Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу

Ярослав Микитюк, Наталя Сущик

Функціональний аналіз

Конспект лекцій та практичних занять

Львів 2023

Вступ

Функціональний аналіз як самостійна дисципліна почав свій розвиток на початку 20 століття і пережив період бурхливого розвитку у міжвоєнний період (1920-1939 рр.) Цей розвиток значною мірою є результатом активної діяльності львівської математичної школи, яку очолював Стефан Банах. Його монографія "Теорія лінійних операцій", яка була видана в 1932 році у Варшаві французькою мовою, стала першим підручником з функціонального аналізу. В 1948 році вийшов її український переклад під назвою "Курс функціонального аналізу". Він є у нашій факультетській бібліотеці. Треба зазначити, що переклад монографії С.Банаха був зроблений Мироном Зарицьким, який також доповнив переклад новими результатами, що були отримані після 1932 року. Ще один період активного розвитку функціонального аналізу припадає на період від 1960 р. до 1980 р. Теперішній час можна характеризувати як період сталого розвитку. Починаючи з 60-тих років минулого століття функціональний аналіз починає входити в навчальні програми університетів.

Функціональний аналіз є частиною математичного аналізу і з'явився в результаті розвитку ідей класичного математичного аналізу Ньютона і Лейбніца. На відміну від класичного аналізу, який був зосереджений на вивченні властивостей окремих функцій, функціональний аналіз вивчає властивості просторів різної природи, зокрема, властивості функціональних просторів. Поняття функціонального аналізу виявилися зручними, а підходи продуктивними. Тому мова функціонального аналізу стала використовуватися і в інших розділах математики. Наприклад, мова функціонального аналізу активно використовується в теорії ймовірностей, в теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, в теорії функцій.

Наш курс ми почнемо з вивчення основ теорії метричних просторів.

Розділ I. Основні класи просторів

1. Теорія метричних просторів

1.1. Метричні простори. Приклади метричних просторів

Нехай X – деяка непорожня множина і задана функція $d : X \times X \to \mathbb{R}$.

Означення 1.1. *Відображення d називають* ***метрикою (відстанню)****, якщо*

1) $\forall\, x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0, \qquad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(аксіома невід'ємності);*

2) $\forall\, x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$ *(аксіома симетричності);*

3) $\forall\, x, y, z \in X \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(нерівність трикутника).*

Означення 1.2. *Метричним простором ми називаємо пару (X, d), у якій X – непорожня множина, а функція d – метрика.*

Перейдемо до прикладів метричних просторів. Всіх метричних просторів є дуже багато (нескінченна кількість). Але, реально в математиці активно використовується декілька десятків (точніше декілька десятків класів метричних просторів). А що стосується нас, то ми будемо використовувати дуже невеликий набір метричних просторів.

Приклади метричних просторів.

Простір $\mathbb{R}$. Під метричним простором $\mathbb{R}$, як правило розуміють множину дійсних чисел з метрикою $d(x, y) = |x - y|$. Хоча, метрику на множині $\mathbb{R}$ можна ввести і іншими способами. Але, якщо нічого не сказано, то це метрика $d(x, y) = |x - y|$. Перевірка аксіом метричного простору є зовсім проста і випливає з властивостей функції $x \mapsto |x|$.

Простір $\mathbb{R}^n$. Нагадаємо, що елементами множини $\mathbb{R}^n$ є всі впорядковані послідовності $(x_1, \ldots, x_n)$ дійсних чисел $x_j,\ j = 1, ..., n.$. Отже, точкою (елементом) в $\mathbb{R}^n$ є послідовність. Як правило, на $\mathbb{R}^n$ розглядають **евклідову відстань**, тобто

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n.$$

Перевірка перших двох аксіом метрики в даному випадку є елементарною. Але, що стосується нерівності трикутника, то тут виникає проблема. Потрібно знати класичну нерівність, яку називають по-різному. Варіанти: 1) нерівність Коші; 2) нерівність Шварца; 3) нерівність Коші-Шварца; 4) нерівність Буняковського; 5) нерівність Коші-Буняковського. Я буду називати її нерівністю Коші-Буняковського. Вона записується наступним чином:

Нерівність Коші-Буняковського

$$\left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \right)^{1/2}.$$

Простір $\mathbb{C}^n$. Простір $\mathbb{C}^n$ є комплекним аналогом простору $\mathbb{R}^n$. Елементами множини $\mathbb{C}^n$ є всі послідовності $(x_j)_{j=1}^n$ комплексних чисел x_j $(j = 1, .., n)$. Як правило, на $\mathbb{C}^n$ розглядають евклідову відстань:

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n.$$

Нерівність Коші-Буняковського для комплексного випадку

$$\left| \sum_{j=1}^{n} x_j \, \overline{y_j} \right| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Простір $C[a, b]$. В просторі $C[a, b]$ неперервних функцій, які визначені на $[a, b]$, метрику, як правило, вводять за формулою:

$$d(x, y) := \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|, \qquad x, y \in C[a, b].$$

Ця метрика називається **рівномірною метрикою**, оскільки вона породжує рівномірну збіжність.

Перевіримо аксіоми метрики.

1) Нехай $x, y \in C[a, b]$. З рівності $d(x, y) = 0$ випливає, що $|x(t) - y(t)| \le 0$ для всіх $t \in [a, b]$. А це означає, що $x = y$. З іншого боку, якщо $x = y$, то $d(x, y) = 0$.

2) З властивостей модуля випливає, що $|x(t) - y(t)| = |y(t) - x(t)|$. Тому

$$d(x, y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| = \max_{a \le t \le b} |y(t) - x(t)| = d(y, x).$$

3) Нехай $x, y, z \in C[a, b]$. Тоді

$$|x(t) - y(t)| \le |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|, \qquad t \in [a, b].$$

З означення відстані випливає, що для довільних $t \in [a, b]$

$$|x(t) - z(t)| \le d(x, z), \qquad |z(t) - y(t)| \le d(z, y).$$

Тому

$$|x(t) - y(t)| \le d(x, z) + d(z, y).$$

Звідки випливає, що

$$d(x, y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| \le d(x, z) + d(z, y),$$

тобто $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.

Простір ℓ_∞. Через ℓ_∞ позначають простір всіх обмежених комплекснозначних послідовностей, тобто

$$\ell_\infty := \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C}) \quad \text{і} \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < \infty\}.$$

Метрику у просторі ℓ_∞ ми задаємо формулою:

$$d(x, y) := \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - y_j|, \qquad x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Перевірка аксіом така сама, як у випадку простору $C[a,b]$. Подамо доведення лише нерівності трикутника. Воно повторює доведення нерівності трикутника у випадку простору $C[a,b]$. Нехай

$$x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad z = (z_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Оскільки

$$|x_j - y_j| \le |x_j - z_j| + |z_j - y_j|, \qquad j \in \mathbb{N},$$

то

$$|x_j - y_j| \le |x_j - z_j| + |z_j - y_j| \le d(x,z) + d(z,y), \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Тому число $d(x,z) + d(z,y)$ є верхньою гранню для множини $\{|x_j - y_j|\}_{j\in\mathbb{N}}$, а, отже,

$$d(x,y) := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j - y_j| \le d(x,z) + d(z,y).$$

Простір ℓ_1. Через ℓ_1 позначають простір сумовних послідовностей:

$$\ell_1 := \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C}) \quad \text{і} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}.$$

Метрику у просторі ℓ_1 ми задаємо формулою:

$$d(x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Перевіримо лише аксіому трикутника. Перевірка двох перших аксіом є очевидною. Нехай

$$x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad z = (z_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Оскільки

$$|x_j - y_j| \le |x_j - z_j| + |z_j - y_j|, \qquad j \in \mathbb{N},$$

то

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j| \le \sum_{j=1}^{\infty} (|x_j - z_j| + |z_j - y_j|) \le \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - z_j| + \sum_{j=1}^{\infty} |z_j - y_j|,$$

тобто $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

Простори ℓ_p. Для довільного $p \in (1,\infty)$ через ℓ_p позначають простір

$$\ell_p := \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C}) \quad \text{і} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\}.$$

Метрику у просторі ℓ_p ми задаємо формулою:

$$d(x,y) := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Перевірка перших двох аксіом є очевидною. А нерівність трикутника випливає з нерівності Мінковського для послідовностей.

Нерівність Гельдера та Мінковського для послідовностей.

Числа $p, q \in (1, \infty)$, які пов'язані співвідношенням

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

називають **взаємно спряженими показниками**. Якщо $p = 1$, то спяженим до нього показником вважають $q = \infty$.

Нехай p та q – взаємно спряжені показники і $(x_i)_{i=1}^n$ та $(y_i)_{i=1}^n$ – дві довільні послідовності з $\mathbb{R}^n$. Гельдер довів, що справедлива наступна нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i\, y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}. \tag{1.1}$$

Використовуючи нерівність Гельдера, можна довести нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p}, \tag{1.2}$$

яку називають **нерівністю Мінковського**.

З нерівностей (1.1), (1.2) можна отримати нерівності Гельдера та Мінковського для нескінченних послідовностей.

Нехай p і q пара взаємно спряжених показників і $(x_j)_{j=1}^{\infty}, y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$ - довільні числові послідовності. Припустимо, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q < \infty.$$

Тоді ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ абсолютно збіжний і

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \right| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{1/q}. \tag{1.3}$$

Ця нерівність називається **нерівністю Гельдера для послідовностей**.

А якщо

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p < \infty,$$

тоді ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p$ збігається і справедлива нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{1/p}, \tag{1.4}$$

яку називають нерівністю Мінковського для послідовностей.

Доведемо, наприклад, нерівність (1.3).

З нерівності Гельдера для скінченних послідовностей випливає, що для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i\, y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

Звідси очевидно отримуємо, що

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i\, y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{1/q}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

З останньої нерівності випливає, що ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\, y_i$ абсолютно збіжний і

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, y_i\right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i\, y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Простори сумовних функцій $L_p(X)$

Нехай задано простір з мірою $(X, \mathcal{U}, \mu)$. (Тут X – деяка непорожня множина, $\mathcal{U}$ – σ-алгебра підмножин множини X, μ – зліченно-адитивна повна міра, визначена на $\mathcal{U}$.) Зафіксуємо деяку $A \subset X$ – вимірну множину і деяке число p $(1 \le p < \infty)$.

Позначимо $L_p(A)$ (або скорочено L_p) сукупність вимірних дійсних чи комплекснозначних функцій, визначених на цьому просторі, таких що

$$\int_A |f(x)|^p\, d\mu < \infty.$$

У множині L_p функції, які рівні між собою майже скрізь, ототожнюють, тобто множина L_p складається з класів еквівалентних на A функцій:

$$L_p := \{\widehat{f} \mid f \in L_p\}, \qquad \text{де} \quad \widehat{f} := \{g \in L_p \mid g \sim f\} - \quad \text{клас еквівалентних функцій.}$$

Легко переконатися, що L_p є лінійним простором над полем $\mathbb{C}$, якщо операції додавання класів і множення класу на число ввести наступним чином:

$$\widehat{f} + \widehat{g} = \widehat{f+g}, \qquad \lambda\widehat{f} = \widehat{\lambda f}.$$

Простір L_p не є функціональним, бо його елементи є не функції, а класи функцій. Однак, ми будемо з ним працювати як з функціональним простором, вважаючи, що його елементи це функції. Уявимо собі, що ми не помічаємо множини нульової міри. У цьому випадку ми будемо сприймати клас еквівалентних між собою функцій як одну функцію.

Нерівність Гельдера та Мінковського для інтегралів.

Твердження 1.3. *Нехай $p > 1$ і p та q – взаємно спряжені показники. Тоді для довільних $f, g \in L_p$ справедлива наступна* ***нерівність Гельдера для інтегралів****:*

$$\int_A |f(x)g(x)|\, d\mu \le \left(\int_A |f(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_A |g(x)|^q\, d\mu\right)^{1/q}. \tag{1.5}$$

Зауважимо, що при $p = 2$ нерівність Гельдера перетворюється в нерівність Коші–Буняковського:

$$\left|\int_A f(x)g(x)\, d\mu\right| \le \sqrt{\int_A |f(x)|^2\, d\mu}\sqrt{\int_A |g(x)|^2\, d\mu}. \tag{1.6}$$

Твердження 1.4. *Нехай $p \geq 1$. Тоді для довільних $f, g \in L_p$ справедлива наступна* ***нерівність Мінковського для інтегралів****:*

$$\left(\int\limits_A |f(x)+g(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_A |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_A |g(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p}. \tag{1.7}$$

У просторі L_p $(1 \leq p < \infty)$ можна ввести поняття відстані між його елементами наступним чином:

$$d(f,g) = \left(\int_A |f(x)-g(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad f, g \in L_p.$$

Перевіримо всі аксіоми метрики (відстані).

1) $d(f,g) \geq 0$; $d(f,g) = 0$ тоді і тільки тоді, коли класи f та g співпадають (саме тому простір L_p складається не з окремих функцій, а з класів еквівалентних функцій);

   Випливає з властивості інтеграла Лебега

2) $d(f,g) = d(g,f)$;

   Випливає з властивості інтеграла Лебега

3) нехай f, g, h – елементи простору L_p, тоді $d(f,g) \leq d(f,h) + d(f,g)$.

   Нерівність трикутника випливає з нерівності Мінковського

Отже, L_p є метричним простором. Простір L_p прийнято називати простором функцій, які інтегровні з p степенем.

Отож, ми будемо працювати з такими метричними просторами:

1. $X = \mathbb{R}$, $\quad d(x,y) = |x-y|$.
2. $X = \mathbb{R}^n$, $\quad x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ $\quad (x_i, y_i \in \mathbb{R})$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}, \quad d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

3. $X = \mathbb{C}^n$, $\quad x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ $\quad (x_i, y_i \in \mathbb{C})$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|^2}.$$

4. $X = m$ – простір обмежених послідовностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$d(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|, \qquad x, y \in m.$$

5. $X = c$ – простір збіжних послідовностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$d(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|, \qquad x, y \in c.$$

6. $X = c_0$ – простір збіжних до нуля послідовностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$d(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|, \qquad x,y \in c_0.$$

7. $X = l_1, \qquad x = (x_1, ..., x_n, ..) : \quad \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_n| < \infty$

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|, \qquad x,y \in l_1.$$

8. $X = l_2, \qquad x = (x_1, ..., x_n, ..) : \quad \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2}, \qquad x,y \in l_2.$$

9. $X = C[a,b] := \{x = x(t) |\ x(t)-$ неперервна функція на $[a,b]\}$

$$d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|, \qquad x,y \in C[a,b].$$

10. $X = C^1[a,b] := \{x = x(t) |\ x(t)-$ неперервно-диференційовних функція на $[a,b]\}$

$$d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x^{'}(t) - y^{'}(t)|, \qquad x,y \in C^1[a,b].$$

11. $X = \mathfrak{L}(a,b)-$ простір інтегровних за Лебегом функцій на (a,b)

$$d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt, \qquad x,y \in \mathfrak{L}(a,b).$$

12. $X = L_p(a,b)-$ простір вимірних функцій f на (a,b), для яких $\int\limits_a^b |f(x)|^p\, dx < \infty$

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} dt, \qquad f,g \in L_p(a,b).$$

Задачі на перевірку аксіом метрики.

Приклад 1.5. *Чи є метрикою на дійсній прямій* $\mathbb{R}$ *функція* d*, що задана формулою:*

1. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$;
2. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$;
3. $d(x,y) = |\sin x - \sin y|$;
4. $d(x,y) = (x-y)^2$;
5. $d(x,y) = |x-y|^{1/2}$;
6. $d(x,y) = |x+y|$;

7. $d(x,y) = |2x - y|$.

Приклад 1.6. *Чи є метрикою у просторі $\mathbb{R}^n$ функція d, що задана формулою:*

1. $d(x,y) = \max\limits_{1 \le j \le n} |x_j - y_j|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n;$
2. $d(x,y) = \sum\limits_{j=1}^n |x_j - y_j|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n;$
3. $d(x,y) = |x_1 - y_1|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n;$
4. $d(x,y) = \sum\limits_{j=1}^n (x_j - y_j)^2, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n;$
5. $d(x,y) = \min\limits_{1 \le j \le n} |x_j - y_j|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n;$
6. $d(x,y) = \sum\limits_{j=1}^n |x_j^2 - y_j^2|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n;$
7. $d(x,y) = \max\limits_{1 \le j \le n} |x_j + y_j|, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, \quad y = (y_j)_{j=1}^n.$

Приклад 1.7. *Чи є метрикою у просторі $C[0,1]$ функція d, що задана формулою:*

1. $d(f,g) = |f(0) - g(0)|;$
2. $d(f,g) = |f(0) - g(1)|;$
3. $d(f,g) = \max\limits_{0 \le x \le 1/2} |f(x) - g(x)|;$
4. $d(f,g) = \min\limits_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)|;$
5. $d(f,g) = \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)|^2;$
6. $d(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx;$
7. $d(f,g) = |f(0) - g(0)| - \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$

1.2. Збіжність в метричному просторі

Розглянемо таке важливе поняття, як поняття повноти метричного простору.

Означення 1.8. *Послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у метричному просторі (X,d) називається збіжною, якщо*

$$\exists\, x \in X : \quad x_n \longrightarrow x.$$

Означення 1.9.

$$x_n \longrightarrow x \overset{\text{def}}{=} d(x_n, x) \to 0 \quad \text{при} \;\; n \to \infty,$$

тобто

$$x_n \longrightarrow x \overset{\text{def}}{=} \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0 : \quad d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Означення 1.10. *Послідовність* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *у метричному просторі* (X,d) *називається фундаментальною або послідовністю Коші, якщо*

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists n_0\in\mathbb{N}\quad \forall n>n_0\quad \forall m>n_0\quad d(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

Іншими словами, послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *у метричному просторі* (X,d) *називається фундаментальною, якщо*

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m)=0.$$

Кожна збіжна послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у метричному просторі (X,d) є фундаментальна.

Означення 1.11. *Метричний простір* (X,d) *називається повним, якщо кожна фундаментальна послідовність є збіжною.*

Наведемо приклади доведення *неповноти* метричного простору.

Приклад 1.12. *Задамо на множині* $\mathbb{Q}$ *раціональних чисел метрику формулою* $d(x,y)=|x-y|$. *Тоді простір* $(\mathbb{Q},d)$ *є неповним. Дійсно, нехай* r_n *раціональне число, для якого*

$$|\sqrt{2}-r_n|<10^{-n},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Очевидно, що послідовність $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *є фундаментальна. Але, вона не є збіжна, оскільки число* $\sqrt{2}$ *не є раціональним.*

Приклад 1.13. *Задамо на* $C[-1,1]$ *(множині неперервних функцій на відрізку* $[-1,1]$*) інтегральну метрику*

$$d(f,g):=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,dx,\qquad f,g\in C[a,b].$$

Тоді такий метричний простір є неповний.

Розв'язання. Щоб довести неповноту досить знайти фундаментальну послідовність яка не є збіжна. Розглянемо послідовність

$$f_n(x)=\operatorname{arctg} nx,\qquad n\in\mathbb{N},\quad x\in[-1,1].$$

Вона фундаментальна. Дійсно, нехай $n,m\in\mathbb{N}$ і $m\le n$. Оскільки функція f_n та f_m є непарні, то функція $|f_n-f_m|$ є парна. Тому

$$d(f_n,f_m):=\int_{-1}^{1}|f_n(x)-f_m(x)|\,dx=2\int_{0}^{1}|f_n(x)-f_m(x)|\,dx.$$

Функція arctg монотонно зростає на $[0,\infty)$, тому $f_n\ge f_m$, а, отже,

$$d(f_n,f_m)=2\int_0^1|f_n(x)-f_m(x)|\,dx=2\int_0^1 f_n(x)\,dx-2\int_0^1 f_m(x)\,dx=J_n-J_m,$$

де

$$J_k=2\int_0^1 f_k(x)\,dx,\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Оскільки $|\operatorname{arctg} x| \le \pi/2$, то

$$J_k = 2\int\limits_0^1 f_k(x)\,dx \le \pi \int\limits_0^1 dx = \pi.$$

Крім того, послідовність $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ монотонно зростає, бо $f_{k+1} \ge f_k$. Тому згідно теореми Вейєрштраса послідовність $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ збігається. А, отже,

$$\lim_{n,m\to\infty} d(f_n, f_m) = \lim_{n,m\to\infty} (J_n - J_m) = \lim_{n\to\infty} J_n - \lim_{m\to\infty} J_m = 0.$$

Припустимо, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжна в нашому просторі. Тоді існує така функція $f \in C[-1,1]$, що

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^1 |f(x) - f_n(x)|\,dx = 0$$

На кожному проміжку $[\alpha, 1]$ ($\alpha \in (0,1)$) послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до функції $g \equiv \pi/2$. Тому

$$\int\limits_{\alpha}^1 |f(x) - g(x)|\,dx = 0,$$

а, отже, $f(x) = g(x)$ при $x \in [\alpha, 1]$. На кожному проміжку $[-1, -\alpha]$ ($\alpha \in (0,1)$) послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівномірно збігається до функції $g \equiv -\pi/2$. Тому

$$\int\limits_{-1}^{-\alpha} |f(x) - g(x)|\,dx = 0,$$

а, отже, $f(x) = g(x)$ при $x \in [-1, -\alpha]$. З довільності α випливає, що

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2, & \text{якщо } x \in (0,1]; \\ -\pi/2, & \text{якщо } x \in [-1,0). \end{cases}$$

Але, така фунція f має розрив в точці $x = 0$. Суперечність.

Наведемо приклад доведення *повноти* метричного простору.

Приклад 1.14. *Задамо на $C[a,b]$ (множині неперервних функцій на відрізку $[a,b]$) рівномірну метрику*

$$d(f,g) := \max_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)|, \qquad f, g \in C[a,b].$$

Такий метричний простір є повним.

Розв'язання. Дійсно, нехай $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ довільна фундаментальна послідовність в $C[a,b]$. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon \quad d(f_n, f_m) \le \varepsilon. \tag{1.8}$$

Звідки випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon \quad \forall x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon. \tag{1.9}$$

Отже, для кожного $x \in [a,b]$ послідовність $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна в $\mathbb{R}$. Тому вона збіжна (бо простір $\mathbb{R}$ є повний). Покладемо за означенням

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in [a,b].$$

Покажемо, що $f \in C[a,b]$. Перейдемо в (1.9) до границі при $m \to \infty$. Отримаємо, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \quad \forall x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon. \tag{1.10}$$

Але, цей запис означає, що послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рівномірно на $[a,b]$ збігається до функції f. Оскільки рівномірна збіжна послідовність неперервних функцій збігається до неперервної, то $f \in C[a,b]$. Крім того, запис

$$\forall x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

еквівалентний тому, що $d(f_n, f) \le \varepsilon$. Тому (1.10) можна переписати у вигляді

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \quad d(f_n, f) \le \varepsilon.$$

тобто послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до функції f в $C[a,b]$,

Приклад 1.15. *Довести, що простір ℓ_2 з метрикою $d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2}$ є повним.*

Розв'язування. Нехай $(x^{(n)})$ – довільна фундаментальна послідовність в ℓ_2. Це означає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n,m > N \qquad d^2(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon. \qquad (*)$$

Тут $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots)$. Звідси випливає, що за будь-якого $k \in \mathbb{N}$ має місце нерівність

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon,$$

тобто при кожному k послідовність дійсних чисел $(x_k^{(n)})$ фундаментальна в $\mathbb{R}$ і тому за критерієм Коші збіжна в $\mathbb{R}$. Покладемо

$$x_k := \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}.$$

Позначимо через x послідовність $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$, тобто

$$x := (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots).$$

Потрібно довести, що:

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, тобто $x \in \ell_2$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} d(x^{(n)}, x) = 0$.

Справді, з нерівності $(*)$ випливає, що для будь-якого фіксованого M

$$\sum_{k=1}^{M} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon.$$

У цій сумі лише скінченна кількість доданків і можна, зафіксувавши n, перейти до границі при $m \to \infty$. Одержимо

$$\sum_{k=1}^{M} |x_k^{(n)} - x_k|^2 \le \varepsilon.$$

Ця нерівність виконується для будь-якого M. Відновимо нескінченний ряд, перейшовши до границі при $M \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^2 \le \varepsilon. \tag{1.11}$$

із збіжності рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}|^2$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}-x_k|^2$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^2$, тобто перше твердження доведене.

Далі, оскільки ε як завгодно мале, то нерівність (1.11) означає, що

$$\lim_{n\to\infty} d(x^{(n)},x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}-x_k|^2} = 0,$$

тобто $x^{(n)} \to x$ при $n\to\infty$ в метриці ℓ_2.

1.3. Деякі топологічні поняття в метричному просторі

Означення 1.16. *Нехай (X,d) – метричний простір.*

Множину

$$B(x_0,r) := \{x\in X \mid d(x,x_0) < r\}$$

називають ***відкритою кулею*** *в (X,d) з центром $x_0\in X$ і радіусом $r>0$.*

Множину

$$\overline{B}(x_0,r) := \{x\in X \mid d(x,x_0) \le r\}$$

називають ***замкненою кулею*** *в (X,d) з центром $x_0\in X$ і радіусом $r>0$.*

Околом точки x_0 називається довільна множина U, що містить деяку кулю $B(x_0,r)$.

Приклад 1.17. *Чи може куля у метричному просторі містити кулю більшого радіуса?*

Розв'язування. Може. Нехай множина $X=[0,6]$ наділена природною метрикою $d(x,y) = |x-y|$. Тоді

$$B(0,4)=[0,4), \quad B(2,3)=[0,5),$$

а отже, $B(0,4)\subset B(2,3)$, тобто куля радіуса 4 міститься у кулі радіуса 3.

Нехай E – довільна множина метричного простору (X,d). Проведемо класифікацію точок такої множини.

Означення 1.18. *Точка x_0 називається* ***внутрішньою точкою*** *множини E, якщо існує такий окіл цієї точки, який міститься в E, тобто*

$$\exists\, r>0:\ B(x_0,r)\subset E.$$

Множину всіх відкритих точок множини E позначаємо $\operatorname{Int} E$, тобто

$$\operatorname{Int} E := \{x\in E\,|\, x - \text{внутрішня точка}\}.$$

Означення 1.19. *Точка x_0 називається* ***ізольованою точкою*** *множини E, якщо існує такий окіл цієї точки, в якому немає інших точок з множини E, крім точки x_0.*

Зрозуміло, що як ізольована, так і внутрішня точка множини належать цій множині.

Означення 1.20. *Точка x_0 називається* ***точкою дотику*** *множини E, якщо у кожному околі цієї точки є хоч один елемент з множини E, тобто*

$$\forall\, r>0: \quad B(x_0,r)\bigcap E \ne \emptyset.$$

Усі точки множини E є її точками дотику, але можуть існувати точки дотику, які не належать до цієї множини.

Означення 1.21. *Множина усіх точок дотику множини E називається її* ***замиканням*** *і позначається через $\overline{E}$.*

Означення 1.22. *Точка x_0 називається* ***граничною точкою*** *множини E, якщо у кожному околі цієї точки є нескінченна кількість елементів множини E, хоч сама точка x_0 не обов'язково повинна належати до E, тобто*

$$\forall\, r > 0 : \quad (B(x_0, r) \backslash \{x_0\}) \bigcap E \neq \emptyset.$$

Очевидно, що кожна гранична точка множини E є її точкою дотику, але не кожна точка дотику є граничною. Крім того,

$$\overline{E} \equiv \; E \bigcup \{x : x - \text{ гранична для } E\}.$$

Точка $a \in X$ називається **границею** послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ метричного простору X (скорочений запис: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ або $x_n \to a$), якщо у кожному околі точки x_0 містяться всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера, тобто

$$\left(a = \lim_{n\to\infty} x_n\right) \quad \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad d(x_n, a) < \varepsilon)\,.$$

Твердження 1.23. *Для того, щоб точка x_0 була граничною точкою множини E, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ різних точок множини E, яка збігається до x_0, тобто*

$$x_0 - \textit{гранична для } E \iff \exists\,(x_n) \subset E \qquad x_n \to x_0.$$

Відкриті і замкнені множини та їх властивості.

Означення 1.24. *Множина E називається замкненою, якщо вона співпадає зі своїм замиканням:*

$$E - \textit{замкнена множина} \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad E = \overline{E}.$$

Властивості замкнених множин.

- Замикання будь-якої множини є замкнена множина.
- У довільному метричному просторі X множини $\emptyset$ та X замкнені. Замкненими у ньому будуть і всі множини зі скінченною кількістю елементів та замкнені кулі цього простору.
- У просторі $\mathbb{R}$ замкненими множинами є, зокрема, будь-які відрізки та об'єднання скінченної кількості відрізків.
- Перетин будь-якої кількості та об'єднання скінченного числа замкнених множин є замкнена множина.
- Об'єднання нескінченної кількості замкнених множин не обов'язково замкнена множина.

Означення 1.25. *Множина E називається відкритою, якщо кожна її точка є внутрішня:*

$$E - \textit{відкрита множина} \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \forall x \in E \quad x \in \operatorname{Int} E.$$

Властивості відкритих множин.

- У довільному метричному просторі $\emptyset$ та X є відкритими.
- Відкритими множинами є і всі відкриті кулі метричного простору.
- А у просторі $\mathbb{R}$ кожна непорожня відкрита множина є об'єднанням скінченної або зліченної кількості інтервалів, які попарно не перетинаються. Звідси, зокрема, випливає, що кожна непорожня відкрита множина на числовій прямій має потужність континууму.
- Для того, щоб множина A була відкрита, необхідно і достатньо, щоб її доповнення $A' := X \setminus A$ було замкненою множиною.
- Об'єднання будь-якої кількості та перетин скінченного числа відкритих множин є відкрита множина.

Сепарабельні метричні простори.

Означення 1.26. *Множина A називається* ***щільною*** *у множині B, якщо*

$$\overline{A} \supset B,$$

і ***всюди щільною*** *у метричному просторі X, якщо*

$$\overline{A} = X.$$

Наприклад, множина раціональних чисел є всюди щільна у просторі $\mathbb{R}$.

Означення 1.27. *Метричні простори, в яких існує зліченна всюди щільна множина, називаються* ***сепарабельними*** *метричними просторами.*

Приклади сепарабельних просторів.

- У просторі $\mathbb{R}$ зліченна всюди щільна множина є множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$, тому простір $\mathbb{R}$ є сепарабельний.
- У просторах $\mathbb{R}^n$ зліченні скрізь щільні множини утворюють елементи $x = (x_j)_{j=1}^n$ з координатами $x_j \in \mathbb{Q}$.
- У просторах $C[a, b]$ такі множини складаються з многочленів із раціональними коефіцієнтами. Тому кожен з цих просторів є сепарабельним.

Але, наприклад, простір ℓ_∞ всіх обмежених дійснозначних (або комплекснозначних) послідовностей з відстанню

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - y_j|, \qquad x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}},$$

не є сепарабельним. Справді, розглянемо у цьому просторі лише послідовності, що складаються з нулів та одиниць. Вони утворюють незліченну множину, рівну за потужністю множині дійсних чисел відрізка $[0, 1]$. Відстань між довільними двома такими послідовностями дорівнює 1. Оточимо кожну точку цієї множини відкритою кулею радіуса $r < 1/2$. Оскільки такі кулі не перетинаються, то у кожній з них має бути принаймні по одному елементу скрізь щільної в ℓ_∞ множини. Отже, жодна всюди щільна множина у цьому просторі не є зліченною.

Розв'язання задач на дану тематику.

Приклад 1.28. *Довести, що множина* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y \leq 2\}$ *є замкненою.*

Розв'язання. Щоб довести це, достатньо показати, що границя кожної збіжної послідовності множини A теж належить A. Нехай $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ збіжна послідовність в A і її границею є (x, y). Тоді послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігаються до x та y відповідно. Оскільки

$$x_n + y_n \leq 2, \quad n \in \mathbb{N},$$

то, здійснюючи граничний перехід при $n \to \infty$, отримуємо, що

$$x + y \leq 2,$$

тобто $(x, y) \in A$. Отже, множина A є замкненою.

Приклад 1.29. *Довести, що множина* $B = \{f \in C[0, 1] \mid \forall\, x \in [0, 1] \quad f(x) \leq 1\}$ *є замкненою.*

Розв'язання. Нехай $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збіжна послідовність множини B і нехай $f \in C[0, 1]$ її границя. Послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до f рівномірно, а отже і поточково. Оскільки для всіх $x \in [0, 1]$

$$f_n(x) \leq 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

то, здійснюючи граничний перехід при $n \to \infty$ в нерівності, отримуємо, що

$$f(x) \leq 1, \quad x \in [0, 1],$$

тобто, множина A є замкненою.

Приклад 1.30. *Довести, що множина* $C = \{f \in C[0, 1] \mid \forall\, x \in [0, 1] \quad f(x) < 1\}$ *не є замкнена.*

Розв'язання. Розглянемо послідовність

$$f_n(x) := 1 - \frac{1}{n}, \quad x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}.$$

Ця послідовність належить множині C і збігається до $f(x) = 1$, яка не належить множині C. Отже, множина C не є замкнена.

Приклад 1.31. *Довести, що множина* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1\}$ *є відкрита.*

Розв'язання. *Перший спосіб.* Функція $f(x, y) = x+y$ є неперервна, а A є прообразом відкритої множини $(-\infty, 1)$ при неперервному відображенні f. Тому A є відкрита.

Другий спосіб. Розглянемо множину

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\},$$

що є доповненням до A. Доведемо, що B є замкнена. Для цього досить показати, що границя кожної збіжної послідовності множини B теж належить B. Нехай $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ збіжна послідовність в $\mathbb{R}^2$ і її границею є (x, y). Тоді послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігаються до x і y відповідно. Оскільки

$$x_n + y_n \geq 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

то, здійснюючи граничний перехід при $n \to \infty$, отримаємо, що

$$x + y \geq 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

тобто $(x, y) \in B$. Отже, множина B є замкнена.

Приклад 1.32. *Довести, що множина* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1\}$ *не є замкнена.*

Розв'язання. Досить знайти в A збіжну послідовність, границя якої не належить A. В нашому випадку це зробити легко. Розглянемо послідовність

$$(1 - 1/n, 0)\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Вона належить A і збігається до точки $(1, 0)$, що не належить A. Отже, A не є замкнена.

Приклад 1.33. *Довести, що множина* $A = \{f \in C[0,1] \mid \forall x \in [0,1] \quad f(x) < 0\}$ *не є замкненою.*

Розв'язання. Розглянемо послідовність

$$f_n(x) := -\frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0,1].$$

Ця послідовність належить множині A і збігається до функції $f \equiv 0$, яка не належить множині A. Отже, множина A не є замкнена.

Задачі на відкритість і замкненість множини.

Приклад 1.34. *Чи є відкритою в* $\mathbb{R}^2$ *множина, що задана формулою:*

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$;
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x < y\}$;
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \le y\}$;
4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;
5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x + y < 1\}$;
6. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, \ \ x \ge 0\}$;
7. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| > 0\}$.

Приклад 1.35. *Чи є замкненою в* $\mathbb{R}^2$ *множина, що задана формулою:*

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{arctg} x \le y\}$;
2. $A = \{(n, n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$;
3. $A = \{(1/n, 1/n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$;
4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = nx, \ n \in \mathbb{N}\}$;
5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x + y < 1\}$;
6. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1, \ \ x \ge 0\}$;
7. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| > 0\}$.

Приклад 1.36. *Чи є замкненою в $C[0,1]$ множина, що задана формулою:*

1. $A = \{f \in C[0,1] \mid |f(0)| > 1\}$;
2. $A = \{f \in C[0,1] \mid \int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0\}$;
3. $A = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = f(1)\}$;
4. $A = \{f \in C[0,1] \mid \forall x \in [0,1] \quad f(x) \le x\}$;
5. $A = \{f \in C[0,1] \mid f(0) \le f(1)\}$;
6. $A = \{f \in C[0,1] \mid \sin f(x) > 0\}$;
7. $A = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx\}$.

1.4. Принцип вкладених куль. Теорема Бера про категорії

Теорема 1.37 (***Принцип вкладених куль***)**.** *Метричний простір (X,d) є повним тоді і тільки тоді, коли кожна послідовність $(\overline{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ замкнених вкладених одна в другу куль $\overline{B}_{n+1} \subset \overline{B}_n$ з радіусами, які прямують до нуля, має непорожній перетин.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай (X,d) є повним метричним простором. Позначимо через x_n центр, а через r_n радіус замкненої кулі $\overline{B}_n$. Оскільки кулі вкладені, то для довільних $n, m \in \mathbb{N}$ таких що $m > n$ маємо
$$d(x_n, x_m) \le r_n.$$
Оскільки $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то послідовність (x_n) є фундаментальною, а отже, і збіжна:
$$\exists\, x := \lim_{n\to\infty} x_n.$$
Очевидно, що точка x є точкою дотику для всіх $\overline{B}_n$. Оскільки кулі замкнені, то $x \in \overline{B}_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, $x \in \cap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n$, тобто перетин є непорожній.

Достатність. Нехай послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною. Тоді
$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_1 \quad d(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2};$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_2 \quad d(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{4};$$
Далі за індукцією будуємо зростаючу послідовність $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ таку що
$$(\forall\, k \in \mathbb{N}) \;\; (\exists\, n_k \in \mathbb{N}) \quad \forall\, n > n_k \quad d(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}.$$
Розглянемо кулі
$$\overline{B}_k := \overline{B}\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$
Ці кулі замнкені і їх радіуси прямують до нуля. Покажемо, що вони є вкладені, тобто $\overline{B}_{k+1} \subset \overline{B}_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Нехай $x \in \overline{B}_{k+1}$. Тоді $d(x_{n_{k+1}}, x) \le \frac{1}{2^k}$. А отже,
$$d(x_{n_k}, x) \le d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}}, x) \le \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Це означає, що $x \in \overline{B}_k$. Отже, ми маємо послідовність замкнених вкладених одна в другу куль, радіуси яких прямують до нуля. Тому існує точка $x_0 \in X$, що належить всім цим кулям. Це означає, що

$$d(x_{n_k}, x_0) \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Отже, послідовність (x_{n_k}) збігається до точки x_0. Таким чином, фундаментальна послідовність (x_n) містить збіжну послідовність, а отже, і сама послідовність (x_n) є збіжною. □

Поповнення метричного простору

Повнота є хорошою властивістю метричного простору. Наш практичний досвід підказує, що об'єкти з хорошими властивостями є в меншості.

Тому постає питання: "Чи можна неповний метричний простір зробити повним шляхом доповнення його новими елементами"

Проілюструємо сказане двома прикладами.

1) Розглянемо метричний простір $X = (0, 1]$ з метрикою $d_X(x, y) = |x - y|$. Цей простір неповний, бо послідовність $x_n := 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, є фундаментальною, але не є збіжною. Однак, якщо ми додамо до простору точку $x_0 = 0$, то простір $Y = [0, 1]$ з метрикою $d_Y(x, y) = |x - y|$ є повним.

2) Метричний простір $X = \mathbb{Q}$ з метрикою $d_X(x, y) = |x - y|$ є неповним. Але, його можна помістити в повний метричний простір $Y = \mathbb{R}$ з метрикою $d_Y(x, y) = |x - y|$.

Зауважимо, що метрика d_Y в обох прикладах є продовженням метрики d_X (формула та сама, але області визначення різні). Таким чином, метрика на вихідному просторі на змінюється. Крім того, в обох прикладах замикання $\bar{X}$ у просторі Y співпадає з Y.

Наведені приклади підказують, яким може бути означення поповнення метричного простору.

Означення 1.38. *Повний метричний простір (Y, d_Y) називається поповненням метричного простору (X, d_X), якщо:*

1) $X \subset Y$ і $\overline{X} = Y$ ($\overline{X}$ - замикання X у просторі Y);

2) для всіх $x, y \in X \quad d_Y(x, y) = d_X(x, y)$.

Проте, означення 1.38 залишає мало свободи. Умова $X \subset Y$ є обтяжлива. Перші серйозні приклади побудови поповнень метричних просторів показали, що, як правило, природа елементів в поповненні відрізняється від природи елементів вихідного простору.

Означення 1.39. *Нехай (X, d_X) і (Y, d_Y) метричні простори. Відображення $J : X \to Y$ називається ізометричним вкладенням X в Y, якщо*

$$\forall x, y \in X \quad d_Y(Jx, Jy) = d_X(x, y).$$

При цьому ізометричне вкладенням J називається ізометрією простору X на Y, якщо $JX = Y$, тобто коли J є сюр'єкцією.

Зауважимо, що ізометричне вкладення є ін'єкцією, а ізометрія є бієкцією. Дійсно, якщо для деяких $x, y \in X \quad Jx = Jy$, то

$$d_X(x, y) = d_Y(Jx, Jy) = 0,$$

тобто $x = y$.

Означення 1.40. *Нехай (X, d_X) і (Y, d_Y) метричні простори. Простори X і Y називається ізометричними, якщо існує ізометрія $J : X \to Y$.*

Ізометричні простори з точки зору теорії метричних просторів є тотожними. Ми просто тим самим елементам дали інші назви.

Враховуючи сказане, ми можемо придати означенню 1.38 наступну більш загальну форму.

Означення 1.41. *Повний метричний простір (Y, d_Y) називається поповненням метричного простору (X, d_X), якщо простір X можна ізометрично і всюди щільно вкласти в Y.*

Теорема про поповнення має дуже просте формулювання.

Теорема 1.42. *Кожний метричний простір можна поповнити, тобто ізометрично і всюди щільно вкласти в повний метричний простір. Поповнення є єдиним з точністю до ізометрії.*

Оскільки доведення теореми є досить довгим і технічно складним, ми обмежимося його ескізом. Ідея доведення належить Георгу Кантору. Власне, він використав цю ідею для обґрунтування теорії дійсного числа. А потім ця ж ідея була використана Хаусдорфом для доведення теореми про поповнення.

В одному з епізодів доведення використовується нерівність, яка називається нерівністю чотирикутника.

Твердження 1.43. *Нехай (X, d) - метричний простір. Для довільних чотирьох точок x, y, x', y' цього простору виконується нерівність*

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y').$$

Доведення. **Довести самостійно.** □

Ескіз доведення теореми про поповнення. Нехай (X, d_X) - метричний простір. Центральне місце у доведенні відіграє конструкція простору (Y, d_Y), який є поповненням простору X.

Позначимо через $\widetilde{X}$ множину всіх фундаментальних послідовностей простору X. Таким чином елемент $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ це є деяка фундаментальна в X послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Введемо на $\widetilde{X}$ псевдометрику $\widetilde{d}$ формулою

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n), \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Псевдометрикою ми називаємо функцію, що має всі властивості метрики, за винятком, першої.

Зауважимо, що існування границі в означенні псевдометрики випливає з нерівності чотирикутника для четвірки x_n, y_n, x_m, y_m :

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Введемо на $\widetilde{X}$ бінарне відношення:

$$\widetilde{x} \sim \widetilde{y} \Leftrightarrow \widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0.$$

Неважко переконатися, що це відношення є відношенням еквавалентності, тобто є рефлексивним, симетричним і транзитивним. Воно (відношення) розбиває $\widetilde{X}$ на класи, які попарно не перетинаються. Множину цих класів позначимо через $\widehat{X}$. Отож, $\widehat{X}$ – всеможливі класи еквівалентних між собою фундаментальних послідовностей.

З огляду на сказане вище можемо на $\widehat{X}$ ввести відстань $\widehat{d}$ за формулою:

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \qquad \widetilde{x} \in \widehat{x}, \quad \widetilde{y} \in \widehat{y}.$$

Виявляється, що $\widehat{d}$ є метрикою.

Побудуємо ізометричне вкладення простору X в простір $\widehat{X}$. Для довільного $x \in X$ через Jx позначимо той клас в $\widehat{X}$, який містить фундаментальну (стаціонарну) послідовність

$$x_n \equiv x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Якщо $x, y \in X$, то

$$\widehat{d}(Jx, Jy) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y).$$

Отже, відображення J є ізометричним вкладенням.

Доведемо, що $\overline{JX} = \widehat{X}$. Зафіксуємо довільне $\widehat{x} \in \widehat{X}$. Візьмемо довільну фундаментальну послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ з класу $\widehat{x}$. Переконаємося, що послідовність $(Jx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до $\widehat{x}$.

Дійсно,

$$\widehat{d}(\widehat{x}, Jx_k) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_k), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Тому

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{d}(\widehat{x}, Jx_k) = \lim_{n,k\to\infty} d(x_n, x_k) = 0,$$

тобто послідовність $(Jx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до $\widehat{x}$. Звідси випливає, що кожна точка $\widehat{x} \in \widehat{X}$ є точкою дотику для множини JX.

Доведемо повноту простору $\widehat{X}$. Нехай $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна послідовність в $\widehat{X}$. Оскільки JX всюди щільне в $\widehat{X}$, то для кожного $\widehat{x}_n$ існує $x_n \in X$ таке, що $\widehat{d}(\widehat{x}_n, Jx_n) < 1/n$. Покажемо, що послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна в X. Дійсно,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = \widehat{d}(Jx_n, Jx_m) \le \widehat{d}(Jx_n, \widehat{x}_n) + \widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}_m) + \widehat{d}(\widehat{x}_m, Jx_m) \le \\ \le \widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}_m) + 1/n + 1/m \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty, \end{aligned}$$

тобто послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна в X. Позначимо через $\widehat{x}$ клас, що містить фундаментальну послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. З доведеного вище випливає, що послідовність $(Jx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до елемента $\widehat{x}$. Оскільки

$$\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}) \le \widehat{d}(\widehat{x}_n, Jx_n) + \widehat{d}(Jx_n, \widehat{x}) \le 1/n + \widehat{d}(Jx_n, \widehat{x}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то послідовність $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до $\widehat{x}$.

Залишається зауважити, що якщо ми маємо два різні поповнення простору X, то вони є ізометричними. □

Теорема Бера про категорії

Розглянемо теорему Бера про категорії.

Історична довідка: Французький математик Рене-Луї Бер (1874-1932) один з творців сучасної теорії функцій. Зокрема, він ввів поняття множин першої і другої категорії, яке використовується як метод доведення теорем існування. Стефан Банах високо цінував роботи Бера.

Означення 1.44. *Множина E в топологічному просторі X називається ніде не щільною, якщо вона не є щільною в жодному околі. Іншими словами, E ніде не щільна в X, якщо її замикання не містить внутрішніх точок, тобто* $\operatorname{Int} \overline{E} = \emptyset$.

Наступне означення належить Беру.

Означення 1.45. *Множина E в топологічному просторі X називається множиною першої категорії, якщо її можна подати як скінченне або зліченне об'єднання ніде не щільних множин. Множина E в топологічному просторі X називається множиною другої категорії, якщо вона не є множиною першої категорії.*

Таким чином, Бер розбив всі підмножини топологічного простору на два класи: на клас малих множин (множини першої категорії) і на клас великих множин (множини другої категорії). Дивно, що така, здавалося проста процедура, стала ефективним методом доведення теорем існування.

Теорема Бера про категорії формулюється наступним чином.

Теорема 1.46. ***(Теорема Бера про категорії)*** *Повний метричний простір є простором другої категорії.*

Доведення. Припустимо, що повний метричний простір (X, d) не є простором другої категорії. Тоді його можна подати як об'єднання $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ зліченного числа ніде не щільних множин, тобто

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \qquad \operatorname{Int} \overline{A}_n = \emptyset.$$

Візьмемо довільну замкнену кулю B_0.

Оскільки A_1 не є щільна в B_0, то в B_0 існує замкнена куля B_1 з радіусом < 1 така, що

$$B_1 \bigcap A_1 = \emptyset.$$

Оскільки A_2 не є щільна в B_1, то в B_1 існує замкнена куля B_2 з радіусом $< \frac{1}{2}$ така, що

$$B_2 \bigcap A_2 = \emptyset.$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ замкнених вкладених куль таку, що

$$B_n \bigcap A_n = \emptyset, \qquad r_n < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Згідно з критерієм повноти перетин $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ є непорожній, тобто містить деяку точку $x \in X$. Але згідно з побудовою точка x не належить жодній множині A_n, а отже, $x \notin X$. Суперечність. □

1.5. Неперервні відображення в метричних просторах

Означення 1.47. *Нехай (X, d_X), (Y, d_Y) – метричні простори, $f : X \to Y, \operatorname{dom} f = X$, $x_0 \in X$.*

Відображення $f : X \to Y$ називається неперервним в точці x_0, якщо

$$(\forall\, \varepsilon > 0) \quad (\exists\, \delta > 0) \quad (\forall\, x \in X) \quad [\ d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\ ].$$

Якщо f є неперерним відображенням у кожній точці простору X, то кажуть, що відображення неперервне на просторі X.

Твердження 1.48. *Відображення $f : X \to Y$ неперервне в точці x_0 тоді і лише тоді коли*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Теорема 1.49. *Нехай (X, d) - метричний простір, а $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дві збіжні послідовності в X, які збігаються до x і y відповідно. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

Доведення. З нерівності чотирикутника маємо, що

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

А це означає, що

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y) \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

□

Теорема 1.50. ***(Критерій неперервності)***
Нехай $f : X \to Y$. Наступні твердження еквівалентні:

1. *Відображення f неперервне на X;*

2. *Прообраз відкритої множини є множина відкрита*

$$G \text{ відкрита в } Y \Longrightarrow f^{-1}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : f(x) \in G\} \text{ є відкритою в } X;$$

3. *Прообраз замкненої множини є множина замкнена*

$$F \text{ замкнена в } Y \Longrightarrow f^{-1}(G) \text{ є замкненою в } X.$$

Означення 1.51. *Відображення $f : X \to Y$ – рівномірно неперервне на просторі X, якщо*

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad (\forall x_1 \in X) \quad (\forall x_2 \in X) \quad [\, d_X(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \,].$$

Приклад 1.52. *Нехай функція $f : X \to Y$ задовольняє умову Ліпшиця:*

$$\exists\, \alpha > 0 : \quad \forall x, y \in X \qquad d_Y(f(x), f(y)) \le \alpha\, d_X(x, y).$$

Тоді це відображення буде рівномірно неперервним (достатньо покласти $\delta := \frac{\varepsilon}{\alpha}$).

Принцип продовження за неперервністю

Означення 1.53. *Нехай X, Y – непорожні множини і функція $f : X \to Y$ має область визначення $\operatorname{dom} f$. Функція $g : X \to Y$ називається продовженням функції f (скорочений запис $f \subset g$), якщо $\operatorname{dom} f \subset \operatorname{dom} g$ і $\forall x \in \operatorname{dom} f \quad f(x) = g(x)$. При цьому, функцію f називають звуженням функції g.*

Принципом продовження за неперервністю називається наступна теорема.

Теорема 1.54. *Нехай (X, d_X) – метричний простір, (Y, d_Y) – повний метричний простір, відображення $f : X \to Y$ - рівномірно неперервне і щільно задане ($\overline{\operatorname{dom} f} = X$). Тоді існує єдина неперервна всюди задана (область визначення її співпадає зі всім X) функція $\widetilde{f} : X \to Y$, яка є продовженням функції f. Більше того, $\widetilde{f}$ є рівномірно неперервною.*

Доведення. **Існування.** Нехай $x \in X$. Оскільки $\overline{\operatorname{dom} f} = X$, то в $\operatorname{dom} f$ існує послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, яка збігається до x. Покажемо, що послідовність $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною в Y.

Дійсно, оскільки $f : X \to Y$ - рівномірно неперервна, то

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta_\varepsilon > 0) \quad (\forall x,\, x' \in \operatorname{dom} f) \quad [\, d_X(x, x') < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon \,].$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і нехай $\delta = \delta_\varepsilon$. Оскільки послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною, то вона є фундаментальною, а отже, існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке що

$$d_X(x_n, x_m) < \delta \qquad \text{для всіх} \quad n, m > n_0.$$

Звідси випливає, що

$$\forall\, n, m > n_0 \qquad d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

Це означає, що послідовність $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною в Y. З повноти простору Y випливає, що послідовність $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною в Y, тобто існує границя

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Покажемо, що ця границя не залежить від вибору в $\operatorname{dom} f$ послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, яка збігається до x. Візьмемо в $\operatorname{dom} f$ дві довільні послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, що збігаються до x. З вже доведеного випливає, що існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$. Переконаємося, що вони рівні. Для цього утворимо нову послідовність

$$x'' := (x_1, x'_1, x_2, x'_2, ...).$$

Оскільки послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігаються до x, то послідовність $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ теж збігається до x. З вже доведеного випливає, що границя $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$ існує. Але послідовності $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ та $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ є підпослідовностями послідовності $(f(x''_n))_{n\in\mathbb{N}}$, а отже,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n).$$

Покладемо за означенням

$$\widetilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

де $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – довільна послідовність в $\operatorname{dom} f$, що збігається до x. Функція $\widetilde{f}$ є продовженням функції f. Дійно, якщо $x \in \operatorname{dom} f$, то послідовність

$$x_n \equiv x, \qquad n \in \mathbb{N},$$

збігається до x, а отже,

$$\widetilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x).$$

Покажемо, що $\widetilde{f}$ є рівномірно неперервною. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді існує $\delta > 0$ таке що

$$(\forall\, x,\, x' \in \operatorname{dom} f) \quad [\ d_X(x, x') < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon\ ].$$

Нехай $x,\, x' \in X$ і $d_X(x, x') < \delta$. В $\operatorname{dom} f$ існують послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, що збігаються до x та x' відповідно. З неперервності випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = d(x, x').$$

Оскільки $d_X(x, x') < \delta$, то існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий що

$$d_X(x_n, x'_n) < \delta, \qquad n > n_0.$$

Тоді

$$d_Y(f(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon, \qquad n > n_0.$$

переходячи в останній нерівності до границі при $n \to \infty$, отримаємо, що

$$d_Y(f(x), f(x')) \le \varepsilon, \qquad n > n_0.$$

Тим самим рівномірна неперервність функції $\widetilde{f}$ доведена.

Єдиність. Залишається довести єдиність неперервного продовження. Припустимо існують дві неперервні всюди задані функції $g, h : X \to Y$, які є продовженням функції f. Нехай $x \in X$ і послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ з $\operatorname{dom} f$ збігається до x. Тоді

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(x),$$

тобто $g = h$.

□

1.6. Принцип стискуючих відображень

Означення 1.55. *Нехай* (X, d) *– метричний простір,* $A : X \to X$*.*
A *– стиск* $\overset{\text{def}}{=}$ $\exists\, \alpha \in (0,1): \quad \forall\, x, y \in X \qquad d(Ax, Ay) \le \alpha\, d(x, y)$.

Означення 1.56. *Нехай* $A : X \to X,\ x \in X$*.*
x *– нерухома точка відображення* A*, якщо* $x = Ax$*.*

Принцип стискуючих відображень формулюється наступним чином.

Теорема 1.57. ***(Теорема Банаха про нерухому точку)***
Нехай (X, d) *– повний метричний простір,* $A : X \to X$ *– стиск. Тоді* $\exists!\, x \in X : \quad x = Ax$*.*

Доведення. **Існування.** Нехай $x_0 \in X$. Побудуємо послідовність

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1, ..., \quad x_{n+1} = Ax_n, ...$$

Покажемо, що дана послідовність є фундаментальною. Справді, для будь-якого $p \in \mathbb{N}$:

$$d(x_n, x_{n+p}) \le \alpha d(x_{n-1}, x_{n+p-1}) \le ... \le \alpha^n d(x_0, x_p) \le \alpha^n [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + ... + d(x_{p-1}, x_p)] \le$$

$$\le \alpha^n [1 + \alpha + ... + \alpha^{p-1}] d(x_0, x_1) < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Оскільки послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною, то з повноти простору X буде випливати, що послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною, тобто

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n =: x.$$

Оскільки стискуюче відображення є рівномірно неперервним, то

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Отже, x – нерухома точка.

Єдиність. Нехай $x = Ax, y = Ay$. Тоді

$$d(x, y) = d(Ax, Ay) \le \alpha d(x, y).$$

Звідси випливає, що

$$(1 - \alpha) d(x, y) \le 0.$$

Оскільки $\alpha \in (0, 1)$, то $d(x, y) = 0$, а тому $x = y$. $\square$

Застосування Принципу стискуючих відображень

Нехай $-\infty < a < b < +\infty$, $K(x, y)$ – неперервна функція як функція від двох змінних, $x, y \in [a, b], \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Означення 1.58. *Рівняння*

$$f(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy = g(x), \tag{1.12}$$

називають інтегральним рівнянням Фредгольма 2-го роду.

Теорема 1.59. *Нехай*

$$M \overset{\text{def}}{=} \max_{(x,y)\in[a,b]\times[a,b]} |K(x, y)|, \quad \lambda < \frac{1}{M(b - a)}.$$

Тоді

$$\forall\, g \in C[a, b] \quad \exists!\, f \in C[a, b] : \qquad f \ \text{ є розв'язком рівняння (1.12).}$$

Доведення. Для довільного $\forall f \in C[a,b]$

$$(Af)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy.$$

Легко бачити, що f є розв'язком рівняння (1.12) тоді і лише тоді, коли $f = Af$. Тому досить показати, що A – стиск. Справді, $\forall\, f_1, f_2 \in C[a,b]$

$$|(Af_1)(x) - (Af_2)(x)| \le |\lambda| \int_a^b |K(x,y)|\, |f_1(y) - f_2(y)|\, dy \le |\lambda| \left(\int_a^b |K(x,y)|\ dy \right) \max |f_1(y) - f_2(y)|,$$

тому

$$d(Af_1, Af_2) \le |\lambda| M(b-a)\ d(f_1, f_2) = \alpha d(f_1, f_2), \qquad \text{де } \alpha < 1.$$

□

Приклад 1.60. *За якого значення λ відображення*

$$A : f(x) \mapsto \lambda \int_0^1 xtf(t)dt + \frac{5}{6}x$$

є стиском в просторі $C[0,1]$?

Розв'язування. Нехай $f, g \in C[0,1]$. Оскільки відстань в просторі $C[0,1]$ визначається як $d(f,g) = \max\limits_{0 \le t \le 1} |f(t) - g(t)|$, то

$$d(Af, Ag) = \max_{0 \le x \le 1} |\lambda \int_0^1 xt(f(t) - g(t))dt| \le |\lambda| \max_{0 \le t \le 1} |f(t) - g(t)| \int_0^1 tdt = \frac{|\lambda|}{2} d(f,g).$$

Тому, щоб відображення A було стиском в просторі $C[0,1]$ необхідно і достатньо, щоб $0 < \frac{|\lambda|}{2} < 1$, звідки отримуємо, що $0 < |\lambda| < 2$.

1.9. Задачі по темі

Повнота метричного простору.

1) Чи є повним метричний простір $X = (0, \infty)$ з метрикою $d(x,y) = |x - y|$?
2) Чи є повним метричний простір $X = \mathbb{Z}$ з метрикою $d(x,y) = |x - y|$?
3) Чи є повним метричний простір $X = \{1/n\}$ з метрикою $d(x,y) = |x - y|$?
4) Чи є повним метричний простір $X = (0,1] \times [0,1]$ з метрикою

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \qquad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2))?$$

Рівномірна неперервність.
1) Чи є рівномірно неперервною функція A, що діє у просторі $C[a,b]$ за формулою

$$(Af)(x) = \sin f(x), \qquad x \in [a,b].$$

2) Чи є рівномірно неперервною функція A, що діє у просторі $C[-1,1]$ за формулою

$$(Af)(x) = f(-x), \qquad x \in [-1,1].$$

До теореми Бера.

Розглянемо метричний простір $X = \mathbb{R}$ з метрикою $d(x, y) = |x - y|$.
1) Чи є множина $A = \mathbb{Z}$ ніде не щільною в X?
2) Чи є множина $A = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ ніде не щільною в X?
3) Чи є множина $A = (0, 1)$ ніде не щільною в X?
4) Чи є множина $A = (0, 1)$ всюди щільною в X?
5) Чи є множина $A = \{2^r \mid r \in \mathbb{Q}\}$ всюди щільною в $(0, \infty)$?

До принципу стискуючих відображень.

1) Перевірити, чи буде відображення $f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$ стиском на проміжку $[1, 2]$ з метрикою $d(x, y) = |x - y|$.

2) Перевірити, чи буде відображення $f(x) = \sin(x/2)$ стиском на проміжку $[0, \pi]$ з метрикою $d(x, y) = |x - y|$.

3) Перевірити, чи буде відображення $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$ стиском на інтервалі $[0, \infty)$ з метрикою $d(x, y) = |x - y|$.

4) Чи є стиском у просторі $C[0, 1]$ з рівномірною метрикою відображення:

$$(Af)(x) = \int_0^{1/2} f\left(\frac{x+y}{2}\right) dy, \qquad x \in [0, 1].$$

1.7. Компактність в метричних просторах

Нехай (X, d) – метричний простір.

Означення 1.61. *Система відкритих множин $G = \{G_\alpha \subset X : \alpha \in \mathcal{I}\}$ називається покриттям множини $K \subset X$, якщо*

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha.$$

Означення 1.62. *Система $\widetilde{G} \subset G$ називається підпокриттям G, якщо об'єднання елементів з $\widetilde{G}$ як і раніше містить множину K.*

Означення 1.63. *Метричний простір (X, d) називається компактний, якщо з будь-якого його відкритого покриття можна вибрати скінченне підпокриття, тобто*

$$(X, d) - \text{ *компактний простір* } \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{l} 1)\ \forall\, \alpha \in \mathcal{I}:\ G_\alpha - \ \textit{відкрита множина};\\ 2)\ X = \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha;\\ 3)\ \exists\, \alpha_1, ..., \alpha_{n_k}:\quad X = \bigcup\limits_{i=1}^{n_k} G_{\alpha_i}. \end{array}$$

Означення 1.64. *Множина $K \subset X$ називається компактною (X не обов'язково має бути компактний), якщо з будь-якого його відкритого покриття можна вибрати скінченне підпокриття, тобто*

$$K - \textit{ компактна множина в } X \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{l} 1)\ \forall\, \alpha \in \mathcal{I}:\ G_\alpha - \ \textit{відкрита множина};\\ 2)\ K \subset \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha;\\ 3)\ \exists\, \alpha_1, ..., \alpha_{n_k}:\quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n_k} G_{\alpha_i}. \end{array}$$

Означення 1.65. *Множина $K \subset X$ називається компактною, якщо з будь-якої її послідовності можна виділити підпослідовність збіжну в K, тобто*

$$K \ - \ \text{компактна множина в } X \overset{\text{def}}{=} \ \forall\,(x_n) \subset K \qquad \exists\,(x_{n_k}): \ x_{n_k} \to x_0 \in K.$$

Приклад 1.66. *Нехай $X = \mathbb{R}$, $\quad d(x, y) = |x - y|$, $\quad A = (0, 1)$.*

Розглянемо відкрите покриття множини A:

$$G_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right).$$

Легко бачити, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = (0, 1)$. Отже, це покриття. Але з даного покриття не можна вибрати скінченне підпокриття. Справді, припустимо, що

$$\exists\, k_1, ..., k_m: \quad \bigcup_{i=k_1}^{k_m} G_i = (0, 1)$$

і нехай k_m - найбільше число серед $k_1, ..., k_m$. Тоді $\bigcup_{i=k_1}^{k_m} G_i = G_{k_m} = \left(\frac{1}{k_m}, 1 - \frac{1}{k_m}\right)$. Очевидно, що, наприклад, точку $\frac{1}{k_m+1}$ це підпокриття не покрие. Звідси можна зробити висновок, що множина A не компактна.

Теорема 1.67. ***(Критерій компактності в просторах $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{C}^n$)***

Для того, щоб множина була компактною в просторі $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ необхідно і досить, щоб вона була замкненою та обмеженою.

Означення 1.68. *Нехай (X, d) – метричний простір, $E \subset X$. Тоді*

1) *множина E називається обмеженою в X, якщо вона міститься в декій кулі;*

2) *E називається цілком обмеженою в X, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ її можна покрити скінченною кількістю куль радіуса ε.*

Вправа. 1) Кожна обмежена множина в $\mathbb{R}^n$ є цілком обмеженою.

2) Кожна цілком обмежена множина в метричному просторі є обмеженою. Навпаки невірно. Нижче розглянемо приклад обмеженої, але не цілком обмеженої множини.

Приклад 1.69. *Нехай $X = l_1$, $\quad (x = (x_1, x_2, ...): \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty)$, $\quad d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$. Розглянемо множину*

$$M = \{e_n \in l_1: \ e_n = (0, ...0, 1, 0...)\}, \qquad 1 \text{ стоїть на } \ n - \text{му місці.}$$

Легко бачити, що $M \subset \overline{B}(0, 1)$, $d(e_n, e_m) = 2$. Це означає, що множина є обмеженою, але не цілком обмежена, бо для $\varepsilon < 1$ скінченна кількість куль не покриють множину M.

Теорема 1.70. ***(Критерій компактності в метричному просторі)***

Нехай (X, d) – повний метричний простір і $E \subset X$. Множина E є компактною в просторі X тоді і тільки тоді, коли вона є цілком обмеженою та замкненою.

Означення 1.71. *Множина $K \subset X$ називається передкомпактною, якщо її замикання є компактна множина.*

Твердження 1.72. ***(Теорема Гаусдорфа)***

Нехай (X, d) – повний метричний простір, $M \subset X$. Тоді

$$M \ - \ \text{цілком обмежена множина в } X \iff M \text{ є відносно компактною.}$$

Критерій компактності в просторі $C[a,b]$

Нехай простір $C[a,b]$ наділений рівномірною метрикою.

Означення 1.73. **1)** *Множина M в просторі $C[a,b]$ називається рівномірно обмеженою, якщо*

$$\exists\, C>0 \quad \forall\, x \in M \quad \forall\, t \in [a,b]: \qquad |x(t)| \le C;$$

2) *Множина M в просторі $C[a,b]$ називається одностайно неперервною, якщо*

$$\forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, \delta>0 \quad \forall\, x \in M \quad \forall\, t_1, t_2 \in [a,b]: \qquad |t_1-t_2|<\delta \Longrightarrow |x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon.$$

Зауваження. Множина M обмежена в $C[a,b] \Longleftrightarrow M$ рівномірно обмежена в $C[a,b]$.

Наступна теорема називається теоремою Арцела-Асколі і дає критерій відносної компактності (цілком обмеженості, передкомпактності) множини у просторі $C[a,b]$.

Теорема 1.74. ***(Теорема Арцела-Асколі)***

Множина M в просторі $C[a,b]$ відносно компактна тоді і лише тоді коли вона рівномірно обмежена і одностайно неперервна.

Приклад 1.75. *Чи є передкомпактною множина функцій*

$$M = \{x_n(t) = \sin nt, n \in \mathbb{N}\}$$

у просторі $C[0,1]$?

Розв'язування. Скористаємося теоремою Арцела-Асколі. Очевидно, що ця множина обмежена. Доведемо, що вона не є одностайно неперервною. Справді, якщо $t_1=0$, $t_2=\frac{1}{n}$, $0<\varepsilon<2\sin^2\frac{1}{2}$, то $|t_1-t_2|=\frac{1}{n}$ і $|\sin nt_1-\sin nt_2|>2\sin^2\frac{1}{2}>\varepsilon$. Звідси зрозуміло, що виконується таке твердження:

$$\exists\, \varepsilon>0 \;\; \forall\, \delta>0 \;\; \exists\, t_1, t_2 \in [0,1] \;\; \exists\, x_n \in M: \;\; |t_1-t_2|<\delta \;\wedge\; |x_n(t_1)-x_n(t_2)|>\varepsilon.$$

2. Теорія нормованих просторів

2.1. Лінійні простори

Ми переходимо до нової теми. Нормований простір є більш складною структурою, ніж метричний простір. Нормований простір отримується в результаті поєднання двох різних структур. А власне, поєднання структури лінійного простору і структури метричного простору. Більше того, ці дві структури є узгоджені між собою.

Почнемо з того, що нагадаємо собі означення лінійного простору і деякі прості факти, які стосуються лінійних просторів.

Означення 1.76. *Непорожня множина L називається лінійним (векторним) простором над полем скалярів Φ ($\Phi = \mathbb{R}$ або $\Phi = \mathbb{C}$), якщо на L задана внутрішня операція $L \times L \ni (x, y) \to x + y \in L$, що називається додаванням та зовнішня $\Phi \times L \ni (\lambda, x) \to \lambda x \in L$ – множення на скаляр, при цьому мають виконуватися вісім аксіом:*

1. $x + y = y + x$ *(комутативність додавання);*
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(асоціативність додавання);*
3. $\exists 0 \in L \quad \forall\, x \in L \quad x + 0 = x$ *(існування нуля);*
4. $\forall\, x \in L \quad \exists(-x) \in L \quad x + (-x) = 0$ *(існування протилежного);*
5. $\alpha(\beta) = (\alpha\beta)$ *(асоціативність множення на скаляр);*
6. $\exists \boldsymbol{1} \in L \quad \forall\, x \in L \quad \boldsymbol{1}x = x$ *(існування одиниці);*
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ *(дистрибутивність стосовно векторного множника);*
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *(дистрибутивність стосовно скалярного множника).*

Лінійні простори L та L^* називаються **ізоморфними**, якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність, узгоджену з операціями, тобто

$$x \leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^*, \quad x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \quad \alpha x \leftrightarrow \alpha y^*.$$

Ізоморфні простори можна розглядати як різні реалізації одного і того ж лінійного простору

Приклади лінійних просторів.

1. $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел зі звичайними операціями додавання та множення чисел.
2. $\mathbb{R}^n$ – множина впорядкованих наборів $(x_1, ..., x_n)$ дійсних чисел з покоординатними операціями додавання та множення на число.
3. $\mathbb{C}^n$ – множина впорядкованих наборів $(x_1, ..., x_n)$ комплексних чисел з покоординатними операціями додавання та множення на число.
4. $C[a, b]$ – множина неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій зі звичайними операціями додавання функцій та множення на число.
5. c – множина збіжних послідовностей $x_1, ..., x_n, ..)$ з покоординатними операціями додавання та множення на число.
6. m – множина обмежених послідовностей $(x_1, ..., x_n, ..)$ з покоординатними операціями додавання та множення на число.

7. l_2 – множина послідовностей $(x_1, ..., x_n, ..)$ таких, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, з покоординатними операціями додавання та множення на число.

Основні поняття, пов'язані з лінійними просторами. Нехай $\{x_i\}_{i=1}^n$ – набір (система) елементів лінійного простору L, а $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – набір скалярів. Тоді сума

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

називається **лінійною комбінацією** елементів $x_1, ..., x_n$.

Елементи $x_1, ..., x_n$ лінійного простору L називаються **лінійно незалежними**, якщо рівність $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0$ можлива лише за умови, що всі коефіцієнти $\alpha_1, ..., \alpha_n$ є нулями.

У протилежному випадку таку систему елементів називають **лінійно залежною**. Іншими словами, систему елементів називають лінійно залежною, якщо один з них є лінійною комбінацією решти елементів.

Нескінченна система $\{x_i\}_{i \in I}$ елементів лінійного простору L є лінійно незалежною, якщо кожна її скінченна підсистема є лінійно незалежною.

Якщо у просторі L існує лінійно незалежна система із n елементів, а кожна система із $n+1$ елементів лінійно залежна, то кажуть, що цей простір має розмірність n. Такими, зокрема, є простори $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{C}^n$.

Лінійною оболонкою множини $A \subset L$ (позначення $\operatorname{lin} A$ або $\operatorname{sp} A$) називається множина всіх лінійних комбінацій елементів множини A.

Базою лінійного простору L називається довільна лінійно незалежна система $\{x_j\}_{j \in I}$, для якої

$$\operatorname{lin}\{x_j\}_{j \in I} = L.$$

Всі бази лінійного простору мають одну і ту ж потужність. Якщо база є скінченною, то простір називається скінченновимірним, а число векторів в базі називається вимірністю лінійного простору.

Лінійні підпростори. Непорожня підмножина лінійного простору називається його **підпростором**, якщо вона сама є лінійним простором стосовно визначених в L операцій. Іншими словами, підмножина $F \subset L$ є підпростором лінійного простору L, якщо

$$\forall x, y \in F \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi \qquad (\alpha x + \beta y) \in F.$$

2.2. Нормовані простори

Тепер ми можемо перейти до означення нормованого простору.

Почну з історії. Для цього є вагома причина. Поняття нормованого простору тісно пов'язане зі Львовом. До винайдення поняття нормованого простору є причетними троє математиків: Норберт Вінер, Ганс Ган і Стефан Банах. Але, перші двоє математиків не сформульовали задовільне означення. Вони підійшли близько, проте, це не їх винахід. Натомість, Стефан Банах не тільки дав чітке означення нормованого простору (яким ми користуємося донині), але також у своїй дисертації (1922 рік) вивчив основні властивості нормованих просторів. Дисертацію Банах захищав у Львові у львівському університеті. Тому, нормовані простори можна вважати львівським винаходом.

Означення 1.77. *Нормованим простором X над полем Φ називається лінійний простір X над полем Φ з введеною на ньому нормою, тобто функцією $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, для якої виконуються наступні три властивості:*

1) $\forall\, x \in X \ \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\forall\ \lambda\ \in \Phi\ \ \forall\, x \in X\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$

3) $\forall\, x, y \in X$ $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Зауважимо, що позначення $\|\cdot\|$ виявилося дуже вдалим. Воно подібне на позначення модуля і має властивості подібні на властивостей модуля, але, водночас, позначення норми достатньо відрізняється від позначення модуля. Якщо ми працюємо з різними нормованими просторами, то для розрізнення норм можемо вживати позначення $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ і тд.

На початку лекції було сказано, що нормований простір є результатом поєднання двох різних структури лінійного простору і структури метричного простору. Структуру лінійного простору ми бачимо. А де структура метричного простору?

Метрика в нормованому просторі вводить дуже просто і природно:

$$d(x,y) := \|x-y\|, \qquad x, y \in X.$$

Легко перевірити, що з аксіом норми легко випливають потрібні властивості метрики.

Означення збіжної послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в нормованому просторі X приймає форму:

$$\exists x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \|x - x_n\| < \varepsilon.$$

Відповідно означення того, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ прийме вигляд:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \|x - x_n\| < \varepsilon.$$

2.3. Приклади нормованих просторів

Зараз ми побачимо, що наші приклади метричних просторів, які були на першій лекції, насправді є прикладами нормованих просторів.

Простір $\mathbb{R}$. Задамо на лінійному просторі $\mathbb{R}$ норму

$$\|x\| := |x|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

З властивостей модуля випливає, що ми маємо нормований простір над полем дійсних чисел. При цьому вказана норма породжує стандартну метрику в $\mathbb{R}$.

Простір $\mathbb{R}^n$. Нагадаю, що $\mathbb{R}^n$ є лінійним простором над полем дійсних чисел. Евклідова норма в $\mathbb{R}^n$ задається формулою:

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^{n}.$$

Очевидно, що вона породжує евклідову відстань в $\mathbb{R}^n$.

Перевірка перших двох аксіом норми є елементарною. Що стосується нерівності трикутника, то потрібно використати нерівність Буняковського. Нехай $x = (x_j)_{j=1}^n$ і $y = (y_j)_{j=1}^n$. Тоді

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Згідно нерівності Буняковського

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \le \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{1/2} = \|x\|\|y\|.$$

Тому

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Звідки отримуємо, що $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Простір $\mathbb{C}^n$. Лінійний простір $\mathbb{C}^n$ є комплекним аналогом простору $\mathbb{R}^n$. Евклідова норма задається аналогічною формулою:

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^{n}.$$

Перевірка аксіом така сама.

Простір $C[a,b]$. В лінійному просторі $C[a,b]$ неперервних функцій рівномірна норма задається формулою:

$$\|f\| := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \qquad f \in C[a,b].$$

Перевірка перших двох аксіом є очевидною. Доведення нерівності трикутника повторює відповідні міркування, що були у першій лекції.

Нехай $f, g \in C[a,b]$. Тоді

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|, \qquad x \in [a,b].$$

А, отже,

$$\|f + g\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Простір ℓ_∞. Нагадаю, що через $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ прийнято позначати простір всіх обмежених комплекснозначних послідовностей, тобто

$$\ell_\infty := \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C}) \quad \text{і} \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < \infty\}.$$

Легко перевірити, що ℓ_∞ є лінійним простором над полем комплексних чисел. За додавання елементів ми беремо звичайне додавання послідовностей.

Норму у просторі ℓ_∞ ми задаємо формулою:

$$\|x\| := \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|, \qquad x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Подамо доведення лише нерівності трикутника. Нехай $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Оскільки

$$|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

то

$$\|x + y\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j + y_j| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Простір ℓ_1. Через ℓ_1 ми позначаємо лінійний простір сумовних послідовностей:

$$\ell_1 := \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C}) \quad \text{і} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}.$$

Норму у просторі ℓ_1 ми задаємо формулою:

$$\|x\| := \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|, \qquad x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Перевіримо лише аксіому трикутника. Перевірка двох перших аксіом є очевидною. Нехай

$$x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}, \quad y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Оскільки
$$|x_j + y_j| \le |x_j| + |y_j|, \qquad j \in \mathbb{N},$$
то
$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j| \le \sum_{j=1}^{\infty}(|x_j| + |y_j|) \le \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| + \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| = \|x\| = \|y\|.$$
тобто $\|x + y\| \le \|x\| = \|y\|$.

Простори ℓ_p. Для довільного $p \in (1, \infty)$ через ℓ_p позначають простір
$$\ell_p := \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid (\forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C}) \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\}.$$
ℓ_p утворює лінійний простір над полем комплекних чисел (перевірити самостійно).

Норму у просторі ℓ_p ми задаємо формулою:
$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$
Перевірка перших двох аксіом є очевидною. А нерівність трикутника випливає з нерівності Мінковського для послідовностей.

Лебегівські простори $L_p(X, \mu)$. Нехай $(X, \mathcal{U}, \mu)$ - простір з мірою. Розглянемо $L(X, \mu)$ – лінійний простір інтегровних за Лебегом функцій на X. Позначимо через $L_1(X, \mu)$ множину, що складається з класів
$$\widehat{f} := \{g \in L(X, \mu) \mid g \sim f\}, \qquad f \in L(X, \mu),$$
тобто
$$L_1(X, \mu) := \{\widehat{f} \mid f \in L(X, \mu\}.$$
Введемо в $L_1(X, \mu)$ норму формулою
$$\|\widehat{f}\| := \int_X |f|\, d\mu, \qquad f \in L(X, \mu). \tag{1.13}$$
Легко переконатися, що формула (1.13) задає норму на просторі $L_1(X, \mu)$. Простір $L_1(X, \mu)$ не є функціональним, бо його елементи є не функції, а класи функцій. Однак, ми будемо з ним працювати як з функціональним простором, вважаючи, що його елементи це функції. Уявимо собі, що ми не помічаємо множини нульової міри. У цьому випадку ми будемо сприймати клас еквівалентних між собою функцій як одну функцію.

За аналогією з простором $L_1(X, \mu)$ можна побудувати простори $L_p(X, \mu)$ з $p \in (1, \infty)$. Позначимо через $\widetilde{L}_p(X, \mu)$ множину всіх вимірних комплекснозначних функцій f, для яких $|f|^p$ є інтегровною функцією. Можна довести, що $\widetilde{L}_p(X, \mu)$ є лінійним простором, а формула
$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}$$
визначає квазінорму. Позначимо через $L_p(X, \mu)$ множину класів еквівалентності в просторі $\widetilde{L}_p(X, \mu)$. Приймаючи за норму класу норму його довільного представника ми перетворюємо $L_p(X, \mu)$ на банахів простір.

Неперервність норми. Нехай $(X, \|\cdot\|)$ - нормований простір. З нерівності трикутника випливає нерівність
$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|, \qquad x, y \in X.$$
Дійсно, з нерівності трикутника маємо, що
$$\|x\| = \|y + (x - y)\| \le \|y\| + \|x - y\|, \qquad \|y\| = \|x + (y - x)\| \le \|y\| + \|x - y\|,$$

тобто
$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|.$$
З нерівності
$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|, \qquad x, y \in X,$$
випливає, що функція $X \ni x \mapsto \|x\|$ є рівномірно неперервна, бо задавольняє умову Ліпшиця зі сталою $C = 1$.

Зі сказаного випливає, що справедлива

Теорема 1.78. *Нехай $(X, \|\cdot\|)$ - нормований простір. Якщо послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ збігається у просторі X до x, то*
$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

Означення 1.79. *Нехай $(X, \|\cdot\|_X)$ і $(Y, \|\cdot\|_Y)$ два нормовані простори. Ми скажемо, що відображення J є ізометричним вкладенням X в Y, якщо виконані умови:*

1. $\forall x, y \in X \quad d_Y(Jx, Jy) = d_X(x, y)$;
2. $\forall x, y \in X \quad J(x + y) = Jx + Jy$;
3. $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad J(\lambda x) = \lambda Jx$.

Якщо ізометричне вкладення J є бієкцією (тобто $JX = Y$), то J називається ізометрією простору X на Y.

Якщо існує ізометрія нормованого простору X на нормований простір Y, то ми говоримо, що простір X є ізометричний простору Y (скорочений запис $X \sim Y$).

Вправа 1.80. *Доведіть, що відношення $X \sim Y$, що фігурує в означенні 1.79 є відношенням еквівалентності.*

Означення 1.81. *Повний нормований простір називають банаховим простором.*

Для нормованих просторів справедлива теорема про поповнення. Вона формулюється наступним чином.

Теорема 1.82. *Кожний нормований простір можна поповнити, тобто ізометрично і всюди щільно вкласти в повний нормований простір. Поповнення є єдиним з точністю до ізометрії.*

Зауважимо, що теорема 1.82 не є наслідком теореми про поповнення для метричних просторів, бо у випадку нормованих просторів ізометричне вкладення повинно зберігати операції (повинно бути лінійним). Тому для банахових просторів потрібно передоводити теорему про поповнення. Але, це є неважко. Потрібно на поповненні метричного простору ввести лінійну структуру і узгодити її з нормою.

2.4. Еквівалентні норми

Означення 1.83. *Нехай X - лінійний простір, а $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ дві норми на X.*

1) Норма $\|\cdot\|_1$ називається слабшою за норму $\|\cdot\|_2$ (пишуть $\|\cdot\|_1 \prec \|\cdot\|_2$), а норма $\|\cdot\|_2$ сильнішою за норму $\|\cdot\|_1$ (пишуть $\|\cdot\|_2 \succ \|\cdot\|_1$), якщо
$$\exists C > 0 \quad \forall x \in X \qquad \|x\|_1 \le C\|x\|_2. \tag{1.14}$$

2) Ми скажемо, що норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ є еквівалентними (пишуть $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$), якщо існують додатні сталі C_1 і C_2 такі, що для всіх $x \in X$ виконуються нерівності:
$$\|x\|_1 \le C_1\|x\|_2, \qquad \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1. \tag{1.15}$$

Вправа 1.84. *Довести, що еквівалентність норм є відношенням еквівалентності, тобто є симетричним рефлексивним і транзитивним відношенням.*

Еквівалентні норми породжують на лінійному просторі одну і ту ж топологію. Тому, з точки зору топології, заміна норми на їй еквівалентну суттєво нічого не змінює. Наприклад, ця заміна не впливає на повноту простору чи на неперервність функцій, що діють у цьому просторі.

Теорема 1.85. *Всі норми в скінченновимірному лінійному просторі є еквівалентними.*

Доведення. Нехай X - лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ і $\dim X = n$. Зафіксуємо довільну базу $\{e_j\}_{j=1}^n$ в просторі X. Для довільного $x = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i\, e_i \in X$ покладемо

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |\lambda_i|.$$

Покажемо, що $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$. Оскільки

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^n \lambda_i\, e_i\| \le \sum_{i=1}^n |\lambda_i|\, \|e_i\| \le \max_{1\le i\le n} \|e_i\| \sum_{i=1}^n |\lambda_i|,$$

то $\|\cdot\| \prec \|\cdot\|_1$.

Тепер покажемо, що $\|\cdot\|_1 \prec \|\cdot\|$. Розглянемо функцію

$$f(\lambda) := \|\sum_{i=1}^n \lambda_i\, e_i\|, \qquad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n.$$

І нехай

$$S := \{\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 1\}$$

одинична сфера в $\mathbb{C}^n$. Зауважимо, що функція f є додатною і неперервна на сфері S, а одинична сфера є компактною (оскільки є замкненою та обмеженою в $\mathbb{C}^n$). Тому згідно з теоремою Вейєрштраса f досягає на S свого найбільшого ($M = \max f$) і найменшого ($m = \min f$) значення. Тобто для всіх $\lambda \in S$

$$0 < m \le f(\lambda) \le M.$$

Зауважимо, що для довільного ненульового $\lambda \in \mathbb{C}^n$ вектор $\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|}$ належить сфері S. Тому

$$f(\lambda) = f\left(\frac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^n |\lambda_i|}\right) \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \ge m \sum_{i=1}^n |\lambda_i|,$$

а це рівносильне тому, що

$$\|\sum_{i=1}^n \lambda_i\, e_i\| \ge m \|\sum_{i=1}^n \lambda_i\, e_i\|_1.$$

Звідки випливає еквівалентність норм $\|\cdot\|$ і $\|\cdot\|_1$. Теорема доведена. □

Наслідок 1.86. *Скінченновимірний лінійний підпростір нормованого простору є замкненим.*

Наслідок 1.87. *Скінченновимірний лінійний простір є банаховим.*

Практичні задачі по темі: Лінійні нормовані простори

1. Довести, що лінійний простір $C[a,b]$ всіх неперервних на $[a,b]$ функцій є банаховим простором щодо норми $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

Розв'язування. Перевірка перших двох аксіом норми тривіальна. З'ясуємо лише як перевірити нерівність трикутника. Очевидно, що

$$\forall\, t \in [a,b] \quad |x(t)+y(t)| \le |x(t)| + |y(t)| \le \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |y(t)|.$$

Тому $\|x+y\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)+y(t)| \le \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |y(t)| = \|x\| + \|y\|$.

Доведемо, що $C[a,b]$ з такою нормою є повним простором, тобто доведемо, що кожна фундаменальна послідовність є збіжною. Нехай $(x_n) \subset C[a,b]$ – фундаментальна, тобто

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n,m > N \quad \max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon. \tag{1.16}$$

Очевидно, що (1.16) можна переписати у вигляді

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n,m > N \;\; \forall\, t \in [a,b] \;\; |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon. \tag{1.17}$$

Звідси випливає, що $\forall\, t \in [a,b]$ числова послідовність $(x_n(t))$ є фундаментальною, а тому і збіжною (на підставі повноти $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$). Розглянемо функцію $[a,b] \ni t \mapsto x(t) \overset{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$. Доведемо, що $x \in C[a,b]$ і послідовність (x_n) збігається до x щодо норми, зазначеної в умові. Переходячи до границі при $m \to \infty$ у нерівності (1.17), одержуємо

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n > N \;\; \forall\, t \in [a,b] \;\; |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon. \tag{1.18}$$

Це означає, що послідовність (x_n) збігається до x рівномірно на $[a,b]$. З курсу математичного аналізу відомо, що границя рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій є неперервною функцією. Отже, $x \in C[a,b]$. З (1.18) випливає, що $x_n \to x$. Повнота простору $C[a,b]$ доведена.

2. Нехай X – повний нормований простір, Y – лінійний многовид в X. Довести, що Y – повний нормований простір (щодо норми, взятої з X) тоді і тільки тоді, коли Y – замкнений в X.

Розв'язування. Необхідність. Нехай $x \in \overline{Y}$ (замикання множини Y). Тоді існує послідовність $(x_n) \subset Y$, яка збігається в X до елемента x. Але в такому випадку (x_n) фундаментальна в X, а тому і в Y. З повноти Y випливає, що $x \in Y$. Отож, доведено включення $\overline{Y} \subset Y$, яке рівносильне замкненості Y.

Достатність. Нехай послідовність (x_n) фундаментальна в Y. Тоді (x_n) фундаментальна в X, а отже, збігається до деякого елемента $x \in X$ (на підставі повноти X). Але Y замкнена, а тому $x \in Y$. Отже, (x_n) збігається в Y. Повнота простору Y доведена.

3. Доведемо, що лінійний простір $C^1[-1,1]$ двічі неперервно диференційовних на $[-1,1]$ функцій з нормою $\|x\| = \max\limits_{t\in[-1,1]} |x(t)|$ не є повним простором.

Розв'язування. Враховуючи попередню задачу, достатньо довести, що множина $C^1[-1,1]$ не є замкненою у просторі $C[-1,1]$, наділеному нормою $\|x\| = \max\limits_{t\in[-1,1]} |x(t)|$. Розглянемо в $C^1[-1,1]$ послідовність (x_n), $x_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}$, $n \in \mathbb{N}$. Доведемо, що (x_n) збігається в $C[-1,1]$ до функції $x(t) = |t|$. Справді,

$$\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t| = \frac{1/n^2}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} + |t|} \le \frac{1}{n}, \quad t \in [a,b].$$

Отже, $\|x_n - x\| \le \frac{1}{n}$, звідки $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Але $x \notin C^2[-1,1]$, бо функція $x(t) = |t|$ не є диференційовною в точці $t = 0$. Отож, множина $C^1[-1,1]$ не є замкненою в $C[-1,1]$.

4. Довести, що в просторі $C^1[a,b]$ неперервно диференційовних на $[a,b]$ функцій норми

$$\|x\|_1 = \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)| \qquad \text{і} \qquad \|x\|_2 = |x(a)| + \max_t |x'(t)|$$

еквівалентні.

Розв'язування. З очевидної нерівності $|x(a)| \le \max\limits_t |x(t)|$ одержуємо, що

$$\forall\, x \in C^1[a,b] \qquad \|x\|_2 \le \|x\|_1.$$

Використовуючи рівність $\int\limits_a^t x'(t)\,dt = x(t) - x(a)$, маємо

$$\|x\|_1 = \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)| = \max_t \Big| \int_a^t x'(t)\,dt + x(a)\Big| + \max_t |x'(t)| \le$$

$$\le |x(a)| + \int_a^b |x'(t)|\,dt + \max_t |x'(t)| \le |x(a)| + (b-a+1)\max_t |x'(t)| \le C\|x\|_2,$$

де $C = \max\{1, b-a+1\}$. Отож, зазначені норми еквівалентні.

3. Теорія гільбертових просторів

3.1. Передільбертові простори

Сьогодні ми починаємо вивчати простори зі скалярним добутком.

Означення 1.88. *Нехай X - лінійний простір над полем комплекних чисел.* ***Скалярним добутком*** *у просторі X називається функція*

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto (x \mid y) \in \mathbb{C},$$

яка володіє наступними властивостями:

1. $\forall x, y, z \in X \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (x + y \mid z) = (x \mid z) + (y \mid z), \quad (\alpha x \mid y) = \alpha(x \mid y)$ *(лінійність за першим аргументом);*
2. $\forall x, y \in X \quad (y \mid x) = \overline{(x \mid y)}$ *(ермітова симетричність);*
3. $\forall x \in X \setminus \{0\} \quad (x \mid x) > 0$, *причому* $(x \mid x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ *(додатна визначеність).*

Зауважимо, що з властивостей (1) і (2) випливає, що

$$\forall x, y, z \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (z \mid \alpha x + \bar{\beta} y) = \bar{\alpha}(z \mid x) + \beta(z \mid y).$$

Ця властивість називається півлінійність за другим аргументом.

Тому можна дати також наступне (еквівалентне) і більш лаконічне означення скалярного добутку.

Означення 1.89. *Нехай X - лінійний простір над полем комплексних чисел. Скалярним добутком на просторі X називається півторалінійна ермітово симетрична додатно визначена форма на X.*

Означення 1.90. *Лінійний простір з заданим на ньому скалярним добутком називається простором зі скалярним добутком або* ***передгільбетровим простором****.*

Якщо у дійсному лінійному просторі введено скалярний добуток, то цей простір називається **евклідовим**. Якщо у комплексному лінійному просторі введено скалярний добуток, то цей простір називається **унітарним**.

3.2. Введення норми в передгільбертовому просторі

Теорема 1.91. *Нехай $(\cdot \mid \cdot)$ - скалярний добуток в лінійному просторі X. Тоді формула*

$$\|x\| := \sqrt{(x \mid x)}, \qquad x \in X, \tag{1.19}$$

задає норму на просторі X.

Доведення. Перевіримо аксіоми норми.

1) Якщо $x \neq 0$, то $(x \mid x) > 0$, а, отже, $\|x\| > 0$. Якщо $x = 0$, то

$$(x \mid x) = (0 \cdot x \mid x) = 0 \cdot (x \mid x) = 0,$$

а, отже, $\|x\| = 0$. З другого боку, якщо $\|x\| = 0$, то $(x \mid x) = 0$, а, отже, $x = 0$.

2) Для довільних $x \in X$ і $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x \mid \lambda x) = \lambda\bar{\lambda}(x \mid x) = |\lambda|^2\|x\|^2,$$

тобто $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

3) Для довільних $x, y \in X$

$$(x + y \mid x + y) = (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x \mid y) + \|y\|^2.$$

Нерівність Буняковського дає, що

$$\operatorname{Re}(x \mid y) \leq |(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Тому

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

а, отже, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Теорема доведена. □

З доведеної вище теореми випливає, що скалярний добуток у просторі X породжує норму, що задана формулою (1.19). Надалі, ми будемо завжди вважати, що ця норма є природною нормою простору зі скалярним добутком. Таким чином, простір зі скалярним добутком є окремим випадком нормованого простору. Отже, ми можемо говорити про повноту простору зі скалярним добутком.

Означення 1.92. *Повний простір зі скалярним добутком називається* ***гільбертовим простором****.*

Зауваження 1.93. *З огляду на формулу* (1.19) *нерівність Буняковського для скалярного добутку можна переписати у більш зручній формі:*

$$|(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\|, \qquad x, y \in X. \tag{1.20}$$

Запам'ятаємо також формулу для квадрата норми суми:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x \mid y) + \|y\|^2, \qquad x, y \in X, \tag{1.21}$$

яка є відповідником теореми косинусів.

Геометрія гільбертового простору. За своєю геометрією гільбертів простір є подібний до евклідового простору $\mathbb{R}^2$ або $\mathbb{R}^3$. Ми вже маємо відповідник теореми косинусів (див. формулу (1.21). Від неї ми легко прийдемо до аналогу теореми Піфагора.

Означення 1.94. *Нехай X простір зі скалярним добутком $(\cdot \mid \cdot)$. Вектори $x, y \in X$ називаються* ***ортогональними*** *(скорочений запис $x \perp y$), якщо $(x \mid y) = 0$.*

Теорема Піфагора у просторі зі скалярним добутком. Нехай X - простір зі скалярним добутком. Тоді

$$\forall x, y \in X \qquad x \perp y \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{1.22}$$

Рівність паралелограма. Нехай X - простір зі скалярним добутком. Тоді

$$\forall x, y \in X \qquad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{1.23}$$

Доведення рівностей (1.22) і (1.23) легко отримується з рівності (1.21).

Теорема 1.95. *Нехай X – нормований простір з нормою $\|\cdot\|$. Ця норма породжується деяким скалярним добутком тоді і лише тоді, коли виконується рівність паралелограма.*

Кут між векторами. З нерівності Коші-Буняковського $|(x \mid y)| \le \|x\|\|y\|$ випливає, що для всіх *ненульових* векторів
$$\frac{|(x \mid y)|}{\|x\|\|y\|} \le 1, \qquad -1 \le \frac{(x \mid y)}{\|x\|\|y\|} \le 1.$$

Тому даний вираз можна розглядати як косинус деякого кута φ між векторами x та y:
$$\cos\varphi = \frac{(x \mid y)}{\|x\|\|y\|}.$$

Зокрема, два вектори ортогональні, якщо
$$\cos\varphi = 0.$$

.

Зауваження 1.96. *Нульовий вектор за означенням вважаємо ортогональним до кожного вектора.*

Вправа 1.97. *Нехай $x_1, \ldots, x_n$ набір попарно ортогональних векторів у гільбертовому просторі H. Доведіть, що*
$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$$

3.3. Неперервність скалярного добутку

Теорема 1.98. *Нехай H -гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot \mid \cdot)$. Тоді скалярний добуток є неперервний за сукупністю змінних, тобто, якщо послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у просторі H збігаються до x і y відповідно, то*
$$\lim_{n\to\infty} (x_n \mid y_n) = (x \mid y).$$

Доведення. Нехай x, y, x', y' вектори в H. З властивостей скалярного добутку випливає, що
$$(x \mid y) - (x' \mid y') = (x - x' \mid y) + (x' \mid y - y').$$

Застосовуючи нерівність Буняковського, отримуємо
$$|(x \mid y) - (x' \mid y')| \le \|x - x'\|\,\|y\| + \|x'\|\,\|y - y'\|.$$

Зі сказаного випливає, що для довільних збіжних послідовностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$$0 \le |(x_n|y_n) - (x \mid y)| \le \|x_n - x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n - y\| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

□

3.4. Приклади гільбертових просторів

Простір $\mathbb{C}^n$. Лінійний простір $\mathbb{C}^n$ з евклідовою нормою
$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^{n},$$

є гільбертовим простором. Дійсно, евклідова норма породжена скалярним добутком

$$(x \mid y)_{\mathbb{C}^n} := \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^n, y = (y_j)_{j=1}^n. \tag{1.24}$$

Перевірте виконання аксіом скалярного добутку.

Простір ℓ_2. Через ℓ_2 ми позначаємо лінійний простір квадратично сумовних послідовностей:

$$\ell_2 := \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid \forall j \in \mathbb{N} \quad x_j \in \mathbb{C} \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}.$$

Норма у просторі ℓ_2 задається формулою:

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Легко бачити, що вона породжена скалярним добутком:

$$(x \mid y)_{\ell_2} := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}, \qquad x = (x_j)_{j=1}^\infty, y = (y_j)_{j=1}^\infty. \tag{1.25}$$

Зауважимо, що ряд у формулі (1.25) є абсолютно збіжним. Дійсно, нерівність Буняковського дає, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j \overline{y_j}| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2\right)^{1/2}.$$

Самостійно перевірте виконання аксіом скалярного добутку.

Простір $\ell_2(\mathbb{Z})$. Через $\ell_2(\mathbb{Z})$ ми позначаємо лінійний простір квадратично сумовних двосторонніх послідовностей:

$$\ell_2(\mathbb{Z}) := \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mid \forall j \in \mathbb{Z} \quad x_j \in \mathbb{C} \quad \wedge \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty\}.$$

Простір $\ell_2(\mathbb{Z})$ є аналогом простору ℓ_2. Скалярний добуток в ньому задається формулою:

$$(x \mid y)_{\ell_2(\mathbb{Z})} := \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j \overline{y_j}, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}, y = (y_j)_{j\in\mathbb{Z}}. \tag{1.26}$$

Породжена ним норма задається формулою:

$$\|x\| := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Перевірка аксіом скалярного добутку така ж як і у випадку простору ℓ_2.

3.5. Ортогональні суми підпросторів

Означення 1.99. *Підпростором банахового (гільбертового) простору X ми завжди будемо називати замкнений лінійний підпростір в X.*

Означення 1.100. *Нехай G підмножина гільбертового простору H. Ми скажемо, що вектор $f \in H$ є ортогональний до G ($f \perp G$), якщо*

$$\forall g \in G \quad g \perp f.$$

Множину всіх ортогональних до G векторів ми назвемо ортогональним доповненням до G і позначатимемо її через $G^{\perp}$, тобто

$$G^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in H : \quad \forall\, g \in G \quad (x|g) = 0\}.$$

Вправа 1.101. *Доведіть, що для довільної підмножини G гільбертового простору H множина $G^{\perp}$ є підпростором в H.*

Означення 1.102. ***Алгебраїчною сумою підпросторів*** *G, F лінійного простору X називається множина*

$$G + F := \{g + f \mid g \in G, f \in F\}.$$

Означення 1.103. *Два підпростори G, F гільбертового простору H називаються взаємно* ***ортогональними****, якщо*

$$\forall f \in F \quad \forall g \in G \quad f \perp g.$$

Ортогональною сумою підпросторів G, F називається їх алгебраїчна сума у випадку, коли G, F є взаємно ортогональними.

Аналогічно можна ввести алгебраїчну і ортогональну суму для скінченного числа підпросторів. А власне, множина

$$\{f = \sum_{j=1}^{n} g_j \mid \forall j \;\; g_j \in G_j\}$$

називається алгебраїчною сумою підпросторів $G_j, j = 1, \ldots, n$. Ця сума буде ортогональною, якщо різні простори G_j є взаємно ортогональними. Для ортогональної суми просторів G_j ми використовуємо позначення $\oplus_{j=1}^{n} G_j$.

Вправа 1.104. *Ортогональна сума є прямою сумою підпросторів.*

3.6. Теорема про ортогональну проекцію

Означення 1.105. *Нехай H – передгільбертів простір, G підпростір простору H, $f \in H$. Елемент $g \in H$ називається ортогональною проекцією елемента f на підпростір G (скорочене позначення $g = \mathrm{pr}_G\, f$), якщо*

1) $g \in G$;

2) $f - g \perp G$.

Зауважимо, що на мові скалярного добутку $f - g \perp G$ означає, що $\forall \;\; g' \in G \; (f - g|g') = 0$.

Теорема 1.106. *Нехай G підпростір гільбертового простору H і $f \in H$. Тоді існує єдина ортогональна проекція елемента f на підпростір G.*

Доведення. Нехай $f \in H$ і $d := \inf_{g \in G} \|f - g\|$. З означення точної нижньої грані випливає, що в G існує послідовність $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ така, що

$$\lim_{n \to \infty} \|f - g_n\| = d.$$

Покажемо, що послідовність (g_n) є фундаментальна. Нехай $\lambda \in \mathbb{C}$, $h \in G$. Тоді, оскільки підпростір G є замкненим, $g_n + \lambda h \in G$. А тому

$$\|f - (g_n + \lambda h)\|^2 \geq d^2;$$

тобто

$$\|(f - g_n) - \lambda h\|^2 \geq d^2.$$

Це означає, що

$$((f - g_n) - \lambda h|(f - g_n) - \lambda h) \geq d^2. \tag{1.27}$$

Покладемо

$$d_n := \|f - g_n\|.$$

Тоді нерівність (1.27) буде мати вигляд

$$d_n^2 - \lambda(h|f - g_n)) - \overline{\lambda}((f - g_n)|h) + |\lambda|^2\|h\|^2 \geq d^2,$$

тобто

$$\lambda(h|f - g_n)) + \overline{\lambda}((f - g_n)|h) - |\lambda|^2\|h\|^2 \leq d_n^2 - d^2.$$

Нехай $h \neq 0$. Покладемо

$$\lambda = \frac{(f - g_n|h)}{\|h\|^2}$$

в останню нерівність:

$$|(f - g_n|h)| \leq \|h\|\sqrt{d_n^2 - d^2}. \tag{1.28}$$

Таким чином, для довільного $h \in G$

$$|(g_n - g_m|h)| \leq |((f - g_m) - (f - g_n)|h)| \leq |(f - g_m|h)| + |(f - g_n|h)| \leq \|h\|(\sqrt{d_m^2 - d^2} + \sqrt{d_n^2 - d^2}).$$

Візьмемо $h = g_n - g_m$. Отримаємо оцінку

$$\|g_n - g_m\|^2 \leq (\sqrt{d_m^2 - d^2} + \sqrt{d_n^2 - d^2})\|g_n - g_m\|,$$

тобто

$$\|g_n - g_m\| \leq (\sqrt{d_m^2 - d^2} + \sqrt{d_n^2 - d^2}) \;\; \longrightarrow 0 \;\text{ при }\; n, m \to \infty.$$

Це означає, що послідовність (g_n) є фундаментальна, а, отже, збіжна. Нехай $g = \lim_{n \to \infty} g_n$. Оскільки простір замкнений, то граничний елемент g належить до G.

Покажемо, що $(f - g) \perp G$. Перейшовши в нерівності (1.28) до границі, отримаємо

$$|(f - g|h)| \leq 0 \Longleftrightarrow (f - g|h) = 0 \qquad \forall\, h \in G.$$

Звідси випливає, що $f - g \in G^{\perp}$.

Існування ортогональної проекції доведено. Доведемо єдиність. Припустимо, що існують $g_1, g_2 \in G$ такі, що $(f - g_j) \in G^{\perp}$. Тоді $(g_1 - g_2) \in G^{\perp}$. Отже, вектор $(g_1 - g_2)$ належить одночасно G і $G^{\perp}$, тобто вектор $(g_1 - g_2)$ є ортогональний сам до себе. Це означає, що

$$\|g_1 - g_2\|^2 = 0,$$

тобто $g_1 = g_2$. Єдиність доведена. □

Наслідок 1.107. *Ортогональна проекція g елемента f на підпростір G реалізовує відстань від f до G, тобто*

$$\|f-g\| = \inf_{v\in G}\|f-v\| =: \mathrm{dist}(f,G).$$

Друге формулювання теореми про ортогональну проекцію.

Теорема 1.108. *Нехай G підпростір гільбертового простору H. Тоді $H = G \oplus G^{\perp}$.*

Доведення. Нехай $f \in H$ і $g = \mathrm{pr}_G f$. Тоді $g \in G$ і $(f-g) \in G^{\perp}$. Оскільки

$$f = g + f - g,$$

то $f \in G \oplus G^{\perp}$. Отже, $H = G \oplus G^{\perp}$. □

Обернення теореми про ортогональну проекцію.

Теорема 1.109. *Нехай G та F підпростори гільбертового простору H і $H = G \oplus F$. Тоді $F = G^{\perp}$.*

Доведення. Оскільки $H = G \oplus F$, то $F \perp G$, а, отже $F \subset G^{\perp}$.

Візьмемо довільний вектор $h \in G^{\perp}$. Оскільки $H = G \oplus F$, то h можна подати у вигляді $h = g + f$, де $g \in G$, $f \in F$. Звідки отримуємо, що $g = h - f \in G^{\perp} - F \subset G^{\perp}$, тобто $g \in G \cap G^{\perp}$. Отже, $g = 0$ і $h = f \in F$. А це означає, що $G^{\perp} = F$. □

3.7. Ряди в нормованих просторах

Означення 1.110. *Нехай X – банахів простір і $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність в X.*

Рядом в просторі X називається формальна сума

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots =: \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Ми кажемо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається, якщо в X існує границя часткових сум, тобто границя

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N,$$

де $S_N \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{n=1}^{N} x_n$. Якщо границя існує, то ми її називаємо сумою вказаного ряду і записуємо цей факт у вигляді рівності $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Приклад 1.111. *Нехай $X = C[0,1]$. Чи збігається в X ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1}\right)?$$

Теорема 1.112. ***[Критерій збіжності ряду у банаховому просторі]***

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *є збіжним в банаховому просторі* X *тоді і лише тоді коли виконується умова:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, k > N \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad \left\| \sum_{n=k+1}^{k+p} x_n \right\| < \varepsilon. \tag{1.29}$$

Доведення. Нехай X – банаховий простір. Тоді збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ еквівалентна збіжності послідовності $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ його часткових сум:

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки простір X є повний, то збіжність послідовності $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ рівносильна фундаментальності послідовності $(S_n)_{n=1}^{\infty}$. А це означає, що

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, k > N \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad \|S_{k+p} - S_k\| = \left\| \sum_{n=k+1}^{k+p} x_n \right\| < \varepsilon.$$

□

Необхідна умова збіжності ряду у банаховому просторі.

Наслідок 1.113. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *– збіжний, то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Означення 1.114. *Ми говоримо, що ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *є абсолютно збіжний, якщо*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Достатня умова збіжності ряду у банаховому просторі.

Теорема 1.115. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *в банаховому просторі* X *є абсолютно збіжний, то він збіжний і*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|. \tag{1.30}$$

Доведення. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ є абсолютно збіжний і S_n – його часткова сума. Тоді для довільних $n, m \in \mathbb{N}$ таких, що $m < n$, маємо

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{j=1+m}^{n} x_j \right\| \leq \sum_{j=1+m}^{n} \|x_j\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Звідки випливає, що послідовність $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна, а, отже, збіжна (бо простір X є повний).

З нерівності трикутника для норми випливає, що

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} x_n\right\| \le \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|.$$

Переходячи в нерівності до границі при $N \to \infty$, з врахуванням неперервності норми отримуємо нерівність (1.30). Теорема доведена. $\square$

Означення 1.116. *Нехай H - передгільбертовий простір і для $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in H$.*

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ називається ортогональним, якщо

$$x_n \perp x_m \qquad \text{при} \;\; n \ne m.$$

Теорема 1.117. ***[Критерій збіжності ортогонального ряду в гільбертовому просторі]*** *Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – ортогональний ряд в гільбертовому просторі. Для того, що він збігався необхідно і досить, щоб збігався числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$. Якщо останній збігається, то справедлива рівність*

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2. \tag{1.31}$$

Доведення. Покладемо

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

З означення ортогонального ряду випливає, що для довільних $n, m \in \mathbb{N}$ таких, що $m < n$,

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\|\sum_{j=1+m}^{n} x_j\right\|^2 = \sum_{j=1+m}^{n} \|x_j\|^2.$$

Звідси отримуємо, що збіжність послідовності $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є еквівалентна збіжності числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$. Дійсно, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ збігається, то

$$\|S_n - S_m\|^2 = \sum_{j=1+m}^{n} \|x_j\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Звідки випливає, що послідовність $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна, а, отже, збіжна (бо простір є повний).

А якщо послідовність $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збіжна, то вона фундаментальна і

$$\sum_{j=1+m}^{n} \|x_j\|^2 = \|S_n - S_m\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

а, отже, згідно з критерієм Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ збігається.

Переходячи в рівності

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2$$

до границі при $N \to \infty$, з врахуванням неперервності норми отримуємо рівність (1.31). Теорема доведена.

$\square$

Розділ II. Лінійні неперервні відображення

1. Лінійні неперервні оператори в нормованих просторах

1.1. Означення та властивості лінійних неперервних операторів

Нехай X, Y – лінійні простори над полем Φ ($\Phi = \mathbb{R}$ або $\Phi = \mathbb{C}$).

Означення 2.1. *Відображення $A : X \to Y$ називають **лінійним оператором**, якщо*
1) область визначення $D(A)$ є лінійним підпростором простору X;
2) $\forall\, \alpha, \beta \in \Phi \quad \forall\, x, y \in D(A) \qquad A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

Позначимо

$D(A)$ – **область визначення оператора A**,

$R(A) := \{y = Ax : x \in D(A)\}$ – **область значень оператора A**,

$\ker A := \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ – **ядро оператора A**.

Надалі, якщо не стверджується протилежне, вважатимемо, що областю визначення розглядуваного оператора є весь простір X.

Означення 2.2. *Нехай X – лінійний простір, $A : X \to X$. Покладемо*

$$Ax = x, \qquad x \in X.$$

*Оператор A, який переводить кожний елемент в себе, називають **одиничним оператором**. Позначають одиничний оператор через $\mathbb{I}_X$.*

Вправа. Нехай A – лінійний оператор. Тоді

1) A0 = 0, де 0 – нульовий елемент;

2) R(A), $\ker A$ – лінійні підпростори.

Означення 2.3. *Нехай X, Y – нормовані простори, $A : X \to Y$.*
*A – **обмежений оператор**, якщо*

$$\exists\, C > 0 \quad \forall x \in X \quad \|Ax\|_Y \le C\|x\|_X. \tag{2.1}$$

Можна показати, що A – обмежений оператор тоді і лише тоді коли він обмежену множину переводить в обмежену.

Враховуючи означення 2.3, легко дати означення необмеженого оператора. Проте на практиці нам зручно користуватися означенням необмеженого оператора на мові послідовностей, а саме:

Означення 2.4. *Оператор A – **необмежений**, якщо*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X : \qquad \|Ax_n\|_Y > n\|x_n\|_X.$$

Означення 2.5. *Оператор A – **неперервний** в точці x_0, якщо*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, \delta > 0 \qquad \forall\, x \in X \,: \qquad \|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon.$$

Означення 2.6. *Оператор A – **неперервний** в точці x_0 тоді і лише тоді коли*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax_0.$$

Твердження 2.7. *Нехай X, Y – нормовані простори, $A : X \to Y$ – лінійний оператор. Тоді наступні твердження еквівалентні:*
a) $\exists x_0 \in X : A$ неперервний в точці x_0;
b) $\forall x \in X : A$ неперервний в точці x;
c) A – обмежений оператор.

Доведення. $a) \Rightarrow b)$ Нехай $x \in X$ і $x_n \to x$. Тоді

$$x_n + x_0 - x \to x_0,$$

а отже,

$$A(x_n + x_0 - x) \to Ax_0.$$

Беручи до уваги лінійність оператора A, отримаємо $Ax_n + Ax_0 - Ax \to Ax_0$, тобто

$$Ax_n \to Ax.$$

$b) \Rightarrow c)$ Доведемо від супротивного. Припустимо, що при виконанні умов b) оператор A є необмеженим, тобто

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X : \qquad \|Ax_n\| > n\|x_n\|.$$

Покладемо

$$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|\, n}.$$

Легко бачити, що $\|y_n\| = \frac{1}{n}$, тобто $y_n \to 0$. Беручи до уваги неперервність оператора A в кожній точці в X, отримаємо, що $Ay_n \to 0$.

З іншого боку,

$$\|Ay_n\| = \left\| A\frac{x_n}{\|x_n\|\, n} \right\| = \frac{\|Ax_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1.$$

(Суперечність!)

$c) \Rightarrow a)$ Нехай $x_n \to 0$. Оскільки A – обмежений, то

$$\exists\, C > 0 \qquad \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

Звідси випливає, що $Ax_n \to 0 \ (= A0)$. Це означає, що оператор A є неперервним в нулі.

□

Дане твердження показує, що поняття обмеженості та неперервності лінійних операторів тісно пов'язані, тобто **лінійний оператор неперервний тоді і тільки тоді коли він обмежений**.

Позначимо

$$\mathcal{B}(X,Y) := \{A : X \to Y \,|\, \text{A – лінійний неперервний оператор}, D(A) = X\}.$$

Якщо $X = Y$, то пишуть скорочено $\mathcal{B}(X)$.

Твердження 2.8. *Нехай* $\dim X, \dim Y < \infty$, *$A : X \to Y$ – лінійний оператор, $D(A) = X$. Тоді*

$$A \in \mathcal{B}(X,Y).$$

1.2. Приклади лінійних неперервних операторів

Приклади лінійних обмежених операторів:

1. Нехай $X = C[a,b], (Ax)(t) = tx(t)$. Оскільки $|(Ax)(t)| \leq \max|t| \max|x(t)|$, тоді

$$\|Ax\| \leq \max(|a|,|b|)\,\|x\|.$$

2. $X = Y = l_2, Ax = (0, x_1, x_2, ...), \qquad x = (x_1, x_2, ...)$

$$\|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow \|Ax\| = \|x\|.$$

Приклад лінійного необмеженого оператора:

Нехай $X = Y = C[a,b], A : X \to Y, D(A) = C^1[a,b]$.

$$\forall x \in D(A) \quad (Ax)(t) = x^{'}(t).$$

Покажемо, що оператор A необмежений. Для цього розглянемо послідовність

$$x_n(t) = e^{int}.$$

Оскільки $(Ax_n)(t) = ine^{int}$,

$$\frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = n \to \infty \Rightarrow \text{A – необмежений.}$$

1.3. Алгебра $\mathcal{B}(X,Y)$

Множина $\mathcal{B}(X,Y)$ стає лінійним простором над полем $\mathbb{C}$, якщо ми введемо операції додавання операторів і множення оператора на число за формулами:

$$(A+B)x := Ax + Bx, \qquad (\lambda A)x = \lambda(Ax), \qquad x \in X, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Самостійно перевірити, що виконуються всі аксіоми лінійного простору:

- $A + B = B + A$
- $(A+B) + C = A + (B+C)$
- $A + O_X = O_X + A = A$; тут O_X – нульовий оператор в X, тобто $\forall\, x \in X \quad O_X x = 0_Y$, де 0_Y – нульовий вектор в Y
- $\exists\,(-A) \;:\; \forall\, A \quad A + (-A) = (-A) + A = O_X$; тут $(-A)$ – протилежний оператор, тобто $\forall\, x \;\; (-A)x = -Ax$
- $\lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot B + \lambda \cdot A$
- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A, \quad \alpha, \beta \in \Phi$
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$
- $\mathbb{I}_X \cdot A = A$; тут $\mathbb{I}_X$ – одиничний оператор

Нехай X, Y – нормовані простори.

Означення 2.9. *Введемо на лінійному просторі $\mathcal{B}(X,Y)$ норму за формулою:*

$$\|A\| = \|A\|_{\mathcal{B}(X,Y)} := \min\{C \geq 0 \mid \forall x \in X \quad \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X\}. \tag{2.2}$$

Тобто, найменшу з констант в означенні 2.3, для якої виконується нерівність 2.1, назвемо ***нормою оператора*** *A і позначатимемо $\|A\|$.*

Зауважимо, що для **означення норми оператора** також використовують наступні формули:

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{y\neq 1} \|Ay\| = \sup_{\|y\|\leq 1} \|Ay\|$$

З формули (2.2) очевидним чином випливає, що

$$\|Ax\|_Y \leq \|A\|\|x\|_X, \qquad x \in X. \tag{2.3}$$

Цю властивість норми ми будемо часто використовувати.

Перевіримо виконання аксіом норми для норми оператора. Перевірка перших двох аксіом є очевидною. Перевіримо виконання нерівності трикутника.

Нехай $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$. Для довільного $x \in X$

$$\|(A+B)x\|_Y \leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \leq \|A\|\|x\|_X + \|B\|\|x\|_X = (\|A\| + \|B\|)\|x\|_X.$$

Отже, $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Таким чином, лінійний простір $\mathcal{B}(X,Y)$ з операторною нормою перетворюється в нормований простір. А чи є цей простір повним?

Теорема 2.10. *Нехай X та Y нормовані простори. Якщо простір Y є повний, то нормований простір $\mathcal{B}(X,Y)$ теж є повним.*

Доведення. Нагадаю простір називають повним, якщо кожна в ньому фундаментальна послідовність є збіжною. Розглянемо фундаментальну послідовність $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у просторі $\mathcal{B}(X,Y)$. Тоді

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, m > n_0 \quad \|A_n - A_m\| < \varepsilon.$$

Оскільки

$$\|A_n x - A_m x\|_Y \leq \|A_n - A_m\|\|x\|_X,$$

то

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall x \in X \quad \forall n, m > n_0 \quad \|A_n x - A_m x\|_Y < \varepsilon\|x\|_X. \tag{2.4}$$

А це означає, що векторна послідовність $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальна у просторі Y. Оскільки Y повний, то послідовність $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається в Y. Покладемо за означенням

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

Покажемо, що A є лінійним оператором. Дійсно, маємо

$$A(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (A_n x + A_n y) = Ax + Ay,$$

$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n x = \lambda Ax.$$

Покажемо, що A є обмеженим. Перейдемо в (2.4) до границі при $m \to \infty$. Враховуючи неперервність норми, отримуємо, що

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall x \in X \quad \forall n > n_0 \quad \|A_n x - Ax\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_X.$$

Звідси, випливає, що при $n > n_0$ оператор $(A_n - A)$ є обмежений і

$$\|A_n - A\| \leq \varepsilon.$$

Оскільки

$$A = A_n - (A_n - A)$$

і оператори A_n та $(A_n - A)$ є обмежені, тобто належать $\mathcal{B}(X,Y)$, то оператор A теж належить $\mathcal{B}(X,Y)$. Зі сказаного вище також випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \|A_n - A\| \leq \varepsilon,$$

а, отже, $A_n \to A$ при $n \to \infty$. Теорема доведена. $\square$

Норму оператора A зазвичай шукають в наступній послідовності:

Крок 1. $\forall x \in D(A)$ знаходять таку константу C>0, для якої справджується нерівність

$$\|Ax\| \leq C\|x\|.$$

Знайдена оцінка дозволяє зробити нам висновок, що $\|A\| \leq C$.

Крок 2. Доводимо, що знайдена константа є найменшою. Для цього достатньо знайти такий елемент x_0, для якого виконується рівність

$$\|Ax_0\| = C\|x_0\|.$$

Звідси випливає, що $\|A\| = C$.

Часто на роль x_0 зручно брати одиничні елементи відповідних просторів. А саме,
1) $C[a,b]$, $\quad x_0(t) = 1$ – одинична функція;
2) l_p, $\quad x_0 = (1, 0, 0, ...)$.

Але не завжди буде існувати такий елемент x_0. В цьому випадку доводять, що $\|A\| = C$, використовуючи послідовності, а саме будують послідовність $(x_n) \subset D(A)$ така, що

$$\frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} \to C \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Звідси робимо висновок, що $\|A\| = C$.

Приклад. Знайти норму лінійного неперервного оператора

$$A: \, C^1[0,1] \to C[0,1], \; (Ax)(t) = x'(t).$$

Розв'язування. Нехай $X = C^1[0,1]$, $Y = C[0,1]$. Тоді для довільного $x \in X$

$$\|Ax\|_Y = \max_{0 \leq t \leq 1} \left|x'(t)\right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} \left|x'(t)\right| = \|x\|_X \,,$$

тому $\|A\| \leq 1$.

З іншого боку, якщо $x_0(t) \equiv 1$, то $\frac{\|Ax_0\|_Y}{\|x_0\|_X} = 1$, тому $\|A\| \geq 1$. Отже, $\|A\| = 1$.

Сильна, слабка та $*$-слабка збіжність

Нехай X – лінійний нормований простір, $x, x_1, \ldots, x_n, .. \in X$.

Означення 2.11. *Послідовність* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *збігається до* x *(позначать* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*), якщо*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

У цьому випадку x *називається (сильною) границею послідовності* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Означення 2.12. *Послідовність* (x_n) *слабко збігається до* x *(позначать* $w-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*), якщо*

$$\forall f \in X' \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Означення 2.13. *Нехай* $f, f_1, \ldots, f_n, .. \in X'$.

Послідовність (f_n) $*$*-слабко збігається до* f *(позначають* $*w - \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$*), якщо*

$$\forall x \in X \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Рівномірна, сильна та слабка збіжність в $\mathcal{B}(X,Y)$

Нехай X, Y – нормовані простори, $A, A_1, \ldots, A_n, .. \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Означення 2.14. *Послідовність* (A_n) *рівномірно збігається до* A *(позначать* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$*), якщо*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Означення 2.15. *Послідовність* (A_n) *сильно збігається до* A *(позначать* $s - \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$*), якщо*

$$\forall x \in X \quad \lim_{n\to\infty} A_n x = Ax.$$

Означення 2.16. *Послідовність* (A_n) *слабко збігається до* A *(позначать* $w - \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$*), якщо*

$$\forall f \in X' \quad \forall x \in X \quad \lim_{n\to\infty} f(A_n x) = f(Ax).$$

Також $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ записують так: $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$.

Вправа. Справедливі наступні імплікації:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \;\Rightarrow\; s - \lim_{n\to\infty} A_n = A \;\Rightarrow\; w - \lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Навпаки, взагалі кажучи невірно. Справді, розглянемо наступний приклад.

Приклад. Нехай $H = l_2$, $\quad A_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ..)$. Легко бачити, що

$$\forall x \in l_2 \quad A_n x \to x,$$

тобто $s - \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \mathbb{I}$. Переконаємося, що послідовність (A_n) не збігається рівномірно. Для цього нам потрібно оцінити норму $\|A_n x - x\|$:

$$\|A_n x - x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2.$$

Отже, $\|A_n x - x\| \le \|x\|$.

Покладемо, $x_0 = (0, ..., 0, 1, 0, ..)$, де одиничка стоїть на $n+1$-му місці. Очевидно, що $\|x_0\| = 1$ і $\|A_n x_0 - x_0\| = 1$. Звідси випливає, що $\|A_n - \mathbb{I}\| = 1 \ne 0$, а отже, послідовність (A_n) збігається сильно, але рівномірної збіжності не буде.

Добуток операторів

Введемо операцію множення операторів. Нехай X, Y, Z нормовані простори і $A \in \mathcal{B}(X,Y), B \in \mathcal{B}(Y,Z)$. Добутком BA операторів A і B називається функція

$$(BA)x = B(Ax), \qquad x \in X,$$

тобто добутком операторів є їх композиція. Добуток BA є лінійним і неперервним оператором. Дійсно композиція лінійних відображень є лінійним відображенням, а композиція неперервних є неперервним відображенням. Більше того,

$$\|(BA)x\|_Z = \|B(A)x\|_Z \leq \|B\|\|Ax\|_Y \leq \|A\|\|B\|\|x\|_X, \qquad x \in X,$$

тобто

$$\|BA\| \leq \|B\|\|A\|.$$

Добуток операторів є неперервною функцією за сукупністю змінних. Дійсно, нехай $A, A_0 \in \mathcal{B}(X,Y),\ B, B_0 \in \mathcal{B}(Y,Z)$. Тоді

$$\|BA - B_0A_0\| = \|B(A - A_0) + (B - B_0)A_0\| \leq \|B\|\|A - A_0\| + \|B - B_0\|\|A_0\|.$$

Звідси випливає, що на множині

$$\{(A,B) \in \mathcal{B}(X,Y) \times \mathcal{B}(Y,Z) \mid \|A\|, \|B\| \leq C\},$$

де $C > 0$, добуток операторів задовольняє умову

$$\|BA - B_0A_0\| \leq C(\|A - A_0\| + \|B - B_0\|),$$

тобто є неперервним.

Домовимося нормований простір $\mathcal{B}(X,X)$ позначати скорочено через $\mathcal{B}(X)$. Якщо X - банахів простір, то, як ми вже довели, $\mathcal{B}(X)$ є банаховим простором. Однак, в $\mathcal{B}(X)$ ми маємо ще операцію множення операторів. В результаті $\mathcal{B}(X)$ утворює структуру, яку називають нормованою (банаховою, якщо X банахів простір) алгеброю. Це означає, що ми маємо структуру комплексної алгебри і накладену на неї структуру нормованого простору. До аксіом нормованого простору потрібно додати наступні аксіоми:

1. $(AB)C = A(BC)$ (асоціативність множення)
2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
3. $(A + B)C = AC + BC, \quad C(A + B) = CA + CB$ (дистрибутивність);
4. $IA = AI = A$ (I - одиничний оператор);
5. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (мультиплікативна нерівність)
6. $\|I\| = 1$.

1.4. Лінійні функціонали

Важливим окремим випадком лінійних операторів є лінійні функціонали.

Означення 2.17. *Лінійний оператор, який діє в простір* Φ ($\mathbb{R}$ *або* $\mathbb{C}$) *називають* ***лінійним функціоналом***.

Пояснимо більш детальніше. Нехай X - лінійний простір над $\mathbb{C}$ (над $\mathbb{R}$). Лінійним функціоналом на X називається функція, що діє з X в $\mathbb{C}$ (в $\mathbb{R}$) і :

1. $\forall x, y \in X \quad f(x+y) = f(x) + f(y);$
2. $\forall x \in X \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$

Множина всіх лінійних функціоналів на X утворює лінійний простір зі звичайними операціями додавання функціоналів і множення функціонала на число. Цей лінійний простір називається алгебраїчним спряженим до простору X і позначається через X^*.

Якщо простір X є нормованим, то підпростір в X^*, що складається з усіх неперервних функціоналів на X, називається топологічним спряженим до нормованого простору X і позначається через X'. Простір X' ми наділяємо нормою

$$\|f\| := \sup_{\|x\|=1} |f(x)|,$$

тобто нормою простору $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$. Отже, ми маємо, що $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$. Оскільки $\mathbb{C}$ є банаховим простором, то з теореми про повноту нормованого простору $\mathcal{B}(X, Y)$ випливає, що X' завжди є банаховим простором (навіть коли X є неповним нормованим простором.)

Спряжений простір X' відіграє важливу роль в теорії банахових просторів. Його властивості тісно пов'язані з властивостями вихідного банахового простору. Для класичних банахових просторів знайдені спряжені простори. Під задачею знаходження топологічного спряженого розуміють задачу про загальний вигляд лінійного неперервного функціоналу на X. Іншими словами, це означає знайти опис простору ізоморфного до X'. Наприклад, відомо, що топологічний спряжений до простору ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ є ізоморфний простору ℓ_q, де q - спряжений показник до p (тобто $1/p + 1/q = 1$.)

Означення 2.18. *Банахів простір* X *називається рефлексивним, якщо його другий спряжений* $X'' := (X')'$ *ізоморфний простору* X.

Рефлексивні банахові простори мають кращі властивості в порівнянні з нерефлексивними просторами. З рефлексивними банаховими просторами працювати простіше. Простори ℓ_p з $p \in (1, \infty)$ є рефлексивними, натомість простори ℓ_1, ℓ_∞, $C[0,1]$ не є рефлексивними.

Означення 2.19. *Лінійний функціонал* $f : X \to \Phi$ *називають* ***обмеженим***, *якщо*

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \le C\|x\|. \tag{2.5}$$

Позначимо

$$X^{'} := \{f : X \to \Phi \,|\, f - \text{ лінійний неперервний функціонал}, D(f) = X\}.$$

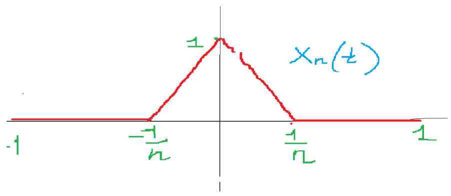
Простір $X^{'}$ називають **спряженим простором**.

Приклади обмежених функціоналів:

1. $X = \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, ...x_n)$, $f(x) = x_1 : \qquad |f(x)| = |x_1| \le |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = \|x\|.$
2. $X = C[a, b]$, $\delta_a(x) = x(a) : \qquad |\delta_a(x)| \le \max |x(t)| = \|x\|.$
3. H – гільбертовий простір, $x_0 \in H$, $f(x) = (x|x_0) : \qquad |f(x)| = |(x|x_0)| \le \|x_0\| \, \|x\|.$

Приклад необмеженого функціоналу:

$X = C[-1, 1], \quad \|x\| = \int_{-1}^{1} |x(t)| \, dt, \quad f(x) = x(0).$
Розглянемо послідовність вигляду



$x_n \to 0, \quad f(x_n) = 1 \Rightarrow f$ – необмежений.

ТЕОРЕМА РІССА про загальний вигляд лінійного неперервного функціоналу в гільбертовому просторі

Теорема 2.20. *Нехай H – гільбертів простір, $f \in H'$. Тоді*

$$\exists!\ y_f \in H \quad \forall x \in H: \quad f(x) = (x|y_f),\ \|f\|_{H'} = \|y_f\|_H.$$

Доведення. а) *Єдиність*. Нехай

$$\forall x \in H \quad f(x) = (x|y_1) = (x|y_2).$$

Тоді, враховуючи властивість скалярного добутку, маємо

$$\forall x \in H: \quad (x|y_1 - y_2) = 0,$$

звідки випливає, що якщо $x = y_1 - y_2$, то за властивістю скалярного добутку отримаємо, що $y_1 - y_2 = 0$, а, отже, $y_1 = y_2$.

б) *Існування*. Якщо $f = 0$, то $y_f = 0$.

Якщо $f \neq 0$, тоді існує $l \in H : f(l) = 1$. (Зауважимо, що такий елемент існує, оскільки ми можемо його отримати наступним чином: якщо $f(\tilde{l}) = k$, то $l := \frac{\tilde{l}}{k}$.) Далі, враховуючи, що

$$\forall x \in H: \ f(x - f(x)l) = f(x) - f(x)f(l) = 0,$$

робимо висновок, що

$$\forall x \in H: \ x - f(x)l \in \ker f.$$

Оскільки f – неперервний функціонал, то підпростір ker є замкненим лінійним підпростором. З огляду на теорему про ортогональну проекцію

$$\exists u \neq 0: \ u \in (\ker f)^{\perp}.$$

А тому

$$\forall x \in H: \ (x - f(x)l|u) = 0.$$

Звідси випливає, що $(x|u) = (f(x)l|u)$, а отже $(x|u) = f(x)(l|u)$. Останню рівність поділимо на $(l|u) \neq 0$. Отримаємо

$$f(x) = \left(x|\frac{u}{(u|l)}\right).$$

Роль елемента y_f буде виконувати $\frac{u}{(u|l)}$, тобто

$$y_f := \frac{u}{(u|l)}.$$

Покажемо, що $\|f\| = \|y_f\|$. Як зазвичай, доведення проведемо в два кроки:

Крок 1. Оскільки $f(x) = (x|y_f)$, то

$$|f(x)| = |(x|y_f)| \le \|y_f\| \, \|x\|.$$

Звідси робимо висновок, що

$$\forall x \in H \quad \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \Rightarrow \|f\| \le \|y_f\|.$$

Крок 2. Покладемо $x_0 := y_f$. Тоді отримаємо, що

$$f(y_f) = (y_f|y_f) = \|y_f\|^2.$$

А отже,

$$f\left(\frac{y_f}{\|y_f\|}\right) = \|y_f\| \Rightarrow (\|f\| =) \sup_{\|x\|\ge 0} |f(x)| \ge \|y_f\| \Rightarrow \|f\| \ge \|y_f\|.$$

Теорема доведена. □

Задачі по темі Лінійні неперервні оператори та функціонали

Приклад 2.21. *Перевірити лінійність, неперервність і знайти норми таких функціоналів:*

а) $C[0,1] \ni x \mapsto x(0)$;

б) $\ell_1 \ni x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$;

в) $L_2(0,1) \ni x \mapsto \int\limits_0^t t^{-1/3} x(t)\, dt$; ,

г) $C[0,1] \ni x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} x\left(\frac{1}{2^k}\right)$.

Розв'язування. а) Позначимо зазначений функціонал через f. Перевіримо лінійність. Для довільних $x, y \in C[0,1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)(0) = \alpha x(0) + \beta y(0) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

З очевидної нерівності $|x(0)| \le \max\limits_t |x(t)|$ отримаємо, що

$$|f(x) - f(x_1)| = |f(x - x_1)| = |(x - x_1)(0)| \le \max_t |(x - x_1)(t)| = \|x - x_1\|.$$

З'ясовано, що функціонал неперервний, оскільки

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall x, x_1 \in C[0,1] \qquad \|x - x_1\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon = \delta.$$

Згідно з означенням $\|f\| = \inf\{C : \ \forall x \ \ |f(x)| \le C\|x\|\}$, тому $\|f\| \le 1$. З іншого боку, якщо $x(t) \equiv 1$, то $f(x) = x(0) = 1$ і $\|x\| = \max\limits_t |x(t)| = 1$, тобто виконується рівність $|f(x)| = \|x\|$. Отже, $\|f\| = 1$.

б) Лінійність зазначеного функціонала очевидна.

Для доведення неперервності достатньо довести обмеженість функціонала. Маємо

$$\forall\, x \in \ell_1 \quad |f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|,$$

тобто функціонал обмежений, причому $\|f\| \le 1$. Як і в попередньому прикладі, доведемо, що для деякого елемента $x \in \ell_1$ $|f(x)| = \|x\|$. Справді, нехай $x = (1, 0, 0, \ldots)$. Тоді

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}\right| = 1 = \|x\|.$$

Отож, $\|f\| = 1$.

в) Перевіримо лінійність. $\forall\, x, y \in L_2(0,1)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha x + \beta y) = \int\limits_0^1 t^{-1/3}(\alpha x(t) + \beta y(t))\, dt =$$

$$= \alpha \int\limits_0^1 t^{-1/3} x(t)\, dt + \beta \int\limits_0^1 t^{-1/3} y(t)\, dt = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Далі, використовуючи нерівність Коші – Буняковського, одержуємо, що

$$|f(x)| = \left|\int\limits_0^1 t^{-1/3} x(t) dt\right| \le \left(\int\limits_0^1 t^{-2/3} dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\|x\|,$$

тобто $\|f\| \le \sqrt{3}$. Якщо $x(t) = t^{-1/3}$, то $\|x\| = \left(\int\limits_0^1 t^{-2/3}\, dt\right)^{1/2} = \sqrt{3}$ і $|f(x)| = \left|\int\limits_0^1 t^{-2/3}\, dt\right| = 3 = \sqrt{3}\|x\|$. Отже, $\|f\| = \sqrt{3}$.

г) Перевіримо лінійність.

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}(\alpha x + \beta y)\left(\frac{1}{2^k}\right) = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} x\left(\frac{1}{2^k}\right) + \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} y\left(\frac{1}{2^k}\right) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Доведемо обмеженість. Для довільного $\forall\, x \in C[0,1]$

$$|f(x)| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} x\left(\frac{1}{2^k}\right)\right| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\left|x\left(\frac{1}{2^k}\right)\right| \le \max_t |x(t)| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2\|x\|.$$

Отож, функціонал обмежений і $\|f\| \le 2$. З іншого боку, якщо $x(t) \equiv 1$, то $|f(x)| = 2$. Тому $\|f\| = 2$.

Приклад 2.22. *Нехай X – лінійний простір $C[0,1]$ з нормою $\|x\| = \int\limits_0^1 |x(t)|\, dt$. Чи є неперервним функціонал $X \ni x \mapsto x(0)$?*

Розв'язування. Зазначений функціонал не є неперервним. Це можна довести двома способами.
а) Доведемо, що функціонал необмежений, тобто

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \;\; \exists\, x_n \quad |f(x_n)| > n\|x_n\|.$$

Приймемо

$$x_n(t) = \begin{cases} n(1 - nt), & 0 \le t \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Очевидно, що функції $x_n(t)$ неперервні (нарисуйте графіки!) і $\|x_n\| = \int\limits_0^{1/n} n(1-nt)\,dt = \frac{1}{2}$. Разом з тим $|f(x_n)| = |x_n(0)| = n > \frac{n}{2} = n\|x_n\|$.

б) Заперечення неперервності функціонала означає, що існує така послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, що $\|x_n\| \to 0$ (тобто $x_n \to 0$) і $f(x_n) \not\to 0$. Такою є, наприклад, послідовність функцій

$$x_n(t) = \begin{cases} 1-nt, & 0 \le t \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Справді, $\|x_n\| = \int\limits_0^{1/n} (1-nt)\,dt = \frac{1}{2n} \to 0$ при $n \to \infty$. Однак $f(x_n) = x_n(0) = 1$ для всіх n, тобто $f(x_n) \not\to 0$.

Приклад 2.23. *Довести, що функціонали:*

а) $\ell_1 \ni x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$;

б) $C[0,1] \ni x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} x\left(\frac{1}{2^k}\right)$

належать до відповідного спряженого простору й обчислити їхні норми.

Розв'язування. а) Спряженим до ℓ_1 є простір m обмежених числових послідовностей з нормою $\|y\|_m = \sup\limits_k |y_k|$, тобто кожний лінійний неперервний функціонал на просторі ℓ_1 має вигляд $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$, де $y = (y_1, y_2, \dots) \in m$, причому $\|f\| = \|y\|_m$. Функціонал $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ належить $(\ell_1)^*$, оскільки послідовність $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ є елементом простору m. У цьому випадку $\|f\| = \|y\|_m = \sup\limits_k \{\frac{1}{k}\} = 1$.

б) Кожний неперервний лінійний функціонал на просторі $C[a,b]$ можна подати у вигляді інтеграла Стілтьєса

$$f(x) = \int\limits_a^b x(t)\,dg(t),$$

де g – деяка функція обмеженої варіації на $[a,b]$. У цьому випадку справджується рівність $\|f\| = V_a^b[g]$. Тут функціонал можна подати у вигляді $\int\limits_a^b x(t)\,dg(t)$, де $g(t) = C_k$, $\frac{1}{2^{k+1}} < t < \frac{1}{2^k}$, $k = 0, 1, \dots$, $C_k - C_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}}$, $g(1) = C_0 + 1$. Функція g має обмежену варіацію і $V_a^b[g] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$. Отож, $\|f\| = 2$.

Приклад 2.24. *Знайти загальний вигляд і обчислити норму лінійного оператора в банаховому просторі* $\mathbb{R}^m$ *з нормою* $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

Розв'язування. Кожний вектор $x \in \mathbb{R}^m$ можна записати у вигляді $x = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i$, де $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $x_i \in \mathbb{R}$. Нехай $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – лінійний оператор, тоді $Tx = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i T e_i$. Отже, оператор T визначається своїми значеннями на елементах бази простору $\mathbb{R}^m$. Оскільки $Te_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} e_j$, $i = 1, \dots, m$, то координати y_j вектора Tx мають вигляд $y_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji} x_i$. Отож, кожний лінійний оператор у просторі $\mathbb{R}^m$ подається квадратною матрицею порядку m.

Обчислимо норму оператора T. Скористаємось формулою

$$\|T\| = \inf\{C : \forall x \quad \|Tx\| \le C\|x\|\}.$$

Маємо $\|Tx\| = \sum\limits_{j=1}^{m}|y_j| = \sum\limits_{j=1}^{m}\left|\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ji}x_i\right| \le \sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{m}|a_{ji}|\right)|x_i| \le \max\limits_i\left(\sum\limits_{j=1}^{m}|a_{ji}|\right)\sum\limits_{i=1}^{m}|x_i| = \max\limits_i\left(\sum\limits_{j=1}^{m}|a_{ji}|\right)\cdot$ $\|x\|$, тобто

$$\|T\| \le \max_i\left(\sum_{j=1}^{m}|a_{ji}|\right).$$

Нехай при $i = i_0$ сума $\sum\limits_{j=1}^{m}|a_{ji}|$ набуває найбільшого значення. Тоді $\|Te_{i_0}\| = \sum\limits_{j=1}^{m}|a_{ji_0}| = \max\limits_i\left(\sum\limits_{j=1}^{m}|a_{ji}|\right)\cdot\|e_{i_0}\|$. Отже,

$$\|T\| = \max_i\left(\sum_{j=1}^{m}|a_{ji}|\right).$$

Приклад 2.25. *Перевірити лінійність, неперервність і знайти норму (якщо оператор неперервний) оператора $A : X \to Y$:*

а) $X = Y = C[-1,1]$, $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1}(t+s)x(s)\,ds$;

б) $X = Y = L_2(0,1)$, $Ax(t) = tx(t)$;

в) $X = Y = \ell_1$, $Ax = (0, 0, 3x_1 - 2x_4, x_5, x_2 + x_5, 0, \ldots)$, де $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

Розв'язування. а) Перевіримо лінійність. $A(\alpha x + \beta y)(t) = \int\limits_{-1}^{1}(t+s)(\alpha x(s) + \beta y(s))\,ds = \alpha\int\limits_{-1}^{1}(t+s)x(s)\,ds + \beta\int\limits_{-1}^{1}(t+s)y(s)\,ds = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t)$. Отже, оператор лінійний.

Якщо $x \in C[-1,1]$, то $\|x\| = \max\limits_t|x(t)|$. Нехай $x, y \in C[-1,1]$ такі, що $\|x - y\| < \varepsilon$. Тоді $\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| = \max\limits_t\left|\int\limits_{-1}^{1}(t+s)(x(s) - y(s))\,ds\right| \le \max\limits_{s\in[-1,1]}|x(s) - y(s)|\cdot\max\limits_t\int\limits_{-1}^{1}|t+s|\,ds = const\cdot\varepsilon$.

З останньої нерівності випливає таке: якщо $x_n \to x$ у просторі $C[-1,1]$, то $Ax_n \to Ax$ при $n \to \infty$, тобто оператор A неперервний. Неперервність лінійного оператора еквівалентна його обмеженості, причому з попередньої оцінки випливає, що

$$\|A\| \le \max_t\int_{-1}^{1}|t+s|\,ds = \max_t\left(-\int_{-1}^{-t}(t+s)\,ds + \int_{-t}^{1}(t+s)\,ds\right) = \\ = \max_t(1+t^2) = 2.$$

Доведемо, що $\|A\| = 2$. Для цього треба або записати такий елемент $x \in C[-1,1]$, що $\|Ax\| = 2\|x\|$, або довести, що $\forall\varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in C[-1,1]\quad \|Ax_\varepsilon\| > (2-\varepsilon)\|x_\varepsilon\|$. Останнє рівносильне до того, що існує така послідовність (x_n), що $\forall n \in \mathbb{N}\ \|x_n\| = 1$ і $\|Ax_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 2$. Візьмемо $x(t) \equiv 1$. Тоді $\|x\| = 1$ і $\|Ax\| = \max\limits_t\left|\int\limits_{-1}^{1}(t+s)\,ds\right| = \max\limits_t|2t| = 2$. Отже, $\|A\| = 2$.

б) Лінійність оператора A очевидна. Перевіримо обмеженість.

$$\|Ax\| = \left(\int_0^1|Ax(t)|^2\,dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 t^2|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \le \\ \le \max_t|t|\left(\int_0^1|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2} = 1\cdot\|x\|.$$

Отож, $\|A\| \le 1$. Доведемо, що $\|A\| = 1$. Нехай $x_n(t) = \sqrt{2n+1}\, t^n$. Тоді $\|x_n\| = \left(\int\limits_0^1 (2n+1)t^{2n}\,dt\right)^{1/2} =$ 1 і

$$\|Ax_n\| = \left(\int\limits_0^1 (2n+1)t^{2n+2}\,dt\right)^{1/2} = \sqrt{\tfrac{2n+1}{2n+3}} =$$
$$= \left(1 - \tfrac{2}{2n+3}\right)^{1/2} \to 1 \quad \text{при}\, n \to \infty.$$

Отже, $\|A\| = 1$.

в) Лінійність оператора очевидна. Доведемо обмеженість. $\|Ax\| = |3x_1 - 2x_4| + |x_5| + |x_2 + x_5| \le 3|x_1| + |x_2| + 2|x_4| + 2|x_5| \le 3\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| = 3\|x\|$. Отож, $\|A\| \le 3$. Нехай $x = (1, 0, 0, \ldots)$. Тоді $\|x\| = 1$ і $\|Ax\| = \|(0, 0, 3, 0, \ldots)\| = 3$, тобто $\|A\| = 3$.

Приклад 2.26. *Довести, що оператор $A: \ X \to C[0,1]$, де $(Ax)(t) = \frac{dx}{dt}$, а X – простір $C^1[0,1]$ з нормою $\|x\| = \max\limits_t |x(t)|$, не є неперервним. Разом з тим оператор A неперервно діє з простору $C^1[0,1]$ в простір $C[0,1]$. Знайти його норму.*

Розв'язування. Оскільки неперервність лінійного оператора еквівалентна його обмеженості, то в першому випадку достатньо довести, що A необмежений. Для цього треба знайти таку послідовність $(x_n) \subset X$, що $\|x_n\| = 1$ і $\|Ax_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$ або $\|x_n\| \to 0$ і $\|Ax_n\| \ge c > 0$ при $n \to \infty$. Розглянемо послідовність $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin nt$. Всі функції x_n неперервно диференційовні і $\|x_n\| \le \frac{1}{n}$, тобто $\|x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Разом з тим $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|Ax_n\| = \max\limits_t |\cos nt| = 1$. Отже, оператор A необмежений.

Нехай тепер оператор A діє з $C^1[0,1]$ з нормою

$$\|x\| = \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)|$$

в $C[0,1]$. Тоді $\|Ax\| = \max\limits_t |x'(t)| \le \max\limits_t |x(t)| + \max\limits_t |x'(t)| = \|x\|$. Отож, оператор A обмежений і $\|A\| \le 1$. Візьмемо послідовність $x_n(t) = \frac{1}{n+1}t^n$. Для таких функцій $\|x_n\| = 1$ і $\|Ax_n\| = \frac{n}{n+1}$. Це означає, що $\|A\| = 1$.

2. Оборотність та коректна оборотність лінійних операторів

Для зручності, системи лінійних алгебраїчних рівнять, інтегральні чи диференціальні рівняння записують у вигляді операторного рівняння $Ax = y$. Якщо існує обернений оператор A^{-1}, то розв'язок рівняння визначається за допомогою рівності $x = A^{-1}y$. Тому виникає потреба встановити умови, за яких існує оператор A^{-1}, а також описати властивості самого оберненого оператора.

Означення 2.27. *Нехай X, Y – лінійні простори.*

Оператор $A : X \to Y$ називається ***оборотним****, якщо існує оператор $B : R(A) \to X$ такий, що*

$$AB = \mathbb{I}_X = BA.$$

Якщо вказаний оператор B існує, то він є єдиним і ми позначаємо його через A^{-1} та називаємо оберненим до оператора A.

Оборотність оператора розуміємо в практичному застосуванні наступним чином:

Означення 2.28. *Оператор $A : X \to Y$ називають* ***оборотним****, якщо*

$$\forall y \in R(A) \qquad \textit{рівняння} \quad Ax = y \quad \textit{має єдиний розв'язок.}$$

Якщо оператор оборотний, то кожному елементу $y \in R(A)$ можна поставити у відповідність єдиний елемент $x \in D(A)$, що буде розв'язком рівняння $Ax = y$. Оператор, який здійснює цю відповідність, називають оберненим оператором до опрератора A і позначають A^{-1}. Якщо існує обернений оператор A^{-1}, тоді $A^{-1}y = x$.

Неважко перевірити, що обернений оператор до лінійного буде теж лінійним.

Якщо A – лінійний, тоді A оборотний тоді і тільки тоді коли $\ker A = \{0\}$.

Зауважимо, що область визначення оберненого оператора не завжди збігається зі всім простором Y. Крім того, не завжди обернений оператор буде обмеженим, навіть якщо таким є обернений оператор. Тому виникає потреба у встановленні умов, при яких обернений оператор буде обмеженим. Спочатку введемо поняття коректності оператора.

Означення 2.29. *Нехай X – нормований простір, $A : X \to X$ – лінійний оператор.*

Оператор $A : X \to X$ називають ***коректно оборотним (коректним)****, якщо*

- *A оборотний*
- $A^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

Зауважимо, що A коректно оборотний тоді і тільки тоді, коли

$$\ker A = \{0\},$$

$$R(A) = X,$$

$$\|A^{-1}\| < \infty.$$

Вправа. 1) Нехай A, B коректні оперктори, тоді добуток AB коректний;
2) A коректний тоді і лише тоді, коли існує $B \in \mathcal{B}(X)$ такий що $AB = BA = \mathbb{I}_X$. В цьому випадку, $B = A^{-1}$.

Приклад 2.30. $X = l_2, \qquad Ax = (0, x_1, x_2, ...), \quad Bx = (x_2, x_3, ...).$

Оператор A оборотний, але не коректно оборотний, а оператор B не оборотний.

Ряд Неймана

Означення 2.31. *Рядом Неймана оператора $A \in \mathcal{B}(X)$ називається формальний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$, тобто формальна сума операторної геометричної прогресії.*

Лема 2.32. *Нехай X – банахів простір, $V \in \mathcal{B}(X)$, $\|V\| < 1$. Тоді оператор $\mathbb{I}_X + V$ коректний, зокрема*

$$(\mathbb{I}_X + V)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-V)^n \quad \textit{(ряд Неймана).}$$

Доведення. Оскільки

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(-V)^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|V^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|V\|^n = \frac{1}{1 - \|V\|} < \infty,$$

тобто ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|(-V)^n\|$ є збіжним, отримаємо, що

$$(\mathbb{I}_X + V) \sum_{n=0}^{\infty} (-V)^n = \lim_{k\to\infty} \Big((\mathbb{I}_X + V)(\mathbb{I}_X - V + V^2 - ... + (-V)^k) \Big) = \lim_{k\to\infty} \Big(\mathbb{I}_X + (-1)^k V^{k+1} \Big) = \mathbb{I}_X,$$

оскільки

$$\|(-1)^k V^{k+1}\| = \|V^{k+1}\| \le \|V\|^{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Таким чином,

$$(\mathbb{I}_X + V) \sum_{n=0}^{\infty} (-V)^n = \mathbb{I}_X.$$

Аналогічно показуємо, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-V)^n (\mathbb{I}_X + V) = \mathbb{I}_X.$$

$\square$

Теорема 2.33 (про збурення коректного оператора). *Нехай X – банахів простір, $A, V \in \mathcal{B}(X)$, причому A коректний, а $\|V\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тоді оператор $A + V$ також коректний.*

Доведення. Оскільки (за умовою)

$$\|A^{-1}V\| \le \|A^{-1}\| \|V\| < 1,$$

то з огляду на лему 2.72 оператор $\mathbb{I}_X + A^{-1}V$ є коректним. А тому буде коректним і оператор

$$A + V = A\,(\mathbb{I}_X + A^{-1}V)$$

як добуток двох коректних операторів. $\square$

Теорема 2.34 (С. Банаха про обернений оператор). *Нехай X, Y – банахові простори, $A \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\ker A = \{0\}$, $R(A) = Y$. Тоді*

$$A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X).$$

Подивимося на поняття коректного оператора в контексті дослідження розв'язності лінійного рівняння

$$Ax = y. \qquad (*)$$

Якщо оператор A коректно оборотний, то дане рівняння має єдиний розв'язок $x = A^{-1}y$ для довільного y. Якщо розглянути розв'язок $\tilde{x}$ рівняння при іншій правій частині $\tilde{y}$ (тобто $\tilde{x} = A^{-1}\tilde{y}$), то $\|x - \tilde{x}\| \le \|A^{-1}\|\|y - \tilde{y}\|$. Це означає, що у випадку малої зміни правої частини рівняння $(*)$, розв'язок x зміниться мало, тобто задача $(*)$ коректно розв'язна.

Приклад 2.35. *Нехай* $X_1 = \{x(t) \in C^1[0,1] :\ x(0) = 0\}$ *з нормою* $\|x\| = \max\limits_t |x(t)| + \max\limits_t |x'(t)|$. *Оператор* $A : X_1 \to C[0,1]$ *визначений формулою*

$$Ax(t) = x'(t) - 2t\,x(t), \qquad t \in [0,1].$$

Довести, що існує неперервний оператор A^{-1}.

Розв'язування. Задача знаходження оператора A^{-1} зводиться до знаходження розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння

$$\begin{cases} x'(t) - 2tx(t) = y(t), \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння $x'(t) - 2t\,x(t) = 0$. Це рівняння з розділеними змінними і, як відомо з курсу диференціальних рівнянь, $x(t) = Ce^{t^2}$. Шукаємо розв'язок задачі (2.6) методом варіації сталої, тобто припускаємо, що $x(t) = C(t)e^{t^2}$. Для $C(t)$ виникає рівняння $C'(t)e^{t^2} = y(t)$. Враховуючи початкову умову, знайдемо розв'язок задачі (2.6):

$$x(t) = e^{t^2} \int\limits_0^t e^{-s^2} y(s)\,ds = \int\limits_0^t e^{t^2 - s^2} y(s)\,ds.$$

Отже, $A^{-1}y(t) = \int\limits_0^t e^{t^2-s^2} y(s)\,ds$. Оскільки ядро $e^{t^2-s^2}$ цього інтегрального оператора неперервне на $[0,1] \times [0,1]$, то оператор A^{-1} обмежений.

Приклад 2.36. *Довести, що оператор* $A :\ C[0,1] \to C[0,1]$, *який діє так:*

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds,$$

неперервно оборотний і знайти A^{-1}.

Розв'язування. Нехай $y \in C[0,1]$. Розглянемо рівняння $Ax = y$. Зауважимо, що

$$x(t) = y(t) - Ce^t, \qquad \text{де } C = \int_0^1 e^s x(s)\,ds$$

– деяка невідома (поки що) константа. Інтегруючи рівність $e^t x(t) = e^t y(t) - Ce^{2t}$ на $[0,1]$, знаходимо

$$C = \frac{2}{e^2 + 1} \int_0^1 e^t y(t)\,dt.$$

Тому для довільної функції $y \in C[0,1]$ розв'язок рівняння набуває вигляду

$$x(t) = y(t) - \frac{2}{e^2+1} \int_0^1 e^{t+s} y(s)\,ds \equiv (A^{-1}y)(t).$$

Як і в попередньому прикладі, звідси випливає неперервність оператора A^{-1}.

3. Основні принципи функціонального аналізу

Принципами функціонального аналізу називають наступні три фундаментальні теореми:
1) Принцип рівномірної обмеженості (теорема Банаха-Штейнгауза).
2) Принцип відкритості відображення (теорема Банаха про обернений оператор).
3) Принцип продовження лінійного функціонала (теорема Гана-Банаха).

Як ви бачите з кожною з цих теорем є пов'язане ім'я Стефана Банаха.

Почнемо з теореми Банаха-Штейнгауза. Вона має декілька різних форм. Ми сформулюємо її в найбільш вживаному вигляді.

Означення 2.37. *Нехай X, Y - банахові простори і $\mathcal{A}$ множина у просторі $\mathcal{B}(X, Y)$. Множина $\mathcal{A}$ називається рівномірно обмеженою, якщо*

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| < \infty,$$

і множина $\mathcal{A}$ називається поточково (сильно) обмеженою, якщо

$$\forall x \in X \quad \sup_{A \in \mathcal{A}} \|Ax\|_Y < \infty.$$

Оскільки для всіх $x \in X$ і $A \in \mathcal{A}$

$$\|Ax\|_Y \leq \|A\| \|x\|_X,$$

то з рівномірно обмеженості множини $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ випливає її поточкова обмеженість. Несподіваним є те, що справедлива обернена імплікація.

Теорема Банаха-Штейнгауза.

Теорема 2.38. *Нехай X, Y - банахові простори і $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X, Y)$. Якщо множина $\mathcal{A}$ є поточково обмежена, то вона є також і рівномірно обмеженою.*

Доведення. Нехай множина $\mathcal{A}$ є поточково обмежена. Розглянемо у просторі X підмножини

$$X_n = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \{x \in X \mid \|Ax\|_Y \leq n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки оператор $A \in \mathcal{A}$ є неперервним, а множина

$$X_{n,A} := \{x \in X \mid \|Ax\|_Y \leq n\}$$

є прообразом замкненої кулі (у просторі Y) при відображенні A, то $X_{n,A}$ є замкненена множина. А, отже, замкненою є кожна множина X_n. З поточкової обмеженості множини $\mathcal{A}$ випливає, що кожна точка $x \in X$ належить деякому X_n, тобто

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

Згідно з теоремою Бера банахів простір X є множиною другої категорії, тому існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що множина X_{n_0} не є ніде не щільна. Оскільки множина X_{n_0} є замкнена, то вона мусить мати внутрішні точки. Це означає, що в X існує замкнена куля $\bar{B}(x_0, r)$ (з центром в точці $x_0 \in X$ і радіусом $r > 0$), яка міститься в X_{n_0}. Візьмемо довільний вектор $x \in X$ такий, що $\|x\|_X \leq 1$. Його можна подати у вигляді

$$x = \frac{1}{r}(rx + x_0 - x_0) = \frac{1}{r}(y_1 - y_2),$$

де $y_1 = rx + x_0$ і $y_2 = x_0$. Зауважимо, що $y_1, y_2 \in \bar{B}(x_0, r)$. Тому для довільного $A \in \mathcal{A}$

$$\|Ax\|_Y = \frac{1}{r}\|A(y_1 - y_2)\|_Y \leq \frac{1}{r}(\|Ay_1\|_Y + \|Ay_2\|_Y) \leq \frac{2n_0}{r}.$$

Оскільки x є довільним елементом одиничної кулі (в X), то за означенням норми оператора

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y \leq \frac{2n_0}{r}, \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Отже,

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| \leq \frac{2n_0}{r}.$$

Теорема доведена. □

З теореми Банаха-Штейнгауза випливає наступний

Наслідок 2.39. *Нехай X, Y - банахові простори і $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ послідовність операторів в $\mathcal{B}(X, Y)$. Якщо для кожного $x \in X$ векторна послідовність $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ збігається у просторі Y, то:*

1. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$;
2. *існує $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ такий, що для всіх $x \in X$* $\quad \lim_{n \to \infty} A_n x = Ax \quad$ *і* $\|A\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\|$.

Доведення. Нехай виконані умови наслідку. Збіжна послідовність у нормованому просторі є обмежена, тому $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n x\|_Y < \infty$ для кожного $x \in X$. Отже, множина $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ є поточково обмеженою. Згідно з теоремою Банаха-Штейнгауза $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$.

Доведемо другу частину наслідку. Покладемо за означенням

$$Ax := \lim_{n \to \infty} A_n x, \qquad x \in X.$$

Покажемо, що A є лінійним оператором. Дійсно, маємо

$$A(x + y) = \lim_{n \to \infty} A_n(x + y) = \lim_{n \to \infty} (A_n x + A_n y) = Ax + Ay,$$

$$A(\lambda x) = \lim_{n \to \infty} A_n(\lambda x) = \lambda \lim_{n \to \infty} A_n x = \lambda Ax.$$

Покажемо, що A є обмеженим. Дійсно, нехай $\alpha := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\|$. Тоді

$$\|A_n x\|_Y \leq \|A_n\| \|x\|_X \leq \alpha \|x\|_X, \qquad x \in X.$$

Звідси, враховуючи неперервність норми, маємо

$$\|Ax\|_Y = \lim_{n \to \infty} \|A_n x\|_Y \leq \alpha \|x\|_X, \qquad x \in X,$$

тобто $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ і $\|A\| \leq \alpha$. □

Як ви бачите, доведення теореми Банаха-Штейнгауза не є надто складним і основним його моментом є красиве використання теореми Бера про категорії. Натомість доведення теореми Банаха про обернений оператор є складним.

Теорема Банаха про обернений оператор.

Теорема 2.40. *Нехай X, Y - банахові простори і $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Якщо оператор A є бієкцією, то обернений оператор A^{-1} належить простору $\mathcal{B}(Y, X)$.*

Вправа 2.41. *Нехай X, Y - нормовані простори і $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Оператор A є біекцією тоді і тільки тоді, коли* $\ker A = \{0\}, \quad \operatorname{Im} A = Y$.

З огляду на вправу 2.41 теорему Банаха про обернений оператор можна також сформулювати у вигляді

Теорема 2.42. *Нехай X, Y - банахові простори і $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Якщо* $\ker A = \{0\}$ *і* $\operatorname{Im} A = Y$, *то A має неперервний обернений, $A^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$.*

Теорема Банаха про обернений оператор є дуже сильним інструментом. З алгебраїчної властивості (біекції) випливає топологічна властивість (неперервність).

Ознайомитися з доведенням можна за підручником Колмогорова і Фоміна.

Перейдемо тепер до третього принципу.

Теорема Гана-Банаха.

Спершу сформулюємо і доведемо теорему Гана-Банаха для лінійного простору над полем дійсних чисел.

Означення 2.43. *Нехай L дійсний лінійний простір. Невід'ємну функцію $p : L \to [0,\infty)$ назвемо додатньо-однорідним опуклим функціоналом (або калібровочним функціоналом), якщо :*

1. $\forall x \in L \quad \forall \alpha \geq 0 \quad p(\alpha x) = \alpha p(x)$;
2. $\forall x, y \in L \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Теорема 2.44. *Нехай p - калібровочний функціонал у дійсному лінійному просторі L і f_0 - лінійний функціонал, який заданий на лінійному підпросторі $L_0 \subset L$ і підпорядкований p, тобто*

$$\forall x \in L_0 \quad f_0(x) \leq p(x).$$

Тоді f_0 можна продовжити до лінійного функціонала f на всьому L зі збереженням умови підпорядкування, тобто $\quad \forall x \in L \quad f(x) \leq p(x)$.

Доведення. Доведення теореми Гана-Банаха складається з двох частин. Перша частина полягає в побудові продовження функціонала на підпростір $Y := \operatorname{lin}\{L_0 \cup \{z\}\}$, де z довільний вектор в $L \setminus L_0$. Цю частину доведення можна назвати арифметичною. Друга частина полягає у використанні трансфінітної індукції (леми Цорна). Ми обмежимося першою частиною доведення. З другою частиною бажаючі можуть ознайомитися у підручнику.

Зафіксуємо довільний вектор $z \in L \setminus L_0$. Тоді підпростір Y, що є лінійною оболонкою множини $L_0 \cup \{z\}$, складається з усіх векторів вигляду

$$y = x + tz, \qquad x \in L_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Припустимо, що продовження функціоналу f_0 на простір Y вже побудоване. Тоді

$$f(x+tz) = f(x) + tf(z) = f_0(x) + tc,$$

де $c = f(z)$. Отже, все зводиться до того, щоб підібрати число $c \in \mathbb{R}$, для якого

$$f_0(x) + tc \leq p(x+tz), \qquad x \in L_0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.7}$$

Беручи до уваги однорідність функціонала f і додатну однорідність функціоналу p, бачимо, що для виконання нерівності (2.7) досить, щоб вона виконувалася для $t = 1$ і $t = -1$. Дійсно, (2.7) можна переписати у вигляді

$$f_0(x) \pm tc \leq p(x \pm tz), \qquad x \in L_0, \quad t > 0.$$

Виконуючи ділення на $t > 0$, отримуємо

$$f_0(x/t) \pm c \le p(x/t \pm z), \qquad x \in L_0, \quad t > 0.$$

Оскільки $x/t \in L_0$, то нам досить, щоб для всіх $x \in L_0$

$$f_0(x) + c \le p(x+z), \qquad f_0(x) - c \le p(x-z),$$

тобто

$$f_0(x) - p(x-z) \le c \le p(x'+z) - f_0(x'), \qquad x, x' \in L_0. \tag{2.8}$$

Зауважимо, що для довільних $x, x' \in L_0$

$$f_0(x) + f_0(x') = f_0(x+x') \le p(x+x') \le p(x-z+x'+z) \le p(x-z) + p(x'+z),$$

тобто

$$f_0(x) - p(x-z) \le p(x'+z) - f_0(x'), \qquad x, x' \in L_0. \tag{2.9}$$

Розглянемо множини

$$A := \{f_0(x) - p(x-z) \mid x \in L_0\}, \qquad B := \{p(x'+z) - f_0(x') \mid x' \in L_0\}.$$

З (2.9) випливає, що

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \le b. \tag{2.10}$$

Згідно з аксіомою повноти для дійсних чисел, з умови (2.10) випливає, що

$$\exists c \in \mathbb{R} \qquad \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \le c \le b,$$

тобто існує $c \in \mathbb{R}$, для якого виконується (2.8). Арифметична частина доведення виконана. $\square$

Доведемо тепер теорему Гана-Банаха для лінійного простору над полем комплексних чисел.

Означення 2.45. *Невід'ємний функціонал p на комплексному лінійному просторі L назвемо півнормою, якщо для нього виконуються властивості:*

1. $\forall x, y \in L \quad p(x+y) \le p(x) + p(y)$;
2. $\forall x \in L \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Теорема 2.46. *Нехай p - півнорма у комплексному лінійному просторі L і f_0 - лінійний функціонал, який заданий на лінійному підпросторі $L_0 \subset L$ і підпорядкований p, тобто*

$$\forall x \in L_0 \quad |f_0(x)| \le p(x).$$

Тоді f_0 можна продовжити до лінійного функціонала f на всьому L зі збереженням умови підпорядкування, тобто

$$\forall x \in L \quad |f(x)| \le p(x).$$

Доведення. Позначимо через L_R і $L_{0,R}$ простори L і L_0, які ми розглядаємо як лінійні простори над полем дійсних чисел. Розглянемо на підпросторі $L_{0,R}$ дійсного лінійного простору L_R дійснозначний функціонал

$$g_0(x) := \operatorname{Re} f_0(x), \qquad x \in L_{0,R}.$$

Очевидно, що він є лінійний. Крім того,

$$g_0(x) \le |\operatorname{Re} f_0(x)| \le |f_0(x)| \le p(x), \qquad x \in L_{0,R}.$$

Зрозуміло, що півнорма є також калібровочним функціоналом на L_R. Тому згідно з дійсним варіантом теореми Гана-Банаха g_0 можна продовжити до деякого лінійного функціоналу g, який заданий на всьому L_R і

$$g(x) \le p(x), \qquad x \in L_R.$$

Використаємо дійснозначний функціонал g для побудови потрібного нам комплекснозначного функціоналу f. Покладемо за означенням

$$f(x) = g(x) - ig(ix), \qquad x \in L.$$

Легко бачити, що для довільних $x, y \in L$

$$f(x+y) = g(x+y) - ig(ix+iy) = g(x) - ig(ix) + g(y) - ig(iy) = f(x) + f(y)$$

і для довільних $\alpha \in \mathbb{R}$ і $x \in L$

$$f(\alpha x) = g(\alpha x) - ig(i\alpha x) = \alpha(g(x) - ig(ix)) = \alpha f(x).$$

Крім того,

$$f(ix) = g(ix) + ig(x) = i(g(x) - ig(ix)) = if(x), \qquad x \in L.$$

Тому для довільного $\lambda = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ і довільного $x \in L$ маємо

$$f(\lambda x) = f(ux) + f(ivx) = uf(x) + ivf(x) = \lambda f(x).$$

Отже функціонал f є лінійним функціоналом. Покажемо, що f є продовженням f_0. Дійсно, нехай $x \in L_0$. Тоді з означення функціоналів f і g_0 випливає, що

$$\operatorname{Re} f(x) = g(x) = g_0(x) = \operatorname{Re} f_0(x),$$

$$\operatorname{Im} f(x) = -g(ix) = -g_0(ix) = -\operatorname{Re} f_0(ix) = -\operatorname{Re} if_0(x) = \operatorname{Im} f_0(x).$$

Тому $f(x) = f_0(x)$. Залишається переконатися, що

$$|f(x)| \le p(x), \qquad x \in L.$$

Зафіксуємо довільне $x \in L$. Тоді

$$f(x) = re^{i\varphi},$$

де $r = |f(x)|$ і $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тому

$$|f(x)| = r = f(e^{-i\varphi}x) = g(e^{-i\varphi}x) \le p(e^{-i\varphi}x) = |e^{-i\varphi}|p(x) = p(x),$$

тобто

$$|f(x)| \le p(x).$$

Теорема доведена. □

Наостаток доведемо теорему Гана-Банаха в топологічній формі.

Теорема 2.47. *Нехай L - комплексний нормований простір і f_0 - лінійний обмежений функціонал на підпросторі $L_0 \subset L$. Тоді f_0 можна продовжити до лінійного функціонала f на всьому L зі збереженням його норми.*

Доведення. Нехай $\|f_0\|$ норма функціонала f_0. Очевидно, що можна вважати, що $\|f_0\| \neq 0$. (Якщо $\|f_0\| = 0$, то $f_0 = 0$ і за f можна взяти нульовий функціонал.) Покладемо

$$p(x) = \|f_0\| \|x\|_L, \qquad x \in L.$$

Легко бачити, що p є нормою, а, отже, і півнормою. Крім того,

$$|f_0(x)| \leq \|f_0\| \|x\|_L = p(x), \qquad x \in L_0.$$

Згідно з комплексним варіантом теореми Гана-Банаха існує продовження f_0 до лінійного функціонала f на весь L зі збереженням умови підпорядкування:

$$|f(x)| \leq p(x) = \|f_0\| \|x\|_L, \qquad x \in L_0.$$

З якої випливає, що

$$\|f\| \leq \|f_0\|.$$

Але,

$$\|f_0\| = \sup_{x \in L_0,\, \|x\|_L = 1} |f_0(x)| = \sup_{x \in L_0,\, \|x\|_L = 1} |f(x)| \leq \sup_{x \in L,\, \|x\|_L = 1} |f(x)| = \|f\|.$$

Отже, $\|f\| = \|f_0\|$. Теорема доведена □

З топологічної форми теореми Гана-Банаха випливає

Наслідок 2.48. *Нехай X - нормований простір і $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$. Тоді існує $f \in X'$ такий, що $f(x_0) = 1$ і $\|f\| = 1$.*

4. Спряжені оператори

Поняття спряженого оператора будемо вивчати у випадку гільбертового простору лише для обмежених оператрів.

Означення 2.49. *Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{B}(H)$.*

Оператор $A^* \in \mathcal{B}(H)$ називається спряженим оператором до A, якщо він пов'язаний з оператором A рівністю

$$\forall\, x,\, y \in H \quad (Ax|y) = (x|A^*y).$$

Теорема 2.50. *Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{B}(H)$. Тоді*

$$\exists!\ A^* \in \mathcal{B}(H): \quad A^* \text{ є спряженим до } A.$$

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$, $y \in H$. Розглянемо наступний функціонал

$$\forall\, x \in H \qquad f_y(x) = (Ax|y).$$

Покажемо, що f_y є лінійним неперервним функціоналом. Лінійність буде випливати з властивостей скалярного добутку, тому доведемо його неперервність. Для цього достатньо показати, що функціонал є обмеженим. Справді,

$$|f_y(x)| = |(Ax|y)| \le \|Ax\|\|y\| \le \|A\|\|x\|\|y\|.$$

Звідси робимо висновок, що

$$\|f_y\| \le \|A\|\|y\|. \tag{2.11}$$

Тому (за теоремою Рісса)

$$\exists!\, z_y \in H \quad \forall\, x \in H \qquad f_y(x) = (x|z_y) \quad \text{і} \quad \|f_y\| = \|z_y\|.$$

Покладемо

$$A^*y := z_y.$$

Тоді отримаємо, що

$$(Ax|y) = (x|A^*y).$$

Покажемо, що A^* є лінійним неперервним оператором. Лінійність оператора буде випливати з напівлінійності скалярного добутку за другим аргументом:

$$(x|A^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) = (Ax|\alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}(Ax|y_1) + \overline{\beta}(Ax|y_2) =$$
$$= (x|\alpha A^*y_1) + (x|\beta A^*y_2) = (x|\alpha A^*y_1 + \beta A^*y_2).$$

Для встановлення неперервності оператора A^* використаємо нерівність (2.11):

$$\|A^*y\| = \|z_y\| \le \|A\|\|y\|, \qquad y \in H.$$

Звідси буде випливати, що

$$\|A^*\| \le \|A\|,$$

а отже, оператор A^* є обмеженим (неперервним). Таким чином, $A^* \in \mathcal{B}(H)$.

Залишається довести єдиність спряженого оператора. Припустимо, що в алгебрі $\mathcal{B}(H)$ існують оператори A_1^* та A_2^* такі, що

$$\forall\, x,\, y \in H \quad (Ax|y) = (x|A_1^*y) = (x|A_2^*y).$$

Тоді

$$\forall\, x,\, y \in H \quad (x|(A_1^* - A_2^*)y) = 0,$$

тобто

$$\forall\, y \in H \quad (A_1^* - A_2^*)y \perp H.$$

Це означає, що

$$\forall\, y \in H \quad (A_1^* - A_2^*)y = 0,$$

тобто $A_1^* = A_2^*$. Єдиність, а отже і теорема, доведена. □

Означення 2.51. *Відображення*

$$\mathcal{B}(H) \ni A \longrightarrow A^* \in \mathcal{B}(H)$$

називається операцією взяття спряженого.

Властивості операції взяття спряженого.

Теорема 2.52. *Операція взяття спряженого володіє наступними властивостями:*

1. $I^* = I, \quad 0^* = 0;$
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$;
3. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*;$
4. $(AB)^* = B^* A^*$;
5. $(A^*)^* = A$;
6. $\|A^*\| = \|A\|$;
7. *якщо оператор A оборотний в алгебрі $\mathcal{B}(H)$, то A^* теж оборотний в алгебрі $\mathcal{B}(H)$ і $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Доведення. Доведення пункту (1) є очевидним.

Нехай $A, B \in \mathcal{B}(H)$ і $\lambda \in \mathbb{C}$. Для довільних $x, y \in H$ маємо

$$((A+B)x \mid y) = (x \mid A^* y) + (x \mid B^* y) = (x \mid (A^* + B^*)y),$$
$$(\lambda Ax \mid y) = \lambda(Ax \mid y) = \lambda(x \mid A^* y) = (x \mid (\bar{\lambda} A^*)y),$$
$$((AB)x \mid y) = (Bx \mid A^* y) = (x \mid B^* A^* y) = (x \mid (B^* A^*)y),$$
$$(A^* x|y) = \overline{(y \mid A^* x)} = \overline{(Ay \mid x)} = (x \mid Ay).$$

З виписаних рівностей випливає справедливість рівностей $(2-5)$.

Доведемо (6). З теореми про існування спряженого оператора випливає нерівність $\|A^*\| \leq \|A\|$. Використовуючи (5) маємо, що

$$\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|,$$

а, отже, $\|A^*\| = \|A\|$.

Доведемо (7). Припустимо, що оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ є оборотний. Тоді

$$A^{-1} A = I = A A^{-1}.$$

З пунктів $(1), (4)$ випливає, що

$$I = (A^{-1} A)^* = A^* (A^{-1})^*, \qquad I = (A A^{-1})^* = (A^{-1})^* A^*,$$

тобто

$$A^* (A^{-1})^* = I = (A^{-1})^* A^*.$$

Звідки випливає, що оператор A^* є оборотний і

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Теорема доведена.

Співвідношення між областю значень оператора A і ядром спряженого оператора A^*.

Теорема 2.53. *Нехай* $A \in \mathcal{B}(H)$ *і* $\operatorname{ran} A$ *- образ оператора* A*. Тоді*

$$(\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker A^*, \qquad \overline{\operatorname{ran} A} = (\ker A^*)^{\perp}.$$

Доведення. Доведемо першу рівність. Маємо

$$(y \perp \operatorname{ran} A) \Leftrightarrow (\forall x \in H \ (Ax \mid y) = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in H \ (x \mid A^* y) = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A^* y \perp H) \Leftrightarrow (A^* y = 0) \Leftrightarrow (y \in \ker A^*).$$

Отже,

$$(\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker A^*.$$

Звідси випливає, що

$$(\ker A^*)^{\perp} = [(\operatorname{ran} A)^{\perp}]^{\perp}.$$

З неперервності скалярного добутку випливає, що

$$(\operatorname{ran} A)^{\perp} = (\overline{\operatorname{ran} A})^{\perp}.$$

А згідно з теоремою про ортогональну проекцію

$$[(\overline{\operatorname{ran} A})^{\perp}]^{\perp} = \overline{\operatorname{ran} A}.$$

Тому

$$\overline{\operatorname{ran} A} = (\ker A^*)^{\perp}.$$

□

Означення 2.54. *Оператор* $A \in \mathcal{B}(H)$ *називаеться самоспряженим, якщо* $A^* = A$*.*

□

Зауваження 2.55. $A = A^* \Longrightarrow \forall\, x \in H \quad (Ax|x) \in \mathbb{R}.$

Приклад 2.56. $H = \mathbb{C}^n, \qquad A \sim (a_{ij}), \quad A^* \sim (\overline{a_{ji}}).$

Приклад 2.57. $H = l_2, \qquad Ax = (0, x_1, x_2, ...).$

$$\forall\, y \in H: \qquad (Ax|y) = x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + ... = (x|A^*y), \qquad \text{де } A^*y = (y_2, y_3, ...).$$

Приклад 2.58. $H = l_2, \quad Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., \frac{1}{n}x_n, ...)$ *є самоспряженим оператором.*

Приклад 2.59. $H = l_2, \quad Ax = (x_1 + x_2, ix_2, x_3 - x_4, x_4, x_5, ...).$

Приклад 2.60. $H = l_2, \quad Ax = (x_1, 2x_1, x_3, x_4, x_5, ...).$

Приклад 2.61. $H = L_2(a, b), \qquad \varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ *– вимірна обмежена функція і*

$$(Ax)(t) = \varphi(t)x(t).$$

Тоді $\forall\, x, y \in H:$

$$(Ax|y) = \int_a^b \varphi(t)x(t)\overline{y(t)}dt = \int_a^b x(t)\ \overline{\overline{\varphi(t)}y(t)}dt = (x|A^*y),$$

де

$$(A^*y)(t) = \overline{\varphi(t)}y(t).$$

Нехай H – гільбертів простір, $H = G \bigoplus G^{\perp}$, де G – замкнений лінійний підпростір простору H.

Означення 2.62. *Оператор $H \ni x \to Px \in H$, який діє за формулою*

$$Px = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in G; \\ 0, & \text{якщо } x \notin G, \end{cases}$$

називаєтьcя ***оператором ортогонального проектування (або ортопроектором) на*** G.

Легко переконатися, що

$$(Px|y) = (Px|Py) \qquad i \qquad (x|Py) = (Px|Py),$$

звідки буде випливати, що $P^* = P$, тобто P є самоспряженим оператором.

5. Спектр та резольвента лінійного оператора

Поняття спектру оператора є чи не найважливішою в теорії операторів. Зокрема, її активно застосовують в математичній фізиці та квантовій механіці. Якщо говорити про загальне означення спектру оператора, то можна сказати, що *спектр оператора — множина чисел, що характеризує лінійний оператор.* Саме про цю характеристику мова йтиме на цій лекції.

Спершу розглянемо спектральну теорію операторів для скінченновимірного випадку.

Нехай $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, $\mathbb{I}$ – одиничний оператор в просторі $\mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Означення 2.63. *Число λ називається **власним значенням** оператора $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, якщо рівняння*

$$Ax = \lambda x$$

має ненульовий розв'язок.

*Такий розв'язок x називають **власною функцією** оператора A, яка відповідає власному значенню λ.*

*Сукупність всіх власних значень оператора A називають **спектром** цього оператора, а всі інші значення λ – **регулярними**.*

Таким чином, можна стверджувати, що λ є регулярна точка, якщо оператор

$$A - \lambda\mathbb{I}$$

є оборотним. При цьому обернений оператор $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$, визначений на всьому просторі $\mathbb{C}^n$ і як будь-який оператор в скінченновимірному просторі є обмеженим. Тому можна посилити характеристику оператору $A - \lambda\mathbb{I}$ і сказати, що цей оператор є коректно оборотним.

Отож, в скінченновимірному просторі існує дві можливості:

1. Рівняння $Ax = \lambda x$ має ненульовий розв'язок, тобто λ є власним значенням оператора A і належить спектру цього оператора; оператор $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ не існує.
2. Існує обмежений оператор $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$, визначений на всьому просторі, тобто λ є регулярна точка.

Але, якщо оператор визначений в нескінченновимірному просторі X, то оператор $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ може існувати, тобто рівняння $Ax = \lambda x$ має лише нульовий розв'язок, але цей оператор буде визначений не на всьому просторі X. Розглянемо такий випадок, коли оператор визначений в нескінченновимірному просторі.

Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{B}(X)$, $\mathbb{I}$ – одиничний оператор в просторі X, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Означення 2.64. $\rho(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} :\ A - \lambda\mathbb{I}$ *- коректний*$\}$ *– резольвентна множина оператора A.*

Зауваження 2.65.

$$\lambda \in \rho(A) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \begin{aligned} &\ker(A - \lambda\mathbb{I}) = \{0\}, \\ &R(A - \lambda\mathbb{I}) = X \\ &\|(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}\| < \infty \end{aligned} \tag{2.12}$$

Означення 2.66. *Нехай $\lambda \in \rho(A)$.*

Операторнозначну функцію

$$R_\lambda(A) := (A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$$

називають резольвентою оператора A, що відповідає резольвентному значенню λ.

Означення 2.67. $\sigma(A) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ *– спектр оператора A.*

Класифікація спектра

1. Точковий спектр (дискретний) ($\sigma_p(A)$):

$$\lambda \in \sigma_p(A) \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \ker(A - \lambda\mathbb{I}) \neq \{0\}$$

2. Неперервний спектр ($\sigma_c(A)$):

$$\lambda \in \sigma_c(A) \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \ker(A - \lambda\mathbb{I}) = \{0\}, \quad \overline{R(A - \lambda\mathbb{I})} = X, \quad R(A - \lambda\mathbb{I}) \neq X$$

3. Залишковий спектр ($\sigma_r(A)$):

$$\lambda \in \sigma_r(A) \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \ker(A - \lambda\mathbb{I}) = \{0\}, \quad \overline{R(A - \lambda\mathbb{I})} \neq X$$

Зауваження 2.68. $\lambda \in \sigma_p(A) \Longleftrightarrow \exists\, x \in X \;\; (x \neq 0) \;\; Ax = \lambda x$

Зауваження 2.69. $\lambda \in \sigma_c(A) \Longleftrightarrow \ker(A - \lambda\mathbb{I}) = \{0\},\; \overline{R(A - \lambda\mathbb{I})} = X,\; \|(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}\| = \infty$

Справді, нехай $\lambda \in \sigma_c(A)$. Припустимо, що $\|(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}\| < \infty$. Тоді відображення

$$A - \lambda\mathbb{I} : X \to R(A - \lambda\mathbb{I})$$

є гомеоморфізмом, тобто взаємно-однозначне і неперервне відображення. Тому простір

$$R(A - \lambda\mathbb{I})$$

є замкненим, а отже,

$$R(A - \lambda\mathbb{I}) = X.$$

А суперечить третій умові неперервного спектру.

Тепер покажемо навпаки. Припустимо, що $R(A - \lambda\mathbb{I}) = X$. Тоді за теоремою Банаха про обернений оператор

$$||(A - \lambda I)^{-1}|| < \infty,$$

що суперечить умові.

Зауваження 2.70. $\mathbb{C} = \rho(A) \sqcup \sigma_p(A) \sqcup \sigma_r(A) \sqcup \sigma_c(A)$

Таким чином, основна класифікація спектру оператора A є наступна:

1) *дискретний (точковий) спектр* – множина всіх власних значень оператора A;

2) *неперервний спектр* – множина значень λ, при яких резольвента $(A - \lambda I)^{-1}$ визначена на всюди щільній множині в X, але не є неперервною;

3) *залишковий спектр* – множина точок спектру, що не входять ні до дискретної, ні до неперервної частин.

Приклад 2.71. *Знайти найбільше власне значення оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, який діє за формулою*

$$(Ax)(t) = x(0) + tx(1).$$

Розв'язування. Власним значенням оператора A називається таке число λ, за якого рівняння $Ax = \lambda x$ має нетривіальний розв'язок. Знайдемо такі числа λ. З операторного рівняння $Ax = \lambda x$ отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} (1-\lambda)x(0) = 0; \\ x(0) + (1-\lambda)x(1) = 0. \end{cases}$$

Якщо $\lambda \neq 1$ і $\lambda \neq 0$, то $x(0) = x(1) = 0$, а тому рівняння має лише тривіальний розв'язок. Якщо $\lambda = 1$, то існує ненульовий розв'язок $x(t) = Ct$, де C– довільна константа, відмінна від нуля. Отже, $\lambda = 1$ є власним значенням. Легко бачити, що $\lambda = 0$ є теж власним значенням: йому відповідає, наприклад, власна функція $x(t) = t(t-1)$.

Отож, $\lambda = 1$ є найбільшим власним значенням оператора A.

Замкненість та обмеженість спектра

Для доведення наступного результату нагадаємо теореми про збурення коректного оператора:

Лема 2.72. *Нехай X – банахів простір, $V \in \mathcal{B}(X)$, $\|V\| < 1$. Тоді оператор $\mathbb{I} + V$ коректний.*

Теорема 2.73. *Нехай X – банахів простір, $A, V \in \mathcal{B}(X)$, причому A– коректний, а $\|V\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тоді оператор $A + V$ також коректний.*

Теорема 2.74. *1. Спектр $\sigma(A)$ – замкнена множина.*

2. Має місце наступне вкладення

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|A\|\}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що спектр замкнена множина. Для цього досить показати, що резольвентна множина $\rho(A)$ – відкрита. Справді, нехай $\lambda_0 \in \rho(A)$ і візьмемо число $\lambda \in \mathbb{C}$ таке, що

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(A - \lambda_0\mathbb{I})^{-1}\|}.$$

Тоді

$$\|(\lambda_0 - \lambda)\mathbb{I}\| = |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(A - \lambda_0\mathbb{I})^{-1}\|}.$$

Беручи до уваги, що

$$A - \lambda\mathbb{I} = (A - \lambda_0\mathbb{I}) + (\lambda_0 - \lambda)\mathbb{I},$$

отримуємо за теоремою про збурення коректного оператора отримуємо, що оператор $A - \lambda\mathbb{I}$ – коректний, а отже, $\lambda \in \rho(A)$. Отже, $\rho(A)$ – відкрита, а тому $\sigma(A)$ – замкнена множина як доповнення до відкритої.

2. Доведемо протилежне твердження, а саме: якщо $|\lambda| > \|A\|$, то $\lambda \in \rho(A)$.

Нехай $|\lambda| > \|A\|$, тоді

$$(A - \lambda\mathbb{I}) = -\lambda\left(\mathbb{I} - \frac{A}{\lambda}\right).$$

Оскільки

$$\left\|\frac{A}{\lambda}\right\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1,$$

то за теоремою про збурення отримуємо, що оператор $\mathbb{I} - \frac{A}{\lambda}$ – коректний, а отже, коректний буде і оператор $A - \lambda\mathbb{I}$, звідки випливає, що $\lambda \in \rho(A)$. □

Зауваження 2.75. $\dim X < \infty \Longrightarrow \forall\ A \in \mathcal{B}(X) \quad \sigma_r(A) = \sigma_c(A) = \emptyset$

Приклад 2.76. *H - гільбертів простір, $A \in \mathcal{B}(X)$. Тоді $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$.*

Насправді досить показати, що

$$\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(A^*).$$

Справді, $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow A - \lambda\mathbb{I}$ - коректний $\Leftrightarrow A^* - \overline{\lambda}\mathbb{I}$ - коректний $\Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(A^*)$.

Спектральний радіус

Теорема 2.77. *Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{B}(X)$, $\quad \exists\, k \in \mathbb{N}: \ \|A^k\| < 1$. Тоді*

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ *– збіжний;*
- $(\mathbb{I} - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$*;*
- $(\mathbb{I} - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$.

Доведення. Нехай k є таким, що $\|A^k\| < 1$ і $n = mk + r \quad (r = 0, 1, ..., k-1)$. Оскільки

$$\|A^{mk}\| \le (\|A^k\|)^m \longrightarrow 0 \text{ при } m \to \infty,$$

тоді

$$\begin{aligned} S_n &= \mathbb{I} + A + A^2 + ... + A^{n-1} = \\ & (\mathbb{I} + A + ... + A^{k-1}) + (A^k + ... + A^{2k-1}) + ... + (A^{(m-1)k} + ... + A^{mk-1}) + (A^{mk} + ... + A^{mk+r-1}) \\ & (\mathbb{I} + A + ... + A^{k-1}) + A^k(\mathbb{I} + ... + A^{k-1}) + ... + A^{(m-1)k}(\mathbb{I} + ... + A^{k-1}) + A^{mk}(\mathbb{I} + ... + A^{r-1}) \\ & \underbrace{(\mathbb{I} + A^k + A^{2k} + ... + A^{k(m-1)})(\mathbb{I} + A + ... + A^{k-1})}_{\text{збіжний при } m\to\infty} \ + \ \underbrace{A^{mk}(\mathbb{I} + ... + A^{r-1})}_{\text{за нормою прямує до нуля при } m\to\infty}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (\mathbb{I} + A + ... + A^{k-1}) \sum_{m=0}^{\infty} (A^k)^m.$$

Зауважимо, що за теоремою про збурення оператора

$$\sum_{m=0}^{\infty} (A^k)^m = (\mathbb{I} - A^k)^{-1},$$

а отже,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (\mathbb{I} + A + ... + A^{k-1})(\mathbb{I} - A^k)^{-1}.$$

□

Зауваження 2.78. *Якщо $\forall\ k \in \mathbb{N} \quad \|A^k\| \ge 1$, то ряд Неймана $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ – розбіжний, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду: $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = \infty$.*

Означення 2.79. *Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$. Число*

$$r(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

називають спектральним радіусом оператора A.

Зауваження 2.80. $\|A^n\| \le \|A\|^n \Rightarrow \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \le \|A\| \Rightarrow r(A) \le \|A\|$.

Твердження 2.81. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n$ *– збіжний* $\Longleftrightarrow |\lambda| < \frac{1}{r(A)}$.

Доведення. ($\Rightarrow$) Доведемо методом від супротивного. Якщо

$$|\lambda| \ge \frac{1}{r(A)} = \frac{1}{\inf\limits_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}},$$

то

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\lambda| \ge \frac{1}{\|A^n\|^{\frac{1}{n}}} \Longrightarrow |\lambda|^n \|A^n\| \ge 1.$$

Таким чином отримуємо, що $\|\lambda^n A^n\| \ge 1$, що означає те, що не справджується необхідна умова збіжності ряду.

($\Leftarrow$) Якщо $|\lambda| < \frac{1}{r(A)}$, то

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \quad |\lambda| < \frac{1}{\|A^k\|^{\frac{1}{k}}},$$

звідки отримуємо, що $\|(\lambda A)^k\| < 1$. $\square$

Зауважимо, що

1) якщо $|\lambda| < \frac{1}{r(A)}$, тоді оператор $\mathbb{I} - \lambda A$ – коректний і $(\mathbb{I} - \lambda A)^{-1} = \mathbb{I} + \lambda A + \lambda^2 A^2 + ...$

2) $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le r(A)\}$, причому на колі міститься хоча б одна точка спектра.

Твердження 2.82. *Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{B}(X)$. Тоді існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$, при цьому*

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r(A).$$

Наслідок 2.1. *Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{B}(X)$, $|\lambda| > r(A)$. Тоді*

1) $\lambda \in \rho(A)$;

2) $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ *– розклад резольвенти.*

Доведення. 1) $|\lambda| > r(A) \Longrightarrow \frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{r(A)} \Longrightarrow \mathbb{I} - \frac{1}{\lambda}A$ – коректний і $\left(\mathbb{I} - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$.

А тому

$$A - \lambda\mathbb{I} = -\lambda\left(\mathbb{I} - \frac{1}{\lambda}A\right) \Longrightarrow (A - \lambda\mathbb{I})^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{I} - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

$\square$

Зауваження 2.83. $|\lambda| > \|A\| \Longrightarrow \lambda \in \rho(A)$ *і* $\|(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}$.

Справді,

$$(A - \lambda\mathbb{I})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \Longrightarrow \|(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda|}\ \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Спектральна теорія широко застосована в розв'язуванні рівнянь, про які мова ітиме далі. А саме, нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{B}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Розглянемо рівняння

$$u - \lambda A u = f. \tag{2.13}$$

Тут u – невідома змінна, а f – відома змінна. Якщо $|\lambda| < \frac{1}{r(A)} \Longrightarrow$ рівняння (2.13) $\forall f \in X$ має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від правої частини, тобто від f. Іншими словами,

$$|\lambda| < \frac{1}{r(A)} \Longrightarrow \mathbb{I} - \lambda A \quad \text{є коректним оператором},$$

а тому, записавши рівняння (2.13) у вигляді

$$(\mathbb{I} - \lambda A)u = f,$$

знаходимо

$$u = (\mathbb{I} - \lambda A)^{-1} f.$$

6. Інтегральні рівняння Фредгольма 2-го роду з неперервним ядром

Нехай $-\infty < a < b < +\infty$, $x \in C[a,b]$, $K \in C([a,b] \times [a,b])$.

Означення 2.84. *Оператор A, що визначається з умови:*

$$\forall x \in C[a,b] \qquad (Ax)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt, \tag{2.14}$$

називають інтегральним оператором Фредгольма (ІОФ) в $C[a,b]$ і K - ядро оператора A.

Означення 2.85. *Ядро K називають виродженим, якщо воно має вигляд*

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\,g_i(t).$$

Приклад 2.86. $K(s,t) = \cos(s-t)$ *є виродженим ядром, оскільки*

$$\cos(s-t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t.$$

Твердження 2.87. $A \in \mathcal{B}(C[a,b])$ *з нормою*

$$\|A\| = \max_{a \le s \le b} \int_a^b |K(s,t)|\,dt.$$

Доведення. З теорії інтегралів залежних від параметра маємо, що довільних $x \in C[a,b]$ інтеграл $\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt$ визначений коректно і неперервно залежить від s.

Покажемо, що $A \in \mathcal{B}(C[a,b])$.

1) Лінійність – очевидна.

2) Покажемо, що $\|A\| \le \max\limits_{a \le s \le b} \int_a^b |K(s,t)|\,dt$. Справді,

$$|(Ax)(s)| = \left|\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt\right| \le \int_a^b |K(s,t)|\;dt \cdot \max_{a \le t \le b} |x(t)|.$$

Звідси випливає, що

$$\|Ax\| \le \max_{a \le s \le b} \int_a^b |K(s,t)|\,dt \cdot \|x\|$$

Отже,

$$\|A\| \le \max_{a \le s \le b} \int_a^b |K(s,t)|\,dt$$

Тепер покажемо, що

$$\|A\| \ge \max_{a \le s \le b} \int_a^b |K(s,t)|\,dt$$

Обмежимося випадком, коли $K(s,t) \neq 0$. Введемо функцію

$$\psi(s) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \int_a^b |K(s,t)|\,dt.$$

Функція ψ є неперервною. Згідно з другою теоремою Вейєрштрасса

$$\exists s_0 \in [a,b] : \qquad \psi(s_0) = \max_{a \le s \le b} \psi(s).$$

Покладемо
$$\varphi(t) := \frac{\overline{K(s_0,t)}}{|K(s_0,t)|}.$$
Легко бачити, що $\|\varphi\| = 1$ і
$$(A\varphi)(s) = \int_a^b \frac{K(s,t)\overline{K(s_0,t)}}{|K(s_0,t)|}\,dt.$$
А тому
$$\|A\varphi\| = \max_{a\le s\le b}\left|\int_a^b \frac{K(s,t)\overline{K(s_0,t)}}{|K(s_0,t)|}\right| \ge \left|\int_a^b \frac{K(s_0,t)|\overline{K(s_0,t)}|}{|K(s_0,t)|}\,dt\right| = \int_a^b |K(s_0,t)|\,dt = \max_{a\le s\le b}\int_a^b |K(s,t)|\,dt\,.$$
$\square$

Означення 2.88. *Нехай A – ІОФ. Рівняння*
$$x - \lambda Ax = y, \qquad \lambda\in\mathbb{C}, \quad y\in C[a,b],$$
називають інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з неперервним ядром.

Повний запис цього рівняння
$$x(s) - \lambda\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt = y(s). \tag{2.15}$$

Зауважимо, що з теореми про збурення коректного оператора випливає, що якщо
$$|\lambda| < \frac{1}{\|A\|} := \frac{1}{\max\limits_{a\le s\le b}\int_a^b |K(s,t)|\,dt},$$
то рівняння (2.15) є коректно розв'язним.

Наслідок 2.89. *Якщо* $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, *де* $M = \max\limits_{s,t}|K(s,t)|$, *то рівняння* (2.15) *є коректно розв'язним.*

Приклад 2.90. *У просторі* $C[a,b]$ *знайти розв'язок рівняння* (2.15)*, якщо:*
$$a=0,\ b=1,\ K(s,t) = s+t-2st, \quad y(s) = s+s^2.$$

Розв'язування. Йдеться про рівняння
$$x(s) - \lambda\int_0^1 (t+s-2st)\,x(t)dt = s+s^2,$$
або, що рівносильно,
$$x(s) - \lambda s\int_0^1 (1-2t)\,x(t)dt - \lambda\int_0^1 tx(t)dt = s+s^2.$$
Приймемо
$$\int_0^1 (1-2t)\,x(t)dt = a, \qquad \int_0^1 tx(t)dt = b. \tag{2.16}$$

Маємо

$$x(s) - \lambda as - \lambda b = s + s^2,$$

тобто

$$x(s) = s^2 + (1 + \lambda a)\, s + \lambda b. \tag{2.17}$$

Підставляючи (2.17) в (2.16), отримуємо

$$\begin{cases} (6 - 3\lambda)\, a + (12 - 6\lambda)\, b = 5; \\ -4\lambda a + (12 - 6\lambda)\, b = 7. \end{cases}$$

Враховуючи, що визначник цієї системи дорівнює

$$\Delta = (6 - 3\lambda)(12 - 6\lambda) + 4\lambda(12 - 6\lambda) = 6(2 - \lambda)(6 + \lambda),$$

одержуємо

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 12 - 6\lambda \\ 7 & 12 - 6\lambda \end{vmatrix}}{(12 - 6\lambda)(6 + \lambda)} = \frac{-2(12 - 6\lambda)}{(12 - 6\lambda)(6 + \lambda)} = \frac{-2}{6 + \lambda},$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 6 - 3\lambda & 5 \\ -4\lambda & 7 \end{vmatrix}}{(12 - 6\lambda)(6 + \lambda)} = \frac{42 - 21\lambda + 20\lambda}{(12 - 6\lambda)(6 + \lambda)} = \frac{42 - \lambda}{6(2 - \lambda)(6 + \lambda)}.$$

Беручи до уваги (2.17), бачимо, що

$$x(s) = s^2 + \left(1 - \frac{2\lambda}{6 + \lambda}\right) s + \frac{\lambda(42 - \lambda)}{6(2 - \lambda)(6 + \lambda)}.$$

Неважко зміркувати, що при $\lambda \in \{-6; 2\}$ рівняння розв'язків немає.

Означення 2.91. *Рівняння*

$$\int_a^b K(s,t)x(t)\, dt = y(s), \qquad y \in C[a,b],$$

називають інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду з неперервним ядром.

Твердження 2.92. *Нехай A – ІОФ з ядром K, B – ІОФ з ядром L. Тоді AB – ІОФ з ядром*

$$M(s,t) = \int_a^b K(s,u)L(u,t)\, du.$$

Доведення.

$$((AB)(x))(s) = \int_a^b K(s,u)(Bx)(u)\, du = \int_a^b K(s,u) \int_a^b L(u,t)x(t)\, dt\, du =$$
$$\int_a^b \left\{ \int_a^b K(s,u)L(u,t)\, du \right\} x(t)\, dt. \tag{2.18}$$

□

Наслідок 2.93. *Нехай $K_1(s,t) \overset{\text{def}}{=} K(s,t)$ і $\forall n \in \mathbb{N} \quad K_{n+1}(s,t) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b K_n(s,u)K(u,t)\, du$. Тоді*

$$(A^n x)(s) = \int_a^b K_n(s,t)x(t)\, dt.$$

Лема 2.94. *Нехай A – ІОФ з ядром K.*

$$\text{Ряд} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n \quad \text{збігається} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \text{таке що} \quad |\lambda|^k \max_{a \le s \le b} \int_a^b |K_k(s,t)|\, dt < 1. \quad (2.19)$$

У цьому випадку рівняння (2.15) *є коректно розв'язним і*

$$x(s) = y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_n(s,t)\, y(t)\, dt = y(s) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int_a^b K_n(s,t)\, y(t)\, dt.$$

Твердження 2.95. *Нехай* $K_1(s,t) \overset{\text{def}}{=} K(s,t)$ *і* $\forall n \in \mathbb{N} \quad K_{n+1}(s,t) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b K_n(s,u) K(u,t)\, du$ *і* $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, *де* $M = \max\limits_{s,t} |K(s,t)|$. *Тоді*

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s,t) \right\} y(t)\, dt.$$

Доведення. Нехай A та B – ІОФ з ядром K та L відповідно, причому $|K_n(s,t)| \le C_1$, $|L_n(s,t)| \le C_2$. Звідси випливає, що

$$|M(s,t)| \le \left| \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s,u) L(u,t)\, du \right\} x(t)\, dt \right| \le C_1 C_2 (b-a).$$

Використовуючи індукцію

$$|K_1(s,t)| \le M \Longrightarrow |K_2(s,t)| \le M^2(b-a) \Longrightarrow ... \Longrightarrow |K_n(s,t)| \le M^n (b-a)^{n-1}$$

Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^{n-1} K_n(s,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^{n-1} M^n (b-a)^{n-1}| = M \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda M (b-a)|^{n-1} < \infty.$$

Отже, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s,t)$$

збігається абсолютно та рівномірно (ознака Вейєрштасса), а тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \lambda^{n-1} K_n(s,t)\, y(t)\, dt = \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s,t) \right\} y(t)\, dt.$$

□

Метод резольвент для інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду

Означення 2.96. *Функцію*

$$R(s,t,\lambda) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s,t),$$

де функції $K_n(s,t)$ знаходять за допомогою рекурентної формули

$$K_1(s,t) = K(s,t), \; K_n(s,t) = \int_a^b K_{n-1}(s,u) K_1(u,t) dt, \quad n = 2, 3, ... \qquad (2.20)$$

називають резольвентою Фредгольма.

Тоді розв'язок $x(s)$ рівняння

$$x(s) - \lambda \int\limits_a^b K(s,t)x(t)\,dt = y(s) \tag{2.21}$$

можна записати у вигляді

$$x(s) = y(s) + \lambda \int\limits_a^b R(s,t,\lambda)y(t)\,dt. \tag{2.22}$$

Такий метод розв'язання інтегральних рівнянь називають метод ітерованих ядер або метод резольвент. Цей метод застосований у випадку коли $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$. Зауважимо, що у просторі $L_2(a,b)$ метод ітерованих ядер застосований, якщо

$$|\lambda| < \frac{1}{\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(s,t)|^2 ds dt}.$$

Приклад 2.97. *Знайти резольвенту Фредгольма для рівняння* (2.21), *якщо:*

$$K(s,t) = e^{s+t}, \qquad a = 0,\ b = 1.$$

Розв'язування. Обчислимо ітеровані ядра за допомогою формули (2.20)

$$K_1(s,t) = e^{s+t},\ K_2(s,t) = \int_0^1 e^{s+u}e^{u+t}du = e^{s+t}\cdot\tfrac{1}{2}(e^2-1), \ldots$$
$$K_n(s,t) = e^{s+t}\left(\tfrac{e^2-1}{2}\right)^{n-1}.$$

Тоді резольвента Фредгольма рівняння (2.21) набуде вигляду

$$R(s,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} e^{s+t}\left(\frac{e^2-1}{2}\right)^{n-1} = e^{s+t}\frac{1}{1-\frac{\lambda(e^2-1)}{2}} = e^{s+t}\frac{2}{2-\lambda(e^2-1)}.$$

Приклади для самостійної роботи:

Приклад 2.98. *Знайти резольвенту Фредгольма для рівняння* (2.21), *якщо:*
a) $K(s,t) = \sin s \cos t, \quad a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}$;
b) $K(s,t) = s\cdot e^t, \quad a = -1,\ b = 1$;
c) $K(s,t) = s\cdot t, \quad a = -1,\ b = 1$.

Приклад 2.99. *Розв'язати методом ітерованих ядер рівняння*

$$x(s) = 1 + \int\limits_{-1}^{1} s^2\cdot t^2 x(t)dt.$$

Розв'язання. За формулою (2.20) знаходимо

$K_1(s,t) = s^2t^2$,

$K_2(s,t) = \int\limits_{-1}^{1} s^2u^2\cdot u^2t^2du = \frac{2}{5}s^2t^2, ...,$

$K_n(s,t) = \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} s^2t^2,$

А отже,
$$R(s,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left(\frac{2}{5}\right)^n s^2t^2 = s^2t^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{2\lambda}{5}}.$$
Враховуючи, що в нашому випадку $\lambda = 1$ отримуємо, що
$$x(s) = 1 + \int\limits_{-1}^{1} R(s,t,1)\cdot 1\,dt = 1 + \int\limits_{-1}^{1} s^2t^2 \cdot \frac{5}{3}\,dt = 1 + \frac{10}{9}s^2.$$

Метод послідовних наближень

Твердження 2.100. *Нехай $x_0 \in C[a,b]$. Тоді*
$$x_n(s) = y(s) + \lambda \int\limits_a^b K(s,t)x_{n-1}(t)\,dt, \tag{2.23}$$
при λ, яке задовільняє умову $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$, існує $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: x$, причому x є розв'язком рівняння (2.15).

Характеристичні числа та власні функції ядра інтегрального рівняння

Означення 2.101. *Ненульове число λ називають характеристичним числом ядра K, якщо однорідне рівняння*
$$x(s) - \lambda \int\limits_a^b K(s,t)x(t)\,dt = 0$$
має ненульовий розв'язок x_0, який називають власною функцією цього ядра.

Легко бачити, що λ є характеристичним числом ядра K тоді і лише тоді, коли $\frac{1}{\lambda}$ належить точковому спектру оператору A.

Приклад 2.102 (36.16). *У просторі $C[0,1]$ знайти характеристичні числа λ і власні функції φ для рівняння*
$$x(s) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(s+t)\,x(t)\,dt = 0.$$

Розв'язування. Перепишемо рівняння у вигляді
$$x(s) - \lambda \cos s \int_0^{\pi} \cos t\, x(t)\,dt + \lambda \sin s \int_0^{\pi} \sin t\, x(t)\,dt = 0.$$
Тоді
$$x(s) = \lambda \cos s C_1 - \lambda \sin s C_2,$$
де
$$C_1 = \int_0^{\pi} \cos t\, x(t)\,dt, \qquad C_2 = \int_0^{\pi} \sin t\, x(t)\,dt.$$
Для знаходження C_1, C_2 одержимо систему рівнянь
$$\begin{cases} C_1 = \int\limits_0^{\pi} \cos t\,(\lambda \cos t C_1 - \lambda \sin t C_2)\,dt, \\ C_2 = \int\limits_0^{\pi} \sin t\,(\lambda \cos t C_1 - \lambda \sin t C_2)\,dt, \end{cases} \tag{2.24}$$

або
$$\left\{ \begin{array}{l} C_1(1-\frac{\pi}{2}\lambda)=0, \\ C_2(1+\frac{\pi}{2}\lambda)=0. \end{array} \right. \tag{2.25}$$
Оскільки нас цікавить ненульовий розв'язок інтегрального рівняння, коефіцієнти C_1, C_2 не можуть одночасно дорівнювати нулю. Отже, $\lambda=\frac{2}{\pi}$ і C_1 – довільне, або $\lambda=-\frac{2}{\pi}$ і C_2 – довільне. Отож, характеристичними значеннями рівняння є числа $\lambda=\frac{2}{\pi}$, $\lambda=-\frac{2}{\pi}$, а відповідними їм власними функціями – функції $x(s)=\cos s$, $x(s)=\sin s$.

Приклад 2.103. *У просторі $C[0,1]$ знайти характеристичні числа λ_n і власні функції φ_n для рівняння*
$$x(t)-\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds=0,$$
де $K(t,s)=\left\{ \begin{array}{ll} t(s+1), & 0\le s\le t\le 1, \\ s(t+1), & 0\le t\le s\le 1. \end{array} \right.$

.

Розв'язування. Знайдемо крайову задачу для диференціального рівняння, яка еквівалентна до заданого інтегрального рівняння. Для цього продиференціюємо два рази рівність
$$x(t)=\lambda\left(\int_0^t t(s+1)x(s)\,ds+\int_t^1 s(t+1)x(s)\,ds\right). \tag{2.26}$$
Маємо
$$\begin{array}{c} x'(t)=\lambda\left(\int_0^t(s+1)x(s)\,ds+\int_t^1 sx(s)\,ds\right), \\ x''(t)=\lambda((t+1)x(t)-tx(t))=\lambda x(t). \end{array} \tag{2.27}$$
Обчислимо значення функцій $x(t)$ і $x'(t)$ у точках $t=0$ і $t=1$ (з (2.26) і (2.27))
$$\begin{array}{ll} x(0)=\lambda\int_0^1 sx(s)\,ds, & x(1)=\lambda\int_0^1(s+1)x(s)\,ds; \\ x'(0)=\lambda\int_0^1 sx(s)\,ds, & x'(1)=\lambda\int_0^1(s+1)x(s)\,ds. \end{array}$$
Отож, знаходження характеристичних чисел і власних функцій рівняння (2.26) рівносильне знаходженню власних чисел і власних функцій такої крайової задачі:
$$x''=\lambda x, \quad x(0)=x'(0), \quad x(1)=x'(1). \tag{2.28}$$
Нехай $\lambda=\rho^2$. Тоді функція $x(t)=C_1e^{\rho t}+C_2e^{-\rho t}$ є загальним розв'язком диференціального рівняння, а крайові умови набувають вигляду
$$\left\{ \begin{array}{l} C_1+C_2=\rho(C_1-C_2), \\ C_1e^{\rho}+C_2e^{-\rho}=\rho(C_1e^{\rho}-C_2e^{-\rho}). \end{array} \right. \tag{2.29}$$
Ненульові розв'язки задачі (2.28) існують при λ, що задовольняють умову $(1-\rho^2)(e^{-\rho}-e^{\rho})=0$, тобто коли визначник системи (2.29) дорівнює нулеві. Розв'язки цього рівняння такі: $\rho=\pm1$, $\rho=ik\pi$. Тому власними значеннями задачі (2.28) (і характеристичними числами рівняння (2.26)) є $\lambda_0=1$, $\lambda_k=-k^2\pi^2$, $k\in\mathbb{N}$. Знайдемо відповідні власні функції. Нехай $\lambda=1$. З (2.29) випливає, що $C_2=0$ (або $C_1=0$), тобто $x(t)=C_1e^t$. Отож, $\varphi_0=e^t$. При $\lambda=-k^2\pi^2$ система (2.29) набуває вигляду
$$C_1+C_2=ik\pi(C_1-C_2), \tag{2.30}$$
а розв'язок задачі (2.28) має вигляд
$$x_k(t)=(C_1+C_2)\cos k\pi t+i(C_1-C_2)\sin k\pi t. \tag{2.31}$$
Враховуючи (2.30), з (2.31) отримуємо $\varphi(t)=\sin k\pi t+k\pi\cos k\pi t$.

Інтегральні рівняння Вольтерра 2-го роду з неперервним ядром

Нехай $-\infty < a < b < +\infty$, $x \in C[a,b]$, $\triangle = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : a \le s \le b, a \le t \le s\}$, $K \in C(\triangle)$.

Означення 2.104. *Оператор A, що визначається з умови*

$$\forall x \in C[a,b] \qquad (Ax)(s) = \int_a^s K(s,t)x(t)\,dt, \tag{2.32}$$

називають інтегральним оператором Вольтерра (ІОВ) в $C[a,b]$ і K – ядро оператора A.

Означення 2.105. *Нехай $y \in C[a,b]$. Рівняння вигляду*

$$x(s) - \lambda \int_a^s K(s,t)x(t)ds = y(s) \tag{2.33}$$

називають інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду.

Приклад 2.106. $[a,b] = [0,1]$, $\qquad K(s,t) = 1$

$$(Ax)(s) = \int_0^s x(t)\,dt.$$

Зауважимо, що оператор Вольтерра – частковий випадок оператора Фредгольма.

Твердження 2.107. $A \in \mathcal{B}(C[a,b])$.

Твердження 2.108. *(множення ІОВ) Нехай A – ІОВ з ядром K, B – ІОВ з ядром L. Тоді AB - ІОВ з ядром*

$$M(s,t) = \int_t^s K(s,u)L(u,t)\,du.$$

Доведення.

$$((AB)(x))(s) = \int_a^s K(s,u)(Bx)(u)\,du = \int_a^s K(s,u)\int_a^u L(u,t)x(t)\,dt\,du =$$

$$\int\int_\triangle K(s,u)L(u,t)\,x(t)\,du\,dt = \int_a^s\int_t^s K(s,u)L(u,t)x(t)\,du\,dt = \int_a^s \left\{\int_t^s K(s,u)L(u,t)\,du\right\} x(t)\,dt.$$

Наслідок 2.109. *Нехай $K_1(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} K(s,t)$ і*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad K_{n+1}(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^s K_n(s,u)K(u,t)\,du.$$

Тоді A^n – ІОВ з ядром K_n.

Лема 2.110. $|K(s,t)| \le M \Longrightarrow |K_n(s,t)| \le \frac{M^n(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Доведення. $|K_2(s,t)| = \left|\int_t^s K(s,u)K(u,t)\,du\right| \le M^2(s-t)$.

$$|K_{n+1}(s,t)| \le \int\limits_t^s |K_n(s,u)|\,|K(u,t)|\,du \le \int\limits_t^s \frac{M^n(s-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du = \frac{M^{n+1}}{(n-1)!}\int\limits_t^s (s-u)^{n-1}\,du = \frac{M^{n+1}(s-t)^n}{n!}.$$

□

Наслідок 2.111. *Нехай* $|K(s,t)| \leq M$. *Тоді* $\|A^n\| \leq \frac{M^n(b-a)^n}{(n-1)!}$.

Доведення.

$$|(A^n x)(s)| = \left| \int\limits_a^s K_n(s,t)\, x(t) dt \right| \leq \int\limits_a^s \frac{M^n (s-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt \,\|x\| \leq \frac{M^n}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}(b-a)\,\|x\| = \frac{M^n}{(n-1)!}(b-a)^n \,\|x\|.$$

Звідси випливає, що

$$\|A^n x\| \leq \frac{M^n}{(n-1)!}(b-a)^n \,\|x\|.$$

□

Наслідок 2.112. $r(A) = 0$.

Доведення. Нехай $C > 0$. Тоді

$$\|A^n\| \leq \frac{M^n}{(n-1)!}(b-a)^n = \frac{M^n(b-a)^n}{C^n} \cdot \frac{C^n}{(n-1)!}.$$

При $n \to \infty$: $\quad \frac{C^n}{(n-1)!} \to 0$. Отже,

$$\|A^n\| \leq \left(\frac{M(b-a)}{C} \right)^n \qquad \text{при достатньо великих n.}$$

А тому

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{M(b-a)}{C}.$$

Звідси випливає, що $r(A) \leq \frac{M(b-a)}{C}$. Оскільки C довільне, то $r(A) = 0$. □

Твердження 2.113. $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$ *рівняння Вольтера 2-го роду* (2.34) *коректно розв'язне.*

□

Метод резольвент для інтегральних рівнять Вольтерра 2-го роду

Нагадаємо, що рівняння вигляду

$$x(s) - \lambda \int_a^s K(s,t)x(t)ds = y(s) \tag{2.34}$$

називають *інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду.*

Якщо ядро та вільний член неперервні, тоді рівняння Вольтерра коректно розв'язне в $C[a,b]$ при всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ і розв'язок інтегрального рівняння (2.34) можна записати за допомогою резольвенти у вигляді

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_a^s R(s,t,\lambda)y(t)dt.$$

Тут

$$R(s,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s,t),$$

де функції K_n визначаються за рекурентною формулою

$$K_n(s,t) = \int_t^s K_{n-1}(s,u)K(u,t)du.$$

Приклад 2.114. *Розв'язати рівняння методом резольвент у просторі* $C[0,1]$*:*

а) $x(s) = e^s + \int_0^s e^{s-t}x(t)dt, \qquad 0 \le s \le 1$*;*

б) $x(s) = \sin s + 2\int_0^s e^{s-t}x(t)dt, \qquad 0 \le s \le 1$*;*

в) $x(s) = 1 - 2s - \int_0^s e^{s^2-t^2}x(t)dt, \quad 0 \le s \le 1$*;*

г) $x(s) - \int_0^s e^{s-t}x(t)ds = te^{\frac{s^2}{2}}, \qquad 0 \le s \le 1$*;*

д) $x(s) = e^{-s} + \int_0^s x(t)dt, \qquad 0 \le s \le 1.$

Розв'язування. а) Знайдемо ітеровані ядра цього рівняння:

$$
\begin{aligned}
&K_1(s,t) = e^{s-t},\\
&K_2(s,t) = \int_t^s K_1(s,u)K_1(u,t)du = \int_t^s e^{s-u}e^{u-t}du = e^{s-t}(s-t),\\
&K_3(s,t) = \int_t^s K_2(s,u)K_1(u,t)du = \int_t^s e^{s-u}(s-u)e^{u-t}du = e^{s-t}\frac{(s-t)^2}{2}, \ldots\ldots\\
&K_n(s,t) = e^{s-t}\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}
$$

Отож, ядро резольвенти набуває вигляду

$$R(s,t,1) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{s-t}\cdot\frac{(s-t)^n}{n!} = e^{s-t}\cdot e^{s-t} = e^{2(s-t)}$$

і розв'язок рівняння запишемо у вигляді

$$x(s) = e^s + \int_0^s e^{2(s-t)}e^t dt = e^{2s}.$$

б) За допомогою рекурентної формули отримуємо, що

$$K_n(s,t) = e^{s-t}\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \; R(s,t,2) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{s-t}\frac{(s-t)^n}{n!} = e^{3(s-t)}.$$

А тому

$$x(s) = \sin s + 2e^{3s}\int_0^s e^{-3t}\sin t dt = \sin s - \frac{1}{5}(3\sin s + \cos s) + \frac{1}{5}e^{3s}.$$

Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь Вольтерра

Твердження 2.115. *Нехай* $x_0 \in C[a,b]$*. Тоді*

$$x_n(s) = y(s) + \lambda\int_a^s K(s,t)x_{n-1}(t)\,dt \tag{2.35}$$

при всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ *існує* $\lim_{n\to\infty} x_n =: x$*, причому* x *є розв'язком рівняння* (2.15).

Приклад 2.116. *Розв'язати методом послідовних наближень рівняння*

$$x(s) = 1 - \int\limits_0^s (s-t)x(t)dt, \;\; x_0(s) \equiv 0.$$

Беручи до уваги формулу (2.35), отримуємо

$$x_1(s) \equiv 1, \quad x_2(s) = 1 - \int_0^s (s-t)dt = 1 - \frac{s^2}{2!},$$
$$x_3(s) = 1 - \int_0^s (s-t) \cdot \left(1 - \frac{t^2}{2!}\right) dt = 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!}, \ldots\ldots.$$

А тому $x(s) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(s) = \cos s$.

Приклади на самостійну роботу

Приклад 2.117. *Розв'язати методом послідовних наближень рівняння*

а) $x(s) = 1 + \int_0^s x(t)dt,\ 0 \le s \le 1$*;*

б) $x(s) = s - \int_0^s (s-t)x(t)dt, \;\; x_0(s) \equiv 0$*;*

в) $x(s) = 1 - \int_0^s (s-t)x(t)dt, \;\; x_0(t) \equiv 0.$

7. Компактні оператори

I. Скінченновимірні оператори

Означення 2.118. *Нехай X – лінійний простір, $A : X \to X$ - лінійний оператор.*
A – скінченновимірний оператор $\stackrel{\text{def}}{=}$ $\dim R(A) < \infty$.

Позначення. Нехай X – лінійний нормований простір.

$$A \in \mathcal{B}^f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{l} 1) \quad A \ - \ \text{скінченновимірний оператор} \\ 2) \quad A \in \mathcal{B}(X) \end{array}$$

Приклад 2.119. *Нехай H – гільбертів простір, $f, g \in H$.*

$$\forall\, x \in H \qquad Ax = (x|f)g.$$

Легко бачити, що $\dim R(A) = 1$. *Отже, $A \in \mathcal{B}^f(H)$.*

Приклад 2.120. *Нехай $X = C[0,1]$,* $\quad \|x\| = \max\limits_{0 \le t \le 1} |x(t)|$.

$$\forall\, x \in X \qquad (Ax)(t) = x(0) + tx(1) + \left(\int_0^1 x(t)\,dt\right) e^t.$$

Маємо, що $A \in \mathcal{B}(X)$, $\quad \dim R(A) = 3$. *Отже, $A \in \mathcal{B}^f(X)$.*

Приклад 2.121. *Нехай $X = C[0,1]$,* $\quad \|x\| = \int_0^1 |x(t)|\,dt$.

$$\forall\, x \in X \qquad (Ax)(t) = x(0)\varphi, \qquad \varphi \in C[0,1].$$

В цьому випадку, $\dim R(A) = 1$. *Проте $A \notin \mathcal{B}(X)$. Справді, розглянемо послідовність функцій*

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \frac{1}{n} < t \le 1, \\ -nt + 1, & \text{якщо } 0 \le t \le \frac{1}{n} \end{cases}$$

Легко бачити, що $x_n \to 0$, $\quad Ax_n \to \varphi$. Звідси випливало б, що $\varphi = 0$, але $\varphi \neq 0$, тому $A \notin \mathcal{B}(X)$, а отже, $A \notin \mathcal{B}^f(X)$.

Теорема 2.122. ***(про суму та добуток скінченновимірних операторів)***
Нехай X – нормований простір, оператори $A, B \in \mathcal{B}^f(X)$, $\quad C \in \mathcal{B}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. *Тоді*

$$A + B, \qquad \lambda\, A, \qquad AC, \qquad CA \qquad \in \mathcal{B}^f(X).$$

Доведення. 1. $\quad A + B, \quad \lambda\, A, \quad AC, \qquad CA \quad \in \mathcal{B}(X)$ очевидно.
2. а) $R(A + B) \subset R(A) + R(B) \Longrightarrow \dim R(A + B) \le \dim R(A) + \dim R(B) < \infty$;
б)

$$R(\lambda A) = \begin{cases} R(A), & \text{якщо } \lambda \neq 0, \\ \{0\}, & \text{якщо } \lambda = 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $\dim R(\lambda A) < \infty$;
в) $R(AC) \subset R(A) \Longrightarrow \dim R(AC) \le \dim R(A) < \infty$;
г) нехай $\varphi_1, ..., \varphi_k$ – база в $R(A)$. Тоді

$$R(CA) = sp\{C\varphi_1, ..., C\varphi_k\} \Longrightarrow \dim R(CA) \le k = \dim R(A).$$

□

Теорема 2.123. ***(про загальний вигляд скінченновимірного оператора в гільбертовому просторі)***

Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{B}^f(X)$, $\dim R(A) = n$. Тоді існують лінійно незалежні $\varphi_1, ..., \varphi_n \in H$ та лінійно незалежні $\psi_1, ..., \psi_n \in H$ такі, що

$$\forall\, x \in H \qquad Ax = \sum_{i=1}^{n} (x|\varphi_i)\psi_i.$$

При цьому,

$$\forall\, y \in H \qquad A^*y = \sum_{i=1}^{n} (y|\psi_i)\varphi_i,$$

зокрема, $\dim R(A) = \dim R(A^*)$.

Доведення. Нехай $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ – ортонормована база в $R(A)$. Тоді

$$\forall\, x \in H \qquad \exists\, c_1, ..., c_n \in \mathbb{C} : \qquad Ax = \sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i.$$

Тому

$$(Ax|\psi_j) = (\sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i|\psi_j) = c_j,$$

а отже,

$$c_j = (Ax|\psi_i) = (x|A^*\psi_i).$$

Покладемо

$$A^*\psi_i \overset{\text{def}}{=} \varphi_i, \qquad\qquad i = 1, ..., n.$$

Тоді

$$\forall\, x \in H \qquad Ax = \sum_{i=1}^{n} (x|\varphi_i)\psi_i.$$

Знайдемо A^*. Для довільних $x, y \in H$ маємо

$$(x|A^*y) = (Ax|y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x|\varphi_i)\psi_i|y\right) = \sum_{i=1}^{n} (x|\varphi_i)\,(\psi_i|y) = \sum_{i=1}^{n} (x|\,(y|\psi_i)\varphi_i) = \left(x|\sum_{i=1}^{n} (y|\psi_i)\varphi_i\right).$$

Отже,

$$\forall\, y \in H \qquad A^*y = \sum_{i=1}^{n} (y|\psi_i)\varphi_i,$$

звідки випливає, що $R(A^*) = sp\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$, а тому $\dim R(A^*) \le n$. Оскільки

$$\dim R(A^*) \le n = \dim R(A),$$

то

$$\dim R(A^*) \le \dim R(A) \Longrightarrow n = \dim R(A) = \dim R(A^{**}) \le \dim R(A^*) \Longrightarrow n \le \dim R(A^*).$$

Отже, $\dim R(A) = \dim R(A^*) = n \Longrightarrow \varphi_1, ..., \varphi_n$ лінійно незалежні.

$\square$

II. Компактні оператори

Зауважимо, що множина M – відносно компактна, якщо з будь-якої її нескінченної послідовності можна вибрати збіжну підпослідовність, причому гранична точка може і не належати до M.

Теорема 2.124. ***(Гаусдорф)***

Нехай X банахів простір, $M \subset X$.

M – відносно компактна $\Longleftrightarrow$ M – цілком обмежена.

Означення 2.125. *M – цілком обмежена* $\overset{\text{def}}{=}$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ *скінченна ε-сітка для M.*

Іншими словами, множина M – цілком обмежена, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ її можна покрити скінченною кількістю відкритих куль радіуса ε.

Означення 2.126. *M_ε – $\varepsilon-$сітка для M* $\overset{\text{def}}{=}$ $\forall m \in M \quad \exists m_\varepsilon \in M_\varepsilon \quad \|m - m_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Отже, M_ε є ε-сіткою для M, якщо множину M_ε можна покрити відкритими кулями радіусами ε із центрами в точках m_ε, тобто

$$M \subset B(m_\varepsilon, \varepsilon), \quad m_\varepsilon \in M_\varepsilon.$$

Приклад 2.127. *Нехай H – гільбертів простір,* $\dim H = \infty$, $U = \{x \in H : \ \|x\| \leq 1\}$.

Легко показати, що множина U обмежена (можна в якості кулі, яка буде містити множину U взяти $B(x_0, r)$, де x_0 довільний елемент з простору H, а $r := 1 + \|x_0\|$). Але U не цілком обмежена. Справді, нехай $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормована база в H. Тоді $\forall n \in \mathbb{N} \quad e_n \in U$. Оскільки

$$d(e_n, e_m) = \|e_n - e_m\| = \sqrt{(e_n - e_m | e_n - e_m)} = \sqrt{(e_n|e_n) + (e_m|e_m)} = \sqrt{2} \quad (n \neq m),$$

то для $\varepsilon > \sqrt{2}$ не існує скінченної ε-сітки для M.

Поняття компактного (цілком неперервного) оператора

Означення 2.128. *Нехай X – нормований простір, $A : X \to X$ - лінійний оператор.*

Оператор A називається компактним (ц.н.), якщо він будь-яку обмежену множину переводить у відносно компактну.

Отже,

$$A - \text{компактний, якщо} \qquad [M - \text{обмежена} \implies AM \text{ відносно компактна}]$$

Критерій відносно компактності в просторі $C[a, b]$

Нехай простір $C[a, b]$ наділений рівномірною метрикою.

Означення 2.129. 1) *Множина M в просторі $C[a, b]$ називається рівномірно обмеженою, якщо*

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in M \quad \forall t \in [a, b] : \qquad |x(t)| \leq C;$$

2) *Множина M в просторі $C[a, b]$ називається одностайно неперервною, якщо*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in M \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b] : \qquad |t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 2.130. ***(Теорема Арцела-Асколі)***

Множина M в просторі $C[a,b]$ відносно компактна тоді і лише тоді коли вона рівномірно обмежена і одностайно неперервна.

Приклад 2.131. *Чи є передкомпактною множина функцій*

$$M = \{x_n(t) = \sin nt, n \in \mathbb{N}\}$$

у просторі $C[0,1]$?

Розв'язування. Скористаємося теоремою Арцела-Асколі. Очевидно, що ця множина обмежена. Доведемо, що вона не є одностайно неперервною. Справді, якщо $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{n}$, $0 < \varepsilon < 2\sin^2\frac{1}{2}$, то $|t_1 - t_2| = \frac{1}{n}$ і $|\sin nt_1 - \sin nt_2| > 2\sin^2\frac{1}{2} > \varepsilon$. Звідси зрозуміло, що виконується таке твердження:

$$\exists\,\varepsilon > 0 \ \ \forall\,\delta > 0 \ \ \exists\,t_1, t_2 \in [0,1] \ \ \exists\,x_n \in M : \ \ |t_1 - t_2| < \delta \ \wedge \ |x_n(t_1) - x_n(t_2)| > \varepsilon.$$

Критерій відносно компактності в просторі l_2

Теорема 2.132. *Множина E в просторі l_2 відносно компактна тоді і лише тоді коли вона рівномірно обмежена і для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий що для всіх $x \in E$ виконується нерівність*

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |x_k|^2 < \varepsilon.$$

Приклад 2.133. *Нехай $A: \ \ell_2 \to \ell_2$ діє так, що*

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots).$$

Довести, що оператор A – компактний.

Розв'язування. Візьмемо обмежену множину E. Тоді

$$\exists\,C > 0 \qquad \forall\,x \in E \qquad \|x\| \le C.$$

Покажемо, що AE – передкомпактна.

1) Нехай $x \in E$. Тоді

$$\|Ax\| = \sqrt{|x_1|^2 + \frac{1}{4}|x_2|^2 + \ldots + \frac{1}{n^2}|x_n|^2 + \ldots} \le \sqrt{|x_1|^2 + \|x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 + \ldots} = \|x\| \le C.$$

Отже, множина AE рівномірно обмежена.

2) Нехай $x \in E$. Тоді

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \left|\frac{1}{k}x_k\right|^2 = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k^2}|x_k|^2 \le \frac{1}{n_0{}^2}\sum_{k=n_0}^{\infty}|x_k|^2 \le \frac{1}{n_0{}^2}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 = \frac{1}{n_0{}^2}\|x\|^2 \le \frac{C^2}{n_0^2} < \varepsilon^2.$$

Звідси знаходимо, що

$$n_0 := \max\left\{\left[\frac{C}{\varepsilon}\right], 1\right\}.$$

Тому за критерієм передкомпактності в просторі l_2 множина AE є відносно компактна, а отже, оператор A компактний.

Повернемося до властивостей компактних операторів.

Приклад 2.134. *Нехай H – гільбертів простір, $A = \mathbb{I}_H$.*

1) $\dim H < \infty$:

$$M - \textit{обмежена} \Longrightarrow AM = M \overset{\textit{Больцано-Вейєрштрасса}}{\Longrightarrow} AM - \textit{відносно компактна.}$$

Тобто A є компактним.

2) $\dim H = \infty$:

Візьмемо $M = U$, де U одинична куля. Тоді $AM = U$. Але AM – не відносно компактна, тому A не є компактним.

Позначення. Нехай X, Y – нормовані простори.

$$\mathcal{B}_\infty(X,Y) = \{A : X \to Y \,|\, \text{лінійний компактний оператор, } D(A) = X\}$$

$$\mathcal{B}_\infty(X) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{B}_\infty(X,X)$$

Надалі через U будемо позначати одиничну кулю в X, тобто

$$U = \{x \in X : \ \|x\| \le 1\}.$$

Твердження 2.135. *Нехай X – нормований простір, $A : X \to X$ - лінійний оператор. Тоді*

A – компактний оператор $\iff$ AU – відносно компактна множина.

Доведення. 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Longrightarrow$ 1) : Нехай M – обмежена. Тоді

$$\exists\, c > 0 \quad \forall\, x \in M \quad \|x\| \le c.$$

Нехай $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset M$. Тоді $\left\{\frac{x_n}{c}\right\} \subset U$. Тому $\exists\,\{x_{n_k}\} : \left\{A\left(\frac{x_{n_k}}{c}\right)\right\} \to y$. А отже,

$$\{A\left(x_{n_k}\right)\} \to cy, \quad k \to \infty.$$

□

Твердження 2.136. *Для довільного банахового простору X*

$$\mathcal{B}^f(X) \subset \mathcal{B}_\infty(X) \subset \mathcal{B}(X).$$

Доведення. Нехай $U = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$. Якщо $A \in \mathcal{B}^f(X)$, тоді AU – обмежена (з неперервності)і AU міститься в деякому скінченновимірному нормованому просторі. За лемо Больцано–Вейєрштраса AU – відносно компактна множина, а отже, $A \in \mathcal{B}_\infty(X)$.

Якщо $A \in \mathcal{B}_\infty(X)$, то за теоремою Гаусдорфа AM $-$ цілком обмежена. А тому AM $-$ обмежена. Звідси робимо висновок, що $A \in \mathcal{B}(X)$. □

Теорема 2.137. ***(про границю послідовності компактних операторів)***

Нехай X – банахів простір, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\ A_n \in \mathcal{B}_\infty(X)$, існує $A \in \mathcal{B}(X)$: $\quad A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Тоді $A \in \mathcal{B}_\infty(X)$.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ і існує $N \in \mathbb{N}$: $\quad \forall\, n > N \quad \|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Зафіксуємо таке n:

$$\forall\, x \in U : \qquad \|A_n x - Ax\| \le \|A_n - A\| \|x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки $A_n \in \mathcal{B}_\infty(X)$, то A_nM – цілком обмежена, тобто має скінченну $\varepsilon-$сітку. Нехай L –скінченна $\frac{\varepsilon}{2}-$сітка для A_nU. Тоді L –скінченна $\varepsilon-$сітка для AU. Дійсно, нехай $x \in U$. За означенням сітки:

$$\exists\, l \in L : \quad \|A_nx - l\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді

$$\|Ax - l\| \leq \|Ax - A_nx\| + \|A_nx - l\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Наслідок 2.138. *Границя послідовності скінченновимірних операторів є компактним оператором.*

Приклад 2.139. $X = l_2, \qquad \forall\, x \in X \quad Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, ..., \frac{1}{n}x_n, ...)$ *– діагональний оператор. Покажемо, що* $A \in \mathcal{B}_\infty(X)$.

Розглянемо послідовність операторів

$$A_nx = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, ..., \frac{1}{n}x_n, 0, 0, ...).$$

Оскільки $\dim R(A_n) = n < \infty$, *то* $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad A \in \mathcal{B}^f(X)$. *Крім того, враховуючи, що*

$$\|A_nx - Ax\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}|x_k|^2 < \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2}\|x\|^2,$$

тобто

$$\|A_n - A\| \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

отримуємо, що $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. *Беручи до уваги наслідок 2.138, отримаємо, що* $A \in \mathcal{B}_\infty(X)$.

Теорема про апроксимацію.

Теорема 2.140. *Нехай H - гільбертів простір,* $A \in \mathcal{B}_\infty(H)$. *Тоді існує послідовність скінченновимірних операторів* $(A_n) \subset \mathcal{B}^f(H) : \ A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Ідеал $\mathcal{B}_\infty(X)$.

Теорема 2.141. *Нехай* $A, B \in \mathcal{B}_\infty(H)$, $C \in \mathcal{B}(X), \lambda \in \mathbb{C}$. *Тоді*
1) $A + B \in \mathcal{B}_\infty(H)$;
2) $\lambda A \in \mathcal{B}_\infty(H)$;
3) $AC \in \mathcal{B}_\infty(H)$;
4) $CA \in \mathcal{B}_\infty(H)$;
5) $A^* \in \mathcal{B}_\infty(H)$.

Доведення. 3) Нехай $\exists\, \{A_n\} \subset \mathcal{B}^f(H) : \ A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Тоді маємо,що

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad A_nC \in \mathcal{B}^f(H).$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} A_nC = AC$, то $AC \in \mathcal{B}_\infty(H)$.

5) Нехай $\{A_n\}$ таке як вище. Тоді

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad {A_n}^* \in \mathcal{B}^f(H).$$

Звідси випливає, що

$$\|A_n^* - A^*\| = \|(A_n - A)^*\| = \|A_n - A\| \to \infty.$$

□

Наслідок 2.142. *Нехай* $\dim R(A) = \infty, \quad A \in \mathcal{B}_\infty(H)$. *Тоді* $0 \in \sigma(A)$.

Доведення. Нехай $0 \in \rho(A)$. Тоді A – коректний оператор, тобто $\exists\, A^{-1} \in \mathcal{B}(H): \; A^{-1}A = \mathbb{I}$. Оскільки $A^{-1} \in \mathcal{B}(H)$ *і* $A \in \mathcal{B}_\infty(H)$, то $\mathbb{I} \in \mathcal{B}_\infty(H)$. А звідси випливає, що $\dim H < \infty$. Суперечність.

□

8. Самоспряжені оператори

Розглянемо властивості самоспряжених операторів. Всюди в даній темі H - гільбертів простір.

Означення 2.143. *Оператор* $A \in \mathcal{B}(H)$ *називається самоспряженим, якщо* $A^* = A$.

Означення 2.144. *Квадратичною формою оператора називається функція*

$$H \ni x \to (Ax \mid x) \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2.145. *Щоб оператор* $A \in \mathcal{B}(H)$ *був самоспряженим необхідно і досить, щоб його квадратична форма була дійснозначною.*

Доведення. 1) Нехай оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ є самоспряженим. Тоді для довільного $x \in H$

$$(Ax \mid x) = (x \mid Ax) = \overline{(Ax \mid x)}.$$

А, отже, число $(Ax \mid x)$ є дійсним. Необхідність доведена.

2) Нехай квадратична форма оператора $A \in \mathcal{B}(H)$ є дійснозначна. Тоді для довільних $x \in H$ маємо

$$(x \mid Ax) = \overline{(Ax \mid x)} = (Ax \mid x). \tag{2.36}$$

Оскільки для довільних $x, y \in H$

$$(A(x+y) \mid x+y) = (Ax \mid x) + (Ay \mid y) + (Ax \mid y) + (Ay \mid x)$$

і

$$(x+y \mid A(x+y)) = (x \mid Ax) + (y \mid Ay) + (x \mid Ay) + (y \mid Ax),$$

то з врахуванням (2.36) маємо, що

$$(Ax \mid y) + (Ay \mid x) = (x \mid Ay) + (y \mid Ax).$$

Зауважимо, що

$$(Ax \mid y) - (y \mid Ax) = (Ax \mid y) - \overline{(Ax \mid y)} = 2\,\mathrm{Im}(Ax \mid y)$$

і

$$(x \mid Ay) - (Ay \mid x) = (x \mid Ay) - \overline{(x \mid Ay)} = 2\,\mathrm{Im}(x \mid Ay).$$

Зі сказаного отримуємо, що

$$\operatorname{Im}(Ax \mid y) = \operatorname{Im}(x \mid Ay), \qquad x, y \in H.$$

Замінюючи в останній рівності x на ix, приходимо до рівності

$$\operatorname{Re}(Ax \mid y) = \operatorname{Re}(x \mid Ay), \qquad x, y \in H.$$

Отже,

$$(Ax \mid y) = (x \mid Ay), \qquad x, y \in H,$$

тобто $A^* = A$. □

Наступна теорема дає нам ще одну формулу для знаходження норми самоспряженого оператора.

Теорема про норму обмеженого самоспряженого оператора.

Теорема 2.146. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ і $A^* = A$. Тоді*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax \mid x)|.$$

Доведення. Нехай виконані умови теореми і

$$\alpha := \sup_{\|x\|=1} |(Ax \mid x)|.$$

1) Використовуючи нерівність Буняковського отримуємо, що

$$|(Ax \mid x)| \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|A\|\|x\|^2 = \|A\|, \qquad \text{якщо} \quad \|x\| = 1.$$

Тому $\alpha \leq \|A\|$.

2) Нехай $x \in H \setminus \{0\}$. Тоді

$$|(Ax \mid x)| = \|x\|^2 |(A\tfrac{x}{\|x\|} \mid \tfrac{x}{\|x\|})| \leq \alpha \|x\|^2.$$

Звідки випливає, що

$$|(Ax \mid x)| \leq \alpha \|x\|^2, \qquad x \in H.$$

Скористаємося тим, що для довільних $x, y \in H$

$$\begin{aligned}(A(x+y) \mid x+y) - (A(x-y) \mid x-y) = 2(Ax \mid y) + 2(Ay \mid x) = \\ = 2(Ax \mid y) + 2(y \mid Ax) = 4\operatorname{Re}(Ax \mid y).\end{aligned} \tag{2.37}$$

Звідки випливає, що

$$\begin{aligned}4|\operatorname{Re}(Ax \mid y)| \leq |(A(x+y \mid x+y)| + |(A(x-y \mid x-y)| \leq \\ \leq \alpha\|x+y\|^2 + \alpha\|x-y\|^2 = \alpha(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2).\end{aligned} \tag{2.38}$$

Нехай $\|x\| = \|y\| = 1$. Тоді використовуючи рівність паралелограма, отримуємо

$$4|\operatorname{Re}(Ax \mid y)| \leq \alpha(\|x+y\|^2 + \|x+y\|^2) = \alpha(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2) = 4\alpha.$$

Отже,

$$|\operatorname{Re}(Ax \mid y)| \leq \alpha, \qquad \text{якщо} \quad \|x\| = \|y\| = 1.$$

Припустимо, що $\|x\| = 1$, $\|Ax\| \neq 0$ і покладемо $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$. Оскільки $\|y\| = 1$ і

$$|\operatorname{Re}(Ax \mid \tfrac{Ax}{\|Ax\|})| = \|Ax\|,$$

то з останньої нерівності випливає, що

$$\|Ax\| \le \alpha, \qquad \text{якщо} \quad \|x\| = 1,$$

тобто

$$\|A\| \le \alpha.$$

З доведених нерівностей маємо, що $\|A\| = \alpha$. Теорема доведена.

$\square$

Співвідношення між областю значень оператора A і ядром спряженого оператора A^*.

Теорема 2.147. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$. Тоді*

$$(\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker A^*, \qquad \overline{\operatorname{ran} A} = (\ker A^*)^{\perp}.$$

Доведення. Доведемо першу рівність. Маємо

$$(y \perp \operatorname{ran} A) \Leftrightarrow (\forall x \in H \ (Ax \mid y) = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in H \ (x \mid A^* y) = 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (A^* y \perp H) \Leftrightarrow (A^* y = 0) \Leftrightarrow (y \in \ker A^*).$$

Отже,

$$(\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker A^*.$$

Звідси випливає, що

$$(\ker A^*)^{\perp} = [(\operatorname{ran} A)^{\perp}]^{\perp}.$$

З неперервності скалярного добутку випливає, що

$$(\operatorname{ran} A)^{\perp} = (\overline{\operatorname{ran} A})^{\perp}.$$

А згідно з теоремою про ортогональну проекцію

$$[(\overline{\operatorname{ran} A})^{\perp}]^{\perp} = \overline{\operatorname{ran} A}.$$

Тому

$$\overline{\operatorname{ran} A} = (\ker A^*)^{\perp}.$$

$\square$

Теорема про спектр обмеженого самоспряженого оператора.

Теорема 2.148. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ і $A^* = A$. Тоді $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай $\lambda = \xi + i\varepsilon$, де $\xi, \varepsilon \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon \ne 0$. Покажемо, що оператор $A - \lambda I$ є обмежений знизу. Дійсно, для довільного $x \in H$

$$\operatorname{Im}((A - \lambda I)x \mid x) = -\operatorname{Im} \lambda (x \mid x) = -\varepsilon \|x\|^2,$$

а , отже,

$$|\varepsilon| \|x\|^2 = |\operatorname{Im}((A - \lambda I)x \mid x)| \le |((A - \lambda I)x \mid x)| \le \|(A - \lambda I)x\| \|x\|.$$

Тут ми скористалися нерівністю Буняковського. З останньої нерівності маємо, що

$$\|(A - \lambda I)x\| \ge |\varepsilon| \|x\|.$$

Тим самим обмеженість знизу оператора $A - \lambda I$ доведена. З обмеженості знизу випливає, що
$$\ker(A - \lambda I) = \{0\}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$
Використовуючи співвідношення між областю значень оператора і ядром його спряженого, маємо
$$\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} = [\ker(A - \lambda I)^*]^\perp = [\ker(A - \bar{\lambda} I)]^\perp = \{0\}^\perp = H.$$
Оскільки оператор $A - \lambda I$ обмежений знизу і $\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} = H$, то він є оборотний. Отже,
$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A).$$
Звідки випливає, що $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. □

Грані самоспряженого оператора.

Означення 2.149. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ і $A^* = A$. Числа*
$$\beta(A) := \sup_{\|x\|=1} (Ax \mid x), \qquad \alpha(A) := \inf_{\|x\|=1} (Ax \mid x)$$
називаються відповідно верхньою і нижньою гранями самоспряженого оператора A.

Уточнена теорема про спектр обмеженого самоспряженого оператора.

Теорема 2.150. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ і $A^* = A$. Тоді $\sigma(A) \subset [\alpha(A), \beta(A)]$, причому грані $\alpha(A)$ і $\beta(A)$ є точками спектру.*

Доведення. Нехай $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha := \alpha(A)$ і $\lambda < \alpha$. Покажемо, що оператор $A - \lambda I$ є обмежений знизу. Зауважимо, що для довільного $x \in H \setminus \{0\}$
$$(Ax \mid x) = (A\frac{x}{\|x\|} \mid \frac{x}{\|x\|})\|x\|^2 \geq \alpha \|x\|^2.$$
Звідки випливає, що
$$(Ax \mid x) \geq \alpha \|x\|^2, \qquad x \in H. \tag{2.39}$$
Тому
$$((A - \lambda)x \mid x) = (Ax \mid x) - \lambda \|x\|^2 \geq (\alpha - \lambda)\|x\|^2$$
Використовуючи нерівність Буняковського, отримуємо
$$(\alpha - \lambda)\|x\|^2 \leq ((A - \lambda)x \mid x) \leq \|(A - \lambda)x\| \|x\|.$$
А , отже,
$$\|(A - \lambda I)x\| \geq (\alpha - \lambda)\|x\|.$$
Тим самим обмеженість знизу оператора $A - \lambda I$ доведена. З обмеженості знизу випливає, що
$$\ker(A - \lambda I) = \{0\}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$
Використовуючи співвідношення між областю значень оператора і ядром його спряженого, маємо
$$\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} = [\ker(A - \lambda I)^*]^\perp = [\ker(A - \lambda I)]^\perp = \{0\}^\perp = H.$$
Оскільки оператор $A - \lambda I$ обмежений знизу і $\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} = H$, то він є оборотний. Отже,
$$(-\infty, \alpha) \subset \rho(A).$$

Аналогічно показуємо, що
$$(\beta(A), \infty) \subset \rho(A).$$
Тому $\sigma(A) \subset [\alpha(A), \beta(A)]$.

Залишається довести, точки $\alpha(A)$ і $\beta(A)$ є точками спектру. Досить показати, що $\beta(A) \in \sigma(A)$. Без обмеження загальності можна вважати, що
$$0 \leq \alpha(A) \leq \beta(A).$$
Дійсно, при потребі можна перейти від оператора A до оператора $A - \lambda I$ з $\lambda < \alpha$. При цьому маємо, що
$$\alpha(A - \lambda I) = \alpha(A) - \lambda > 0, \qquad \beta(A - \lambda I) = \beta(A) - \lambda > 0$$
і
$$\sigma(A - \lambda I) = \{\xi - \lambda \mid \xi \in \sigma(A)\}.$$
Отже, нехай виконана умова
$$0 \leq \alpha(A) \leq \beta(A).$$
і $\beta := \beta(A)$. Покажемо, що оператор $A - \beta I$ є необоротним, для цього досить показати, що він не є обмежений знизу. З означення верхньої грані оператора A випливає, що існує послідовність $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в H така, що $\|e_n\| = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і
$$\lim_{n \to \infty} (Ae_n \mid e_n) = \beta.$$
Тоді, враховуючи, що $\|Ae_n\|^2 \leq \|A\|^2 = \beta^2$, маємо
$$\begin{aligned}\|(A - \beta I)e_n\|^2 = \|Ae_n\|^2 - 2\beta(Ae_n \mid e_n)| + \beta^2 \leq \\ \leq \beta^2 - 2\beta(Ae_n \mid e_n)| + \beta^2 = 2\beta(\beta - (Ae_n \mid e_n)) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.\end{aligned}$$
Отже,
$$\lim_{n \to \infty} \|(A - \beta I)e_n\| = 0.$$
А це означає, що оператор $A - \beta I$ не є обмежений знизу. Таким чином $\beta \in \sigma(A)$. Теорема доведена. □

В самоспряженого оператора відсутній залишковий спектр.

Теорема 2.151. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ і $A^* = A$. Тоді $\sigma_r(A) = \emptyset$.*

Доведення. Припустимо, що точка $\lambda \in \mathbb{R}$ є точкою залишкового спектру самоспряженого оператора $A \in \mathcal{B}(H)$. Тоді $\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} \neq H$, а, отже,
$$(\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)})^{\perp} \neq \{0\}.$$
Оскільки
$$(\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)})^{\perp} = \ker(A - \lambda I)^* = \ker(A - \lambda I),$$
$\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$, тобто $\lambda \in \sigma_p(A)$. Але, $\sigma_p(A) \cap \sigma_r(A) = \emptyset$. Суперечність. Отже, $\sigma_r(A) = \emptyset$. □

Теорема про власні вектори самоспряженого оператора.

Теорема 2.152. *Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ і $A^* = A$. Якщо λ і μ два різні власні значення оператора A, то*

$$\ker(A - \lambda I) \perp \ker(A - \mu I).$$

Доведення. Нехай $f \in \ker(A - \lambda I)$ і $g \in \ker(A - \mu I)$, тобто

$$Af = \lambda f, \qquad Ag = \mu g.$$

Тоді

$$\lambda(f \mid g) = (Af \mid g) = (f \mid Ag) = \mu(f \mid g).$$

Тут ми врахували, що $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Отже,

$$(\lambda - \mu)(f \mid g) = 0.$$

Оскільки $\lambda - \mu \neq 0$, то $(f \mid g) = 0$. Теорема доведена. □

9. Теореми Фредгольма

Шведський математик Ерік Фредгольм (1866-1927), досліджуючи інтегральні рівняння довів ряд важливих результатів, які з часом назвали теорією Фредгольма. Результати Фредгольма були узагальнені Шаудером і Рісом. Фактично з теорії Фредгольма і починається розвиток теорії операторів. Ми розглянемо теорію Фредгольма в абстрактній постановці, як теорію рівнянь з компактним оператором у гільбертовому просторі.

Теорема 2.153. *(**Теорема Фредгольма**) Нехай $A \in \mathcal{B}_\infty(H)$.*

I *Рівняння*

$$x - Ax = f \tag{2.40}$$

має единий розв'язок $\forall f \in H$ тоді і лише тоді, коли рівняння

$$x - Ax = 0 \tag{2.41}$$

має лише ненульовий розв'язок.

II *Кількість лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.41) є скінченна і дорівнює кількості лінійно незалежних розв'язків рівняння*

$$y - A^*y = 0. \tag{2.42}$$

III *Рівняння (2.40) має роз'язок тоді і лише тоді, коли для будь-якого розв'язку y рівняння (2.42) :*

$$(f|y) = 0.$$

Теорема 2.154. *(**Альтернатива Фредгольма**)*

Нехай $A \in \mathcal{B}_\infty(H), \lambda \in \mathbb{C}$.

Має місце одна і лише одна з двох можливостей, які виключають одна одну.

I можливість. *Рівняння*

$$x - \lambda Ax = 0 \tag{2.43}$$

має тільки нульовий розв'язок. Тоді $\forall f \in H$ рівняння

$$x - \lambda Ax = f \tag{2.44}$$

має единий розв'язок $x \in H$.

II можливість. *Рівняння (2.43) має ненульовий розв'язок. Тоді кількість лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.43) є скінченна і дорівнює кількості лінійно незалежних розв'язків рівняння*

$$y - \overline{\lambda} A^* y = 0, \tag{2.45}$$

а рівняння (2.44) має розв'язок тоді і лише тоді, коли f ортогональний до будь-якого розв'язку y рівняння (2.45).

Приклад 2.155. *Знайти всі значення параметрів p, q, r, за яких інтегральне рівняння*

$$x(t) - \lambda \int_{-1}^{1} (1 + t\tau) x(\tau)\, d\tau = pt^2 + qt + r$$

має розв'язок для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$.

Розв'язування. Знайдемо характеристичні числа цього рівняння. Для цього розв'яжемо однорідне рівняння

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^{1} x(\tau)(1 + t\tau)\, d\tau.$$

Нехай $\int\limits_{-1}^{1} x(\tau)\, d\tau = C_1$, $\int\limits_{-1}^{1} \tau x(\tau)\, d\tau = C_2$, тоді $x(t) = \lambda(C_1 + C_2 t)$. Проінтегруємо $x(t)$ на проміжку $[-1, 1]$

$$C_1 = \lambda \int_{-1}^{1} (C_1 + C_2 t)\, dt = 2\lambda C_1, \quad C_1(1 - 2\lambda) = 0.$$

Помноживши $x(t)$ на t і проінтегруваши від -1 до 1, одержуємо

$$C_2 = \lambda \int_{-1}^{1} (C_1 t + C_2 t^2)\, dt = \frac{2}{3}\lambda C_2, \quad C_2(1 - \frac{2}{3}\lambda) = 0.$$

Отож, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ – характеристичні числа цього рівняння, а $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$ – відповідні власні функції.

Якщо $\lambda \neq \frac{1}{2}$ і $\lambda \neq \frac{3}{2}$, то однорідне рівняння має тільки тривіальний розв'язок, а неоднорідне має єдиний розв'язок за будь-яких p, q, r (згідно з альтернативою Фредгольма).

Якщо λ дорівнює характеристичному числу, то неоднорідне рівняння має розв'язок лише для таких функцій $y(t) = pt^2 + qt + r$, які ортогональні до власних функцій $x_1(t), x_2(t)$. Запишемо умови ортогональності

$$\int_{-1}^{1} (pt^2 + qt + r)\, dt = 0, \quad \int_{-1}^{1} t(pt^2 + qt + r)\, dt = 0.$$

Звідси одержуємо, що $\frac{p}{3} + r = 0$, $q = 0$.

Приклад 2.156. *Нехай M – обмежена в просторі $C[0, 1]$ множина. Довести, що множина N функцій вигляду $y(t) = \int\limits_{0}^{t} x(\tau)\, d\tau$, де $x \in M$, є передкомпактною.*

Розв'язування. За теоремою Арцела-Асколі достатньо перевірити, що множина N обмежена в $C[0,1]$ і одностайно неперервна. Обмеженість множини N випливає з обмеженості множини M

$$\|y\| = \max_t \left| \int_0^t x(\tau)\, d\tau \right| \le \max_t \int_0^t \|x\|\, d\tau = \|x\| \le C.$$

(Тут $C = \sup\{\|x\| : x \in M\}$). Щоб довести одностайну неперервність, розглянемо різницю

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} x(\tau)\, d\tau \right| \le \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)|\, d\tau \le C|t_1 - t_2|.$$

Звідси видно, що як тільки $|t_1 - t_2| < \delta < \frac{\varepsilon}{C}$, то для довільної функції $y \in N$ $|y(t_1) - y(t_2)| < \varepsilon$, що й треба було довести. Тому множина N передкомпактна.

Приклад 2.157. *Чи є передкомпактною множина функцій $N = \{t^n,\, n \in \mathbb{N}\}$ у просторі $C[0,1]$?*

Розв'язування. Доведемо, що ця множина не одностайно неперервна. Справді, нехай $t_1 = 1$, $t_2 = 1 - \frac{1}{n}$. Тоді $|t_1 - t_2| = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Але $|t_1^n - t_2^n| = |1 - (1 - \frac{1}{n})^n| \to 1 - \frac{1}{e} > 0$ при $n \to \infty$.

Приклад 2.158. *Довести компактність оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$:*

$$Ax(t) = \int_0^1 e^{ts} x(s)\, ds.$$

Розв'язування. Нехай M – обмежена (за нормою простору $C[0,1]$) множина функцій, тобто

$$\exists C > 0 \ \ \forall x \in M \ \ \|x\| \le C.$$

Розглянемо множину $N = \{Ax : \ \ x \in M\}$. Доведемо, що множина N передкомпактна в $C[0,1]$. Обмеженість N в $C[0,1]$ випливає з обмеженості множини M. Для доведення одностайної неперервності множини N розглянемо

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| = \left| \int_0^1 (e^{t_1 s} - e^{t_2 s})\, x(s)\, ds \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 e^{t_2 s} (e^{(t_1 - t_2)s} - 1)\, x(s)\, ds \right| \le e \int_0^1 |e^{(t_1 - t_2)s} - 1|\, |x(s)|\, ds \ \le$$

$$\le Ce \int_0^1 e|t_1 - t_2| s\, ds = \frac{1}{2} Ce^2 |t_1 - t_2|.$$

Якщо тепер вибрати

$$|t_1 - t_2| < \delta = \frac{2\varepsilon}{Ce^2},$$

то

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| < \varepsilon$$

для всіх $x \in M$. Тому множина N одностайно неперервна, а отже, передкомпактна. Отож, оператор A переводить кожну обмежену множину в передкомпактну, тому він компактний.

Приклад 2.159. *Довести, що оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = tx(t)$ не є компактним.*

Розв'язування. Достатньо навести приклад обмеженої множини з простору $C[0,1]$, образ якої не є передкомпактною множиною.

Нехай
$$M = \{x \in C[0,1]: \ \ x_n(t) = t^{n-1},\, n = 1, 2, \ldots\}.$$
Очевидно, що M – обмежена в просторі $C[0,1]$.

Нехай $N = AM$, тоді
$$N = \{x \in C[0,1]: \ \ x_n(t) = t^n,\, n = 1, 2, \ldots\}.$$
Доведемо, що множина N не є передкомпактною, а саме, що вона не є одностайно неперервною
$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists t_1, t_2 \ \ |t_1 - t_2| < \delta \ \wedge \ |t_1^n - t_2^n| > \varepsilon. \tag{2.46}$$
Нехай $t_1 = 1$ і $t_2 = 1 - \frac{1}{n}$. Тоді $t_1 - t_2 = \frac{1}{n}$ і і $t_1^n - t_2^n = 1 - (1 - \frac{1}{n})^n \to 1 - \frac{1}{e}$. Візьмемо
$$\varepsilon = \frac{1 - \frac{1}{e}}{2}.$$
Тоді з означення границі послідовності випливає, що за достатньо великих $n \in \mathbb{N}$ числа t_1 і t_2 будуть відрізнятися як завгодно мало (тобто $|t_1 - t_2| < \delta$), а $|t_1^n - t_2^n| > \varepsilon$. Тому виконується твердження (2.46) і множина N не є одностайно неперервною.

10. Узагальнені функції (розподіли)

10.1. Простір основних функцій

Нехай $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Означення 2.160. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}$ *(простір основних функцій), якщо*

$$\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \qquad i \qquad \operatorname{supp} \varphi - \textit{компакт}.$$

Тут $\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}}$ носій функції φ.

Означення 2.161. *Нехай* $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \varphi_n \in \mathcal{D}$.

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{l} 1)\,\forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \quad \varphi_n^{(k)}(x) \rightrightarrows 0; \\ 2)\,\exists K \subset \mathbb{R} - \textit{компакт}: \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \operatorname{supp} \varphi_n \subset K. \end{array}$$

10.2. Простір узагальнених функцій

Простір $\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}'$ простір узагальнених функцій.

Означення 2.162. *Узагальнена функція – це лінійний неперервний функціонал на просторі* $\mathcal{D}^*$, *тобто*

$$T \in \mathcal{D}' \stackrel{\text{def}}{=} \{T : \mathcal{D} \to \Phi |\ T - \ \textit{лінійний неперервний}, D(T) = \mathcal{D}\}.$$

Означення 2.163. $T : \mathcal{D} \to \Phi \ - \ $ *неперервний* $\stackrel{\text{def}}{=} \ \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \Longrightarrow T(\varphi_n) \to 0.$

Приклад 2.164. *Нехай* $f(x) \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *(функція* f *інтегровна за Лебегом на кожному компакті). Тоді* $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$ *покладемо*

$$T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{2.47}$$

З теореми Лебега про мажоруючу збіжність випливає, що функціонал $T_f \in \mathcal{D}'$.

Нехай $f_1, f_2 \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, а T_{f_1}, T_{f_2} – відповідні функціонали.

$$T_{f_1} = T_{f_2} \ \stackrel{\text{def}}{=} \ f_1(x) = f_2(x) \ \text{ м.с.}$$

Означення 2.165. *Функціонали вигляду* (2.47) *(і тільки такі) називають регулярними, а всі інші елементи простору* $\mathcal{D}'$ *називають сингулярними.*

Приклад 2.166. *Приклади сингулярних функціоналів:*

1) $\forall\ \varphi \in \mathcal{D} \qquad \delta(\varphi) = \varphi(0)$ *– сингулярний функціонал, який називають* δ*-функцією.*

2) $\forall\ \varphi \in \mathcal{D} \qquad \delta(\varphi) = \varphi(a)$ *– узагальнена функція, яку називають зміщеною* δ*-функцією і позначають символом* δ_a*. Використовують також запис* $\delta(x - a)$.

У просторі $\mathcal{D}'$ вводять також поняття добутку узагальненої функції f на довільні нескінченно диференційовні функції g, визначаючи його рівністю

$$(gT)(\alpha) = T(g\alpha).$$

Добуток двох довільних узагальнених функцій не вводять, бо це не можна зробити так, щоб операція множення була неперервною.

Похідна узагальнених функцій

Розглянемо довільну неперервно диференційовну на всій числовій прямій функцію $f(x)$. Інтегруванням частинами для неї отримуємо рівність

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Тому природно похідну узагальненої функції T визначити умовою

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D} \qquad T'(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} -T(\varphi').$$

Останню рівність покладають в основу означення похідної будь- якої узагальненої функції T. Отриманий при цьому функціонал T' теж буде лінійним неперервним функціоналом, визначеним на $\mathcal{D}$. Зокрема, для похідної δ-функції будемо мати $\delta'(\varphi) = -\varphi'(0)$.

Аналогічно можуть бути визначені і похідні вищих порядків. Наприклад,

$$T''(\varphi)\ =\ -T'(\varphi') = -(-T(\varphi'')) = T(\varphi'').$$

У загальному випадку

$$T^{(n)}(\varphi)\ =\ (-1)^n T(\varphi^{(n)}).$$

Таким чином, кожна узагальнена функція є нескінченно диференційованою.

Приклад 2.167. *Обчислити похідну регулярної узагальненої функції T, породженої функцією*

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \textit{якщо} \quad x \le 1, \\ 2x^2 - x, & \textit{якщо} \quad x > 1 \end{cases}$$

Інтегруючи частинами отримуємо

$$T_f'(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{1} (x+1)\varphi'(x)\,dx - \int_{1}^{+\infty} (2x^2-x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -2\varphi(1) + \int_{-\infty}^{1} \varphi(x)\,dx + \varphi(1) + \int_{1}^{+\infty} (4x-1)\varphi(x)\,dx = -\varphi(1) + \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

де

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \le 1, \\ 4x-1, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$$

Таким чином, $T_f = -\delta_1 + T_g$.

Література

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций: учебн. пособие. Киев: Вища шк., 1990. – 600с. (є український переклад)

2. Федак І.В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Ч.4. Лінійні функціонали та лінійні оператори. – Івано-Франківськ: ПНУ імені Василя Стефаника, 2020. – 56с.

3. Дороговцев А.Я. Элементы общей теории меры и интеграла. Киев: Вища шк., 1989.– 152с.

4. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу: учебн. пособие. Киев: Вища шк., 1990.–479с.

5. Кадец В. М. Курс функционального анализа: учебн. пособие для механико-математического факультета. -– Харків : Издательство ХНУ им. В.Н. Каразина, 2006. – 607 с.

6. Лянце В., Кудрик Т.,Чуйко Г. Функціональний аналіз: навч. посібник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.–384 с.

7. Сторож О., Кудрик Т., Сущик Н. Додаткові розділи теорії міри і функціонального аналізу. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2018. –198с.

8. Сторож О. Г. Задачі з теорії міри та функціонального аналізу: збірник задач /Олег Сторож. Львів : І. Чижиков, 2011. 151 с.