МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу

Затверджено
на засіданні кафедри теорії функцій
і функціонального аналізу
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 1 від 25.08.2022)

Завідувач кафедри: проф. Скасків О.Б.

____

Силабус з навчальної дисципліни

“Функціональний аналіз та теорія міри”,

що викладається в межах ОПП *“Комп’ютерна алгебра, криптологія і теорія ігор”, “Комп’ютерний аналіз математичних моделей”, “Математика. Математична економіка та економетрика”, “Середня освіта (Математика)”*

першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів із спеціальностей 111 – Математика та 014 – Середня освіта

Львів 2022

Назва дисципліни	**Функціональний аналіз та теорія міри**
Адреса викладання дисципліни	Львівський національний університет імені Івана Франка м. Львів, вул. Університетська 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультет Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	Галузь знань: 11 Математика і статистика Спеціальність: 111 Математика; Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
Викладачі дисципліни	**Микитюк Ярослав Володимирович**, доцент кафедри теорії функцій і функціонального аналізу **Сущик Наталія Степанівна**, доцент кафедри теорії функцій і функціонального аналізу
Контактна інформація викладачів	yaroslav.mykytyuk@lnu.edu.ua; nataliya.sushchyk@lnu.edu.ua; Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 373. м. Львів, вул. Університетська, 1
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю).
Сторінка курсу	https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/funktsionalnyy-analiz-ta-teoriia-miry-mtm-mto-mta-mtk
Інформація про дисципліну	Дисципліна “Функціональний аналіз та теорія міри” є нормативною дисципліною зі спеціальності 111 Математика для освітніх програм “Комп’ютерна алгебра, криптологія і теорія ігор”, “Комп’ютерний аналіз математичних моделей”, “Математика. Математична економіка та економетрика”, а також зі спеціальності 014 – Середня освіта для освітньої програми “Середня освіта (Математика)”. Вона викладається в 6-му семестрі в обсязі 6-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Курс розроблено таким чином, щоб надати учасникам знання про конструкцію міри Лебега та поняття вимірної функції як необхідних інструментів побудови інтегралів Лебега та Лебега-Стілтьєса, а також про лінійні нормовані простори, лінійні оператори та інтегральні рівняння. Багато понять курсу є складовими інших курсів, зокрема, теорії ймовірностей і статистики. Основну частину курсу займає розгляд практичних і теоретичних задач, які повинні розширити знання про базові поняття з функціонального аналізу та сформувати уміння їх застосовувати.
Мета та цілі дисципліни	Метою вивчення нормативної дисципліни “Функціональний аналіз та теорія міри” є освоєння студентами теоретичних і практичних основ з теорії міри та інтеграла Лебега для їх застосування в теорії ймовірностей та статистики, а також теоретичних і практичних основ з теорії лінійних метричних просторів, лінійних операторів та інтегральних рівнянь.

Література для вивчення дисципліни	1. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз: навч. посібник. Львів : Видавець І. Чижиков, 2014. – 600 с. 2. Лянце В.Е., Кудрик Т.С., Чуйко Г.І. Лекції з функціонального аналізу. – Львів: Вид-во ЛНУ, 2000. – 177 с. 3. Лянце В.Е., Кудрик Т.С., Чуйко Г.І. Лекції з теорії міри й інтеграла Лебега. – Львів: Вид-во ЛНУ, 1999. – 112 с. 4. Сторож О. Г. Задачі з теорії міри та функціонального аналізу: збірник задач. Навч. посібник. Львів : Видавець І. Чижиков, 2011. – 151 с.
Обсяг курсу	Загальний обсяг: 180 годин. Аудиторних занять: 96 год., з них 48 год. лекцій та 48 години лабораторних робіт. Самостійної роботи: 84 год.
Очікувані результати навчання	В результаті вивчення даного курсу студент повинен **Знати:** поняття абстрактної міри та простору з мірою, побудову міри Лебега, поняття вимірної функції, побудову інтеграла Лебега, властивості інтеграла Лебега, основи теорії диференціювання, інтеграл Лебега-Стільтьєса основи теорії метричних та нормованих просторів, принципи функціонального аналізу, основи теорії гільбертових просторів, основи теорії лінійних операторів. **Вміти:** знаходити міру Лебега множин, обчислювати інтеграли Лебега, здійснювати граничний перехід під знаком інтеграла, обчислювати інтеграли Лебега-Стільтьєса, встановлювати збіжність в метричних просторах, встановлювати замкненість та компактність множини, знаходити норму лінійного оператора та функціонала, знаходити обернений та спряжений оператор, знаходити резольвенту та спектр оператора. Після успішного завершення курсу студент має набути такі **загальні компетентності (ЗК)** та **спеціальні (фахові) компетентності (СК):** ЗК-1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу; ЗК-2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях; ЗК-3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності; ЗК-7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями; ЗК-9 Здатність приймати обґрунтовані рішення; СК-1 Здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв’язання; СК-2 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв’язання тієї самої задачі; СК-3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок; СК-4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіомта постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних; СК-8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів,

	і здобути такі **програмні результати навчання (РН):** РН-1 Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці; РН-3 Знати принципи modus ponens (правило виведення логічних висловлювань) та modus tollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень; РН-4 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми; РН-7 Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики; РН-10 Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями; РН-11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей; РН-16 Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.
Ключові слова	Вимірні множини, міра Лебега, вимірні функції, інтеграл Лебега, інтеграл Лебега-Стільтьєса, метричний простір, банахів простір, гільбертів простір, стискуючі відображення, скалярний добуток, ортогональна проекція, лінійний оператор, лінійний функціонал, обернений оператор, спряжений оператор, спектр та резольвента, інтегральні рівняння, компактний оператор.
Формат курсу	Очний, дистанційний Проведення лекцій, практичних робіт і консультацій.

Теми	1. Загальне поняття міри. Системи множин. Простір з мірою. 2. Міра Лебега. Борелівські множини. 3. Поняття вимірної функції та її властивості. 4. Збіжність майже скрізь і за мірою. Теорема Єгорова. 5. Інтеграл Лебега простої функції та його властивості. 6. Інтегровність за Лебегом. Властивості інтеграла Лебега. 7. Абсолютна неперервність та злічена адитивність інтеграла Лебега. 8. Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега. 9. Зв'язок інтеграла Лебега з інтегралом Рімана. 10. Монотонні функції та функції обмеженої варіації. 11. Абсолютно неперервні функції. Похідна неозначеного інтеграла. 12. Інтеграл Лебега-Стільтьєса та Рімана-Стільтьєса. 13. Метричні простори. Нерівності Гельдера і Мінковського. 14. Повнота метричного простору. Принцип вкладених куль. 15. Теорема Бера про категорії. Принцип стискуючих відображень. 16. Компактність в метричних просторах. 17. Лінійні нормовані простори. 18. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Гана-Банаха і теорема Банаха про обернений оператор. 19. Гільбертів простір. Теорема про ортогональну проекцію. 20. Абстрактні ряди Фур'є. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля. 21. Теорема Ріса. Спряжений оператор. 22. Спектр та резольвента лінійного оператора. Класифікація точок спектру. 23. Компактні оператори. Три теореми Фредгольма. 24. Самоспряжені оператори. Теорема Гільберта-Шмідта.
Підсумковий контроль, форма	Комбінований іспит.
Пререквізити	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з математичного аналізу достатніх для сприйняття таких понять як лінійний нормований простір, гільбертів простір, лінійний оператор.
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	Презентації, лекції. Індивідуальні завдання. Самостійне розв’язування навчальних вправ.
Необхідне обладнання	Комп’ютер з можливістю підключення до інтернету
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням: • контрольні роботи: 40% семестрової оцінки; • самостійне конкурсне розв’язування навчальних вправ: 10% семестрової оцінки: • письмова екзаменаційна робота : 30% семестрової оцінки; • екзаменаційна співбесіда : 20% семестрової оцінки; Підсумкова максимальна кількість балів 100. **Письмові роботи:** Очікується, що студенти виконають три письмові роботи під час семестру і одну письмову роботу під час екзамену. **Академічна доброчесність**: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на

	використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману. **Відвідання занять** є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні зайняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та тестових завдань, передбачених курсом. **Література.** Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих. **Політика виставлення балів.** Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнень на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін. Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.
Питання до заліку чи екзамену.	1. Системи множин. Загальне поняття міри. 2. Поняття вимірної множини. 3. Міра Лебега. Борелівські множини. 4. Поняття вимірної функції та її властивості. 5. Еквівалентні функції. 6. Збіжність майже скрізь. Теорема Єгорова. 7. Збіжність за мірою. 8. Інтеграл Лебега простої функції та його властивості. 9. Функції інтегровні за Лебегом. 10. Елементарні властивості інтеграла Лебега. 11. Нерівність Чебишева та наслідок з неї. 12. Абсолютна неперервність інтеграла Лебега. 13. Зліченна адитивність інтеграла Лебега. 14. Теорема про мажоровану збіжність. 15. Теорема про монотонну збіжність. 16. Теорема Фату. 17. Зв'язок інтеграла Лебега та інтеграла Рімана. 18. Інтеграл Лебега на множині нескінченної міри. 19. Монотонні функції та функції обмеженої варіації. 20. Абсолютно неперервні функції. 21. Похідна неозначеного інтеграла Лебега. 22. Інтеграл Лебега-Стільтьєса та Рімана-Стільтьєса. 23. Метричні простори. Приклади. 24. Збіжність в метричному просторі. 25. Неперервні відображення в метричних просторах. 26. Принцип вкладених куль. Теорема Бера про категорії. 27. Принцип стискуючих відображень. 28. Компактність в метричних просторах. 29. Критерій відносної компактності в C[a,b]. 30. Лінійні нормовані простори. Приклади. 31. Гільбертів простір. Приклади.

	32. Нерівність Коші--Буняковського. 33. Неперервність скалярного добутку. 34. Теорема про ортогональну проекцію. 35. Критерій збіжності ортогонального ряду. 36. Абстрактні ряди Фур'є. Нерівність Бесселя. 37. Абстрактні ряди Фур'є. Рівність Парсеваля. 38. Нерівності Гельдера, Юнга і Мінковського. 39. Ряди в нормованих просторах. 40. Лінійні неперервні оператори в нормованих просторах. 41. Лінійні функціонали в нормованих просторах. 42. Теорема Банаха-Штейнгауза. 43. Рівномірна та сильна збіжність лінійних неперервних операторів. 44. Теорема Ріса про вигляд лінійного неперервного функціонала. 45. Обернений оператор. 46. Теорема Банаха про обернений оператор. 47. Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного функціонала. 48. Спряжений оператор. Операція взяття спряженого. 49. Спектр та резольвента лінійного оператора. 50. Класифікація точок спектру. 51. Оператори скінченного рангу. 52. Компактні оператори та їх основні властивості. 53. Три теореми Фредгольма. Альтернатива Фредгольма. 54. Спектр компактного оператора. 55. Самоспряжені оператори. 56. Ізометричні та унітарні оператори 57. Теорема про оператор обмежений знизу. 58. Грані самоспряженого оператора. 59. Спектр самоспряженого оператора. 60. Теорема Гільберта-Шмідта.
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

Схема курсу

Тиждень	Лекції		Практичні заняття		СР К-ть год Л-ра
	Назва теми	К-сть год	Назва теми	К-сть год	
1	**Вступ. Тема 1.** Загальне поняття міри. Системи множин. Простір з мірою.	2	**Тема 1.** Теоретико-множинні співвідношення. Системи множин.	2	5 [1-4]
2	**Тема 2.** Верхня міра та її властивості. Алгебра вимірних множин.	2	**Тема 2**. Елементарні властивості міри Лебега.	2	2 [1-4]

2	**Тема 3.** Лебегове продовження міри. Міра Лебега. Алебра борелівських множин.	2	**Тема 3.** Знаходження міри Лебега множини.	2	3 [1-4]
3	**Тема 4.** Поняття вимірної функції та її властивості.	2	**Тема 4.** Вимірні функції. Борелівські функції	2	5 [1-4]
4	**Тема 5.** Збіжність майже скрізь і за мірою. Теорема Єгорова та Лебега.	2	**Тема 5.** Знаходження інтеграла Лебега від простої функції.	2	2 [1-4]
4	**Тема 6.** Інтеграл Лебега простої функції та його властивості. Загальне означення інтеграла Лебега.	2	**Тема 6.** Знаходження інтеграла Лебега від інтегровної функції.	2	3 [1-4]
5	**Тема 7**. Нерівність Чебишева. Абсолютна неперервність та зліченна адитивність інтеграла Лебега.	2	**Тема 7.** Граничний перехід під інтегралом Лебега.	2	5 [1-4]
6	**Тема 8.** Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.	2	**Тема 8.** Функції обмеженої варіації. Знаходження варіації функції.	2	2 [1-4]
6	**Тема 9.** Монотонні функції та функції обмеженої варіації.	2	**Тема 9.** Абсолютно неперервні функції.	2	3 [1-4]
7	**Тема 10.** Похідна неозначеного інтеграла. Теорема про рівність Ньютона-Лейбніца.	2	**Тема 10.** Інтеграл Стільтьєса.	2	5 [1-4]
8	**Тема 11.** Дійснозначні міри. Похідна Радона-Нікодима. Інтеграли Лебега-Стільтьєса та Рімана-Стільтьєса.	2	**Тема 11.** Знаходження інтеграла Стільтьєса.	2	2 [1-4]
8	**Тема 12.** Теореми Хеллі. Лебегові простори.	2	**Тема 12.** Контрольна робота.	2	3 [1-4]
9	**Тема 13.** Метричні простори. Нерівності Гельдера і Мінковсь-кого. Повнота метричного простору. Принцип вкладених куль.	2	**Тема 13.** Метричні простори.	2	5 [1-4]
10	**Тема 14.** Теорема Бера про категорії. Принцип стискуючих відображень. Компактність.	2	**Тема 14.** Теорема Бера. Принцип стискуючих відображень. Компактність.	2	3 [1-4]
10	**Тема 15.** Нормовані простори.	2	Тема 15. Нормовані простори. Повнота.	2	3 [1-4]
11	**Тема 16.** Лінійні оператори і функціонали в нормованих просторах	2	**Тема 16.** Знаходження норми функціонала.	2	5 [1-4]
12	**Тема 17.** Три принципи функціонального аналізу. Принцип рівномірної обмеженості.	2	**Тема 17.** Знаходження норми оператора.	2	3 [1-4]

12	**Тема 18.** Теорема Гана-Банаха і теорема Банаха про обернений оператор.	2	**Тема 18.** Гільбертові простори.	2	3 [1-4]
13	**Тема 19.** Геометрія гільбертового простору. Теорема про ортогональну проекцію.	2	**Тема 19.** Контрольна робота.	2	5 [1-4]
14	**Тема 20.** Абстрактні ряди Фур'є. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля.	2	**Тема 20.** Знаходження оберненого оператора.	2	3 [1-4]
14	Тема 21. Теорема Ріса. Спряжений оператор.	2	**Тема 21.** Знаходження спряженого оператора.	2	3 [1-4]
15	**Тема 22.** Спектр та резольвента лінійного оператора. Класифікація точок спектру.	2	**Тема 22.** Знаходження власних значень оператора.	2	5 [1-4]
16	**Тема 23.** Компактні оператори. Три теореми Фредгольма.	2	**Тема 23**. Знаходження резольвенти та спектру оператора.	2	3 [1-4]
16	**Тема 24.** Самоспряжені оператори. Теорема Гільберта-Шмідта.	2	**Тема 24.** Контрольна робота.	2	3 [1-4
	Разом	**48**		**48**	**84**