**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**Львівський національний університет імені Івана Франка**
**Механіко-математичний факультет**
**Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь**

**Затверджено**
на засіданні кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка
( протокол № 1 від 29.08.2022 )

Завідувач кафедри:

_____ проф. О.М. Бугрій

# Силабус з навчальної дисципліни
# “ Стохастичні диференціальні рівняння ”,
# що викладається в межах ОПП
# “ Комп'ютерний аналіз математичних моделей ”
# першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів з спеціальності 111 - Математика

**Львів 2022**

| | |
|---|---|
| **Назва дисципліни** | **Стохастичні диференціальні рівняння** |
| **Адреса викладання дисципліни** | вул. Університетська 1, м. Львів, 79000 |
| **Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна** | Механіко-математичний факультет<br>Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь |
| **Галузь знань, шифр та назва спеціальності** | 11 - Математика та статистика<br>111 – Математика |
| **Викладачі дисципліни** | **Бугрій Олег Миколайович**, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь |
| **Контактна інформація викладачів** | oleh.buhrii@lnu.edu.ua |
| **Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються** | Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю):<br>ауд. 267, головний корпус ЛНУ ім. І. Франка,<br>вул. Університетська 1, м. Львів, 79000 |
| **Сторінка курсу** | https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/sde-111-matematyka ;<br>https://e-learning.lnu.edu.ua/course/view.php?id=5067 |
| **Інформація про дисципліну** | Дисципліна “Стохастичні диференціальні рівняння” є нормативною дисципліною з спеціальності 111 Математика для освітньої програми “Комп'ютерний аналіз математичних моделей”, яка викладається в 7-му семестрі в обсязі 4-ох кредитів за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS. |
| **Коротка анотація дисципліни** | Курс розроблено для ознайомлення студентів з основними поняттями та методами розв’язування стохастичних диференціальних рівнянь та задач для них. Набуті знання можна використати при математичному моделюванні природних та соціально-економічних процесів |
| **Мета та цілі дисципліни** | *Мета:* надати студентам основні поняття та методи теорії стохастичних диференціальних рівнянь<br>*Цілі:* забезпечити знайомство студентів з властивостями функцій зі значеннями в банахових просторах, викласти основні положення теорії випадкових процесів з неперервним часом, теорії стохастичних диференціальних рівнянь |
| **Література для вивчення дисципліни** | 1) Бугрій О.М. *Параболічні варіаційні нерівності*: Текст лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005.<br>2) Лопушанська Г.П., Бугрій О.М., Лопушанський А.О. *Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики:* Підручник. – Львів: видавець Чижиков І.Е. (1-е видання: 2012) 2-е видання: 2017.<br>3) Бугрій О.М. *Стохастичні диференціальні рівняння*: Електронний конспект лекційних та практичних занять. – Львів, 2021. https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/sde-111-matematyka .<br>4) Evans L.C. *An introduction to stochastic differential equations*. – Berkeley: American Mathematical Soc., 2012. |

| | |
|---|---|
| | 5) Gihman I.I., Skorohod A.V. *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1972.<br>6) Kunze M. *Stochastic differential equations*, Lecture Notes, University of Ulm, 2012.<br>7) Мокін Б.І., Мокін В.Б., Мокін О.Б. *Функціональний аналіз, адаптований до прикладних задач в галузі інформаційних технологій*: навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2020.<br>8) Applebaum D. *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo, 2009..<br>9) Pardoux E. *Stochastic Partial Differential Equations. An Introduction*. Springer Briefs in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG, 2021.<br>10) Гой Т.П., Махней О.В. *Диференціальні рівняння*: навчальний посібник. Івано-Франківськ: ПНУ ім. В. Стефаника, 2021. |
| **Обсяг курсу** | Загальний обсяг: 120 годин. Аудиторних занять: 80 год., з них 48 год. лекційних та 32 годин практичних занять. Самостійної роботи: 40 год. |
| **Очікувані результати навчання** | У результаті вивчення даного курсу студент повинен:<br>**знати**:<br>формулювання основних задач для стохастичних диференціальних рівнянь першого і вищих порядків, систем стохастичних диференціальних рівнянь, умови існування, єдиності та неперервної залежності від початкових даних їхніх розв'язків, доведення теорем їх коректності;<br>**вміти**:<br>розрізняти типи стохастичних диференціальних рівнянь першого порядку, систем стохастичних диференціальних рівнянь, знаходити їхні загальні розв'язки, знаходити розв'язки задач для стохастичних диференціальних рівнянь та їхніх систем, перераховувати стохастичні диференціали при замінах змінних, будувати експоненти матриць зі сталими коефіцієнтами, перевіряти умови коректності задач для стохастичних диференціальних рівнянь та їхніх систем.<br><br>Після успішного завершення курсу студент має набути такі **загальні компетентності (ЗК)** та **спеціальні** (фахові) **компетентності (СК)**:<br>ЗК-1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;<br>ЗК-3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;<br>ЗК-7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями;<br>ЗК-9 Здатність приймати обґрунтовані рішення;<br>СК-1 Здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання;<br>СК-2 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі;<br>СК-3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок;<br>СК-4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних;<br>СК-8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних |

| | |
|---|---|
| | математичних підходів,<br><br>і здобути такі програмні **результати навчання** (**РН**):<br>РН-1 Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці;<br>РН-3 Знати принципи modus ponens (правило виведення логічних висловлювань) та modus tollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень;<br>РН-10 Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями;<br>РН-11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей;<br>РН-17 Знати теоретичні основи і застосовувати основні методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів і математичної статистики для дослідження випадкових явищ, перевірки гіпотез, обробки реальних даних та аналізу тривалих випадкових явищ. |
| **Ключові слова** | Випадковий процес з неперервним часом, стохастичне диференціальне рівняння, рівняння Іто, задача Коші, розв'язок задачі Коші. |
| **Формат курсу** | Очний |
| **Теми** | Див. **Схема курсу** |
| **Підсумковий контроль, форма** | Екзамен у кінці семестру |
| **Пререквізити** | Для вивчення даного курсу студентам потрібні базові знання з:<br>- математичний аналіз;<br>- функціональний аналіз та теорія міри;<br>- теорія ймовірностей та математична статистика;<br>- диференціальні рівняння. |
| **Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу** | Інформаційні методи (лекція, бесіда, ілюстрація, демонстрація);<br>дедуктивні методи на основі узагальнень;<br>евристичні методи (проблемна лекція);<br>інтерактивні методи (дискусія) |
| **Необхідне обладнання** | Комп'ютер із необхідним програмним забезпеченням, доступ до Internet мережі. |
| **Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)** | Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:<br>• Змістовий модуль 1: 2% семестрової оцінки за активну роботу на заняттях, 2% семестрової оцінки за самостійну роботу і виконання домашніх завдань, 6% семестрової оцінки за контрольну роботу, 10% семестрової оцінки за колоквіум, максимальна кількість балів 20.<br>• Змістовий модуль 2: 1,5% семестрової оцінки за активну роботу на заняттях, 1,5% семестрової оцінки за самостійну роботу і виконання домашніх завдань, 7% семестрової оцінки за контрольну роботу, |

| | |
|---|---|
| | 10% семестрової оцінки за колоквіум, максимальна кількість балів 20.<br>• Змістовий модуль 3: 2,5% семестрової оцінки за активну роботу на заняттях, 2,5% семестрової оцінки за самостійну роботу і виконання домашніх завдань, 5% семестрової оцінки за контрольну роботу, максимальна кількість балів 10.<br>• іспит: 50% семестрової оцінки, максимальна кількість балів 50.<br>Підсумкова максимальна кількість балів 100.<br>**Академічна доброчесність**: Очікується, що роботи студентів будуть оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Списування та втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в написанні завдань є підставою для її незарахуванння викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.<br>**Відвідання занять** є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні зайняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів робіт, передбачених курсом.<br>**Література.** Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.<br>**Політика виставлення балів.** Враховуються бали, набрані при поточному контролі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнень на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.<br>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються. |
| **Питання до заліку чи екзамену.** | Базові означення з функціонального аналізу, теорії ймовірності та звичайних диференціальних рівнянь; властивості інтегралів Рімана, Лебега, Рімана-Стільтьєса; міра Лебега, Лебега-Стільтьєса; інтеграл Лебега-Стільтьєса, Бохнера, Пелі-Вінера-Зигмунда; класифікація випадкових процесів; стохастичний диференціал випадкових процесів; задача Коші для стохастичного диференціального рівняння (єдиність, існування, неперервна залежністі розв'язку від даних). |
| **Опитування** | Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу. |

## Схема курсу

| Тижні | Лекційний курс | | Практичні заняття | | К-сть год СР | Літе-ратура |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Назва теми | К-сть год | Назва теми | К-сть год | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | Поняття про рівняння з випадковим чинником | 4 | Формула Іто та її використання | 2 | 3 | [3], [4], [8], [9], Сайт курсу |
| 2 | Основні функційні простори детермінованих функцій. | 2 | Звичайні та стохастичні диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними | 2 | 2 | [1], [3], [4], [7], Сайт курсу |
| 3 | Інтеграл Рімана-Стільтьєса, Лебега-Стільтьєса та їхні основні властивості. | 4 | Стохастичні диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними II | 2 | 3 | [3], [4], [7], Сайт курсу |
| 4 | Простори гладких та інтегровних функцій зі значеннями в банахових просторах. | 2 | Математичне сподівання випадкової величини | 2 | 2 | [1], [3], [4], [9], Сайт курсу |
| 5 | Ймовірнісна міра Лебега-Стільтьєса, простори випадкових функцій зі скінченними моментами. | 4 | Контрольна робота 1. | 2 | 3 | [3], [4], [7], Сайт курсу |
| 6 | Колоквіум 1. | 2 | Звичайні та стохастичні лінійні диференціальні рівняння | 2 | 2 | [2], [3], [4], [10], Сайт курсу |
| 7 | Випадкові процеси з неперервним часом та їхня класифікація. | 4 | Стохастичні лінійні однорідні диференціальні рівняння | 2 | 3 | [1], [3], [4], [8], [9], Сайт курсу |
| 8 | Вінерівський процес та деякі його властивості. | 2 | Стохастичні лінійні неоднорідні диференціальні рівняння | 2 | 2 | [3], [4], [8], Сайт курсу |
| 9 | Інтеграл Пелі-Вінера-Зигмунда та деякі його властивості. | 4 | Контрольна робота 2. | 2 | 3 | [3], [4], Сайт курсу |
| 10 | Стохастичний диференціал випадкових процесів. | 2 | Експонента матриці: випадок простих дійсних власних значень | 2 | 2 | [3], [4], [5], [8] [2], [3], [10], Сайт курсу |
| 11 | Колоквіум 2. | 4 | Експонента матриці: випадок кратних дійсних та простих комплексних власних значень | 2 | 3 | [2], [3], [4], [10], Сайт курсу |
| 12 | Формулювання задач для стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) Іто першого порядку, вищих порядків та систем СДР. | 2 | Використання експоненти матриці для розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь | 2 | 2 | [2], [3], [4], [10], Сайт курсу |
| 13 | Єдиність розв'язків задач | 4 | Системи лінійних однорідних | 2 | 3 | [2], [3], [4], |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Коші для СДР та систем СДР. | | стохастичних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами | | | [5], [6], Сайт курсу |
| 14 | Існування розв'язку задачі Коші для СДР. | 2 | Системи лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами | 2 | 2 | [2], [3], [4], [5], [6], Сайт курсу |
| 15 | Існування розв'язку задачі Коші для системи СДР. | 4 | Контрольна робота 3. | 2 | 3 | [2], [3], [4], Сайт курсу |
| 16 | Неперервна залежність розв'язків задач Коші для СДР від параметрів. | 2 | Підсумкове заняття. | 2 | 2 | [2], [5], [6], Сайт курсу |
| | **Разом** | **48** | | **32** | **40** | |