Лекція 16 Доведемо $C(t,s) = \mathbb{M}\left(W(t)W(s)\right) = t \wedge s.$ (4)

Нехай $t, s \geq 0$. Припустимо $t \geq s \geq 0$

1) $t = s$

$$\mathbb{D}\left(W(t)\right) = \mathbb{D}\left(W(t) - \underbrace{W(0)}_{=0}\right) \underset{(2)}{=} t - 0 \quad (5)$$

Тому

$$C(t,t) = \mathbb{M}\left[W^2(t)\right] = \mathbb{M}\left[W^2(t)\right] - \Big[\underbrace{\mathbb{M}\left[W(t)\right]}_{=a(t)\equiv 0}\Big]^2 = \mathbb{D}\left(W(t)\right) \underset{(5)}{=} t = t \wedge s$$

і (4) доведено

2) $t > s$

$$C(t,s) = \mathbb{M}\left(W(t)W(s)\right) = \mathbb{M}\Big(\left(W(s) + W(t) - W(s)\right)\cdot W(s)\Big) =$$

$$= \mathbb{M}\left(W^2(s) + \left(W(t) - W(s)\right)W(s)\right) = \left\{\mathbb{M}(\xi + \eta) = \mathbb{M}\xi + \mathbb{M}\eta\right\} =$$

$$= \underbrace{M\left(W^2(s)\right)}_{\overset{1)}{=}\, s} + M\left[(W(t)-W(s))\cdot W(s)\right] =$$

$$= s + M\Big[\underbrace{\big(W(t)-W(s)\big)}_{\text{незал. в.в. за озн. } W} \cdot \underbrace{W(s)}\Big] = \left\{ \begin{array}{l} M[\xi\cdot\eta] = M\xi\cdot M\eta \\ \xi,\eta - \text{незалежні} \end{array} \right\} =$$

$$= s + M\left[W(t)-W(s)\right]\cdot M\left[W(s)\right] = s + 0 = s = \min\{t,s\} = t\wedge s.$$

$\blacksquare$

<u>Т-ма</u> (про гладкість траєкторій він. пр.)

Для всіх $T>0$ та $\mathbb{P}$-м.н.в. $\omega\in\Omega$: $W(\omega)\in C^{0,\gamma}([0,T])$, де $\gamma\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ – довільне число.

$\square$ Нехай $T>0$, $\gamma\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Виберемо $m\in\mathbb{N}$ таке, що $0<\gamma<\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}$. Перевіримо умови т. Колмогорова

W - вінер. проц $\underset{\text{озн.}}{\Longrightarrow}$ $\forall\, t_1 < t_2$ $\quad W(t_2) - W(t_1) \in N(0, t_2 - t_1)$

Тому PDF в.в. $W(t_2) - W(t_1)$: $\quad q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\, e^{-\frac{x^2}{2(t_2-t_1)}}$

Тоді

$$\underline{I} = \mathbb{M}\Big[\,|W(t_2) - W(t_1)|^{\underbrace{2m}_{= \alpha}}\Big] = \int_{\mathbb{R}} |x|^{2m} q(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2m} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\, e^{-\frac{x^2}{2(t_2-t_1)}}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{заміна} \\ x \to y \\ x = \sqrt{2(t_2-t_1)}\, y \\ dx = \sqrt{2(t_2-t_1)}\, dy \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{2m} \left(\sqrt{2(t_2-t_1)}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cancel{2}\pi \cancel{(t_2-t_1)}}} \cdot e^{-y^2} \cdot \sqrt{\cancel{2}\cancel{(t_2-t_1)}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^m (t_2 - t_1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{2m} e^{-y^2} dy = \underbrace{C(m)}_{\text{число}} \cdot |t_2 - t_1|^m =$$

$$= C(m)\, |t_2 - t_1|^{1 + \underbrace{m-1}_{= \beta}}$$

Тобто отримали умову т. Колмогорова для $\alpha = 2m$, $\beta = m - 1$

Тому є непер. за Гельдером з показником $< \frac{\beta}{\alpha} = \frac{m-1}{2m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$

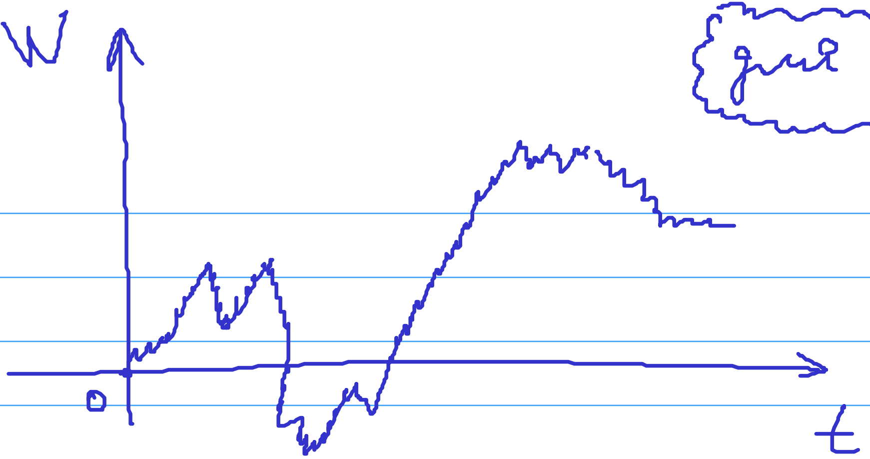
γ що оцінку задов. ∎

<u>Т-ма</u> (про граничну гладкість траєк. він. проц.)

1) $\forall \gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$ і $\mathbb{P}$-м.н.в. $\omega \in \Omega$: $W(\omega)$ не задов. умову Гельдера з показником γ

2) $\mathbb{P}$-м.н.в. $\omega \in \Omega$ траєкт. він. процесу не є диференційовною і має необмежену варіацію на кожному відрізку $[t_1, t_2]$. ∎ без дов.

Пр.



для $\omega \in \Omega$

Класифікація випадкових процесів.

(Ω, Σ, P) – імов. простір, $L_p = L_p(\Omega, \Sigma, P)$ – простір Лебега в.в. з скінченним абсол. моментом пор. p.

Озн. Вип. проц. $\eta = \eta(\omega, t)$ назив неперервним в середньому квадратичному якщо

$$M\left[|\eta(t) - \eta(t_0)|^2\right] \xrightarrow[t \to t_0]{} 0 \quad \forall t_0 \in [0, T]$$

Озн. Вип. проц. $\eta = \eta(\omega, t)$ назив

– CL_p-процесом, якщо $\eta \in C([0,T]; L_p)$.

– L_p^p-процесом, якщо $\eta \in L^p(0,T; L_p) = L_p(\Omega; L^p(0,T))$

лема про еквівал. трактування інтегровних ф-цій

– L-процесом, якщо $\eta \in L_1^1$-процесом.

Заувах. 1) Непер. в середньому квадратичному розумінні в. проц. – це точно CL_2-процес і навпаки.

2) якщо $p \geq q \geq 1$, то $C([0,T]; L_p) \subset C([0,T]; L_q)$

$L^p(0,T; L_p) \subset L^p(0,T; L_q)$

$$L^p(0,T;L_p) \subset L^q(0,T;L_p)$$

3) $C([0,T];L_p) \subset L^p(0,T;L_p)$

4) CL_1-процес буде L-процесом

Нехай η – L-процес (тобто $\eta \in L^1(0,T;L_1(\Omega)) = L_1(\Omega;L^1(0,T))$)

Тоді визначено інтеграл Бохнера $\int_0^T \eta(t)\,dt \in L_1$

Основні властивості і-лів такого сорту ми вже всі вивчили.

Розглянемо ймовірнісні власт-ві.

Лема (про мат. спод. інтегралу від L_1-процесу) Якщо $g \in L^\infty(0,T)$, η - є L_1-процесом, то

$$\forall t_1, t_2 \in [0,T]: \quad M\left[\int_{t_1}^{t_2} g(t)\eta(t)\,dt\right] = \int_{t_1}^{t} g(t)\, M[\eta(t)]\,dt \qquad (1)$$

Д (це просто т. Фубіні)

$g \in L^\infty(0,T)$, $\eta \in L^1(0,T;L_1)$ $\Big| \Rightarrow g\cdot\eta \in L^1(0,T;L_1)$

і тому інтеграл зліва в (1) існує

$\eta \in L^1(0,T;L_1) \Rightarrow \|\eta(t)\|_{L_1} = M|\eta(t)| \in L^1(0,T)$

Тому $M\eta(t) \in L^1(0,T)$, $g \in L^\infty(0,T)$ $\Big| \Rightarrow g(t) M\eta(t) \in L^1(0,T]$ і існує інтеграл справа в (1).

Доведемо рівність

$$M\left[\int_{t_1}^{t_2} g(t)\,\eta(\omega,t)\,dt\right] = \int_{\Omega}\left(\int_{t_1}^{t_2} g(t)\,\eta(\omega,t)\,dt\right)P(d\omega) =$$

$$\underset{\text{т. Фубіні}}{=} \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\Omega} g(t)\,\eta(\omega,t)\,P(d\omega)\right)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} M\left(\underbrace{g(t)}_{}\cdot\eta(\omega,t)\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} g(t)\,M(\eta(t))\,dt$$

число винесено за знак мат. спод.

$\blacksquare$

<u>Озн.</u> Нехай $\mu = \mu(t, z)$ - детермінована ф-ція. Оператором Немицького назив. ф-ція, визначена правилом

$$(N[\eta])(\omega,t) = \mu(t, \eta(\omega,t)), \quad \omega\in\Omega, t\in[0,T] \quad (2)$$

Припустимо, що μ задов. умову

(N): 1) $\mu \in C([0,T] \times \mathbb{R}^1)$;

2) $\forall\, t, s \in [0,T]$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^1$:

$$|\mu(t,x) - \mu(s,x)| \le K \cdot (1 + |x|)\,|t-s| \qquad (3)$$

(„посилена" умова Ліпшиця за t)

де $K > 0$ – стала;

3) $\forall\, t \in [0,T]$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^1$

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)| \le K \cdot |x-y| \qquad (4)$$

(умова Ліпшиця за y)

Лема (про оператор Немицького) Нехай викон. умова (N). Тоді, якщо $\eta \in CL_2$-процесом, то $N[\eta]$ теж $\in CL_2$-процесом.

Б) Нехай $t_0 \in [0,T]$, $t_n \underset{n\to\infty}{\to} t_0$, $t_n \in [0,T]$.

Нехай $\xi(\omega,t) = (\mathcal{N}[\eta])(\omega,t) = \mu(t, \eta(\omega,t))$.

Розглянемо

$$\| \xi(t_n) - \xi(t_0) \|_{L_2} = \| \mu(t_n, \eta(t_n)) - \mu(t_0, \eta(t_0)) \|_{L_2} =$$

$$= \| \mu(t_n, \eta(t_n)) - \mu(t_0, \eta(t_n)) + \mu(t_0, \eta(t_n)) - \mu(t_0, \eta(t_0)) \|_{L_2} \leq$$

$$\underset{\text{нерів. трикутника}}{\leq} I_1 + I_2 \qquad (5)$$

де $I_1 = \| \mu(t_n, \eta(t_n)) - \mu(t_0, \eta(t_n)) \|_{L_2}$,

$I_2 = \| \mu(t_0, \eta(t_n)) - \mu(t_0, \eta(t_0)) \|_{L_2}$

Оскільки $\eta \in C([0,T]; L_2)$, то з т. Вейєрштрасса

$$\exists C_1>0 \quad \forall t\in[0,T] \quad \|\eta(t)\|_{L_2} \le C_1 \qquad (6)$$

$$I_1^2 = M\left[\left|\mu(t_m,\eta(t_m)) - \mu(t_0,\eta(t_m))\right|^2\right] \underset{(3)}{\le}$$

однакове

$$\le M\left[\left[K\,(1+|\eta(t_m)|)\,|t_m-t_0|\right]^2\right] =$$

$$= K^2 \int_\Omega (1+|\eta(t_m)|)^2 \underbrace{|t_m-t_0|^2}_{\text{число}} P(d\omega) \le$$

$$\le C_2 |t_m-t_0|^2 \cdot \int_\Omega \left(1+|\eta(t_m)|^2\right) P(d\omega) =$$

$$= C_2 |t_n - t_0|^2 \big(\underbrace{\mathbb{P}(\Omega)}_{=1} + \mathbb{M}\left[|\eta(t_n)|^2 \right] \big) =$$

$$= C_2 |t_n - t_0|^2 \left(1 + \|\eta(t_n)\|^2_{L_2} \right) \underset{(6)}{\leq} C_3 |t_n - t_0|^2 \xrightarrow[t_n \to t_0]{} 0$$

$$I_2^2 = \| \mu(t_0, \eta(t_n)) - \mu(t_0, \eta(t_0)) \|^2_{L_2} =$$

$$= \mathbb{M}\left[|\mu(t_0, \eta(t_n)) - \mu(t_0, \eta(t_0))|^2 \right] \underset{(4)}{\leq}$$

однакові

$$\leq K^2 \, \mathbb{M}\left[|\eta(t_n) - \eta(t_0)|^2 \right] = K^2 \cdot \|\eta(t_n) - \eta(t_0)\|^2_{L_2} \to 0$$

бо η – неперр. ф-ція з $C([0,T]; L_2)$

$\blacksquare$

Лекція 17 **Лема** Вінерівський процес є CL_2-процесом,

тобто $W \in C([0,T]; L_2)$

$\boxed{\Xi}$ $\forall t_0 \in [0,T]$, $\{t_k\} \subset [0,T]$, $t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} t_0$

$$M\left[|W(t_k) - W(t_0)|^2\right] = \left\{\begin{matrix}\text{аналогічно}\\ \text{як в т-мі}\\ \text{про гладкість в.п.}\end{matrix}\right\} = C(1)\cdot|t_2 - t_1|^1$$

Тоді

$$\|W(t_k) - W(t_0)\|_{L_2} = \sqrt{M\left[|W(t_k)-W(t_0)|^2\right]} =$$

$$= \sqrt{C(1)}\cdot\sqrt{|t_k - t_0|} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \qquad \boxed{\Xi}$$

Наслідок з цієї леми випливає, що

(дов. евр. ф-ли Іто) $\qquad dW \approx \Delta W \approx \sqrt{\Delta t} \approx \sqrt{dt}$. (7)

Інтегрування випадкових процесів.

Якщо $\eta \in L_1$-процесом, то інтеграл $\int_0^T \eta(t)\,dt \in L_1$ визначено і це інтеграл Бохнера.

$W \in CL_2$-процесом $\Rightarrow$ $W \in L_2$-процесом $\Rightarrow$ $\int_0^T W(t)\,dt \in L_2$ визначено і це інтеграл Бохнера.

$h \in L^\infty(0,T) \Rightarrow \int_0^T h(t)\,W(t)\,dt \in L_2$ і це інтеграл Бохнера.

Чого нема:

$$\int_0^T h(t)\,dW(t) = \int_0^T h(t)\,\underline{\underline{W'(t)}}\,dt$$

не існує

Тобто так → визначити інтеграл не можна, бо W не диф і не обмеж. варіації

Підемо іншим шляхом. Запишемо ф-лу інтегрування частинами

$$\int_0^T u(t)\,d\underbrace{v(t)}_{\text{„погана"}} = u(t)v(t)\Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T v(t)\,u'(t)\,dt$$

u візьмемо так, щоб $=0$, а замість v візьмемо W

тоді і-л існує

нехай $\Psi_0 = \{ g \in C^1([0,T]) \mid g(0)=g(T)=0 \}$ (1)

$C_0^\infty((0,T)) \not\subset \Psi_0$. Нехай $g \in \Psi_0$ – детермінована ф-ція

<u>Озн.</u> Інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда від функції $g \in \Psi_0$ по вінерівському процесу W назив. вираз

$$(PWZ)\int_0^T g(t)\,dW(t) \overset{def}{=} -(B)\int_0^T \underbrace{g'(t)}_{\text{неперервна}}\,\underbrace{W(t)}_{CL_2\text{ процес}}\,dt \qquad (2)$$

інтеграл визначено і він є елементом L_2

Лема 1 (лінійність інтеграла)

$$\int_0^T [\alpha f(t) + \beta g(t)]\, dW(t) = \alpha \int_0^T f(t)\, dW(t) + \beta \int_0^T g(t)\, dW(t) \qquad (3)$$

◄ $$\int_0^T (\alpha f + \beta g)\, dW \overset{df}{=} -\int_0^T (\alpha f' + \beta g')\, W\, dt =$$

$$= -\alpha \int_0^T f' W\, dt - \beta \int_0^T g' W\, dt \overset{df}{=} +\alpha \int_0^T f\, dW + \beta \int_0^T g\, dW$$ ►

Лема - 2

1) $$\mathbb{M}\left[\int_0^T g(t)\,dW(t)\right] = 0 \qquad (4)$$

2) $$\mathbb{M}\left[\left(\int_0^T g(t)\,dW(t)\right)^2\right] = \int_0^T |g(t)|^2\,dt \qquad (5)$$

$\boxtimes$ 1) $$\mathbb{M}\left[\int_0^T g\,dW\right] \underset{\text{озн}}{=} \mathbb{M}\left[-\int_0^T g' W\,dt\right] \underset{\text{лема з попер. лекції}}{=}$$

$$= -\int_0^T g'\,\underbrace{\mathbb{M}[W]}_{=0}\,dt = -\int_0^T g' \cdot 0\,dt = 0$$

2) $$I = \mathbb{M}\left[\left(\int_0^T g\,dW\right)^2\right] = \mathbb{M}\left[\int_0^T g\,dW \cdot \int_0^T g\,dW\right] =$$

$$= \mathbb{M}\left[\int_0^T g(t)\,dW(t)\cdot\int_0^T g(s)\,dW(s)\right] \underset{\text{одм (мінуси пропадуть)}}{=}$$

$$= \mathbb{M}\left[\int_0^T g'(t)\,W(t)\,dt\cdot\underbrace{\int_0^T g'(s)\,W(s)\,ds}_{\text{не зал. від } t}\right] =$$

$$= \mathbb{M}\left[\int_0^T g'(t)\underbrace{\left(\overbrace{W(t)}^{\text{не зал. від } s}\cdot\int_0^T g'(s)\,W(s)\,ds\right)}_{\text{вин. пр.}}dt\right] \underset{\text{міна з інтегр. лін}}{=}$$

$$= \int_0^T g'(t)\,\mathbb{M}\left[\int_0^T g'(s)\,\underbrace{W(t)\cdot W(s)}_{\text{вин. проц.}}\,ds\right]dt \underset{\text{міна з інтегр. лін.}}{=}$$

$$= \int_0^T g'(t)\left(\int_0^T g'(s)\, \underbrace{M[W(t)\cdot W(s)]}_{= C(t,s) = t\wedge s = \min\{t,s\}}\, ds\right)dt =$$

$$= \int_0^T g'(t)\left(\int_0^t g'(s)\underbrace{\min\{t,s\}}_{=s}\, ds + \int_t^T g'(s)\underbrace{\min\{t,s\}}_{=t}\, ds\right)dt =$$

$$= \int_0^T g'(t)\left(\underbrace{\int_0^t s\, g'(s)\, ds}_{\text{частинами}} + \underbrace{t\int_t^T g'(s)\, ds}_{\text{Ньютона-Лейб}}\right)dt =$$

$$= \int_0^T g'(t)\left(s\, g(s)\Big|_0^t - \int_0^t g(s)\, ds + t\, g(s)\Big|_{s=t}^{s=T}\right)dt =$$

$$= \int_0^T g'(t)\left(\cancel{t\, g(t)} - 0\cdot g(0) - \int_0^t g(s)\, ds + t\, \underbrace{g(T)}_{=0} - \cancel{t\, g(t)}\right)dt =$$

$\boxed{g(0) = g(T) = 0 \quad \text{бо} \quad g \in \Psi_0}$

$$= -\int_0^T \left(\int_0^t g(s)\,ds\right) g'(t)\,dt \underset{\text{частинами}}{=}$$

$$= -\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\cdot \underbrace{g(t)\Big|_{t=0}^{t=T}}_{0} + \int_0^T g(t)\,\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)dt =$$

$$= 0 + \int_0^T g(t)\cdot g(t)\,dt = \int_0^T |g(t)|^2\,dt \quad \blacksquare$$

<u>Зауваж.</u> В ф-лі (2) g - фінітна ф-ція. Тому, наприклад, $\int_0^T 1\,dW$ НЕ визначено, бо 1 - НЕ фінітна ф-ція.

Нехай тепер $g \in L^2(0,T)$ – детермін. ф-ція

Нехай викон умова

(G): Послідовність $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \Psi_0$ є така, що

$$g_m \to g \text{ в просторі } L^2(0,T)$$

Оскільки гладкі фінітні ф-ції всюди щільні в просторі Лебега $L^2(0,T)$, то для кожної $g \in L^2(0,T)$ існує

послідовність $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, яка задов умову (G).

<u>Озн.</u> Інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда від $g \in L^2(0,T)$ по вінерівському процесу W назив вираз

$$(PWZ)\int_0^T g(t)\,dW(t) \overset{df}{=} \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ (PWZ)\int_0^T g_m(t)\,dW(t) \quad (6)$$

Можна показати, що означ коректне, тобто не залежить від вибору послідовності з умови (6)

<u>Лема</u> Формули (3), (4), (5) виконуються і для $g \in L^2(0,T)$.

▨ лінійність, тобто ф-ла (3) очевидна

<u>Доведемо (4).</u>
$$\mathbb{M}\left[\int_0^T g(t)\,dW(t)\right] = \mathbb{M}\left[\underset{n\to\infty}{l.i.m}\int_0^T g_n\,dW\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{лема про}\\ \text{винес.}\\ \text{границі з мат. спод}\end{matrix}\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{M}\left[\int_0^T g_n\,dW\right] \underset{\substack{(4)\ \text{для гладких}\\ \text{ф-цій}}}{=} \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

<u>Доведемо (5)</u>

$$M\left[\left(\int_0^T g(t)\,dW(t)\right)^2\right] = \left\|\int_0^T g\,dW\right\|^2_{L_2} =$$

Є властивість $\|x_m - x\|_X \to 0 \Rightarrow \|x_m\|_X \to \|x\|_X$

$$= \lim_{m\to\infty} \left\|\int_0^T g_m\,dW\right\|^2_{L_2} = \lim_{m\to\infty} M\left[\left(\int_0^T g_m\,dW\right)^2\right] \underset{(5)}{=}$$

для ладиних

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^T |g_m(t)|^2\,dt = \lim_{m\to\infty} \|g_m\|^2_{L^2(0,T)} =$$

$$= \|g\|^2_{L^2(0,T)} = \int_0^T |g(t)|^2\,dt \qquad \blacksquare$$

Лекція 18

В нас визначено $\int_0^T g(t)\,dW(t)$ для $g \in L^2(0,T)$. Тому, наприклад, якщо

$$\chi_{(\alpha,\beta)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (\alpha,\beta) \\ 0, & t \notin (\alpha,\beta) \end{cases}$$

то

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,dW(t) \overset{df}{=} \int_0^T g(t)\,\chi_{(\alpha,\beta)}(t)\,dW(t) \qquad (7)$$

Можна довести (3), (4), (5) для $\int_\alpha^\beta$ замість $\int_0^T$.

Якщо $\alpha \geq \beta$, то

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,dW(t) \overset{df}{=} -\int_\beta^\alpha g(t)\,dW(t) \qquad (8)$$

$$\int_a^a g(t)\,dW(t) \overset{(8)}{=} 0 \qquad (9)$$

Т-ма Виконується ф-ла Ньютона-Лейбніца для PWZ-інтегралу

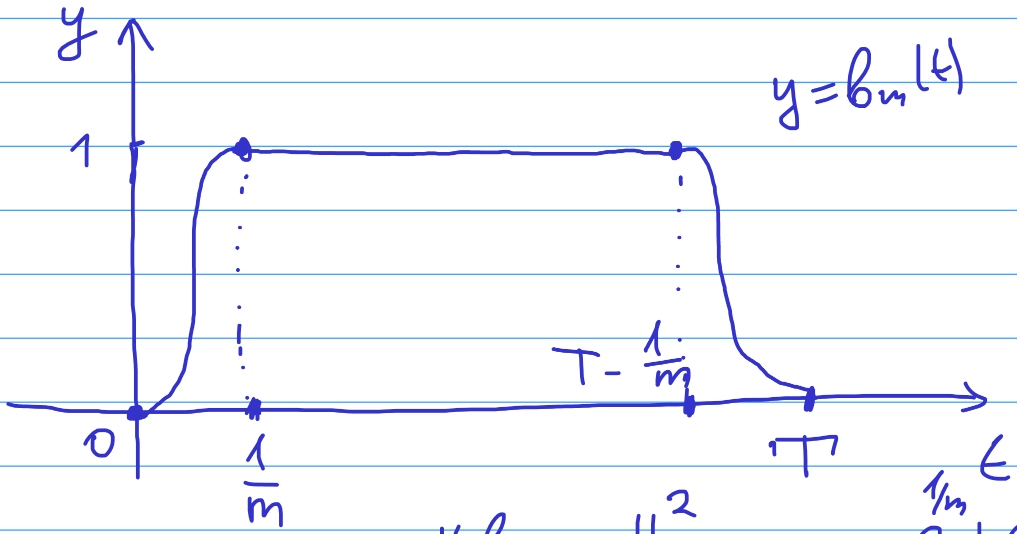
$$\forall (\alpha,\beta) \subset (0,T): \quad \int_\alpha^\beta dW(t) = W(\beta) - W(\alpha) \qquad (10)$$

$\boxed{\Xi}$ Тут $g(t) = 1$. Тому для обчислення і-лу в (10) треба побудувати послідовність з умови (G).

Проведемо доведення для $\alpha = 0$, $\beta = T$

Побудуємо послідовність, збіжну до 1.

$$b_m(t) = \begin{cases} 3(mt)^2 - 2(mt)^3, & 0 \le t \le \frac{1}{m} \\ 1, & \frac{1}{m} \le t \le T - \frac{1}{m} \\ 3(m(T-t))^2 - 2(m(T-t))^3, & T - \frac{1}{m} \le t \le T \end{cases} \qquad (11)$$



$b_m(0) = 0$

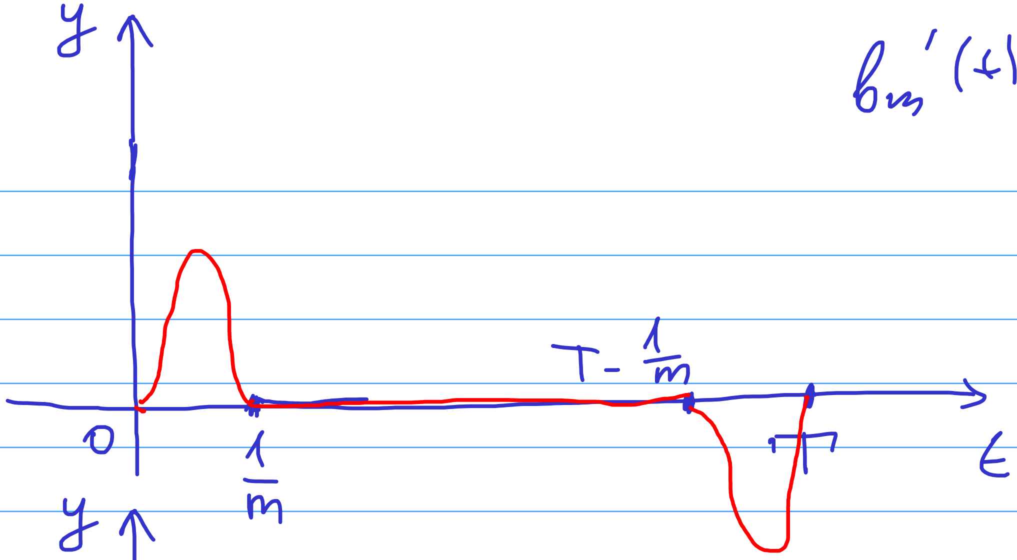
$b_m\left(\frac{1}{m}\right) = 3 - 2 = 1$

Очевидно

$b_m(t) \to 1$

в просторі $L^2(0,T)$

$$\|b_m - 1\|^2_{L^2(0,T)} = \int_0^{1/m} |b_m - 1|^2 dt + \int_{T-\frac{1}{m}}^{T} |b_m - 1|^2 dt \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

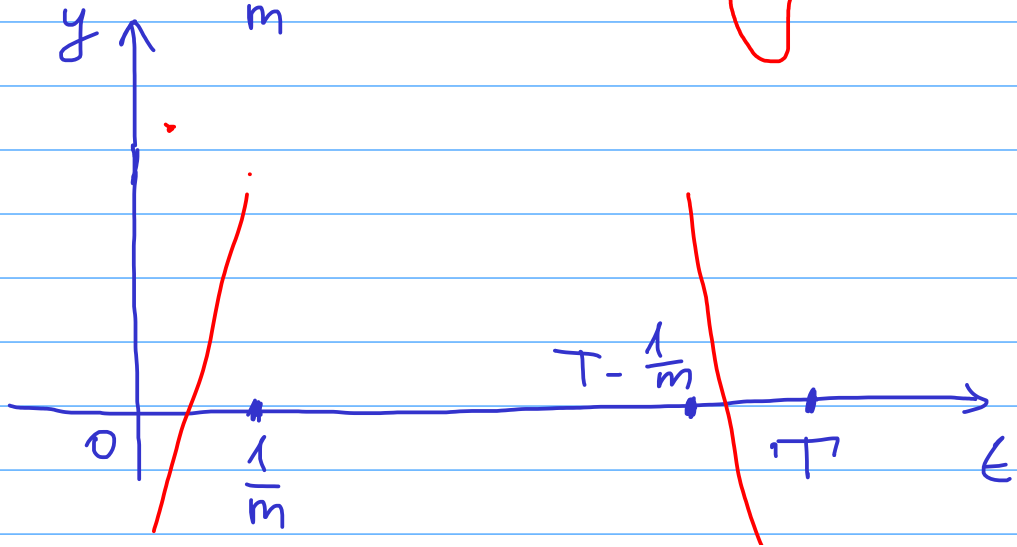


$$b_m'(t) = \left(3(mt)^2 - 2(mt)^3\right)' =$$

$$= 6m\left(mt - (mt)^2\right)$$

$$b_m'(0) = 0$$

$$b_m'\left(\frac{1}{m}\right) = 6m(1-1) = 0$$



Отже

$$\int_0^T dW = \int_0^T 1 \cdot dW = \lim_{n\to\infty} \int_0^T b_n(t)\, dW(t) =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \int_0^T b_n'(t)\, W(t)\, dt = \left\{ \begin{array}{l} b_n'(t) \equiv 0 \\ \text{при } \frac{1}{n} \le t \le T - \frac{1}{n} \end{array} \right\} =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{n}} b_n'(t) W(t)\, dt}_{\text{"} I_n^1} - \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{T-\frac{1}{n}}^T b_n'(t) W(t)\, dt}_{\text{"} I_n^2} \quad (12)$$

Перевіримо

$$K_n^1 = \int_0^{\frac{1}{n}} \left(3(nt)^2 - 2(nt)^3\right)_t' dt = \int_0^{\frac{1}{n}} \left(3 \cdot n^2 t^2 - 2 \cdot n^3 t^3\right)' dt =$$

$$= \int_0^{1/m} \left(6m^2 t - 6m^3 t^2\right) dt = 6m^2 \frac{t^2}{2}\Big|_0^{1/m} - 6m^3 \frac{t^3}{3}\Big|_0^{1/m} =$$

$$= 6m^2 \frac{1}{2m^2} - 6m^3 \frac{1}{3m^3} = 3 - 2 = 1$$

$$K_m^2 = \int_{T-\frac{1}{m}}^{T} b_m'(t)\,dt = b_m(t)\Big|_{t=T-\frac{1}{m}}^{t=T} =$$

$$= \Big[3\big(m(T-t)\big)^2 - 2\big(m(T-t)\big)^3\Big]\Big|_{t=T-\frac{1}{m}}^{t=T} = 0 - \Big(3\big(m(T-T+\tfrac{1}{m})\big)^2 -$$

$$-2\big(m(T-\cancel{T}+\tfrac{1}{m})\big)^3\Big) = 0 - (3-2) = -1$$

$$W(0) = W(0)\cdot 1 = W(0)\cdot K_m^1 = W(0)\int_0^{1/m} b_m'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{1/m} \left[6m^2 t - 6m^3 t^2\right]\cdot W(0)\,dt \qquad (13)$$

$$W(T) = -W(T)\cdot(-1) = -W(T)\cdot K_m^2 =$$

$$= -W(T)\int_{T-\frac{1}{m}}^{T} \left(3(m(T-t))^2 - 2(m(T-t))^3\right)'\,dt =$$

$$= -W(T)\int_{T-\frac{1}{m}}^{T} \left(-6m^2(T-t) + 2m^3(T-t)^2\right)dt =$$

$$= \int_{T-\frac{1}{m}}^{T} \left[6m^2(T-t) - 2m^3(T-t)^2\right] W(T)\,dt \qquad (14)$$

$W \in C([0,T]; L_2)$ тому $\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_0, m_T \in \mathbb{N}$

$$\forall t \in \left[0, \tfrac{1}{m_0}\right]: \quad \|W(t) - W(0)\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (15)$$

$$\forall t \in \left[T - \tfrac{1}{m_T}, T\right]: \quad \|W(T) - W(t)\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (16)$$

Тому $\forall \ m \geq \max\{m_0, m_T\}$

$$\left\| \int_0^T b_m(t)\, dW(t) - (W(T) - W(0)) \right\|_{L_2} \overset{\text{озн.}}{=} \left\| -\int_0^T b_m'(t) W(t)\, dt - (W(T) - W(0)) \right\|_{L_2} = \left\| -\underline{\int_0^{\frac{1}{m}} b_m' W\, dt} - \underline{\int_{T-\frac{1}{m}}^T b_m' W\, dt} - \underline{W(T)} + \underline{W(0)} \right\|_{L_2} \leq_{\text{нерів. трикутника}}$$

$$\le \left\| W(0) - \int_0^{1/m} b_m' W\,dt \right\|_{L_2} + \left\| -W(T) - \int_{T-\frac{1}{m}}^{T} b_m' W\,dt \right\|_{L_2} =$$

$$\underset{(13)}{=} \left\| \int_0^{1/m} \left[6m^2 t - 6m^3 t^2\right] \left(W(0) - W(t)\right) dt \right\|_{L_2} +$$

$$+ \left\| \int_{T-\frac{1}{m}}^{T} \left[6m^2 (T-t) - 2m^3 (T-t)^2\right] \left(W(T) - W(t)\right) dt \right\|_{L_2} \le$$

$\le$ {властив. норми і-лу Бохн.} $\le \displaystyle\int_0^{1/m} \left|6m^2 t - 6m^3 t^2\right| \cdot \underbrace{\|W(0) - W(t)\|_{L_2}}_{\le \frac{\varepsilon}{2}} dt +$

$$+ \int_{T-\frac{1}{m}}^{T} \left|6m^2 (T-t) - 2m^3 (T-t)^2\right| \cdot \underbrace{\|W(T) - W(t)\|_{L_2}}_{\le \varepsilon} dt \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_0^{1/m} \left| 6m^2 t - 6m^3 t^2 \right| dt}_{=1} + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_{T-\frac{1}{m}}^{T} \left| 6m^2 (T-t) - 2m^3 (T-t)^2 \right| dt}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Тому

$$\left\| \int_0^T dW - \left(W(T) - W(0) \right) \right\|_{L_2} =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \left\| \int_0^T b_m(t)\, dW - \left(W(T) - W(0) \right) \right\|_{L_2} = 0$$

Тому

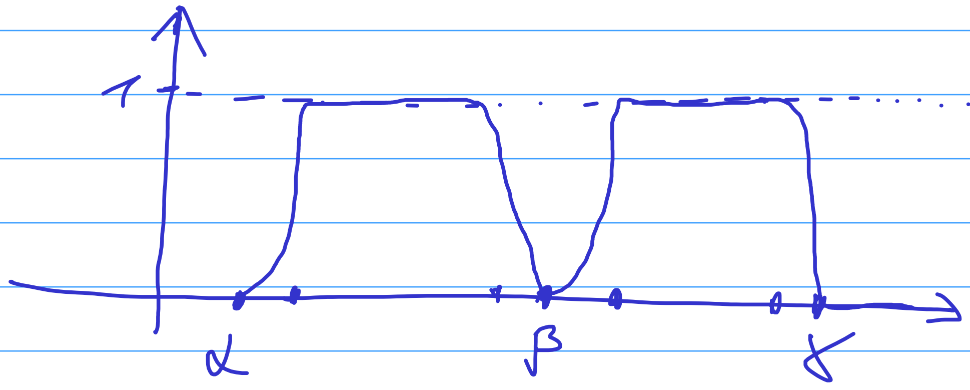
$$\int_0^T dW = W(T) - W(0) \qquad \blacksquare$$

Лема. Якщо $g \in L^2(0,T)$, W – вінер. процес.

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in [0,T]$

$$\int_\alpha^\beta g\,dW + \int_\beta^\gamma g\,dW = \int_\alpha^\gamma g\,dW \qquad (17)$$

▭ ідея доведення: треба використати таку функцію:



щоб і-л $\int_\alpha^\gamma$ розбити в суму двох інтегралів. ▭

Т-ма Якщо $g \in L^2(0,T)$, $t_0 \in [0,T]$

$$V(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} g(t)\,dW(t), \quad \tau \in [0,T] \qquad (18)$$

то $V \in CL_2$ - процесом

$\boxed{\Xi}$ $\tau_k \to t_0$ при $k \to \infty$

$$\| V(\tau_k) - V(t_0) \|^2_{L_2} = \left\| \int_{t_0}^{\tau_k} g\,dW - \int_{t_0}^{t_0} g\,dW \right\|^2_{L_2} \overset{(8)}{=\!=}$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{\tau_k} g\,dW + \int_{\tau_0}^{t_0} g\,dW \right\|^2_{L_2} = \left\| \int_{\tau_0}^{\tau_k} g\,dW \right\|^2_{L_2} =$$

$$= \mathbb{M}\left[\left(\int_{t_0}^{\tau_k} g\,dW \right)^2 \right] = \left| \int_{\tau_0}^{\tau_k} |g|^2\,dt \right| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0,$$

до інтеграл Лебега по множині малої міри є малим $\blacksquare$

Диференціювання випадкових процесів.

1) Якщо $\eta \in C^1([0,T]; L_2)$, то існує (ми вчили) $\eta' \in C([0,T]; L_2)$ і тоді $d\eta = \eta'(t)\,dt$

2) Нехай ξ – CL_2-процес, тобто $\xi \in C([0,T]; L_2)$

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t} \xi(s)\,ds, \quad t \in [0,T] \qquad (1)$$

Тоді з властивостей і-лу Бохнера η – диференційовна ф-ція, $\eta'(t) = \xi(t)$

Озн Стохастичним диференціалом вип. процесу (1) назвемо вираз

$$d\eta(t) = \xi(t)\,dt \qquad (2)$$

Лекція 19

Озн. CL_2-процес η назив. диференційовним в середньому квадратичному розумінні в т. $t_0 \in [0,T]$ якщо існує границя

$$\underset{h \to 0}{l.i.m.} \frac{\eta(t_0+h) - \eta(t_0)}{h} \qquad (3)$$

і ця границя назив. середньоквадратичною похідною η в т. t_0 та познач. $\eta'(t_0)$

Ця похідна співпадає з похідною простору $C^1([0,T]; L_2)$ при заданому η.

Озн. Сім'я випадкових величин $\{\xi(\Delta)\}_{\Delta \in \mathcal{P}_T}$ назив. стандартним білим шумом, якщо

1) (адитивність) $\forall$ двох суміжних півінтервалів $\Delta_1 = (s, t]$, $\Delta_2 = (t, s]$ з півкільця $\mathcal{P}_T$ всіх півінтервалів з відрізка $[0, T]$

$$\xi(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \xi(\Delta_1) + \xi(\Delta_2)$$

2) (некорельованість) $\forall\, \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{P}_T : \Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$

$$\operatorname{cov}\left(\xi(\omega, \Delta_1), \xi(\omega, \Delta_2)\right) = 0$$

3) $\forall\, \Delta = (s, t] \in \mathcal{P}_T$

$$M(\xi(\Delta)) = 0, \quad D(\xi(\Delta)) = t - s$$

Пр. Нехай $\xi_0(\Delta) = W(t) - W(s)$, $\Delta = (s, t] \in \mathcal{P}_T$ (4)

де W – стандарт. вінерівський процес.

Тоді

$$\{\xi_0(\Delta)\}_{\Delta \in \mathcal{P}_T} \text{ – стандартний білий шум.}$$

Озн. Стохастичним диференціалом вінерівського процесу W назив. станд. білий шум з ф-ли (4), тобто

$$dW(t) = \{\xi_0(\omega, \Delta)\}_{\Delta \in \mathcal{P}_T} \quad (5)$$

$W(t)$ – ніде не диф. ф-ція, тобто W' НЕ існує.

Озн. Якщо існують такі CL_2-процес ξ та детермінована ф-ція $\sigma \in L^2(0,T)$, що $\forall\, t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$:

$$\eta(t_2) = \eta(t_1) + \overbrace{\int_{t_1}^{t_2} \xi(s)\,ds}^{\text{- інтеграл Бохнера}} + \overbrace{\int_{t_1}^{t_2} \sigma(s)\,dW(s)}^{\text{- інтеграл PWZ}} \qquad (6)$$

Тоді стохастичним диференціалом в.и. η назив. вираз

$$d\eta(t) = \xi(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t). \qquad (7)$$

Заув. Нехай $\sigma \in C([0,T])$ - детермін. ф-ція, $\sigma(t) \geq \sigma_0 > 0$ $\forall\, t \in [0,T]$,

$$\eta_0(t) = \int_0^t \sigma(s)\,dW(s) \qquad (8)$$

Тоді η_0 не є диф. в середньоквадрат. розумінні

$$\left\| \frac{\eta_0(t+h)-\eta_0(t)}{h} \right\|_{L_2} = \frac{1}{h} \left\| \int_0^{t+h} \sigma\, dW - \int_0^{t} \sigma\, dW \right\|_{L_2} =$$

$$= \frac{1}{h} \left(M\left[\left| \int_0^{t+h} \sigma\, dW + \int_t^{0} \sigma\, dW \right|^2 \right] \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{h} \left(M\left[\left| \int_t^{t+h} \sigma\, dW \right|^2 \right] \right)^{1/2} \underset{\text{лема}}{=} \frac{1}{h} \left(\int_t^{t+h} |\sigma|^2\, ds \right)^{1/2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{h} \left(\int_t^{t+h} \underbrace{|\sigma_0|^2}_{\text{число}}\, ds \right)^{1/2} = \frac{\sigma_0}{h} \cdot \sqrt{h} = \frac{\sigma}{\sqrt{h}} \to +\infty \quad \text{при } h \to 0$$

Розділ 4. Задача Коші для СДР

Нехай $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ - ймов. простір, W - вінер. процес.

σ - детермін. ф-ція однієї змінної $\sigma = \sigma(t)$

$\mu = \mu(t, x)$ - детермін. ф-ція двох змінних

<u>Озн</u> Співвідношення вигляду

$$d\eta(\omega,t) = \mu(t, \eta(\omega,t))\,dt + \sigma(t)\,dW(\omega,t) \qquad (1)$$

яке зв'язує незал. змінну t, випадков. параметр ω, стандартний білий шум dW, невідому ф-цію $\eta = \eta(\omega, t)$

та її стохаст. диференціал $d\eta(\omega,t)$ назив стохастичним диференціальним рівн. Іто.

Ф-ції μ та σ назив коеф. СДР (1)

<u>Озн.</u> Розв'язком СДР (1) назив CL_2-процес η, який в сенсі простору L_2 (тобто майже напевно) задов. рівність

$$\eta(t_2)-\eta(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\mu(s,\eta(s))ds+\int_{t_1}^{t_2}\sigma(s)dW(s) \quad (2)$$

для всіх $t_1,t_2\in[0,T]$, $t_1<t_2$.

<u>Озн.</u> Стохастична задача Коші полягає в тому, щоб знайти такий р-ок (1), що задов

початкову умову $\eta(0)=\eta_0$ м.н. (3)

<u>Озн.</u> Розв'язком стох. д. К. (1), (3) назив. CL_2-процес η, який в сенсі простору L_2 задов

$$\eta(t)=\eta_0+\int_0^t \mu(s,\eta(s))\,ds+\int_0^t \sigma(s)\,dW(s) \quad (4)$$

для всіх $t\in[0,T]$.

<u>Заув.</u> Розв'язок (1) та (1), (3) є CL_2-процесом, тобто

$$\eta\in C([0,T];L_2)$$

тобто є „узагальненим" в сенсі теорії диф. рівн.

Лема (Гронуола - Беллмана). Нехай $\ell, g : [0,T] \to \mathbb{R}^1$

ℓ - неперервна, g - неспадна на $[0,T]$.

Якщо існує $L > 0$ таке, що

$$\ell(t) \le g(t) + L \int_{t_0}^{t} \ell(s)\,ds \quad \forall t \in [t_0, T], \quad (5)$$

то

$$\ell(t) \le g(t)\, e^{L(t-t_0)} \quad \forall t \in [0,T] \quad (6)$$

$\boxtimes$ без дов $\boxtimes$

Нехай и задов умову

(N) : $\mu \in C([0,T] \times \mathbb{R}^1)$ - детерм. ф-ція; існує стала $K > 0$ така, що

1) $\forall t, s \in [0,T]$ $\forall x \in \mathbb{R}^1$:

$$|\mu(t,x) - \mu(s,x)| \le K(1+|x|)\,|t-s| \qquad (7)$$

2) $\forall t \in [0,T]$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^1$

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)| \le K\,|x-y|. \qquad (8)$$

<u>Т-ма 1</u> (єдиності р-ку). Якщо $\sigma \in L^2(0,T)$ і викон. умова (N), то стох. задача Коші (1), (3) не може мати більше одного р-ку.

$\boxed{\text{Б}}$ 1) р-ку нема $\oplus$

2) р-ок єдиний $\oplus$

3) Припустимо р-ні більше за 1. Візьмемо серед р-нів два ~~різних~~ розв: η_1 та η_2.

Отже, $\eta_1(t) \neq \eta_2(t)$ в сенсі простору L_2

η_1 - р-ок (1), (3) $\Rightarrow$ $\eta_1 \in C([0,T]; L_2)$

$$\eta_1(t) = \eta_0 + \int_0^t \mu(s, \eta_1(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, dW(s) \quad (9)$$

η_2 - р-ок (1), (3) $\Rightarrow$ $\eta_2 \in C([0,T]; L_2)$

$$\eta_2(t) = \eta_0 + \int_0^t \mu(s, \eta_2(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, dW(s) \quad (10)$$

Від (9) віднімемо (10)

$$\eta_1(t) - \eta_2(t) = \cancel{\eta_0} - \cancel{\eta_0} + \int_0^t \left[\mu(s,\eta_1(s)) - \mu(s,\eta_2(s))\right] ds +$$

$$+ \int_0^t \left[\cancel{\sigma(s)} - \cancel{\sigma(s)}\right] dW(s)$$

Позначимо $\eta(t) = \eta_1(t) - \eta_2(t)$

$$\eta(t) = \int_0^t \left[\mu(s,\eta_1(s)) - \mu(s,\eta_2(s))\right] ds$$

Тоді

$$\|\eta(t)\|_{L_2} = \left\| \int_0^t \ldots\ldots ds \right\|_{L_2} \le \int_0^t \|\mu(s,\eta_1(s)) - \mu(s,\eta_2(s))\|_{L_2} ds =$$

$$= \int_0^t \left(M\left[\left|\mu(s,\eta_1(s)) - \mu(s,\eta_2(s))\right|^2 \right] \right)^{1/2} ds \qquad (11)$$

1) з умови (N): $\left|\mu(s,\eta_1(s)) - \mu(s,\eta_2(s))\right|^2 \le$

$$\le K^2 \left|\eta_1(s) - \eta_2(s)\right|^2 = K^2 \left|\eta(s)\right|^2$$

2) була властивість

$$\xi_1 \le \xi_2 \implies M\xi_1 \le M\xi_2$$

Тому з (11): $\underbrace{\|\eta(t)\|_{L_2}}_{f(t)} \le \int_0^t \left(M\left[K^2 |\eta(s)|^2 \right] \right)^{1/2} ds =$

$$= K \cdot \int_0^t \left(M\left[|\eta(s)|^2 \right] \right)^{1/2} ds = \underset{\substack{\parallel \\ g(t)}}{0} + K \cdot \int_0^t \overbrace{\|\eta(s)\|_{L_2}}^{= f(s)} ds$$

З лем. Грон.-Белм

$$\|y(t)\|_{L_2} \le 0 \cdot e^{K(t-0)} = 0$$

$y(t) \equiv 0$ що суперечить припущенню $\blacksquare$

Лекція 20

Лема (ітераційна лема Гронуола)

Нехай $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset M(0,T)$ – невід'ємні, $\varphi_1 \in L^\infty(0,T)$.

Тоді якщо існує $K>0$:

$$\forall m\in\mathbb{N}\quad \forall t\in[0,T] \qquad \varphi_{m+1}(t) \le K\int_0^t \varphi_m(s)\,ds \qquad (11)$$

то

$$\forall m\in\mathbb{N}\quad \forall t\in[0,T] \qquad \varphi_m(t) \le N\,\frac{(Kt)^{m-1}}{(m-1)!}, \qquad (12)$$

де $N = \|\varphi_1;\ L^\infty(0,T)\|$.

φ_1 - обмежена $\underset{(11)}{\Rightarrow}$ φ_2 - обмеж $\Rightarrow$ φ_3 - обм, ...

Тому $\{\varphi_m\} \subset L^1(0,T)$

(м-д мат. інд) $m=1$: $\Phi_1(t) \overset{(5)}{\le} \sup\limits_{t\in[0,T]} \Phi_1(t) = \|\varphi_1; L^\infty(0,T)\| = N$

тому (12) викон.

Припускаємо (12) викон для m і доведемо її для $m+1$:

$$\Phi_{m+1}(t) \underset{(11)}{\le} K\int_0^t \varphi_m(s)\,ds \underset{\substack{(12)\\ \text{для } m}}{\le} K\int_0^t N\frac{(Ks)^{m-1}}{(m-1)!}\,ds =$$

$$= N\frac{K^m}{(m-1)!}\int_0^t s^{m-1}\,ds = N\frac{K^m}{(m-1)!}\,\frac{s^m}{m}\Big|_0^t = N\frac{K^m\cdot t^m}{(m-1)!\cdot m} \quad \blacksquare$$

<u>Т-ма</u> Якщо виконується умова (N), $g \in L^2(0,T)$, $y_0 \in L_2$, то стаціонарна задача Коші (1), (3) має розв'язок

☒ Використаємо м-д послідовних наближень.

1) Нехай $\eta_0(\omega,t) \equiv \eta_0(\omega)$ (взято з поч. умови) (13)

$$\eta_m(\omega,t) = \eta_0(\omega) + \int_0^t \mu(s, \eta_{m-1}(\omega,s))\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,dW(\omega,s), \quad m \in \mathbb{N}. \qquad (14)$$

Оскільки $\eta_0 \in L_2$ і є сталою ф-цією по відношенню до змінної t, то $\eta_0 \in C([0,T]; L_2)$ (є CL_2-процесом)

Тоді з умови (N) та леми про оператор Немицького:

$$\int_0^t \mu(s, \eta_0(\omega,s))\,ds \in CL_2\text{-процесом.}$$

З властивостей PWZ - інтегралу і того, що $\sigma \in L^2(0,T)$:

$$\int_0^t \sigma(s)\, dW(\omega,s) \in CL_2\text{-процеси.}$$

Тому $\eta_1 \in CL_2$-процесом. Аналогічно η_2 буде CL_2-проц

$\eta_3, \ldots$ будуть CL_2-процесами.

Тому послідовність $\{\eta_n\}$ з формул (13), (14) належить до $C([0,T]; L_2)$.

2) Отримаємо додаткову оцінку. Нехай

$$\alpha_n(\omega,t) = \eta_n(\omega,t) - \eta_{n-1}(\omega,t), \quad n \in \mathbb{N} \qquad (15)$$

для $n=1$:

$$\alpha_1 = \eta_1 - \eta_0 = \cancel{\eta_0} + \int_0^t \mu(s,\eta_0)\,ds + \int_0^t \sigma\,dW - \cancel{\eta_0} =$$

$$= \underbrace{\int_0^t \mu(s,\eta_0)\,ds}_{\in C([0,T];L_2)} + \underbrace{\int_0^t \sigma\,dW}_{\in C([0,T];L_2)}$$

З т-ми Вейєр. про обмеженість неперервної ф-ції :

$$\exists N>0 \quad \forall t\in[0,T]: \qquad \|\alpha_1(t)\|_{L_2} \le N \qquad (16)$$

$\forall n\in\mathbb{N}$

$$\alpha_{n+1} = \eta_{n+1} - \eta_n = \cancel{\eta_0} + \int_0^t \mu(s,\eta_n)\,ds + \cancel{\int_0^t \sigma\,dW} -$$

$$- \left(\cancel{\eta_0} + \int_0^t \mu(s,\eta_{n-1})\,ds + \cancel{\int_0^t \sigma\,dW}\right) =$$

$$= \int_0^t \left[\mu(s, \eta_m) - \mu(s, \eta_{m-1}) \right] ds.$$

Тому $\|\alpha_{m+1}(t)\|_{L_2} \le \int_0^t \|\mu(s, \eta_m) - \mu(s, \eta_{m-1})\|_{L_2} ds \le$

$$\underset{(8)}{\le} K \int_0^t \|\eta_m - \eta_{m-1}\|_{L_2} ds = K \int_0^t \|\alpha_m(s)\|_{L_2} ds$$

Тоді ф-ція $\quad \varphi_m(t) = \|\alpha_m(t)\|_{L_2}, \quad t \in [0,T] \qquad (17)$

задов. нерівність

$$\varphi_{m+1}(t) \le K \int_0^t \varphi_m(s) ds \qquad (18)$$

тому з ітерац. леми Гронуола:

$$\|\delta_m(t)\|_{L_2} = \varphi_m(t) \le N\,\frac{(Kt)^{m-1}}{(m-1)!} \qquad (19)$$

3) Доведемо фундаментальність, а тому і збіжність послідовності $\{\eta_m\}$.

$\forall m, p \in \mathbb{N}$ $\quad \|\eta_{m+p}(t) - \eta_m(t)\|_{L_2} = \|\eta_{m+p} - \eta_{m+p-1} +$

$$+ \eta_{m+p-1} - \ldots + \eta_{m+1} - \eta_m\|_{L_2} \underset{\text{нерів. трикут.}}{\le}$$

$$\le \|\eta_{m+p} - \eta_{m+p-1}\|_{L_2} + \ldots + \|\eta_{m+1} - \eta_m\|_{L_2} =$$

$$= \|\alpha_{m+p}(t)\|_{L_2} + \ldots + \|\alpha_{m+1}(t)\|_{L_2} \underset{(19)}{\leq}$$

$$\leq N \frac{K^{m+p-1} t^{m+p-1}}{(m+p-1)!} + \ldots + N \frac{K^m t^m}{m!}$$

Візьмемо з обох частин нерівності max за $t \in [0, T]$

$$\|\eta_{m+p} - \eta_m; C([0,T]; L_2)\| \leq N (S_{m+p} - S_m), \quad (20)$$

де $S_m = 1 + \frac{KT}{1!} + \frac{(KT)^2}{2!} + \frac{(KT)^3}{3!} + \ldots + \frac{(KT)^{m-1}}{(m-1)!}$.

Оскільки S_m - частинна сума збіжного числового ряду $e^{KT} = \sum_{m=0} \frac{K^m T^m}{m!}$

що $\{S_n\}$ - збіжна послідовність $\underset{\text{к. Коші}}{\Longrightarrow}$ $\{S_n\}$ - фундаментальна

$\Downarrow$

права частина (20) прямує до нуля при $n, p \to \infty$

$\Downarrow$

$\{\eta_n\}$ - фундаментальна в $C([0,T]; L_2)$

повний простір

$\Downarrow$

$\{\eta_n\}$ - збіжна в $C([0,T]; L_2)$

$\Downarrow$

$$\exists\, \eta \in C([0,T]; L_2) : \quad \eta_n \Rightarrow \eta \text{ в } C([0,T]; L_2) \qquad (21)$$

Тому $\forall t \in [0,T] : \quad \eta_n(t) \to \eta(t)$ в L_2 (22)

4) Перейдемо до границі в (14):

$$\eta_m(t) = \eta_0 + \underbrace{\int_0^t \mu(s, \eta_{m-1})\,ds}_{\overset{\shortparallel}{z_m(t)}} + \int_0^t \sigma\,dW \qquad (23)$$

Нехай $z(t) = \int_0^t \mu(s,\eta)\,ds$, $t \in [0,T]$, де η взято з (21).

Тоді $\|z_m(t) - z(t)\|_{L_2} = \left\| \int_0^t [\mu(s,\eta_{m-1}) - \mu(s,\eta)]\,ds \right\|_{L_2} \leq$

$$\leq \int_0^t \|\mu(s,\eta_{m-1}) - \mu(s,\eta)\|_{L_2}\,ds \underset{(N)}{\leq} K \int_0^t \|\eta_{m-1}(s) - \eta(s)\|_{L_2}\,ds \leq$$

$$\le K \int_0^t \max_{s\in[0,T]} \|\eta_{n-1}(s)-\eta(s)\|_{L_2}\, ds \le$$

$$\le K\cdot T\, \|\eta_{n-1}-\eta; C([0,T]; L_2)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Тому, спрямувавши в (23) $n\to\infty$ отримаємо

$$\eta(t)=\eta_0+\int_0^t \mu(s,\eta)\, ds+\int_0^t \sigma\, dW$$

Тобто η – р-ок з.к. (1), (3) $\blacksquare$