right| + \left|\int_a^b \varphi(x)\,dF_n(x) - \int_a^b \varphi(x)\,dF(x)\right| < \varepsilon.$$

Тим самим теорема доведена. □

Друга теорема Хеллі.

Теорема 18.4. *Нехай $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - послідовність в $V[a,b]$ і виконані умови:*

(1) $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad V_a^b[F_n] \le C$;

(2) $\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a,b] \quad |F_n(x)| \le M$.

Тоді з послідовності $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовність $(F_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ таку, що поточково збігається до функції $F \in V[a,b]$.

Доведення. Без обмеження загальності теорему досить довести для монотонних функцій. Дійсно, як ми вже знаємо кожну функцію F_n можна подати у вигляді різниці двох неспадних функцій:

$$F_n = G_n - H_n,$$

де $G_n(x) = V_a^x[F_n], \quad H_n := V_a^x[F_n] - F_n$. Оскільки для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$|G_n(x)| \le V_a^b[F_n] \le C, \qquad |H_n(x)| \le |G_n(x)| + |F_n(x)| \le C + M$$

і

$$V_a^b[G_n] = V_a^b[F_n] \le C, \qquad V_a^b[H_n] \le V_a^b[G_n] + V_a^b[F_n] \le 2C,$$

то для послідовностей $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ виконані умови теореми. Якщо теорема вірна для неспадних функцій, то з послідовності $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовность $(G_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, яка поточково збігається, а з послідовності $(H_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовність $(H_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, яка поточково збігається. Тоді підпослідовність

$$F_{m_k} = G_{m_k} + H_{m_k}$$

поточково збігається при $k \to \infty$.

Таким чином будемо вважати, що послідовність $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю неспадних функцій.

Перший крок.

Покажемо, що з послідовності $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовність, яка збігається у всіх раціональних точках. Для цього ми використаємо діагональний метод Кантора. Занумеруємо всі раціональні числа відрізка $[a,b]$ (це можна зробити оскільки їх множина є зліченною), тобто нехай $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q}\cap[a,b]$.

Оскільки числова послідовність $(F_n(r_1))_{n\in\mathbb{N}}$ є обмежена (згідно умов теореми), то можна вибрати таку підпослідовність $(F_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$, що послідовність $(F_n^{(1)}(r_1))_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною. Повторюючи ті ж самі міркування, отримуємо, що з послідовності $(F_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовність $(F_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$, що послідовність $(F_n^{(2)}(r_2))_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною. Продовжуючи цей процес, отримуємо послідовність підпослідовностей $(F_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}, k\in\mathbb{N}$, таких, що:

a) кожна послідовність $(F_n^{(k+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ є підпослідовність послідовності $(F_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$;

b) для кожного $k\in\mathbb{N}$ збігається послідовність $(F_n^{(k)}(r_k))_{n\in\mathbb{N}}$.

Розглянемо тепер діагональну послідовність $(F_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Вона є підпослідовністю кожної підпослідовності $(F_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, а, отже, поточково збігається на множині всіх раціональних чисел проміжка $[a,b]$.

Для зручності введемо позначення

$$\Phi_n = F_n^{(n)}$$

Крок другий.

Покажемо, що послідовність $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається всюди, за винятком зліченної множини точок.

Покладемо за означенням для всіх раціональних $r\in[a,b]$

$$\Phi(r) = \lim_{n\to\infty}\Phi_n(r).$$

Зауважимо, що оскільки функції Φ_n є неспадні, то грінична функція теж є неспадною на множині раціональних $r\in[a,b]$. Продовжимо функцію Φ на весь інтервал (a,b) покладаючи

$$\Phi(x) := \sup\{\Phi(r) \mid r\in\mathbb{Q}\cap[a,b], \quad r<x\}.$$

Очевидно, що так означена функція Φ є монотонно неспадною. Покажемо, що якщо $x^*\in(a,b)$ є точкою неперервності функції Φ, то послідовність $(\Phi_n(x^*))_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною. З неперервності випливає, що для довільного заданого ε існує $\delta>0$ таке, що

$$|\Phi(x^*)-\Phi(x)|<\varepsilon/6, \qquad \text{якщо} \quad |x^*-x|<\delta.$$

Виберемо тепер довільні раціональні точки r' і r'' такі, що

$$x^*-\delta<r'<x^*<r''<x^*-\delta.$$

Оскільки послідовності $(\Phi_n(r'))_{n\in\mathbb{N}}$ і $(\Phi_n(r''))_{n\in\mathbb{N}}$ збігаються, то існує $n_0 \in \mathbb{N}$ тке, що для всіх $n > n_0$

$$|\Phi_n(r') - \Phi(r')| < \varepsilon/6, \qquad |\Phi_n(r'') - \Phi(r'')| < \varepsilon/6.$$

Зауважимо, що

$$|\Phi(r') - \Phi(r'')| = |\Phi(r') - \Phi(x^*) + \Phi(x^*) - \Phi(r'')| \le$$

$$\le |\Phi(r') - \Phi(x^*)| + |\Phi(x^*) - \Phi(r'')| < \frac{2}{6}\varepsilon.$$

Оскільки

$$\Phi_n(r') - \Phi_n(r'') =$$

$$= (\Phi_n(r') - \Phi(r')) + (\Phi(r') - \Phi(r'')) + (\Phi(r'') - \Phi_n(r'')),$$

то

$$|\Phi_n(r') - \Phi_n(r'')| \le \varepsilon/6 + 2\varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \frac{2}{3}\varepsilon.$$

З монотонності функцій F_n випливає, що

$$\Phi_n(r') \le \Phi_n(x^*) \le \Phi_n(r'').$$

Тому

$$|\Phi_n(r') - \Phi_n(x^*)| \le \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Враховуючи, що

$$\Phi(x^*) - \Phi_n(x^*) = (\Phi(x^*) - \Phi(r')) + (\Phi(r') - \Phi_n(r')) + (\Phi_n(r') - \Phi_n(x^*)),$$

отримуємо

$$|\Phi(x^*) - \Phi_n(x^*)| \le$$

$$\le |\Phi(x^*) - \Phi(r')| + |\Phi(r') - \Phi_n(r')| + |\Phi_n(r') - \Phi_n(x^*)| < \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Звідки випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x^*) = \Phi(x^*).$$

Ми показали, що послідовність $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається у всіх точках неперервності функції Φ. Оскільки функція Φ монотонна, то множина її точок розриву не більш як зліченна. Отже, послідовність $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається у всіх точках інтервалу (a, b) за винятком, можливо, зліченної множини точок.

Крок третій.

Ми довели, що з послідовності $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можна вибрати підпослідовність $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, що збігається у всіх точках проміжка $[a, b]$ за винятком, можливо, зліченної множини точок. Використовуючи тепер перший крок, вибираємо з послідовності $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ підпослідовність, яка збігається у всіх точках проміжка $[a, b]$. Теорема доведена. $\square$

19. Лебегові простори.

В даній лекції ми розглянемо простори $L_p(X)$, які також називають лебеговими просторами. Для цього нам спочатку потрібно дати означення нормованого простору.

Нормовані простори Нормований простір отримується в результаті поєднання двох різних структур. А власне, поєднання структури лінійного простору і структури метричного простору.

Означення 19.1. *Нормованим простором X над полем $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) називається лінійний простір X над полем $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) з введеною на ньому нормою, тобто функцією $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$, для якої виконуються наступні три властивості:*

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \qquad \lambda \in \mathbb{C}$;
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Нормований простір є також метричним простором. Метрика в нормованому просторі вводиться за формулою:

$$d(x, y) := \|x - y\|, \qquad x, y \in X.$$

Легко перевірити, що з аксіом норми легко випливають потрібні властивості метрики.

Тепер ми можемо перейти до означення лебегових просторів.

Простір $L_1(X, \mu)$. Нехай (X, Σ, μ) простір з мірою. При цьому ми будемо вважати, що міра є повною (тобто кожна підмножина множини нульової міри є вимірна і має нульову міру.) Розглянемо лінійний простір $L(X, \mu)$ всіх μ-інтегровних за Лебегом функцій. Покладемо за означенням

$$\|f\| := \int_X |f| \, d\mu, \qquad f \in L(X, \mu).$$

З властивостей інтеграла випливає, що для довільних $f, g \in L(X, \mu)$ і $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda f\| := \int_X |\lambda f| \, d\mu = |\lambda| \int_X |f| \, d\mu$$

і
$$\|f+g\| := \int_X |f+g|\,d\mu \le \int_X (|f|+|g|)\,d\mu = \|f\|+\|g\|.$$
Таким чином введена нами функція $L(X,\mu) \ni f \mapsto \|f\|$ буде нормою, якщо з рівності
$$\|f\| = 0$$
випливає, що $f = 0$. Але, це не так. Якщо $\|f\| = 0$, то $\int_X |f|\,d\mu = 0$. Звідки випливає, що $f(x) = 0$ майже скрізь. Отже, введена нами функція не є нормою. З цієї ситуації є природній вихід. Можна домовитися не розрізняти функції, які є μ-еквівалентними, тобто відрізняються між собою на множині міри нуль.

Позначимо через $L_1(X,\mu)$ множину класів, що складаються з μ-еквівалентних функцій простору $L(X,\mu)$, тобто фактор-простір $L(X,\mu)/\sim$. Зауважимо, що $L_1(X,\mu)$ є лінійними простором. Норму задамо формулою
$$\|\hat{f}\| := \int_X |f|\,d\mu, \qquad f \in \hat{f} \in L_1(X,\mu),$$
де f - представник класу $\hat{f}$. Зазначимо, що інтеграли у правій частині не залежать в представника класу. Щоб не ускладнювати міркування можна вважати, що в кожному класі ми вибрали певного представника і всі процедури виконуємо з цим представником. Але, при потребі можемо міняти представників. Це дозволяє нам дивитися на $L_1(X,\mu)$ як на простір функцій.

Зрозуміло, що простір $L_1(X,\mu)$ є вже нормованим. Виявляється, що він є повним. Це є важливою перевагою простору $L_1(X,\mu)$. Повнота простору $L_1(X,\mu)$ означає його повноту як метричного простору з метрикою
$$d(f,g) = \|f-g\| = \int_X |f-g|\,d\mu, \qquad f,g \in L_1(X,\mu).$$

Теорема 19.2. *Простір $L_1(X,\mu)$ є повний.*

Доведення. Щоб довести повноту простору $L_1(X,\mu)$ потрібно довести, що кожна фундаментальна послідовність у цьому просторі є збіжна. Нехай $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна послідовність у просторі $L_1(X,\mu)$. Це означає, що
$$\|f_n - f_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad n,m \to \infty.$$
Щоб довести збіжність фундаментальної послідовності досить довести, що вона містить збіжну підпослідовність. Покажемо як можна отримати таку підпослідовність.

З фундаментальності випливає, що існує натуральне число n_1 таке, що
$$\|f_n - f_m\| \le \frac{1}{2}, \qquad n,m \ge n_1.$$

Далі, існує натуральне число $n_2 > n_1$ таке, що

$$\|f_n - f_m\| \le \frac{1}{2^2}, \qquad n, m \ge n_2.$$

Продовжуючи цей процес, отримуємо строго зростаючу послідовність $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ натуральних чисел, для якої

$$\|f_n - f_m\| \le \frac{1}{2^k}, \qquad n, m \ge n_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо послідовність

$$g_k := f_{n_k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Вона є підпослідовністю послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, причому

$$\|g_{k+1} - g_k\| \le \frac{1}{2^k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що послідовність $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є збіжною.

Розглянемо ряд

$$|g_1(x)| + |g_2(x) - g_1(x)| + \cdots + |g_{n+1}(x) - g_n(x)| + \ldots.$$

За теоремою Леві він збігається майже скрізь на X. Дійсно, послідовність функцій

$$F_n(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|$$

монотонна, тобто $F_{n+1}(x) \ge F_n(x)$ і

$$\int_X F_n\, d\mu = \|g_1\| + \|g_2 - g_1\| + \cdots + \|g_{n+1} - g_n\| \le \|g_1\| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \|g_1\| + 1,$$

тобто

$$\int_X F_n\, d\mu \le \|g_1\| + 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Бачимо, що виконані всі умови теореми Леві. Зі збіжності майже скрізь ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|$$

випливає збіжність майже скрізь ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)).$$

А оскільки

$$g_n(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (g_{k+1}(x) - g_k(x)),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(g_{k+1}(x) - g_k(x)),$$

тобто послідовність $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається майже скрізь до деякої функції g. Ця функція є вимірна за теоремою про поточкову границю вимірних функцій.

Зауважимо, що

$$\int_X |g_n - g_m|\, d\mu = \|g_n - g_m\| \le 2^{-m}, \qquad n > m.$$

Згідно з теоремою Фату в нерівності

$$\int_X |g_n - g_m|\, d\mu \le 2^{-m}, \qquad n > m,$$

можна перейти до границі при $n \to \infty$, тобто функція $(g - g_m)$ є інтегровна і

$$\int_X |g - g_m|\, d\mu \le 2^{-m}, \qquad n > m.$$

Але, якщо функція $(g - g_m)$ є інтегровна, то інтегровною є і функція

$$g_m + (g - g_m) = g.$$

Отже, $g \in L_1(X, \mu)$ і

$$d(g, g_m) = \|g - g_m\| \le 2^{-m} \to 0, \qquad m \to \infty.$$

А це означає, що послідовність $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною у просторі $L_1(X, \mu)$.

Залишається довести, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до g. Використаємо нерівність трикутника:

$$d(f_n, g) = \|f_n - g\| \le \|f_n - g_m\| + \|g_m - g\| \le \|f_n - g_m\| + 2^{-m}.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. З фундаментальності послідовності $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ випливає, що існує n_0 таке, що

$$\|f_n - g_m\| \le \varepsilon/2, \qquad n, m > n_0.$$

Можна також вважати, що $2^{-n_0} < \varepsilon/2$. Тоді

$$d(f_n, g) \le \|f_n - g_m\| + 2^{-m} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \qquad n, m > n_0.$$

А це означає, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до g. $\square$