

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Механіко-математичний факультет  
Кафедра механіки



**Затверджено**  
На засіданні кафедри механіки  
механіко-математичного факультету  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 9 від 10.062021р.)

В.о. завідувача кафедри Андрейків О.Є.

**Силабус з навчальної дисципліни  
«Нелінійна теорія пружності»,  
що викладається в межах ОПП (ОПН)  
«Теоретична та прикладна механіка»  
другого (магістерського) рівня вищої освіти для здобувачів з  
спеціальності 113 «Прикладна математика»**

<b>Назва дисципліни</b>	Нелінійна теорія пружності
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська, 1
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Механіко-математичний факультет Кафедра механіки
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	Галузь знань: 11 «Математика і статистика» Спеціальність: 113 «Прикладна математика»
<b>Викладачі дисципліни</b>	доц. Кузь Ігор Степанович
<b>Контактна інформація викладачів</b>	e-mail: <a href="mailto:ihorkuz24@gmail.com">ihorkuz24@gmail.com</a> сторінка викладача: <a href="http://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/kuz-i-s">http://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/kuz-i-s</a> <a href="http://prima.lnu.edu.ua/faculty/mechmat/Departments/Mechanics/lectures/e_Kuz.html">http://prima.lnu.edu.ua/faculty/mechmat/Departments/Mechanics/lectures/e_Kuz.html</a> Місцезнаходження: кафедра механіки (ауд. 148), деканат Механіко-математичного факультету, Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка вул. Університетська, 1
<b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b>	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю). Також можливі онлайн-консультації через Skype або подібні ресурси. Для погодження часу онлайн консультацій слід писати на електронну пошту викладача або дзвонити.
<b>Сторінка дисципліни</b>	<a href="http://new.mmf.lnu.edu.ua/course">http://new.mmf.lnu.edu.ua/course</a>
<b>Інформація про дисципліну</b>	Дисципліна «Нелінійна теорія пружності» є нормативною дисципліною зі спеціальності «Прикладна математика» для освітньої програми «Теоретична та прикладна механіка», яка викладається в 10 семестрі в обсязі 3 кредити (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS)
<b>Коротка анотація дисципліни</b>	Курс «Нелінійна механіка» є одним із основних у забезпеченні спеціалізації в області механіки деформівного твердого тіла (МДТТ), зокрема теорії пружності, пластичності та міцності. Дає систему загальних понять теоретичних підходів до вивчення процесів фізично та геометрично нелінійного деформування пружних середовищ на основі різноманітних мір деформації. Охоплює чотири розділи: теорія деформацій, теорія напружень, особливості нелінійного деформування пружних тіл, головні властивості полімерних матеріалів, еластомери: потенціали та їхні визначальні співвідношення.
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	Метою вивчення нормативної дисципліни «Нелінійна теорія пружності» є ознайомити студентів із основними математичними моделями і засобами вивчення деформування фізично та геометрично нелінійних суцільних середовищ і допомогти засвоїти

	<p>використовувані для цієї мети поняття мір деформації та цілої множини різнотипних тензорів деформування та напружень; продемонструвати приклади використання у теорії пружності фізично та геометрично нелінійних математичних моделей та методів їхньої побудови; викласти основи математичної теорії та дати початкові навички в оперуванні широким колом нових понять та методів сучасної нелінійної механіки.</p> <p>Набуті студентами вміння та навички будуть корисними при написанні дипломних робіт, проходженні обчислювальних практик, проведенні наукових досліджень та подальшій роботі у галузі інженерії.</p>
<p><b>Література для вивчення дисципліни</b></p>	<p style="text-align: center;"><i>Основна література</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності, Львів: Світ, 1994. — 560 с.</li> <li>2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1979.</li> <li>3. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости // М.: Гостехиздат, 1948. – 212 с.</li> <li>4. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости // М.: Наука, 1969. – 336 с.</li> <li>5. Грин А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / Грин А., Адкинс Дж. // М.: Мир, 1965. – 456 с.</li> <li>6. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах // Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1986. – 336 с.</li> <li>7. Lurie A. I., Nonlinear Theory of Elasticity, Paperback: North Holland, 2012. – 632p.</li> <li>8. Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Third Edition. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2004. – 602 p.</li> <li>9. Nonlinear Elasticity: Theory and Applications (London Mathematical Society Lecture Note Series No 282) / Editors Y.B. Fu, R.W. Ogden. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. XI – 525 p</li> <li>10. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости // М.: Наука, 1980. – 512 с.</li> <li>11. Трелоар Л. Введение в науку о полимерах // М.: Мир, 1973. – 238 с.</li> </ol> <p style="text-align: center;"><i>Додаткова література</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Bar-Sinai Y., Librandi G., Bertoldi K., Moshe M. Geometric charges and nonlinear elasticity of two-dimensional elastic metamaterials// Northwestern University, Evanston, 2020. – 10195 – 10202p.</li> <li>2. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел // К.: Наук. думка, 1986. – 512 с.</li> <li>3. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях // К.: Наук. думка, 1973. – 274 с.</li> <li>4. Лурье А.И. Теория упругости // М.: Наука, 1970. – 940 с.</li> </ol>

	<p>5. Труделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред // М.: Мир, 1975. – 592 с.</p> <p>6. Zeidler E. Basic Equations of Nonlinear Elasticity Theory / Nonlinear Functional Analysis and its Applications. IV: Applications to Mathematical Physics, 1988. Springer - Verlag New York, Inc. P. 158 – 232.</p>
<b>Обсяг курсу</b>	64 години аудиторних занять. З них 32 годин лекцій, 32 годин лабораторних робіт та 56 годин самостійної роботи
<b>Очікувані результати навчання</b>	<p>Після завершення цього курсу студент</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- навчиться аналізувати напружено-деформований стан полімерів та найбільш використовуваного класу полімерних структур – нестисливих і стисливих еластомерів – як репрезентативного представника фізично та геометрично нелінійного класу матеріалів;</li> <li>- зрозуміє фізичну суть та математичні підвалини фундаментальних понять нелінійної теорії пружності, що стосуються опису напруженого і деформованого стану тіл з урахуванням фізико-механічної нелінійності природи цих процесів;</li> <li>- буде розуміти важливість врахування під час моделювання перебігу широкого класу процесів нелінійних ефектів та засвоїть методи опису нелінійності процесів деформування матеріалів;</li> <li>- отримає відомості про засоби лінеаризації задач теорії пружності та навиків їхнього використання для забезпечення допустимого рівня точності аналізу під час спрощення математичних моделей.</li> </ul>
<b>Ключові слова</b>	Нелінійне деформування, пружне тіло, математичне моделювання, полімерні матеріали, еластомери, тензори нелінійної механіки.
<b>Формат курсу</b>	Очний, дистанційний
	Проведення лекцій, лабораторних робіт та консультацій.
<b>Теми</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вектор переміщення і швидкості руху точки та зміни поля</li> <li>2. Деформація. Градієнти деформації і переміщень</li> <li>3. Узагальнені тензори деформації та їхні головні значення</li> <li>4. Мала деформація. Відносна зміна об'єму під час деформування.</li> <li>5. Об'ємні та поверхневі сили. Фундаментальна теорема Коші</li> <li>6. Робота зовнішніх зусиль. Спряжені пари тензорів</li> <li>7. Особливості напруженого стану нестисливих матеріалів, матеріалів</li> <li>8. Головні властивості полімерних матеріалів</li> <li>9. Еластомери</li> <li>10. Феноменологічний підхід</li> </ol> <p>Детальнішу інформацію про теми надано у схемі курсу.</p>
<b>Підсумковий</b>	Іспит в кінці семестру

<b>контроль, форма</b>	
<b>Пререквізити</b>	<p>Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- диференціальної геометрії;</li> <li>- тензорного аналізу;</li> <li>- механіки суцільного середовища;</li> <li>- лінійної теорії пружності;</li> </ul>
<b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b>	Презентації, лекції, лабораторні роботи.
<b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b>	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- лабораторні роботи, самостійні: – 40% семестрової оцінки; максимальна кількість балів – 40.</li> <li>- Відвідування – 10% семестрової оцінки; максимальна кількість балів – 10.</li> <li>- Тестова частина екзамену – 25% семестрової оцінки; максимальна кількість балів – 25.</li> <li>- Усна частина екзамену – 25% семестрової оцінки; максимальна кількість балів – 25.</li> </ul> <p>Загалом протягом семестру 100 балів.</p> <p><i>Письмові роботи:</i> Очікується, що студенти виконають дві письмові роботи (два тести з теоретичних і лабораторних завдань).</p> <p><i>Академічна доброчесність:</i> Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними роботами та міркуваннями. Відсутність посилань на джерела, фабрикування результатів, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p><i>Відвідання занять</i> є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції і практичні заняття курсу. Студенти мають інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися усіх строків визначених для виконання усіх видів письмових робіт, передбачених курсом.</p> <p><i>Література:</i> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед</p>

	<p>рекомендованих.</p> <p><i>Політика виставлення балів.</i> Враховуються бали, набрані протягом семестру, лабораторних роботах та бали підсумкового завдання. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях, не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p>
<p><b>Питання до екзамену (чи питання на контрольні роботи)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Вектор переміщення і швидкості руху точки та зміни поля.</li> <li>- Деформація. Градієнти деформації і переміщень.</li> <li>- Тензори деформації Коші – Гріна, Фінгера, Карні – Рейнера, Піоли. Тензор кратності видовжень. Узагальнені тензори деформації та їхні головні значення. Геометричні рівняння. Тензор дисторсії.</li> <li>- Механічний зміст компонент тензора Гріна.</li> <li>- Тензор деформації Альманзі. Індиферентність, інваріантність і об'єктивність тензорів.</li> <li>- Мала деформація. Відносна зміна об'єму під час деформування.</li> <li>- Відносна зміна об'єму під час деформування. Розклад вектора переміщення. Логарифмічні деформації.</li> <li>- Швидкість деформації. Міри деформації.</li> <li>- Об'ємні та поверхневі сили. Фундаментальна теорема Коші.</li> <li>- Тензор напружень. Тензори напружень Піоли. Закони руху Коші.</li> <li>- Робота зовнішніх зусиль. Спряжені пари тензорів.</li> <li>- Закон пружності. Анізотропія та ізотропія матеріалу.</li> <li>- Малі деформації. Стандартні матеріали.</li> <li>- Спряжені пари тензорів пружного ізотропного матеріалу.</li> <li>- Особливості напруженого стану нестисливих матеріалів.</li> <li>- Головні властивості полімерних матеріалів.</li> <li>- Еластомери. Безпосереднє узагальнення закону Гука для еластомерів.</li> <li>- Матеріал Сетха. Матеріал Сен-Венана – Кірхгофа. Матеріал Сіньюоріні. Модель матеріалу Генкі та її узагальнення. Матеріал Мурнагана. Модель матеріалу Чіскіса – Парнера.</li> <li>- Феноменологічний підхід. Потенціал Муні – Рівліна.</li> <li>- Статистичні моделі. Потенціал Трелоара (неогуків), потенціали Бартенєва – Хазановича і Черних – Шубіної.</li> <li>- Стисливість еластомерів та інших матеріалів.</li> <li>- Потенціал Блейтца – Ко та його розвиток. Потенціал Черних для стисливого матеріалу.</li> </ul>
<p><b>Опитування</b></p>	<p>Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.</p>

Схема курсу

Тиж.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності (заняття)	Література. Ресурси в інтернеті	Завдання, год.	Термін виконання
1	<b>Тема 1.</b> Вступ. Рух. Вектор переміщення і швидкості руху точки та зміни поля.	лек.	[1,2]	2	1 тиждень
1	<b>Тема 1.</b> Вектор переміщення і швидкості руху точки та зміни поля	лаб.	[1,2]	2	1 тиждень
2	<b>Тема 2.</b> Деформація. Градієнти деформації і переміщень. Тензори деформації Гріна та Коші.	лек.	[1,2]	2	1 тиждень
2	<b>Тема 2.</b> Деформація. Градієнти деформації і переміщень. Гріна та Коші.	лаб.	[1,2,3]	2	1 тиждень
3	<b>Тема 3.</b> Узагальнені тензори деформації та їхні головні значення. Геометричні рівняння. Тензор дисторсії.	лек.	[1,2,3,4]	2	1 тиждень
3	<b>Тема 3.</b> Тензор кратності видовжень Тензори деформації Гріна та Коші. Тензори деформації Коші – Гріна, Фінгера, Карні – Рейнера, Піоли	лаб.	[1,2,3,4]	2	1 тиждень
4	<b>Тема 4.</b> Індиферентність, інваріантність і об'єктивність тензорів.	лек.	[1,2,3,4]	2	1 тиждень
4	<b>Тема 4.</b> Механічний зміст компонент тензора Гріна. Тензор деформації Альманзі.	лаб.	[1,2,3,4]	2	1 тиждень
5	<b>Тема 5.</b> Мала деформація. Відносна зміна об'єму під час деформування...	лек.	[1–5]	2	1 тиждень
5	<b>Тема 5.</b> Розклад вектора переміщення.	лаб.	[1–5]	2	1 тиждень
6	<b>Тема 6.</b> Об'ємні та поверхневі сили. Фундаментальна	лек.	[1–5]	2	1 тиждень

	теорема Коші. Закони руху Коші.				
6	<b>Тема 6.</b> Тензор напружень. Тензори напружень Піюли.	лаб.	[1–5]	2	1 тиждень
7	<b>Тема 7.</b> Логарифмічні деформації. Швидкість деформації. Міри деформації.	лек.	[1,2,4]	1	1 тиждень
7	Тестовий модуль №1	Самостійна робота		–	–
8	<b>Тема 8.</b> Робота зовнішніх зусиль. Спряжені пари тензорів. Закон пружності. Малі деформації.	лек.	[3–11]	2	1 тиждень
8	<b>Тема 8.</b> Анізотропія та ізотропія матеріалу. Стандартні матеріали. Спряжені пари тензорів пружного ізотропного матеріалу.	лаб.	[3–11]	2	1 тиждень
9	<b>Тема 9.</b> Особливості напруженого стану нестисливих матеріалів, матеріалів, що нерозтягливі у певному напрямі чи у яких відсутнє скошення прямих кутів між двома напрямками.	лек.	[3–11]	2	1 тиждень
9	<b>Тема 9.</b> Особливості напруженого стану нестисливих матеріалів,	лаб.	[3–11]	2	1 тиждень
10	<b>Тема 10.</b> Головні властивості полімерних матеріалів. Еластомери.	лек.	[4–11]	2	1 тиждень
10	<b>Тема 10.</b> Безпосереднє узагальнення закону Гука для еластомерів.	лаб.	[4–11]	2	1 тиждень
11	<b>Тема 11.</b> Модель матеріалу Генкі та її узагальнення. Матеріал Мурнагана. Модель матеріалу Чіскіса – Парнера.	лек.	[4–11]	2	1 тиждень
11	<b>Тема 11.</b> Матеріал Сетха. Матеріал Сен-Венана – Кірхгофа. Матеріал Сіньйоріні.	лаб.	[4–11]	2	1 тиждень
12	<b>Тема 12.</b>	лек.	[4–11]	2	1 тиждень



	Феноменологічний підхід. Потенціал Муні – Рівліна.				
12	<b>Тема 12.</b> Феноменологічний підхід. Потенціал Муні – Рівліна.	лаб.	[4–11]	2	1 тиждень
13	<b>Тема 13.</b> Статистичні моделі. Потенціал Трелоара (неогуків), потенціали Бартенєва – Хазановича і Черних – Шубіної.	лек.	[4–11]	2	1 тиждень
13	<b>Тема 13.</b> Статистичні моделі. Потенціал Трелоара (неогуків), потенціали Бартенєва – Хазановича і Черних – Шубіної.	лаб.	[4–11]	2	1 тиждень
14	<b>Тема 14.</b> Стисливість еластомерів та інших матеріалів.	лек.	[4-11]	2	1 тиждень
14	<b>Тема 14.</b> Обмеження на потенціал стискуваного суцільного еластомера. Основні типи потенціалів стисливих матеріалів	лаб.	[4–11]	1	1 тиждень
15	<b>Тема 15.</b> Потенціал Блейтца – Ко та його розвиток. Потенціал Черних для стисливого матеріалу	лек.	[4–11]	2	1 тиждень
15	<b>Тема 15.</b> Потенціал Блейтца – Ко та його розвиток. Потенціал Черних для стисливого матеріалу	лаб.	[4–11]	2	1 тиждень
16	Тестовий модуль №2	модуль	[4–11]	–	–
16	Проведення іспиту	–	–	–	–
Разом:				56	–