Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ КУРСУ "МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ"

для студентів I курсу механіко-математичного факультету

Львів — 2021

Рекомендовано до друку
Вченою Радою механіко-математичного
факультету

Методичні вказівки підготував
доцент Притула Ярослав Григорович

Для студентів I-го курсу
механіко-математичного факультету

Вчіться, діти мої,
розуміння прийде потім.
Рене Декарт (1596-1650)-видатний
французський філософ і математик

Курс математичного аналізу є одним з основних курсів, які закладають підвалини математичної освіти. Опираючись на знання елементарної математики, у цьому курсі дається виклад диференціального та інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних, а також різних його застосувань та узагальнень.

На основі понять і тверджень, з якими студенти знайомляться у цьому курсі, пізніше будуються курси диференціальних рівнянь, диференціальної геометрії та топології, комплексного аналізу, функціонального аналізу та інших. Разом з тим в курсі математичного аналізу використовується матеріал, який читається у паралельних курсах.

I. Основні форми роботи при вивченні математичного аналізу

Вивчення курсу математичного аналізу може бути як очним так і дистанційним. Всі деталі дистанційної форми навчання будуть повідомлені окремо.

Вказані нижче вказівки стосуються обох форм вивчення математичного аналізу.

1. Лекції. На лекціях викладач (лектор) викладає основний теоретичний матеріал. Задача студента на лекції слідкувати за ходом викладу і, по можливості, більш точно конспектувати матеріал, який викладається. Цей конспект студент пізніше вивчає вдома, вносить до нього необхідні виправлення і доповнення, використовуючи для цього підручники і консультації. Студент має право задавати під час лекції запитання лектору. Відвідування лекцій є обов'язковим.

2. Практичні (лабораторні) заняття. Вони присвячені, в основному, розв'язуванню задач методами, які випливають з теорії, викладеної на лекціях. Розв'язування задач виконується під керівництвом викладача, який веде практичні заняття. Кожен студент повинен прагнути до активної участі в розв'язуванні задач, які пропонує викладач, і, по можливості, випереджувати в своєму зошиті події, які відбуваються на дошці. Така активна участь передбачає попередню індивідуальну підготовку студента вдома, що включає повторення теорії і виконання домашніх завдань. Студент має право задавати питання викладачу, який веде практичні заняття. Відвідування практичних занять та виконання домашніх завдань є обов'язковими для кожного студента. Студент зобов'язаний виконати всі домашні завдання, які вказані у цих вказівках.

3. Самостійна робота студента. Вона включає такі елементи: **а). Вивчення підручників і учбових посібників.** Вивчення математичної літератури — важка праця. Вона вимагає настирливості і певних навиків. В більшості випадків математичний текст з першого разу незрозумілий і вимагає багаторазового перечитування. Дуже часто проміжні викладки в математичних текстах пропускаються. Ці викладки читач повинен виконати самостійно. Особливої уваги вимагають місця, які починаються зі слів "очевидно "як легко бачити"і т.д. Часто ці звороти означають заклик до читача самостійно виконати відсутні міркування або обчислення, які далеко не завжди є простими. Не бажано захоплюватись вивченням особливо великого числа книг з математичного аналізу. Досить користуватися яким-небудь одним з рекомендованих посібників, тим, який найбільше відповідає індивідуальним нахилам студента. Корисно вести конспект підручника, який вивчається. Бажано, щоб вивчення матеріалу підручника випереджувало виклад його на лекції. Студент, який хоч частково знайомий з матеріалом, одержує більше користі від лекції.

При вивченні математичних доведень по книжках дуже корисно перед читанням тексту постаратись виконати це доведення самостійно. Якщо придумати доведення і не вдається, то хоч легше буде зрозуміти думку автора книги.

б). Обробка літератури. Зі зрозумілих причин записи, які веде студент під час лекції, містять різні недоліки: пропуски, описки, місця, що записані нерозбірливо, зайві повторення і т. п. Все це доцільно виправити вдома, використовуючи для цього підручники або консультації. Лекційні записи потрібно розглядати, як чорновик конспекту, який вичитується вдома. Акуратне оформлення конспекту корисне студентам, які обдаровані зоровою пам'яттю. Проте, воно корисне всім студентам, оскільки воно сприяє систематизації та впорядкуванню знань.

в). Самостійне розв'язування задач. Викладач, який веде практичні заняття, пропонує ряд задач додому для самостійного розв'язування. Проте, хороші студенти не обмежуються розв'язанням тільки цих задач. Багато цікавих задач міститься не тільки в збірниках задач, але і в підручниках та учбових посібниках з математичного аналізу.

Роль самостійного розв'язування задач є виключно великою. Для того, щоб зрозуміти суть теореми чи формули не досить бути знайомим зі змістом і доведенням, необхідно бачити як ця теорема чи формула "працює"в тому чи іншому конкретному випадку, як вона застосовується. Крім того, розв'язуючи самостійно задачі, студент готує себе до наукової творчості, до розв'язування задач, які виникають у наукових дослідженнях.

г). Семінари та наукові гуртки. На них студенти під керівництвом викладачів вивчають позапрограмний матеріал з математичного аналізу. Основною метою тут є підвищення математично культури студента, підготовка, а також участь в науково-дослідній роботі. Незважаючи на бурхливі темпи розвитку сучасної математики та велику складність вищих її розділів, уже на першому курсі є можливість для наукової роботи студента, яка має як теоретичний, так і прикладний характер.

4. Консультації. Для відповідей на запитання, які виникають у студентів під час вивчення матеріалу, викладачі призначають консультації. Ряд консультацій є на дошці оголошень кафедри. Не слід нагромаджувати великої кількості питань і звертатись з ними до викладача лише напередодні екзамену. В математиці все взаємопов'язано, а тому з питаннями потрібно звертатись відразу після їх виникнення.

5. Колоквіуми, контрольні роботи. Їх метою є не тільки підтримання учбової дисципліни. Результати колоквіумів і контрольних робіт будуть враховані при виставленні екзаменаційної оцінки. Оцінюючи знання студента, викладач разом з тим вказує на його недоліки і прогалини в знаннях. Протягом семестру з математичного аналізу буде проведено два колоквіуми і три контрольні роботи.

6. Залік та екзамен. Навчальні успіхи студента за семестр оцінюються за 100 бальною системою:

- 3 контрольні роботи по 0-8 балів: $\sum = 24$;
- 2 колоквіуми по 0-13 балів: $\sum = 26$;
- відповідь на іспиті 50 балів. На іспиті за відповідною шкалою згідно набраних балів виставляється оцінка в національній системі (5, 4, 3, 2) і європейській (ESTC) (A, B, C, D, E, FX, F).

II. Робоча програма лекційного курсу

1. Вступ до математичного аналізу

1.1. Елементи математичної логіки.([9])

Висловлення. Операції над висловленнями. Формули логіки висловлень. Рівносильні висловлення. Основні рівносильності.

Предикати. Операції квантування. Властивості операцій квантування.

Використання логічної символіки для запису означень і тверджень.

1.2. Множини. Відношення. Функції. ([1], [2], [3], [6]).

Поняття множини. Операції над множинами. Властивості операцій над множинами.

Впорядковані пари. Декартів добуток множин. Відношення.

Відношення рефлексивні, симетричні, транзитивні. Відношення еквівалентності. Відношення порядку. Теореми про розбиття на класи. Функціональні відношення.

Поняття функції. Класифікація функцій. Образ, прообраз. Властивості образів та прообразів. Обернена функція. Композиція функцій.

1.3. Дійсні числа. ([7])

Конструктивне означення множини дійсних чисел. Натуральні числа. Цілі числа. Раціональні числа. Властивості класів чисел.

Множина дійсних чисел, як множина нескінченних десяткових дробів. Впорядкованість множини десяткових дробів. Поняття про точні грані множин. Існування точних граней множин. Повнота множини дійсних чисел. Операції над дійсними числами та їх властивості.

Поняття про аксіоматичне означення множини дійсних чисел.

1.4. Основні леми, які зв'язані з властивістю повноти. ([1], [8])

Лема про вкладені відрізки. Поняття покриття множини. Лема про скінченні підпокриття. Гранична точка множини. Лема про граничні точки. Задачі, які зв'язані з основними лемами і повнотою множини дійсних чисел.

1.5. Потужність множин. ([1], [2], [3])

Рівночисельні множини. Поняття потужності множини. Кардинальні числа.

Зчисленні множини. Приклади зчисленних множин. Властивості зчисленних множин.

Незчисленність множини [0,1]. Множини потужності континууму. Властивості множин потужності континууму.

Теорема про потужність множини підмножин.

2. Границя послідовності та функцій. Неперервні функції.

2.1. Границя послідовності. ([1], [4], [5], [7])

Послідовність. Границя послідовності. Основні властивості границі послідовності (єдиність, обмеженість). Арифметичні властивості границі послідовності, граничний перехід в нерівностях.

Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності та їх властивості.

2.2. Питання існування границі послідовності. ([1], [3], [4], [5], [8])

Теорема Вейєрштрасса про границю монотонної послідовності. Число e. Підпослідовності. Часткові границі. Теорема Больцано-Вейєрштрасса.

Фундаментальні послідовності.

Критерій Коші існування границі послідовності.

Верхні і нижні границі послідовності. Різні означення верхніх і нижніх границь послідовності та їх еквівалентність.

2.3. Границя функції. ([1], [3], [4], [5], [8])

Різні означення границі функції та їх еквівалентність. Властивості границі функції (загальні властивості, граничний перехід в рівностях та нерівностях). Границя монотонної функції.

Границі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ та інші.

База. Приклади баз.

Границя функції за базою. Критерій Коші існування границі функції за базою. Границя композиції функцій.

2.4. Неперервні функції. ([1]-[8])

Означення неперервності функції в точці. Еквівалентність різних означень. Класифікація точок розриву. Локальні властивості неперервних функцій (обмеженість, збереження знаку, арифметичні властивості, неперервність композиції).

Теореми Больцано-Коші (про проміжні значення). Теореми Вейєрштрасса (про обмеженість і екстремальні значення).

Рівномірно неперервні функції. Теорема Кантора.

Теорема про неперервність оберненої функції.

Означення та елементарні властивості функцій a^x, $\log_a x$ та інші.

Неперервність елементарних функцій.

3. Диференціальне числення

3.1. Диференційовані функції. ([1]-[8])

Означення диференційованості та похідної функції. Геометричний та фізичний зміст похідної. Основні правила диференціювання. Диференціювання композиції функцій та оберненої функції. Таблиця похідних. Похідна неявно задано функції та параметрично заданої функції. Диференціал функції.

Похідні та диференціали вищих порядків. Формула Лейбніца.

3.2. Основні теореми диференціального числення. ([1]-[8])

Точки локального екстремума. Лема Ферма. Теорема Ролля. Теореми Лагранжа та Коші. Формула Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа, Коші та Пеано. Формули Тейлора для елементарних функцій.

3.3. Дослідження функцій з допомогою диференціального числення. ([1]-[8])

Умови монотонності функцій. Необхідні умови локального екстремума. Достатні умови локального екстремума в термінах першої похідної, в термінах вищих похідних.

Опуклі функції. Умови опуклості. Точки перегину. Нерівність Йєнсена.

Правило Лопіталя та його застосування.

Побудова графіків. Приклади застосування диференціального числення.

ЛіТЕРАТУРА

Я.Г. Притула *Лекції з математичного аналізу* (текст лекцій).

1. В.А. Зорич. *Математический анализ.* Ч. I.
2. В.К. Дзядик *Математичний аналіз. Т. 1.*
3. А.Я. Дороговцев *Математический анализ.* Ч. I.
4. Л.Д. Кудрявцев *Курс математического анализа.* Ч. 1.
5. Г.М. Фихтенгольц *Курс диференциального и интегрального исчисления.* Т. I.
6. I.I. Ляшко, В.Ф.Ємельянов, О.К. Боярчук *Математичний аналіз.* Ч.1.
7. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов *Математический анализ.* Ч.I.
8. С.I. Підкуйко *Математичний аналіз. Т. 1.*
9. О.В. Кужель *Елементи теорії множин і математичної логіки.*

Додаткова література

С. Банах. *Дифференциальное и интегральное исчисление.*

Г.М. Фихтенгольц. *Основы математического анализа. Ч. 1.*

Ш. Пизо, М. Заманский. *Курс математики.*

У. Рудин. *Основы математического анализа.*

Б. Гельбаум. *Контпримеры в анализе.*

С.М. Никольский. *Курс математического анализа. Т. 1.*

Позначення: Теми підкреслені лінією будуть вивчатися поза розкладом і не будуть обов'язковими на іспиті.

Робоча програма буде реалізована протягом 24-ох лекцій за розкладом і 4-ох лекцій поза розкладом.

Лекція 1. Вступна лекція. Елементи математичної логіки.

Лекція 2. Елементи математичної логіки і використання логічної символіки.

Лекція 3. Множини. Відношення.

Лекція 4. Функції.

Лекція 5. Дійсні числа.

Лекція 6. Точні грані множин. Повнота множини дійсних чисел.

Лекції 7,8. Основні леми, які зв'язані з повнотою дійсних чисел.

Лекція 9. Границя послідовності.

Лекція 10. Теореми про існування границі послідовності.

Лекція 11. Критерій Коші існування границі послідовності. Верхня і нижня границя послідовності.

Лекція 12. Границя функції.

Лекція 13. Неперервні функції. Локальні властивості неперервних функцій.

Лекція 14. Властивості неперервних функцій на відрізку.

Лекція 15. Рівномірно неперервні функції.

Лекція 16. Диференційовані функції. Правила диференціювання.

Лекція 17. Похідні і диференціали вищих порядків.

Лекція 18. Основні теореми диференціального числення.

Лекція 19. Формула Тейлора.

Лекція 20. Дослідження функцій з допомогою диференціального числення.

Лекція 21. Опуклі функції.

Лекція 22. Правило Лопіталя.

Лекція 23. Побудова графіків функцій.

Лекція 24. Приклади застосувань диференціального числення.

Лекції поза розкладом:

Лекція A. Дійсні числа.

Лекція B. Потужності множин.

Лекція C. Границя функції за базою.

Лекція D. Означення та властивості елементарних функцій.

III. Вказівки до практичних (лабораторних) занять

Основний збірник задач

Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.*

Заняття 1,2. Метод математичної індукції. Біном Ньютона.

1. Довести такі рівності:

а) $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

г) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$;

д) $(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m$ (біном Ньютона), де $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ - число комбінацій з n елементів по m;

е) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1):=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$;

є) $\sum_{i=1}^{n}i(3i-1)=n^2(n+1)$;

ж) $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

з) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$;

и) $\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{(i+1)^2})=\frac{n+2}{2n+2}$;

і) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+3)(i+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$.

2. Довести, що при будь-якому $n\in\mathbb{N}$:

а) число $n(2n^2-3n+1)$ кратне 6;

б) $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ ділиться на 11;

в) $11^{n+1}+12^{2n-1}$ ділиться націло на 133;

г) n^5-n кратне 5;

д) $2^{2^n}+1$ закінчується цифрою 7 $(n\geq 2)$.

3. Довести такі нерівності:

а) $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$ (нерівність Бернуллі), де $x_1,x_2,\dots,x_n$ - дійсні числа одного знаку, всі більші від -1;

б) якщо $x>-1$, то $(1+x)^n\geq 1+nx$ $(n\geq 1)$, причому знак рівності має місце тільки при $x=0$;

в) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\leq 2-\frac{1}{n}$ $(n\geq 1)$;

г) $n^3<2^{n+1}$ $(n>8)$;

д) $\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;
е) $n! < (\frac{n+1}{2})^n$ при $n > 1$; вказівка: $(\frac{n+2}{n+1})^{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} > 2$;
є) $2! \cdot 4! \cdots (2n)! > ((n+1)!)^n$ при $n > 1$;
ж) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;
з) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ $(n \geq 2)$;
и) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$ $(n > 1)$;
і) $n^{n+1} > (n+1)^n$ $(n \geq 3)$;
ї) $|\sin(\sum_{k=1}^{n} x_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$, де $0 \leq x_k \leq \pi$, $k = 1, 2, \ldots, n$;
й) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$;
к) $(a+b)^n \leq a^n + 2na^{n-1}b$, де $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < b < \frac{a}{2n}$;
л) $(a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b$, де $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $b > -a$.

4. Довести такі твердження:

а) якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - довільні додатні дійсні числа, $n \in \mathbb{N}$ і $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$, то $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$;

б) якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - довільні додатні дійсні числа, то

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

(нерівність Коші між середнім арифметичним, середнім геометричним і середнім гармонійним; її можна довести різними способами, зокрема, як наслідок з п.а);

в) якщо $x_i \in \mathbb{R}$, $y_i \in \mathbb{R}$, то $(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$ (нерівність Коші-Буняковського-Шварца);

г) якщо $x + \frac{1}{x}$ - ціле число, то $x^n + \frac{1}{x^n}$ - ціле число при всіх цілих n;

д) якщо $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ $(n \geq 2)$, то $a_n = 2^{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$.

Заняття 3. Елементи математичної логіки. Множини і дії над ними.

1. Встановити рівносильність таких висловлень: а) $p \Rightarrow q$ та $\neg q \Rightarrow \neg p$; б) $p \Rightarrow q$ та $\neg p \vee q$; в) $\neg(p \Rightarrow q)$ та $p \wedge \neg q$ за допомогою табличок істинності.

2. Визначити, чи є наведені висловлення істинними. Записати їх заперечення (тут x, y - довільні дійсні числа):

а)$(\forall x)(\forall y) : x + y = 3;$
б)$(\forall x)(\exists y) : x + y = 3;$
в)$(\exists y)(\forall x) : x + y = 3;$
г)$(\exists x)(\exists y) : x + y = 3;$
д)$(\forall x)(\exists! y) : x + y = 3;$
е)$(\exists x > 0)(\exists y > 0) : x + y = 0;$
є)$(\forall x > 0)(\exists y > 0) : x + y = 0;$
ж)$(\forall x > 0)(\exists y > 0) : x + y = 0;$
з)$(\forall x)(\forall y) : x < y \Rightarrow x^2 < y^2;$
и)$(\forall x)(\forall y) : x < y \Rightarrow x^3 < y^3;$
і)$(\forall x)(\forall y) : x < y \Leftrightarrow x^3 < y^3;$
ї)$(\forall x) : x^2 > x \Leftarrow x < 0;$
й)$(\forall x) : x^2 > x \leftrightarrow x > 1;$
к)$(\forall x) : x^2 > x \leftrightarrow x > 1 \wedge x < 0;$
л)$(\forall x) : x^2 > x \leftrightarrow x > 1 \vee x < 0.$

3. а) На запитання, хто зі студентів вивчав логіку, одержано таку правильну відповідь: якщо вивчав 1-й, то вивчав і 3-й, але неправильно, що якщо вивчав 2-й, то вивчав і 3-й. Хто вивчав логіку?
б) Віктор, Роман, Юрій та Сергій зайняли на математичній олімпіаді перші чотири місця. Коли їх запитали про розподіл місць, вони дали такі три відповіді: 1) Сергій - перший, Роман - другий; 2) Сергій - другий, Віктор - третій; 3) Юрій - другий, Віктор - четвертий. Як розподілено місця, якщо у кожній з відповідей тільки одне твердження істинне?
в) На множині одноцифрових натуральних чисел задано два висловлення, а саме $p(n)$: "число 3 - дільник числа n"та $q(n)$: "$n \leq 6$". Знайти множину істинності висловлень: 1) $p(n) \vee q(n)$; 2) $p(n) \wedge \overline{q(n)}$; 3) $\overline{p(n)} \Rightarrow q(n)$; 4) $\overline{p(n) \Rightarrow q(n)}$.
г) На множині всіх натуральних чисел задано три висловлення, а саме $p(n)$: число $n^2 - 2$ кратне 7; $q(n)$: число $n - 2$ кратне 7; $r(n)$: $4n^2 - 360n + 8099 < 0$. При яких значеннях n два з даних трьох висловлень істинні і одне хибне?

4. Визначити множину A, якщо:
а) $(\forall x \in A)(\exists n \in \mathbb{N}) : 2n = x;$
б) $(\forall x \in A)(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) : \frac{m}{n} = x;$
в) $(\forall x \in A)(\exists y \in \mathbb{R}, y \geq 1) : 2^x = y;$

г) $(\forall a \in A)(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2ax + a = 0$;
д) $(\forall x \in A)(\exists x \in \mathbb{R}) : 3a + 2ax - x^2 > 0$;
е) $(\forall a \in A)(\exists b \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2ax + b^2 + 1 > 0$.

5. Встановити істинність/хибність таких висловлень:
а) $\exists n \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \in \mathbb{N}$;
б) $(\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 10)(\forall m \in \mathbb{N}) : \sqrt{nm^2} \in \mathbb{N}$;
в) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) : \sqrt{nm} \in \mathbb{N}$;
г) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists r_1 \in \mathbb{Q})(\exists r_2 \in \mathbb{Q}) : r_1 r_2 + r_1 = n$;
д) $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + ax = 0$;
е) $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2ax + a = 0$;
є) $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2ax + a > 0$.

6. Визначити і зобразити на малюнках множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \triangle B$, якщо:
а) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 6x + 8 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x < 0\}$;
б) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < |x - 3| \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 2|x| < 3\}$;
в) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$;
г) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 > y^3\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > y^2\}$;
д) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

7. Визначити множину A, якщо:
а) $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, |x| + |y| = 1\}$;
б) $A = \{x \in \mathbb{R} : \forall y \leq 1, y \leq x^2\}$;
в) $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, y^2 + x = 0\}$.

8. Довести, що для довільних множин:
а) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$;
б) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$; в) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$;
г) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
д) $(A \setminus B) \setminus C) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
е) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$; є) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

9. Нехай для всіх $m \in \mathbb{Z}$ і $n \in \mathbb{Z}$ задано множини $A_{mn} = \{x \in \mathbb{R} : m \leq x < m + n\}$. Визначити такі множини:
а) $B_m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$; б) $C_m = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$;
в) $\bigcap\limits_{m=-\infty}^{0} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$; г) $\bigcap\limits_{m \in \mathbb{Z}} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$;
д) $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$; е) $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$.

Заняття 4. Поняття функції. Образ, прообраз елемента, множини. Обернені функції.

1. Функцію $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ задано умовою $f(n) = 1 + n^2$. Визначити:
а) $f(0)$, $f(\{0\})$, $f(\{3, 4\})$, $f(\{-2, 2\})$;
б) $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{5\})$, $f^{-1}(\{4\})$, $f^{-1}(\{10, 17\})$, $f^{-1}(\{37, 38, 39\})$.

2. Для функції $f(x) = x^2 + 2x + 1$ визначити:
а) $f(0)$, $f(\{-1, 1\})$, $f([-1, 2))$, $f((-2, 0])$;
б) $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}((-1, 1))$, $f^{-1}([0, 2))$, $f^{-1}([1, +\infty)$.

3. Функцію $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ задано умовою $f((m, n)) = (n, m)$. Визначити:
а) $f(A)$, де $A = \{(0, n) : n \in \mathbb{Z}\}$;
б) $f(B)$, де $B = \{(n, n) : n \in \mathbb{Z}\}$;
в) $f^{-1}(C)$, де $C = \{(m, 0) : m \in \mathbb{N}\}$;
г) $f^{-1}(D)$, де $D = \{(m, 0) : m \in \mathbb{Z}\}$.

4. Чи відображення $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ і $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ є ін'єкцією, сюр'єкцією, бієкцією, якщо:
а) $f(n) = n + (-1)^n$; $\quad g((m, n)) = (n, m)$;
б) $f(n) = 2 - n$; $\quad g((m, n)) = (m + 1, n - 2)$;
в) $f(n) = (-1)^n$; $\quad g((m, n)) = (m + n, m - n)$;
г) $f(n) = n^2$; $\quad g((m, n)) = (m, -n)$.

5. Яке з відображень $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є ін'єкцією, сюр'єкцією, бієкцією, якщо: $f(x) = |x + 1|$, $f(x) = x^5$, $f(x) = \cos 2x$, $f(x) = \ln|x - 1|$ (тут $f(1) := 0$), $f(x) = x \sin x$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (тут $f(0) := 1$). Як можна визначити множини X та Y, щоб функції, задані тими самими формулами, були бієкціями?

6. Множина X містить m елементів, а множина Y - n елементів. Скільки існує різних: а) функцій; б) ін'єктивних функцій; в) сюр'єктивних функцій; г) бієктивних функцій $f : X \to Y$?

7. Навести приклад множини X і відображення $f : X \to X$ таких, що f - сюр'єкція, але не ін'єкція.

8. Чи існує скінченна множина X, для якої виконуються умови попередньої задачі?

9. Чи є функція $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, причому $f((m, n)) = \max\{m, n\}$, сюр'єкцією або ін'єкцією?

Заняття 5,6. Побудова графіків функцій.

1. Побудувати графіки лінійних функцій:
а) $y = ax$ при $a = 0; 1/2; 2; -1$; б) $y = x + b$ при $b = 0; 1; 2; -1$;
в) $y = 2x + 3$; г) $y = -x/2 - 1$.

2. Побудувати графіки цілих раціональних функцій другого степеня (парабол):
а) $y = ax^2$ при $a = 1; 1/2; 2; -1$; б) $y = (x - x_0)^2$ при $x_0 = 0; 1; 2; -1$;
в) $y = x^2 + c$ при $c = 0; 1; 2; -1$; г) $y = 8x - 2x^2$; д) $y = x^2 - 3x + 2$;
е) $y = -x^2 + 2x - 1$.

3. Побудувати графіки цілих раціональних функцій степеня більшого 2:
а) $y = x^3 + 1$; б) $y = x^2 - x^4$; в) $y = (1 - x^2)(2 + x)$.

4. Побудувати графіки дробово-лінійних функцій:
а) $y = x + \frac{1}{x}$ (гіпербола);
б) $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (тризуб Ньютона);
в) $y = x + \frac{1}{x^2}$; г) $y = \frac{1}{1+x^2}$;
д) $y = \frac{2x}{1+x^2}$ (серпантин Ньютона);
е) $y = \frac{1}{1-x^2}$; є) $y = \frac{x}{1-x^2}$;
ж) $y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}$; з) $y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1-x}$.

5. Побудувати графіки ірраціональних функцій:
а) $y = \pm\sqrt{-x - 2}$ (парабола);
б) $y = \pm x\sqrt{x}$ (парабола Нейля);
в) $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{100 - x^2}$ (еліпс);
г) $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ (гіпербола);
д) $y = \pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;
е) $y = \pm x\sqrt{100 - x^2}$;
є) $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (цисоїда).

6. Побудувати графіки показникових функцій:
а) $y = a^x$ при $a = 1/2, 1, 2, e, 10$;
б) $y = e^{x^2}$; в) $y = e^{-x^2}$; г) $y = e^{1/x}$;
д) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$; е) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$; є) $y = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$.

7. Побудувати графіки логарифмічних функцій:
а) $y = \log_a x$ при $a = 1/2, 2, e, 10$;
б) $y = \ln(-x)$; в) $y = -\ln x$; г) $y = \ln(1 + x^2)$;

д) $y=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$; е) $y=\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$; є) $y=\ln\left(1+e^x\right)$.

8. Побудувати графіки тригонометричних функцій:

а) $y=\sin x^2$; б) $y=\sin\frac{1}{x}$; в) $y=\ln(\cos x)$;
г) $y=\operatorname{arctg} x^2$; д) $y=\arcsin(\sin x)$; е) $y=\arcsin\left(1-\frac{x}{2}\right)$;
є) $y=\arcsin\frac{1-x}{1+x}$; ж) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

9. Побудувати графіки таких складених функцій:

а) $y=x^3-3x+2$; б) $y=\frac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$; в) $y=\frac{x^2}{|x|-1}$;
г) $y=\sqrt{x(1-x^2)}$; д) $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; е) $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{1+x^2}$;
є) $y=\frac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$; ж) $y=\lg\left(x^2-3x+2\right)$; з) $y=\arcsin\left(\frac{3}{2}-\sin x\right)$;
и) $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)$; і) $y=\log_{\cos x}\sin x$; ї) $y=(\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

10. Застосовуючи додавання графіків, побудувати:

а) $y=1+x+e^x$; г) $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x$;
б) $y=x+\sin x$; д) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;
в) $y=x+\operatorname{arctg} x$; е) $y=|1-x|-|1+x|$.

11. Побудувати графіки гіперболічних функцій:

а) $y=\operatorname{ch} x$, де $\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;
б) $y=\operatorname{sh} x$, де $\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$;
в) $y=\operatorname{th} x$, де $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$;

12. Застосовуючи множення графіків, побудувати:

а) $y=x\sin x$; б) $y=e^{-x^2}\cos 2x$;
в) $y=x\cdot\operatorname{sign}(\sin x)$; г) $y=[x]\cdot|\sin\pi x|$.

13. Побудувати графіки функцій, заданих параметрично:

а) $x=1-t$, $y=1-t^2$;
б) $x=t+\frac{1}{t}$, $y=t+\frac{1}{t^2}$;
в) $x=10\cos t$, $y=\sin t$ (еліпс);
г) $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$ (гіпербола);
д) $x=5\cos^2 t$, $y=3\sin^2 t$;
е) $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ (циклоїда).

14. Побудувати графіки неявно заданих функцій:

а) $x^2-xy+y^2=1$ (еліпс);
б) $x^3+y^3-3xy=0$ (декартів лист);
в) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ (парабола);
г) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$ (астроїда);
д) $\sin x=\sin y$; е) $\cos(\pi x^2)=\cos(\pi y)$;
є) $x-|x|=y-|y|$; ж) $\min(x,y)=1$.

15. Побудувати графіки функцій у полярній системі координат:
а) $r = \varphi$; б) $r = \frac{\pi}{\varphi}$; в) $r = \frac{\varphi}{\varphi+1}$;
г) $r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$; д) $r = 2(1+\cos\varphi)$; е) $r = 10\sin 3\varphi$;
є) $r^2 = 36\cos 2\varphi$; ж) $\varphi = \frac{r}{r-1}$; з) $\varphi = 2\pi\sin r$.

Заняття 7. Межі множини. Точна верхня і нижня межі (грані) множини.

1. Довести, що множина чисел $\{(-1)^n(1-\frac{1}{n})|n \in \mathbb{N}\}$ обмежена і не має ні найменшого, ні найбільшого елемента.

2. Чи має найбільший елемент множина $\{a_n = n^2 2^{-n}|n \in \mathbb{N}\}$?

3. Знайти найбільший і найменший елемент множини $\{a_n = \frac{3^n}{n!}|n \in \mathbb{N}\}$.

4. Знайти точні грані таких множин:
а) $A = \{\frac{n}{n+3}(2+(-1)^n)|n \in \mathbb{N}\}$; б) $A = \{\frac{mn}{4m^2+n^2}|m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$;
в) $A = \{\frac{m}{m+n}|m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$; г) $A = \{\frac{m}{|m|+n}|m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

5. Знайти точну нижню грань множини $A = \{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m}|m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$.

6. Нехай $A \subset [0, +\infty)$ і $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x \in A) : x < \frac{1}{n}$. Довести, що $\inf A = 0$.

7. Для обмежених непорожніх підмножин A і B множини $\mathbb{R}$ довести такі рівності:
а) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$;
б) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

8. Нехай A і B - обмежені непорожні підмножини $\mathbb{R}$ і множину C задано так: $C = \{x + y|x \in A, y \in B\}$. Довести, що $\sup C = \sup A + \sup B$.

9. Знайти: а) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \frac{m-n}{m+n}$; б) $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{m-n}{m+n}$;
в) $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{m}{m+n}$; г) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \frac{m}{m+n}$.

10. Як зв'язані точні грані обмежених множин A і B, якщо $A \neq \emptyset$ і
а) $B = \{-x : x \in A\}$; б) $B = \{x^3 : x \in A\}$;
в) $B = \{x^2 : x \in A\}$; г) $B = \{x + a : x \in A\}$, де $a \in \mathbb{R}$;
д) $B = \{ax : x \in A\}$, де $a \in \mathbb{R}$?

11. Довести, що для довільних $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ справедливі такі рівності:
$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$, $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.

12. Сформулювати за допомогою кванторів, що означає таке:

а) $\sup[1,7)=7$; б) $\sup\{f(x):\ x\in[a,b]\}=M$;
в) $\inf\{x^2+3:\ x\in\mathbb{R}\}=3$; г) $\sup\{\sin x:\ x\in\mathbb{R}\}=1$.

13. Знайти $\sup, \inf, \max, \min$ таких множин:
а) $\{\frac{n^2}{3n^2+2}:n\in\mathbb{N}\}$; б) $\{\frac{n}{n+2}:n\in\mathbb{Z}\}$; в) $x_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$;
г) $x_n=n^{(-1)^n}$; д) $x_n=1+\sin\frac{n\pi}{2}$; е) $x_n=1-\frac{(-1)^n}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$.

Заняття 8. Контрольна робота № 1.

Заняття 9. Границя послідовності. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності.

А: 41, 42б,в, 43б, 44, 45а, 46, 47, 48, 49, 51, 53, 56, 57, 58-66.

Д: 42а,г, 43а,в, 45б,в, 50, 52, 54, 55, 58-66.

Заняття 10. Границя монотонної послідовності. Критерій Коші збіжності послідовності.

А: 67а, 69, 70, 72, 75а, 78, 79, 83, 85, 87, 88, 90, 92.

Д: 67б,в, 73, 74, 75б, 76, 77, 80, 81, 82, 84, 86, 89, 91, 93, 94, 95.

Заняття 11. Підпослідовності. Часткові границі. Верхня і нижня границі послідовності.

А: 96, 97, 99, 102, 105, 108, 116, 117, 121, 127, 138, 140, 141, 142, 145а, 146, 147, 149.

Д: 100, 103, 104, 109, 112, 118, 123, 128, 129, 130, 139, 143, 145б,в, 148, 150.

Заняття 12. Обмежені функції. Точні грані функції. Границя функції.

А: 381, 383, 386, 389, 391, 397а, 401, 403а,б, 405а,е, 409, 411, 414, 416, 418, 425.

Д: 384, 393, 403-407, 412, 413, 419, 426, 429.

Заняття 13. Обчислення границь функцій.

А: 428, 435, 437, 440, 441, 444, 446, 458, 463, 471, 475, 479, 483, 489, 494, 501, 504, 506, 507, 509, 511, 512.

Д: 431, 439, 442, 449, 455, 464, 473, 480, 484, 505.

Заняття 14. Обчислення границь функцій. Односторонні границі. Нижня та верхня границі. О-символіка

А: 514, 525, 530, 533, 543, 544, 552, 566, 591, 604, 614, 617, 626, 627а, 599, 643а, 646а, 647а,б, 650а,б,д,е,ж, 651а,д,ж,з, 653а,б, 655а,б, 656 б,в, 657а,б, 658а,б,г.

Д: 515, 532, 535, 553, 556, 561, 576, 592, 605, 615, 621, 627д, 644б, 646-660.

Заняття 15. Неперервні функції. Точки розриву.

А: 662, 666, 671, 674г,е, 676, 679, 681, 683, 688, 694, 701, 703, 705, 708, 714, 718, 722, 730, 731а, 734, 740а.

Д: 668, 674, 678, 686, 687, 690, 704, 706, 709, 713, 717, 725, 740б-е, 741.

Заняття 16. Рівномірно неперервні функції.

А: 787, 789, 792, 795, 799, 802б,г, 804.

Д: 788, 790, 800, 802а,в,е, 806.

Заняття 17. Контрольна робота № 2.

Заняття 18. Похідна функції та диференціал.

А: 828б,г, 829, 853, 857, 860, 885, 888, 902, 914, 943, 964, 966, 972, 977б, 978б, 981, 1083, 1086, 1090г,ж, 1093, 1096а,в, 1097, 1100, 1102.

Д: 828в,д, 830, 861, 864, 877, 883, 884, 885, 897, 929, 931, 948, 958, 961, 965, 970, 973, 977в, 982, 1088, 1090д,з, 1095, 1096б,д, 1099, 1101.

Заняття 19. Обчислення похідних. Геометричний зміст похідної.

А: 984а, 986б, 992, 999б, 1001, 1023, 1024, 1025, 1039, 1044, 1048, 1052, 1054б, 1055, 1060, 1056, 1070, 1077, 1081.

Д: 986в,г, 987, 999в, 1000, 1003, 1027, 1040, 1046, 1050, 1053, 1054а,в, 1061, 1072, 1079, 1082.

Заняття 20. Похідні і диференціали вищих порядків. Похідна неявно заданої та параметрично заданої функції.

А: 1115, 1124, 1128, 1131, 1139, 1140, 1148, 1161, 1173, 1189, 1193, 1201, 1211.

Д: 1117, 1123, 1127, 1132, 1138, 1142, 1147, 1149, 1154, 1164, 1174, 1178, 1190, 1193, 1202, 1204, 1212.

Заняття 21. Формула Лейбніца. Теореми Ролля, Лагранжа і Коші. Дослідження функцій на монотонність та опуклість. Екстремуми. Найбільші і найменші значення функції.

А: 1235, 1244, 1251а,г, 1289а,в, 1314а, 1430, 1436, 1440, 1447, 1462.

Д: 1240, 1251б,в, 1271, 1276, 1289б,г, 1300, 1306, 1308, 1313, 1314б, 1439, 1442, 1449.

Заняття 22. Формула Тейлора. Обчислення границь функцій.

А: 1377, 1381, 1384, 1386, 1389, 1394б, 1396а, 1398, 1401, 1404, 1405, 1406.2.

Д: 1376, 1382, 1385, 1391, 1394в, 1396, 1399, 1400, 1406, 1406.1.

Заняття 23. Правило Лопіталя.

А: 1320, 1325, 1331, 1337, 1341, 1342, 1347, 1349, 1354, 1359.

Д: 1323, 1326, 1333, 1338, 1342, 1346, 1351, 1355, 1361, 1365.

Заняття 24. Контрольна робота № 3.

Заняття 25. Побудова графіків функцій.

А: 1472, 1477, 1484, 1500, 1506, 1510, 1513, 1516, 1528.

Д: 1486, 1492, 1509, 1512, 1519, 1521, 1531, 1532, 1534.

Самостійно: Задачі на екстремум.

1558, 1561, 1562, 1563, 1566, 1568, 1569, 1577, 1578.

Тематика контрольних робіт

Контрольна робота № 1: математична індукція, елементи математичної логіки, множини, графіки функцій (зразок):

1. Довести

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}.$$

2. Довести рівносильності

а) $(p\to q)\wedge p\wedge q=(p\to q)\wedge p$.

б) $(p\wedge q\to r)\to(p\to r)=\neg p\vee q\vee r$.

3. Знайти $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$, $\subset A$, якщо:

а) $A=\{x:\ sinax>0\}$, $B=\{x:\ x^2-x-2<0\}$;

б) $A=\{(x,y):x+y\geq 1\}$, $B=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 4\}$.

4. Побудувати ескізи графіків функцій:

а) $y=\frac{x(x-2)}{(x-1)(x+2)}$) $y=tg\frac{1}{x}$

в) $y=arctg\frac{1}{cosx}$) $y=\frac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$

д) $r=4sin4\varphi$

5. Чи вірні висловлення:

а) $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists x\in\mathbb{R}\ \ [x^2+ax+2a>0]$;

б) $\exists a\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}\ \ [x^2-2ax+a>0]$.

Контрольна робота № 2: границя послідовності, границя функції, неперервні функції (зразок):

1. Нехай (x_n)-фундаментальна послідовність. Довести фундаментальність таких послідовностей:

a) (x_n^2),) $\sqrt{|x_n|}$,)$(x_n x_{n+1})$.

2. З допомогою означення границі функції довести, що $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$.

3. Обчислити

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n}$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(sin\frac{1}{x} + cos\frac{1}{x})^x$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(sin\sqrt{x+1} - sin\sqrt{x})$.

4. Довести неперервність в точці $x_0 = 1$ функцій

а) $f(x) = \sqrt{x}$

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5. Довести рівномірну неперервність на відрізку $[2, 5]$ функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Контрольна робота № 3: знаходження похідних та диференціалів, застосування диференціального числення.

IV. Вправи для підготовки до колоквіумів.

Перший колоквіум

1. Довести рівносильності

$$p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q), \quad \neg(p \to q) = p \wedge \neg q$$

а) з допомогою таблиці істинності;

б) з допомогою основних рівносильностей.

2. Які властивості елементів множини A описується такими висловленнями:

а) $\forall x \in A\ \exists n \in N\ \ [x = 2n]$;
б) $\forall x \in A\ \exists m \in Z\ \ [x = \frac{m}{n}]$;
в) $\forall x \in A\ \exists y \geq 1\ \ [2^x = y]$.

3. Довести:
а) $(A \bigcup B)\backslash C = (A\backslash C) \bigcup (B\backslash C)$;
б) $(A\backslash B) \bigcup C = ((A \bigcup C)\backslash B) \bigcup (B \bigcap C)$.

4. Для функції $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ визначити множини:

$$f(\{-1,1\}),\ \ f((-2,0)),\ \ f^{-1}(-1),\ \ f^{-1}((0,1)),\ \ f^{-1}((-1,1)).$$

5. Які з наступних функцій $f : [-1,1] \to [-1,1]$

$$x \to x^2,\quad x \to x^3,\ \ x \to 2^{|x|-1}$$

є сюр'єктивні, ін'єктивні, бієктивні?

6. Довести, що
$f^{-1}(A \bigcup B) = f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$;

$$f^{-1}(A\backslash B) = f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B).$$

7. Навести приклади:
а) продовження і звуження функції;
б) ін'єктивних, сюр'єктивних, бієктивних функцій.

8. Навести приклади множин, які не мають властивості повноти.

9. Дати означення $a = \inf X$, $\ a \neq \inf X$.

10. Довести лему про існування $\inf X$.

11. Довести, що не існує раціональних чисел, які дорівнюють $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$.

12. Дати означення: a-гранична точка множини E, a-не є граничною точкою множини E.

13. Дати означення: X- обмежена множина, X- не обмежена множина.

14. Показати, що умови в основних лемах є необхідними. Побудувати необхідні приклади.

15. Знайти E' для
$E = (0,1) \bigcup (1,2)$;
$E = \{1,2,3,4\}$;

$E = \mathbb{Q}$;

$E = [0, 1) \bigcup \{2, 3, 4\}$.

16. Дати приклади множин, для яких

$$E' \subset E,\ E' = E,\ E \subset E'.$$

17*. Довести: $(E')' \subset E'$.

18. Яким властивостям задовольняють множини і яким не задовільняють в порівнянні з множиною дійсних чисел:

а) $\mathbb{Q}$-множина раціональних чисел;

б) $\mathbb{Q}_{\sqrt{2}} = \{a + b\sqrt{2} : \quad a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}\}$?

19. Дати означення:

f не є сюр'єктивна, f не є ін'єктивна, f не є бієктивна.

20. Нехай L-множина всеможливих прямих на площині, φ-відношення паралельності, $l_1, l_2 \in L,\ l_1 \varphi l_2 = l_1 || l_2$. Яка потужність множини L/φ?

21. Яка потужність:

а) множини інтервалів, які не перетинаються;

б) множини інтервалів з раціональними кінцями;

в) множини кругів в площині, які не перетинаються?

Другий колоквіум.

1. Довести на мові $\varepsilon - n$:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$;

б) $|a_n| \to \infty \Rightarrow \frac{1}{|a_n|} \to 0$.

2. Чи вірні твердження?

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a \Rightarrow a$- гранична точка множини $E = \{x_n\}$;

б) a-гранична точка множини $E = \{x_n\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$.

3. Чи існують послідовності $x_n,\ y_n$ -збіжні, що

	а)	б)	в)	г)	д)	е)
$x_n + y_n$	зб.	зб.	зб.	розб.	розб.	розб.
$x_n * y_n$	зб.	розб.	розб.	розб.	зб.	розб.
x_n / y_n	розб.	зб.	розб.	зб.	розб.	розб.

4. Довести, що довільна послідовність має монотонну підпослідовність.

5. Довести, що з фундаментальності (x_n) і (y_n) випливає фундаментальність $(x_n + y_n)$, $(x_n * y_n)$, x_n^2, $\sqrt{|x_n|}$, $(x_n * x_{n+1})$.

6. Дати приклади послідовностей, у яких множини значень $\{x_n\} = \{y_n\}$- співпадають і

а) $\lim x_n \neq \lim y_n$ (границі існують);

б) (x_n)-збіжна, а (y_n)- розбіжна.

7. Який зв'язок між збіжністю (x_n) і $(|x_n|)$?

8*. Довести: якщо (x_n)-фундаментальна і (x_{n_k})-збіжна, то (x_n)- збіжна.

9. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$.

10. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f^2(x) = B$. Чи існує $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

11. Довести: $f-$ неперервна $\Rightarrow$ $|f|$- неперервна. Чи вірним є твердження навпаки?

12. Довести, що рівняння $x^5 - 3x = 1$ має на [1,2] корінь.

13. Привести приклад неперервної функції, яка приймає значення 1, 3, але не приймає значення 2.

14. Чи з того, що f неперервна на E_1 і E_2 випливає, що f- неперервна на $E_1 \bigcup E_2$?

15. Довести: якщо f-рівномірно неперервна на обмеженій множині E, то f-обмежена на E.

16. Довести на ε, δ :

а) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} sin\frac{\pi}{x}$ - не існує;

в) $f(x) = \frac{1}{x^2}$- неперервна в точці 1;

г) $f(x) = x^3$-рівномірно неперервна на [1,3];

д) $f(x) = \ln x$ не є рівномірно неперервною на $(0, \infty)$.

17. Довести:

$f : [0, 1] \to [0, 1]-$ неперервна $\Rightarrow$ $\exists c \in [0, 1] : \quad f(c) = c$.

18. Довести:

а) Якщо f-рівномірно неперервна на $[a, b]$ і f -рівномірно неперервна на $[b, c]$, то f-рівномірно неперервна на $[a, c]$.

б) З рівномірної неперервності функції f на $[a, b]$ і на $[b, c]$ не випливає рівномірна неперервність на $[a, c]$.

19. Довести: якщо f -неперервна на $[a, +\infty)$ і $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, то f-

обмежена на $[a, +\infty)$.

20^*. Довести на мові ε, δ, що $f(x) = \sqrt{x}$ -рівномірно неперервна на $[0, +\infty)$.

V. Зразок екзаменаційного завдання.

I. частина (практична).

1. Побудувати ескіз графіків функцій $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-3)}$, $f(x) = \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$;

2. Довести існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\ x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$.

3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)^{1/x^2}$.

4. Довести за означенням, що $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = 2$.

5. $y = \sqrt[x]{x + \sqrt[x]{\arccos x}}$, $y'-?$

6. $f(x) = x^2 sin^2 x$. Знайти $f^{(50)}(x)$.

II. частина (теоретична).

Дати означення:

1. a - гранична точка множини E.
2. $b = supE$, $b \neq supE$.
3. Верхня і нижня границя послідовності.
4. Означення неперервності функції.
5. Опуклість функції.

Сформулювати твердження:

1. Основні леми, які випливають з властивості повноти.
2. Локальні властивості неперервних функцій.
3. Необхідні і достатні умови локального екстремума.
4. Формула Тейлора.

Сформулювати і довести:

1. Теореми Вейєрштраса про найбільше і найменше значення функції.

2. Теорема Коші (про скінченні прирости).

3. Довести: якщо f - рівномірно неперервна на обмеженій множині, то f - обмежена на E.

Екзамен буде проходити у письмовій формі з наступним усним опитуванням.

На екзамені необхідно у письмовій формі:

- подати розв'язки задач;

- доти означення та формулювання теорем;

- сформулювати та довести вказані твердження.

Екзамен включає також усну співбесіду.