Лекція 11 Ми прийшли до того, що для поняття ймовірності треба такі речі:

1) простір (в нас Ω) елементарних подій;

2) подія ($A \subset \Omega$) для якої є поняття „кількість" „площа" і т.д.

3) ймовірність - це число від 0 до 1.

<u>Озн.</u> Міра $\mu : \mathcal{R}_\mu \to \mathbb{R}^1$ називається нормованою, якщо $\Omega \in \mathcal{R}_\mu$ та

$$\mu(\Omega) = 1$$

<u>Озн.</u> Вимірний простір $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ називається ймовірнісним простором, якщо $\mathbb{P}$ - нормована міра (яка назив ймовірністю)

<u>Приклад</u> (ймовірнісна міра Лебега–Стільтьєса)

Нехай $\Omega = [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, F – монотонно неспад. твірна ф-ція деякої міри μ_F. Для спрощення

припустимо, що F – неперервна на $[a,b]$. Раніше ми будували вимірний простір $(\Omega, \Sigma_F, \mu_F)$, де

$$\mu_F([\alpha,\beta)) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Оскільки F неперр, то $\mu_F(\{\alpha\}) = \mu_F(\{\beta\}) = 0$. Тому

$$\mu_F(\langle\alpha,\beta\rangle) = F(\beta) - F(\alpha) \qquad (1)$$

Визначимо нову міру

$$\forall A \in \Sigma_F: \qquad P_F(A) = \frac{\mu_F(A)}{F(b) - F(a)} \qquad (2)$$

Тоді $\quad P_F(\Omega) = P_F([a,b]) = \dfrac{\mu_F([a,b])}{F(b)-F(a)} =$

$$= \frac{F(b)-F(a)}{F(b)-F(a)} = 1$$

Тому (Ω, Σ_F, P_F) – ймовірнісний простір

Озн. Побудована за правилом (2) ймовірнісна міра P_F назив нормованою мірою Лебега – Стільтьєса. Твірна ф-ція цієї міри має вигляд

$$G(x) = \frac{F(x)}{F(b)-F(a)} \qquad (3)$$

Інтеграл по мірі P_F вже також визначений, бо це те, що було раніше.

Пр 1 $\Omega_3 = [0,3]$; $F_1(\omega) = \omega^1 = \omega$, $\omega \in [0,3]$, - твірна ф. міра Л.-С.

Нехай $\Sigma^1 = \Sigma_{\omega^1}$ - σ-алгебри вимірних за μ_{F_1} множин з Ω.

$P_1 = P_{\omega^1}$ - нормована міра Л.-С., що відповідає F_1

Тоді з (2) випливає таке:

$$P_1([\alpha,\beta)) = \frac{F_1(\beta) - F_1(\alpha)}{\underset{=3}{F_1(3)} - \underset{=0}{F_1(0)}} = \frac{1}{3}(\beta - \alpha) \qquad (4)$$

Отримали ймовірнісний простір $(\Omega_3, \Sigma^1, P_1)$

Пр. 2 $\Omega_3 = [0,3]$, $F_2(\omega) = \omega^2$, $\omega \in [0,3]$.

$\Sigma^2 = \Sigma_{\omega^2}$ – σ-алгебра вимірних стосовно μ_{F_2} підмножин Ω_3

$P_2 = P_{\omega^2}$ – нормована міра Л.-С., що відповідає F_2.

Тоді
$$P_2([\alpha,\beta)) = \frac{1}{9}(\beta^2 - \alpha^2) \quad (5)$$

Отримали ймовірнісний простір $(\Omega_3, \Sigma^2, P_2)$.

---

2. Випадкові величини

Якщо результат експерименту – це число або числовий вектор, то замість подій краще розглядати випадкові величини.

Пр (артилерія). Стрільба з „гармати" по цілі

A - подія = снаряд влучив в ціль

B - подія = снаряд не влучив в ціль

То інформативніше розглядати не подію B а питання „на скільки він не влучив" = „відстань від точки розриву до цілі"

"

число

Нехай $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ - ймовірн. пр.

$A \subset \Omega$ - то A - подія

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}^1$ - вимірна стосовно Σ ф-ція - то ξ - випадкова величина

Озн. Вектор-ф-ція $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ назив. випадковим вектором ($\equiv$ m-вимірною випадковою величиною), якщо $\xi_1 : \Omega \to \mathbb{R}^1, \dots, \xi_m : \Omega \to \mathbb{R}^1$ є випадковими величинами, тобто вимірними стосовно Σ ф-ціями.

Озн. Вип. вектор (в.в.) $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ назив. дискретним, якщо ξ приймає не більше як зліченну к-ть значень, тобто існує не більше як зліченна к-ть елементів $x^i \in \mathbb{R}^m$ та множин $A_i \in \Sigma$ таких, що

1) $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$

2) $\Omega = \bigsqcup_i A_i$

3) $\xi(\omega) = x^i$ при $\omega \in A_i$

В цьому випадку

$$\xi(\omega) = \sum_i x^i \cdot \chi_{A_i}(\omega), \quad \omega \in \Omega \qquad (1)$$

де

$$\chi_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_i \\ 0, & \omega \notin A_i \end{cases}$$ – індикатор A_i

Позначення: якщо $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$
то далі

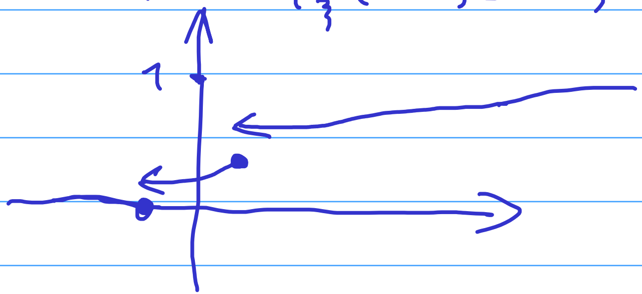
$x < y$ означає $(x_1 < y_1)$ і $(x_2 < y_2)$ і … і $(x_m < y_m)$

Озн. Кумулятивною ф-цією розподілу (commulative distribution function, CDF) в.в. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$

називається ф-ція $F_\xi : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ така, що

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega \mid \xi_1(\omega) < x_1, \dots, \xi_m(\omega) < x_m) \qquad (2)$$

При $m=1$: $F_\xi(-\infty) = 0$, $F_\xi(+\infty) = 1$, $F_\xi \in Cag(\mathbb{R})$



Для дискретної в.в можна ввести числа

$$p_i = \mathbb{P}(\xi = x^i),$$

значення ξ

Озн. Ф-ція щільності мас (probability mass function, PMF) в.в. ξ назив ф-ція $g_\xi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$

$$g_\xi(x) = \begin{cases} p_i, & x = x^i \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \qquad (3)$$

<u>Озн.</u> В.в. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ назив неперервним випадковим вектором, якщо існує така невід'ємна ф-ція $f_\xi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, що $\forall A$ - вимірної за Лебегом підмножини в $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{P}(\xi \in A) = \int_A f_\xi(x)\,dx \qquad (4)$$

Ця ф-ція f_ξ назив щільністю розподілу в.в. ξ (probability density function, PDF).

Можна показати, що при певних умовах

$$f_\xi(x) = \frac{\partial^m F_\xi(x)}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} \qquad (5)$$

Лекція 12

Озн. 1 Математичним сподіванням в. в. ξ назив. вираз

$$\mathbb{M}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) \qquad (6)$$

Присутній тут інтеграл - інтеграл по ймовірніст. мірі

Озн. 2 Математичним сподіванням в. в. ξ назив вираз

$$\mathbb{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF_{\xi}(x) \qquad (7)$$

Присутній тут інтеграл - інт. Стілтьєса,

$F_{\xi}(x)$ - CDF в. в. ξ.

Покажемо на прикладі еквівал. цих означень.

Прим. Нехай $(\Omega_3, \Sigma^2, P_2)$ – ймовір. пр. такий, що $\Omega_3 = [0,3]$, $F_2(\omega) = \omega^2$, $\omega \in [0,3]$, Σ^2 – σ-алгебра вимірних множин за мірою P_2 (всі борелівські множини є в Σ^2).

Розглянемо функцію $\xi(\omega) = \sqrt{\omega}$, $\omega \in [0,3]$.

I)

Покажемо, що ξ є випадковою величиною, тобто, що $\xi \in \Sigma^2$ – вимірна ф-ція.

Нехай $c \in \mathbb{R}$ – довільне число.

$$\xi^{-1}((-\infty, c)) = \{\omega \in \Omega_3 \mid \xi(\omega) < c\} = \{\omega \in [0,3] \mid \sqrt{\omega} < c\}$$

Покажемо, що ця множина належить до Σ^2 для всіх c.

Якщо $c \le 0$, то $\xi^{-1}((-\infty, c)) = \emptyset \in \Sigma^2$ борелівська

Якщо $0 < c \le \sqrt{3}$, то

$$\xi^{-1}((-\infty, c)) = \{\omega \in [0,3] \mid \sqrt{\omega} < c\} =$$

$$= \{\omega \in [0,3] \mid \omega < c^2\} = [0, c^2) \in \Sigma^2$$

борелівська.

Якщо $\sqrt{3} < c$, то

$$\xi^{-1}((-\infty, c)) = \{\omega \in [0,3] \mid \omega < c^2\} = [0,3] = \Omega_3 \in \Sigma^2$$

борел.

Отже, ξ – випадкова величина

II) Знайдемо математичне сподівання за ф-лою

$$\mathbb{M}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, \mathbb{P}_2(d\omega) \qquad (8)$$

Нехай $A_2(\omega) = \frac{1}{9}\omega^2$, $\omega \in [0,3]$. Тоді A_2 - твірна ф-ція міри $\mathbb{P}_2$.

$$A_2 \in C^1([0,3]) \subset Lip([0,3]) \subset AC([0,3])$$

Крім того,

$$\xi(\omega)\cdot A_2'(\omega) = \sqrt{\omega}\cdot\frac{2}{9}\omega = \frac{2}{9}\omega^{\frac{3}{2}} \in C([0,3]) \subset L^1(0,3)$$

Тому $\mathbb{M}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, \mathbb{P}_2(d\omega) = (LS)\int_0^3 \xi(\omega)\, dA_2(\omega) =$

$$= (L)\int_0^3 \xi(\omega)\, A_2'(\omega)\, d\omega = (R)\int_0^3 \frac{2}{9}\omega^{\frac{3}{2}}\, d\omega =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{5}\,\omega^{\frac{5}{2}}\Big|_{\omega=0}^{\omega=3} = \frac{4}{9\cdot 5}\, 3^2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{5} \approx 1{,}4$$

III) Обчислимо мат. сподівання ξ за ф-лою

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF_\xi(x) \qquad (7)$$

Побудуємо CDF для ξ: $F_\xi(x) = P_2\{\omega\in\Omega \mid \xi(\omega) < x\}$

При $x \le 0$ $\quad F_\xi(x) = P_2\{\omega \in [0,3] \mid \sqrt{\omega} < x\} = P_2(\varnothing) = 0$

При $0 < x \le \sqrt{3}$ $\quad F_\xi(x) = P_2([0, x^2)) = A_2(x^2) - A_2(0) = \frac{x^4}{9}$

При $\sqrt{3} < x$ $\quad F_\xi(x) = P_2([0,3]) = A_2(3) - A_2(0) = \frac{3^2}{9} = 1$

Отже,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^4}{9}, & 0 < x \le \sqrt{3} \\ 1, & \sqrt{3} < x \end{cases} \qquad F_\xi'(x) = \begin{cases} \frac{4}{9}x^3, & x \in (0, \sqrt{3}) \\ 0, & x \notin [0, \sqrt{3}] \end{cases}$$

абсолютно непр. $\qquad$ PDF_ξ

$$M\xi = (S)\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF_\xi(x) = (L)\int_{-\infty}^{+\infty} x F_\xi'(x)\,dx = (R)\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \frac{4}{9} x^3\,dx =$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^{\sqrt{3}} x^4\,dx = \frac{4}{9}\,\frac{x^5}{5}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\cdot(\sqrt{3})^5}{9\cdot 5} = \frac{4\,\cancel{(\sqrt{3})^4}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{9}\cdot 5} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$$

Тобто різні ф-ии дають те саме значення $M\xi$.

Лекція 13

Якщо ξ – дискретна в.в., задана розподілом

ξ	x_1	x_2	....
P	p_1	p_2	.....

(9)

то $$\mathbb{M}\xi = \sum_i x_i \cdot p_i \qquad (10)$$

<u>Тв.</u> Нехай $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – в.в., $f \in C(\mathbb{R})$. Тоді

1) $f(\xi)$ – в.в.
2) ξ – неперервна в.в. з PDF $q_\xi = q_\xi(x)$, то

$$\mathbb{M} f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, q_\xi(x)\, dx. \qquad (11)$$

Озн. Число $\mathbb{D}\xi = \mathbb{M}\left((\xi - \mathbb{M}\xi)^2\right) = \mathbb{M}(\xi^2) - (\mathbb{M}\xi)^2$ (12)

назив дисперсією в.в. ξ, а число

$$sd(\xi) = \sigma(\xi) = \sqrt{\mathbb{D}\xi} \quad (13)$$

назив середньоквадратичним відхиленням.

Заув. Може бути така ситуація, що $\mathbb{M}\xi = \infty$ або не існує. Якщо $\mathbb{M}\xi$ - не існує, $\mathbb{M}\xi = \infty$ або $\mathbb{M}(\xi^2) = \infty$, то за означенням

$$\mathbb{D}\xi = \infty \qquad sd\,\xi = \infty$$

Якщо ξ - дискр. вип. вел з таблиці (9), то

$$\mathbb{D}\xi = \sum_i (x_i - \mathbb{M}\xi)^2 p_i \quad (14)$$

Якщо ξ - непер в.в. з PDF $q_\xi(x)$, то

$$\mathbb{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 q_\xi(x)\,dx - (\mathbb{M}\xi)^2 \qquad (15)$$

У випадку випадкового вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$:

$$\mathbb{M}\xi \stackrel{df}{=} (\mathbb{M}\xi_1, \dots, \mathbb{M}\xi_m) \qquad (16)$$

$$\mathbb{D}\xi = (\mathbb{D}\xi_1, \dots, \mathbb{D}\xi_m) \qquad (17)$$

$$sd\,\xi = (sd\,\xi_1, \dots, sd\,\xi_n) \qquad (18)$$

__Озн.__ Випадкові вектори $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ та $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ назив незалежними в.в., якщо CDF в.в.

$$\zeta = (\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_m)$$

має вигляд

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi}(x)\cdot F_{\eta}(y), \qquad (19)$$

де $$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}(\xi<x,\ \eta<y),$$

$$F_{\xi}(x) = \mathbb{P}(\xi<x), \qquad F_{\eta}(y) = \mathbb{P}(\eta<y).$$

<u>Твердж.</u> 1) $\{$в.в. ξ не залежить сама від себе$\} \iff \{\xi(\omega)\equiv const\}$

2) Якщо $\xi_1,\dots,\xi_n$ – незалежні в.в., то

$f(\xi_1,\dots,\xi_k)$ та $g(\xi_{k+1},\dots,\xi_n)$ – незал. в.в,

якщо $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ та $g:\mathbb{R}^{n-k}\to\mathbb{R}$ – неперр. ф-ції.

Озн. Коваріація в.в. ξ та η назив. число

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{M}\left[(\xi - \mathbb{M}\xi)\cdot(\eta - \mathbb{M}\eta)\right] \qquad (20)$$

Якщо $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0$, то в.в. ξ та η назив. некорельованими.

◊) Д/з. Виписати значення, $\mathbb{M}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, $sd\,\xi$ для таких в.в.

1) рівномірно розподілена дискретна в.в.

2) рівномірно розподілена неперервна в.в.

3) дискретна в.в. з розподілом Пуассона

Озн. В. в. Z назив. стандартно нормально розподіленою, якщо її PDF має вигляд $q_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$ (21)
(пишемо $Z \sim N(0,1)$).

Озн. В. в. Y назив. нормальною (або нормально розподіленою) з параметрами μ та σ^2, якщо її PDF має вигляд

$$q_Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R} \quad (22)$$

(пишемо $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$)

Зрозуміло, що при $\mu = 0$, $\sigma = 1$: $Y = Z$

◊) Довести, що $MY = \mu$, $DY = \sigma^2$, $sd\,Y = \sigma$. (23)

Лекція 14

Банахові простори випадкових величин.

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ - ймовір. простір, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ - в.в.

Властивості математичного сподівання

$$\mathbb{M}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

1) Якщо $\xi \geq 0$, то $\mathbb{M}\xi \geq 0$.

2) $\mathbb{M}(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\mathbb{M}\xi + \beta\cdot\mathbb{M}\eta$

3) Якщо $\xi \leq \eta$, то $\mathbb{M}\xi \leq \mathbb{M}\eta$

4) $|\mathbb{M}\xi| \leq \mathbb{M}|\xi|$

5) (нерівність Ляпунова) Якщо $0 < \lambda < \mu$, то

$$\left(\mathbb{M}\left(|\xi|^{\lambda}\right)\right)^{1/\lambda} \le \left(\mathbb{M}\left(|\xi|^{\mu}\right)\right)^{1/\mu}$$

6) (нерівність Гельдера або Коші - Буняковського)

Якщо $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\mathbb{M}(|\xi|^p) < +\infty$

$\mathbb{M}(|\eta|^{p'}) < +\infty$, то $\mathbb{M}|\xi\eta| < +\infty$ і викон. нерів.

$$\mathbb{M}|\xi\eta| \le \left(\mathbb{M}\left[|\xi|^p\right]\right)^{1/p} \cdot \left(\mathbb{M}\left[|\eta|^{p'}\right]\right)^{1/p'}$$

7) (нерівність Мінковського)

Якщо $\mathbb{M}[|\xi|^p] < +\infty$, $\mathbb{M}[|\eta|^p] < +\infty$, $1 \le p < +\infty$, то

$$\left(\mathbb{M}\left[|\xi+\eta|^p\right]\right)^{1/p} \le \left(\mathbb{M}\left[|\xi|^p\right]\right)^{1/p} + \left(\mathbb{M}\left[|\eta|^p\right]\right)^{1/p}.$$

8) Якщо $\xi = 0$ м.н., то $M\xi = 0$

9) Якщо $\xi \geq 0$ та $M\xi = 0$, то $\xi = 0$ м.н.

10) Якщо ξ, η - незалежні в.в., f та g - непер. ф-ції, то

$$M[f(\xi) \cdot g(\eta)] = M[f(\xi)] \cdot M[g(\eta)]$$

Нехай $r > 0$ - число.

<u>Озн.</u> Величина (якщо вона існує) $M(\xi^r)$ назив. моментом r-го порядку в.в. ξ.

Величина (якщо вона існує) $M(|\xi|^r)$ назив. абсолютним моментом r-го порядку в.в. ξ.

Нехай $q \geq 1$ - фіксоване число

$$L_q \equiv L_q(\Omega, \Sigma, \mathbb{P}) = \left\{ \xi : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \xi \text{ - в. в.} \\ 2)\ \mathbb{M}\left[|\xi|^q\right] < +\infty \end{array} \right\}$$

Коли ми говоримо про елементи з L_q, то ми не розрізняємо еквівалентні в. в.

Тобто $\xi_1 = \xi_2$ в сенсі простору L_q, якщо $\xi_1 = \xi_2$ м.н.

<u>Т-ма</u> Множина L_q є банаховим простором стосовно норми $\|\xi\|_q \equiv \|\xi\|_{L_q} \equiv \|\xi; L_q\| = \left(\mathbb{M}\left[|\xi|^q\right]\right)^{1/q} =$

$$= \left(\int_\Omega |\xi(\omega)|^q \, \mathbb{P}(d\omega) \right)^{1/q} \qquad (1)$$

$\boxtimes$ Доведемо інше властивості норми (без повноти простору)

$$|\xi|^q \geq 0 \underset{1)}{\Longrightarrow} \|\xi\|_q \geq 0$$

$$\xi = 0 \text{ в } L_q \equiv \xi = 0 \text{ м.н } \underset{8)}{\Longrightarrow} M|\xi|^q = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M|\xi|^q = 0 \\ |\xi|^q \geq 0 \end{array}\right| \underset{9)}{\Longrightarrow} |\xi|^q = 0 \text{ м.н} \Longrightarrow \xi = 0$$

$$\|c\cdot\xi\|_q = \Big(M\big[\underbrace{|c|^q}_{\text{число}}\cdot|\xi|^q\big]\Big)^{1/q} = |c|\cdot\|\xi\|_q$$

$$\|\xi+\eta\|_q \leq \left\{\begin{array}{l}\text{нерів.} \\ \text{Мінковського}\end{array}\right\} \leq \|\xi\|_q + \|\eta\|_q$$

тобто викон нерівність трикутника $\boxtimes$

Лекція 15

Т-ма L_2 - гільбертів простір стосовно скалярного добутку

$$(\xi,\eta)_2 = (\xi,\eta)_{L_2} = M[\xi\cdot\eta] = \int_\Omega \xi(\omega)\cdot\eta(\omega)\,P(d\omega). \quad (2)$$

$\xi,\eta \in L_2 \underset{\substack{\text{з нер. Гельдера} \\ \text{(власт. 6)}}}{\Longrightarrow} \xi\cdot\eta \in L_1$

Тому правило (2) визначає білінійну форму $(\xi,\eta)_2$ коректно

Оскільки $(\xi,\eta)_2 = (\eta,\xi)_2$, $(\alpha\xi+\beta\eta,\zeta)_2 =$ за означ

$$= \alpha(\xi,\zeta)_2 + \beta(\eta,\zeta)_2$$

$(\xi,\xi)_2 \geq 0$, $\underbrace{\int_\Omega |\xi|^2 P(d\omega)}_{\geq 0} = M[|\xi|^2] \underset{\text{власт. 9}}{\Longrightarrow} |\xi|^2 = 0$

$\Downarrow$

$\xi = 0$ м.н.

Тому $(\cdot,\cdot)_2$ – скалярний добуток.

Повноту норми (2) беремо з попередньої Т-ми.

$$\|\xi\|_2 = \sqrt{(\xi,\xi)_2}$$

<u>Т-ма</u> Якщо $p \geq q$, то $L_p \subset L_q$

$\boxtimes$ зразу випливає з нерівності Ляпунова $\boxtimes$

Озн Послідовність випадкових величин $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до в.в. ξ в середньому квадратичному, якщо вона збігається в сенсі простору L_2, тобто

$$\|\xi_k - \xi\|_2 \to 0 \quad \text{при } k\to\infty$$

При цьому писатимемо $\xi = \underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \xi_k$ (limit in mean)

Т-ма (про перехід до границі під знаком мат. сподів.)

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{M}[\xi_k] = \mathbb{M}\left[\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \xi_k\right], \qquad (3)$$

тобто якщо $\xi = \text{l.i.m.}\,\xi_k$, то $\mathbb{M}\xi = \lim \mathbb{M}\xi_k$.

$$|\mathbb{M}\xi_k - \mathbb{M}\xi| \underset{\text{вл.2}}{=} |\mathbb{M}(\xi_k - \xi)| \underset{\text{вл.4}}{\le} \mathbb{M}|\xi_k - \xi| \underset{\substack{\text{вл.5)}\\ \text{нерів. Ляпунова}}}{\le}$$

$$\le (\mathbb{M}|\xi_k - \xi|^2)^{1/2} = \|\xi_k - \xi\|_{L_2} \to 0 \quad \boxed{}$$

Означення та приклади випадкових процесів.

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ – ймов. простір, I – множина індексів.

<u>Озн</u> Ф-ція $C: I \times I \to \mathbb{R}$ назив

– симетричною, якщо $\forall\, t_1, t_2 \in I$: $C(t_1, t_2) = C(t_2, t_1)$

– невід'ємно визначеною, якщо $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\forall\, t_1, \dots, t_k \in I$

$\forall\, y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$: $\quad \sum\limits_{i,j=1}^{k} C(t_i, t_j)\, y_i y_j \geq 0.$

Розглянемо ф-цію двох змінних:

$$\eta = \eta(\omega, t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in I \qquad (1)$$

<u>Озн.</u> Якщо I – злічена дискретна множина ($\mathbb{N}$), то ф-ція (1) назив випадковою послідовністю;

Якщо $I = [0, T]$ або $I = \mathbb{R}$, то ф-ція (1) назив. випадковим процесом (в.п.)

Якщо $I \subset \mathbb{R}^k$, де $k \geq 2$, то (1) назив випадковим полем (ми це не вчимо)

Далі ми вивчаємо тільки випадкові процеси

<u>Озн.</u> Для кожного $t \in I$ ф-ція

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \eta(\omega, t) \in \mathbb{R}$$

(це вип. величина) назив значенням в.п. η

<u>Озн.</u> Для $\omega \in \Omega$ ф-ція

$$I \ni t \longmapsto \eta(\omega, t) \in \mathbb{R}$$

(це звичайна детермін. ф-ція) назив. траєкторією в.п. η.

ω - випадкова змінна, t - детермінована змінна, $I=[0,T]$.

<u>Озн.</u> В.п. η має неперервну траєкторію з параметрами $\alpha>0$, $\beta\geq 0$, якщо існує стала $A\geq 0$:

$$\forall t_1,t_2\in[0,T]:\quad M\left(|\eta(\omega,t_1)-\eta(\omega,t_2)|^{\alpha}\right)\leq A\,|t_1-t_2|^{1+\beta} \quad (2)$$

<u>Твердження</u> (Т-ма Колмогорова) Якщо в.п. має непер. траєк. з параметрами $\alpha>0$ та $\beta\geq 0$, то $\forall\gamma\in\left(0,\frac{\beta}{\alpha}\right)$ і м.д.в. $\omega\in\Omega$ $\exists K=K(\gamma,\omega)$:

$$|\eta(\omega,t_1)-\eta(\omega,t_2)|\leq K\,|t_1-t_2|^{\gamma}\quad\forall t_1,t_2\in[0,T]. \quad (3)$$

тобто траєкторія в.п. є рівномірно неперервна за Гельдером з показником γ. $\boxed{\equiv}$ без. дов $\boxed{\equiv}$

Озн. Детермінованому ф-цію $a : [0,T] \to \mathbb{R}$:

$$a(t) = \mathbb{M}[\eta(t)], \quad t \in [0,T] \qquad (4)$$

назив. математичним сподіванням в.п. η (або ф-цією середніх)

Озн Детермін. функц. $C : [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{R}$:

$$C(t_1,t_2) = \operatorname{cov}(\eta(t_1), \eta(t_2)), \quad t_1,t_2 \in [0,T] \qquad (5)$$

назив коваріаційною функц. в.п. η.

Завв. Якщо η – в.п. з нульовим середнім, то

$$a(t) \equiv 0 \text{ на } [0,T]; \quad C(t_1,t_2) = \mathbb{M}[\eta(t_1)\cdot\eta(t_2)], \quad t_1,t_2 \in [0,T] \qquad (6)$$

Нехай $\quad t \wedge s = \min\{t, s\}, \quad t, s \in [0,T]. \qquad (7)$

Озн. Стандартним броунівським рухом назив в.п. $B = \{B(t)\}_{t \geq 0}$ для якого

$$a(t) \equiv 0,\ t \geq 0; \quad C(t_1, t_2) = t_1 \wedge t_2,\ t_1, t_2 \geq 0 \qquad (8)$$

Лема. Коваріаційна ф-ція броун. руху є симетричною та невід'ємно визначеною.

Д. очевидно, що $C(t_1, t_2) = C(t_2, t_1)$

$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t_1, \dots, t_k \geq 0,\ \forall y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i,j=1}^{k} C(t_i, t_j) y_i y_j = \sum_{i,j=1}^{k} y_i \cdot y_j \int_0^{+\infty} \chi_{[0,t_i]}(t)\, \chi_{[0,t_j]}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left| \sum_{i=1}^{k} y_i\, \chi_{[0,t_i]}(t) \right|^2 dt \geq 0 \quad \blacksquare$$

Озн. N-мірним стандартним броунівським рухом назив. в.п. $B = \{(B_1(t), \dots, B_N(t))\}_{t \geq 0}$, причому

$B_1(t), \dots, B_N(t)$ – незалежні одномірні стандарт. броун. рухи.

Пр в певному сенсі $B(t)$ описує рух матеріальної частинки (броун.)

Стандартний вінерівський процес.

Нехай $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ – ймов. простір.

Озн. Два в.п. η_1 та η_2 назив. стохастично еквівалентними якщо

$$\forall t \in [0, T] \quad \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \eta_1(\omega, t) = \eta_2(\omega, t)\} = 1$$

В цьому випадку ми не розрізняємо η_1 та η_2 і η_1 назив. модифікацією η_2 та навпаки. $W(\omega, t) \rightsquigarrow W(t)$

<u>Озн.</u> В.п. $W = W(\omega, t) : \Omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ назив. стандартним вінерівським процесом, якщо

1) $W(0) = 0$ м.н.

2) $\forall\, t_1, t_2, \ldots, t_m : 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ випадкові величини

$$\underbrace{W(t_1)}_{= W(t_1) - \underbrace{W(0)}_{0}},\ W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

є незалежними

3) $\forall\, t > s \geq 0$, $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$, тобто

щільність розподілу має вигляд

$$q_{s,t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{|x|^2}{2(t-s)}}, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Зауваження. З (1) зразу випливає, що

$$\mathbb{M}[W(t)-W(s)] = 0, \quad \mathbb{D}[W(t)-W(s)] = t-s \qquad (2)$$

Лема. Стандарт. вінер. проц. є станд. броун. рухом, тобто

$$\forall t \geq 0 \quad a(t) \equiv \mathbb{M}[W(t)] = 0 \qquad (3)$$

$$\forall t, s \geq 0: \quad C(t,s) \equiv \mathbb{M}[W(t) \cdot W(s)] = t \wedge s \qquad (4)$$

◻ $a(t) = \mathbb{M}[W(t) - \underset{\text{оз.}\ \overset{\shortparallel}{W(0)}}{0}] = \mathbb{M}[W(t) - W(0)] \underset{(2)}{=} 0$