Лекція 6

Почнемо з прикладу до практичної №3

5.3.3. $dy = \underbrace{(2t+3y)}_{=\mu}dt + \underbrace{(5t+7y)}_{=\sigma}dW$ звести до СДР в якому $\tilde{\sigma} = 1$

Шукаємо заміну:

$$\sigma(t,y)\, z_y(t,y) = \underbrace{\tilde{\sigma}}_{=1}(t, g(t,y))$$

$$(5t+7y)\, z_y = 1 \quad \Rightarrow \quad z_y = \frac{1}{5t+7y}$$

$$z = \frac{1}{7}\int \frac{dy}{5t+7y} = \frac{1}{7} \ln|5t+7y| + C_1$$

Заміна $\xi = z(t,y)$, де $z(t,y) = \frac{1}{7} \ln(5t+7y) + C_1$

$$z_t = \frac{5}{7}\frac{1}{5t+7y} \qquad z_y = \frac{1}{5t+7y} \qquad z_{yy} = -\frac{7}{(5t+7y)^2}$$

$$dz = \left[z_t + \mu z_y + \frac{1}{2}\sigma^2 z_{yy} \right] dt + \sigma z_y dW$$

$$dz = \left[\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{5t+7y} + (2t+3y)\cdot\frac{1}{5t+7y} + \frac{1}{2}(5t+7y)^2\cdot\frac{(-7)}{(5t+7y)^2} \right] dt +$$

$$+ (5\cancel{t+7y})\cdot\frac{1}{5\cancel{t+7y}}\,dW$$

...

Повертаємося до лекції

Нагадаємо, що таке інтеграл Рімана

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – обмежена ф-ція $\quad a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ розбиття

$\xi_k\in[x_k, x_{k+1})$ – вибрана точка

Інтегральна сума Рімана : $\quad \sigma_R=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$

Озн. Число $I=(R)\int_a^b f(x)dx$ назив. інтегралом Рімана від f по множині $[a,b]$, якщо

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall$ розбиття $\forall$ вибраних точок

$$\left[\max_k(x_{k+1}-x_k)<\delta \Rightarrow |I-\sigma_R|<\varepsilon\right]$$

Твердж. 1.6. Неперервна на $[a,b]$ ф-ція є інтегровна за Ріманом

Інтеграл Лебега: Якщо розглянути інтеграл по мірі і взяти цю міру як міру Лебега, то матимемо і-л Лебега інтеграл Лебега $f(x)$ по $[a,b]$ позначено $(L)\int_a^b f(x)dx$

Твердження 1.7

f - інтегровна за Ріманом $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ $\begin{cases} f \text{ інтегровна за Лебегом та} \\ (L)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx \end{cases}$

Пр Ф-ція Діріхле

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ψ інтегровна за Лебегом, наприклад, на $[-2,2]$, а інтегралу Рімана не існує.

$D \subset \mathbb{R}^n$

<u>Озн.</u> Ф-ція $f: D \to \mathbb{R}^1$ називається простою, якщо існують такі числа $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}$ та множини $D_1, \dots, D_m \in \mathcal{L}(D)$, що

$D_i \cap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$,

$$f(x) = \begin{cases} f_j, & x \in D_j \\ 0, & x \in D \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} D_j \right) \end{cases}$$

<u>Озн.</u> Якщо $D \subset \mathbb{R}$, $D_1, \dots, D_m$ – інтервали, то така проста ф-ція назив. східчастою.

Проста ф-ція є інтегровною за Лебегом і

$$(L) \int\limits_D f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} f_j \operatorname{mes}_n(D_j)$$

Озн. Простором Лебега $L^p(D)$, де $p \in [1, +\infty)$, називається множина ф-цій $u \in M(D)$ для яких $\exists \ (L)\int\limits_D |u(x)|^p dx < +\infty$

Елементи з $L^p(D)$ ми не розрізняємо на множині міри нуль за Лебегом, тобто

$u_1 = u_2$ в сенсі простору $L^p(D)$ якщо $u_1(x) = u_2(x)$ м.д.в. $x \in D$.

Пр Ф-ція Діріхле належить, наприклад, до $L^1(\mathbb{R})$. Тому оскільки ми не розрізняємо $\psi(x)$ на множині міри нуль, то можна вважати, що $\psi(x) \equiv 0$, тобто $\psi \in C(\mathbb{R})$.

Відомо, що $L^p(D)$ є банаховим простором стосовно норми
$$\|u; L^p(D)\| = \left((L)\int\limits_D |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

При $p=2$ простір Лебега $L^2(D)$ є гільбертовим стосовно скалярного добутку

$$(u,v)_{L^2(D)} = \int_D u(x)\,v(x)\,dx$$

Твердження 1.8. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область, $p \in [1,+\infty)$.

1) $C(\overline{D}) \subset L^p(D)$

2) якщо $q \geq p$, то $L^q(D) \subset L^p(D)$

3) множина простих ф-цій щільна в $L^p(D)$

4) множини $C(\overline{D})$ та $C_0^1(D)$ щільні в $L^p(D)$

5) якщо $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $u \in L^p(D)$, $v \in L^{p'}(D)$, то

$u \cdot v \in L^1(D)$ і викон нерівність Гельдера $\int_D u \cdot v\,dx \leq \|u; L^p(D)\| \cdot \|v; L^{p'}(D)\|$

б) збіжна в $L^p(D)$ послідовність має збіжну майже скрізь підпослідовність.

Озн. Функція $u: D \to \mathbb{R}$ назив. суттєво обмеженою, якщо існує точна стала $K > 0$, що

$$|u(x)| \leq K \quad \text{м.д.в. } x \in D \qquad (1)$$

Точна нижня грань (inf) тих $K > 0$, для яких викон (1) позначатимо
$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)|$$

Озн. Множину всіх суттєво обмежених ф-цій $u \in M(D)$ теж називають простором Лебега і познач $L^\infty(D)$

Відомо, що $L^\infty(D)$ є банаховим простором стосовно норми
$$\|u; L^\infty(D)\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)|$$

Відомо, що $C(\overline{D}) \subset L^\infty(D)$, множина $C(\overline{D})$ НЕ є щільною в $L^\infty(D)$

Інтеграл Стільтьєса

$$\int_a^b \xi(t)\, dW(t) \ - ?$$

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

розбиття $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$

<u>Озн.</u> Число $V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \;\middle|\; \text{по всіх розбиттях} \right\}$

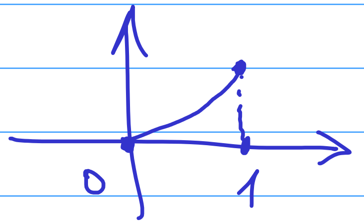
назив. повною варіацією ф-ції f на відрізку $[a,b]$.

<u>Озн.</u> Множину всіх ф-цій з обмеженою варіацією (тобто $V_a^b(f) < +\infty$) позначимо $BV(a,b)$

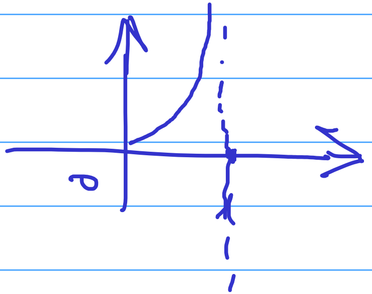
Відомо таке:

1) монотонна ф-ція на компакті є ф-цією обмеженої варіації

2) $AC(a,b) \subset BV(a,b)$



обм. вар.



не обм. вар.

Нехай $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$ – розбиття

$\xi_k \in [x_k, x_{k+1})$ – вибрані точки

Інтегральна сума $\quad \sigma_{RS} = \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big)$

Озн. Число $I = (RS)\int_a^b f(x)\,dg(x)$ називається інтегралом Рімана-Стільтьєса ф-ції $f(x)$ по ф-ції $g(x)$ на $[a,b]$, якщо

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall$ розбиття $\forall$ вибраних точках

$$\left[\max_k (x_{k+1}-x_k)<\delta \Rightarrow |I-\sigma_{RS}|<\varepsilon\right]$$

Властивості

$$\int_a^b (\alpha f_1(x)+\beta f_2(x))\,dg(x) = \alpha\int_a^b f_1(x)\,dg(x) + \beta\int_a^b f_2(x)\,dg(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,d(\alpha g_1(x)+\beta g_2(x)) = \alpha\int_a^b f(x)\,dg_1(x) + \beta\int_a^b f(x)\,dg_2(x)$$

Тверджс. Якщо f - інтегровна за Ріманом, $g \in Lip[a,b]$, то

$$(RS)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Тверджс. Нехай $f \in C([a,b])$, $g \in PC(a,b)$, існує g' яка є абсолютно інтегровною за Ріманом,

$r_1, \dots, r_m \in (a,b)$ - всі точки розриву ф-ції g (якщо вони є). Тоді

$$(RS)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + f(a)\big(g(a+0)-g(a)\big) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} f(r_j)\big(g(r_j+0)-g(r_j-0)\big) + f(b)\big(g(b)-g(b-0)\big)$$

Інтеграл Лебега – Стільтьєса: $X = \Omega = [a,b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$

F – монот. неспадна неперервна зліва ф-ція ($F \in Cag(a,b)$)

На півкільці J_a^b всіх півінтервалів $[\alpha, \beta) \subset [a,b]$

будуємо σ-адитивну міру $\mu_F : J_a^b \to \mathbb{R}$:

$$\mu_F([\alpha, \beta)) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Цю міру продовжуємо до міри μ_F, яка визначена на деякій σ-алгебрі Σ_F всіх μ_F-вимірних множин з Ω.

<u>Озн.</u> Міра μ_F називається мірою Лебега - Стільтьєса на Σ_F, що відповідає ф-ції F, а сама F назив. твірною ф-цією цієї міри.

Інтеграл за мірою μ_F назив інтегралом Леб. - Ст.

Лекція 7

Озн. Функція $\varphi(x)$ назив. регулярною в т. x_0, якщо $\varphi(x_0)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x_0-0)+\varphi(x_0+0)\right]$.

ТВ. Якщо $f, \mathcal{F} \in BV(a,b)$ і кожна з цих функцій є регулярною в точці, де інша ф-ція не є регулярною, то

$$\int_a^b f(x)\,d\mathcal{F}(x) = f(x)\mathcal{F}(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \mathcal{F}(x)\,df(x)$$

причому $f(x)=2f(a)-f(a+0)$ при $x<a$

$f(x)=2f(b)-f(b-0)$ при $x>b$

і аналог. ф-ми є для $\mathcal{F}$.

Тверджс. Нехай $F(x) = H(x)$, де $H(x)$ – монотонно неспадна ф-ція стрибків, тобто кусково-стала ф-ція, яка має не більше як злічену к-ть точок розриву $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots$

Нехай $h_k = F(x_k + 0) - F(x_k - 0) \geq 0$ – стрибок в т. x_k

Якщо $\sum_k h_k < +\infty$ то викон твердження

$$f - \mu_H\text{-інтегровна} \iff \sum_k |f(x_k)| \cdot h_k < +\infty$$

При цьому

$$(LS)\int_a^b f(x)\,dH(x) = \sum_k f(x_k) \cdot h_k$$

Тверд. Нехай $F(x) = A(x)$, де $A \in AC(a,b)$

Тоді f - μ_A-інтегровна $\Leftrightarrow$ $f \cdot A' \in L^1((a,b)) = L^1(a,b)$

При цьому

$$(LS)\int_a^b f(x)\,dA(x) = (L)\int_a^b f(x)\,A'(x)\,dx$$

Розділ 2. Функції зі значеннями в банахових просторах

Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O} = (0,T) \times D$ циліндр. Нехай $v: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^1$

$T > 0$ - число

Ф-цію багатьох змінних $v = v(t,x)$, $t \in (0,T)$, $x \in D$, можна подати у вигляді ф-ції однієї змінної $v(\cdot, x)$ параметр

ф-ція за часом змінною

1. Простір неперервних ф-цій

Нехай $T>0$, $S = \langle 0,T \rangle$ - це або $[0,T]$, або $(0,T)$,

або $[0,T)$, або $(0,T]$.

X - банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$

Озн. Ф-ція $u: S \to X$ назив. неперервною в т. $t_0 \in S$

якщо з числової збіжності $\underset{\in S}{t_k} \underset{k\to\infty}{\to} t_0$

випливає $u(t_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(t_0)$ в просторі X

$$\Updownarrow$$

$$\|u(t_k) - u(t_0)\|_X \to 0$$

як числова послідовність

$C(S;X)$ або $C^0(S;X)$ - це множина всіх ф-цій $u: S \to X$ які неперервні в кожній точці $t_0 \in S$.

Т-ма Множина $C([0,T];X)$ є банаховим простором стосовно норми

$$\|u; C([0,T];X)\| = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X \qquad (1)$$

$\boxed{\equiv}$ Всі аксіоми норми для (1) викон. Тому доведемо, що цей простір повний.

Нехай $\{u_N\}$ - довільна фундаментальна в $C([0,T];X)$ послідовність. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall N, k \geq n_0 \quad \underline{\|u_N - u_k; C([0,T];X)\|} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall t \in [0,T] \quad \|u_N(t) - u_k(t)\|_X < \varepsilon \qquad (2)$$

Спершу фіксуємо $t \in [0,T]$. Тоді $(2) \Rightarrow$ послідовність $\{u_N(t)\}$ фундам. в X - банахів пр. $\Rightarrow$ вона збіжна

в X до деякого елемента v. $\forall t$ це буде свій v, тобто маємо ф-цію $v = v(t)$, $t \in [0,T]$. Таку, що

$$\forall t \in [0,T] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \quad \forall n > n_1 \quad \|u_n(t) - v(t)\|_X < \varepsilon \quad (3)$$

Спрямувавши $k \to \infty$ в (2) отримаємо, що u_N збігається до v рівномірно на $[0,T]$.

Покажемо, що v - непер.

Візьмемо $t_0 \in [0,T]$, $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [0,T]$: $t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} t_0$

$$\|v(t_0) - v(t_k)\|_X = \| v(t_0) - u_{n_1+1}(t_0) + u_{n_1+1}(t_0) - u_{n_1+1}(t_k) +$$

$$+ u_{n_1+1}(t_k) - v(t_k) \|_X \leq \left\{ \begin{matrix} \text{нерівність} \\ \text{трикутника} \end{matrix} \right\} \leq$$

$$\le \|v(t_0) - u_{n_1+1}(t_0)\|_X + \|u_{n_1+1}(t_0) - u_{n_1+1}(t_k)\|_X +$$

$$+ \|u_{n_1+1}(t_k) - v(t_k)\|_X <$$

$$\underset{(3)}{<} \varepsilon + \|u_{n_1+1}(t_0) - u_{n_1+1}(t_k)\|_X + \varepsilon <$$

u_{n_1+1} – неперервна ф-ція в т. t_0 $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \ \forall k > k_0$

$$\|u_{n_1+1}(t_0) - u_{n_1+1}(t_k)\|_X < \varepsilon$$

$$< 3\varepsilon \quad \blacksquare$$

Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область, $Q_{0,T} = (0,T) \times D$ – циліндр, $T > 0$ – число.

Лема 2.1 (про еквівалентне трактування неперервних ф-цій).

Функції $v \in C(\overline{O_{0,T}})$ та $u \in C([0,T]; C(\overline{D}))$ можна ототожнити за правилом $u(t) = v(t, \cdot)$ (4)

тобто $(u(t))(x) = v(t,x)$, $x \in \overline{D}$, $t \in [0,T]$. (4')

Тоді $C(\overline{O_{0,T}}) = C([0,T]; C(\overline{D}))$.

$\boxed{\Xi}$ ($\Rightarrow$) Нехай $v \in C(\overline{O_{0,T}})$. Нехай u взято з (4)

покажемо, що u – непер. ф-ція.

$\forall t_0 \in [0,T]$, $\forall h \in \mathbb{R}$: $t_0 + h \in [0,T]$

Оскільки v - непер на $\overline{O_{0,T}}$ - компакт $\Rightarrow$ v - рівном. неперервна

Тому $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\underbrace{\forall h \in \mathbb{R}}_{(\forall x \in \overline{D})}$: $|h| < \delta \Rightarrow |v(t+h, x) - v(t,x)| < \varepsilon$ (5)

Розглянемо

$$\|u(t_0+h)-u(t_0)\|_{C(\overline{D})} = \max_{x\in\overline{D}} \left|\left(u(t_0+h)\right)(x) - \left(u(t_0)\right)(x)\right| \underset{(4')}{=}$$

$$= \max_{x\in\overline{D}} |v(t_0+h, x) - v(t_0, x)| \underset{(5)}{<} \varepsilon$$

Отже, $u \in C([0,T]; C(\overline{D}))$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $u \in C([0,T]; C(\overline{D}))$, нехай v взято з (4).

Візьмемо довільну точку $(t_0, x^0) \in \overline{\Omega}_{0,T}$.

1) покажемо, що v неперервна за x в т. x^0.

$h = (h_1, \ldots, h_n)$ $\quad x+h = (x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n)$

$u \in C([0,T]; C(\overline{D})) \Rightarrow u(t_0) \in C(\overline{D})$, $\overline{D}$ - компакт

З т-ми Кантора і з рівном. неперерв за x отримаємо таке:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n : |h| < \delta, \ x + h \in \overline{D} \quad \forall x \in \overline{D}$

$$\Big| \underbrace{\big(u(t_0)\big)(x+h)}_{= v(t_0, x+h)} - \underbrace{\big(u(t_0)\big)(x)}_{= v(t_0, x)} \Big| < \varepsilon$$

Отже, v - неперерв. за x в т. x_0.

2) покажемо, що v неперервна за t в т. t_0

Оскільки $u \in C([0,T]; C(\overline{D}))$, то

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall h \in \mathbb{R} \ |h| < \delta \quad t_0 + h \in [0, T]$

$$\| u(t_0 + h) - u(t_0) \|_{C(\overline{D})} < \varepsilon$$

$$|v(t_0+h, x^0) - v(t_0, x^0)| = \sup_{x\in\overline{D}} |v(t_0+h, x) - v(t_0, x)| \underset{(4')}{=}$$

$$= \sup_{x\in\overline{D}} \left| \big(u(t_0+h)\big)(x) - \big(u(t_0)\big)(x) \right| = \| u(t_0+h) - u(t_0) \|_{C(\overline{D})} < \varepsilon$$

Тому v - непер за t.

3) $v \in C(\overline{Q_{0,T}})$. $\blacksquare$

Аналогічно як простір $C(S; X)$ можна ввести $C(\overline{D}; X)$
і показати його повноту за нормою

з $\mathbb{R}^n$ банах. пр.

$$\|u; C(\overline{D}; X)\| = \max_{x\in\overline{D}} \|u(x)\|_X$$

і довести аналогічну лему.

<u>Висновок</u> $C([0,T]; C(\overline{D})) = C(\overline{Q_{0,T}}) = C(\overline{D}; C([0,T]))$

Лекція 8

2.2. Простори неперервно-диф. ф-цій зі значеннями в банахових просторах

$S = \langle 0, T \rangle$, $T > 0$, X – банахів простір.

Озн. Ф-ція $u: S \to X$ назив. диференційовною в т. $t_0 \in S$ якщо існує $x \in X$:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ t_0 + h \in S}} \left\| \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} - x \right\|_X = 0$$

Цей елемент x назив. похідною u в т. t_0 і познач. $u'(t_0)$

Похідні старших порядків: $u^{(k+1)} = (u^{(k)})'$, $k \in \mathbb{N}$

$C^m(S; X)$ – множина всіх неперервних на S ф-цій, які мають неперервні на S похідні до порядку m включно.

Озн. Ф-ція, дифер. $\forall t_0 \in S$ назив. диференційовною на S

Лема 1) Якщо $u, v : S \to X$ - диф на S, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то правильно

$$w(t) = \alpha u(t) + \beta v(t), \quad t \in S \quad (1)$$

визначає ф-цію $w : S \to X$, яка є дифер. на S та

$$w'(t) = \alpha u'(t) + \beta v'(t), \quad t \in S \quad (2)$$

2) Якщо $b \in X$ - фіксований елемент, $\varphi : S \to \mathbb{R}$ - дифер. в звичайному розумінні ф-ція, то правильно

$$z(t) = \varphi(t) \cdot b, \quad t \in S \quad (3)$$

визначає ф-цію $z : S \to X$, яка є диф. на S та

$$z'(t) = \varphi'(t) \cdot b, \quad t \in S \quad (4)$$

1) $$\left\| \frac{w(t_0+h_1) - w(t_0)}{h_1} - \left(\alpha u'(t_0) + \beta v'(t_0)\right) \right\|_X =$$

$$= \left\| \alpha \cdot \frac{1}{h_1}\left(u(t_0+h_1) - u(t_0)\right) - \alpha u'(t_0) + \beta \frac{1}{h_1}\left(v(t_0+h_1) - v(t_0)\right) - \beta v'(t_0) \right\|_X \leq$$

$$\leq |\alpha| \cdot \underbrace{\left\| \frac{1}{h_1}\left(u(t_0+h_1) - u(t_0)\right) - u'(t_0) \right\|_X}_{u\text{-диф} \;\to\; 0} + |\beta| \cdot \underbrace{\left\| \frac{1}{h_1}\left(v(t_0+h_1) - v(t_0)\right) - v'(t_0) \right\|_X}_{v\text{-диф.} \;\to\; 0}$$

2) $$\left\| \frac{z(t_0+h_1) - z(t_0)}{h_1} - \varphi'(t_0)\, b \right\|_X = \Big\| \underbrace{\left[\frac{1}{h_1}\left(\varphi(t_0+h_1) - \varphi(t_0)\right) - \varphi'(t_0)\right]}_{\text{число}} \cdot b \Big\|_X =$$

$$= \underbrace{\left| \frac{1}{h_1}\left(\varphi(t_0+h_1) - \varphi(t_0)\right) - \varphi'(t_0) \right|}_{\varphi\text{-диф} \;\to\; 0} \cdot \underbrace{\|b\|_X}_{\text{число}} \xrightarrow[h_1 \to 0]{} 0$$

<u>Лема</u> Нехай $u \in C^1(S; \overline{X})$. Тоді

1) $\forall t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$ виконується аналог формули Лагранжа

$$\| u(t_2) - u(t_1) \|_X \le (t_2 - t_1) \cdot \sup_{t_1 \le t \le t_2} \| u'(t) \|_X \qquad (5)$$

2) Якщо $u'(t) = 0$ м.д.в. $t \in S$, то u – стала ф-ція, тобто існує таке $y \in X$

$$u(t) \equiv y \text{ на } S \qquad (6)$$

$\square$ 1) без дов.

2) Нехай $t_0 \in S$, $y \overset{def}{=} u(t_0)$, $\forall t \in S$.

$$\| u(t) - y \|_X = \| u(t) - u(t_0) \|_X \underset{(5)}{\le} |t - t_0| \cdot \sup_{0 \le t \le T} \underbrace{\| u'(t) \|_X}_{=0} = 0$$

$\blacksquare$

I-ма Множина $C^1([0,T];X)$ є банаховим простором стосовно норми

$$\|u; C^1([0,T];X)\| = \overbrace{\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X}^{=\|u; C([0,T];X)\|} + \overbrace{\max_{t\in[0,T]} \|u'(t)\|_X}^{=\|u'; C([0,T];X)\|} \qquad (7)$$

З аксіоми норми очевидно, що викон. Доведемо повноту простору $C^1([0,T];X)$.

Нехай $\{u_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset C^1([0,T];X)$ – довільна фундаментальна послідовність

З озн. фундамент, за нормою (7) випливає тоже:

$\{u_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ - фунд. в $C([0,T];X) \Rightarrow$ збіжна до деякого u

$\{u'_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ - фунд. в $C([0,T];X) \Rightarrow$ збіжна до деякого v

Доведемо, що $v = u'$

Нехай $t_0 \in [0,T]$, $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$, $t_i \xrightarrow[i\to\infty]{} t_0$

$$\| u(t_i) - u(t_0) - (u_k(t_i) - u_k(t_0)) \|_X =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \| (u_N(t_i) - u_k(t_i)) - (u_N(t_0) - u_k(t_0)) \|_X \le \left\{ \begin{matrix} \text{аналог} \\ \text{ф-ли} \\ \text{Лагранжа} \end{matrix} \right\} \le$$

$$\le \lim_{N\to\infty} |t_i - t_0| \cdot \underbrace{\sup_{0\le t\le T} \| u_N'(t) - u_k'(t) \|_X}_{\text{норма в } C([0,T];X)} =$$

$$= |t_i - t_0| \cdot \| v - u_k' ; C([0,T];X) \| \qquad (8)$$

Тоді

$$\left\| \frac{u(t_i)-u(t_0)}{t_i-t_0} - v(t_0) \right\|_X = \left\| \frac{1}{t_i-t_0} \cdot \Big(u(t_i) - u(t_0) - \big(u_k(t_i) - u_k(t_0)\big)\Big) + \frac{1}{t_i-t_0}\big(u_k(t_i) - u_k(t_0)\big) - v(t_0) \right\|_X \le$$

$$\le \frac{1}{|t_i-t_0|} \cdot \underbrace{\left\| u(t_i) - u(t_0) - \big(u_k(t_i) - u_k(t_0)\big) \right\|_X}_{\text{див. (8)} \quad \Leftarrow \ \ldots} +$$

$$+ \left\| \frac{1}{t_i-t_0}\big(u_k(t_i) - u_k(t_0)\big) - v(t_0) \right\|_X \le$$

$$\le \| v - u_k' ; C([0,T];X) \| + \left\| \frac{1}{t_i-t_0}\big(u_k(t_i) - u_k(t_0)\big) - v(t_0) \right\|_X$$

З обох частин візьмемо $\lim\limits_{t_i \to t_0}$

$$\lim_{t_i\to t_0}\left\| \frac{u(t_i)-u(t_0)}{t_i-t_0} - v(t_0)\right\|_X \le \|v-u_k';\, C([0,T];X)\| +$$

$$+\underbrace{\|u_k'(t_0)-v(t_0)\|_X}_{\le \sup\limits_{t_0}\cdots} \le 2\cdot\|v-u_k';\, C([0,T];X)\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Отже, $u'(t_0)=v(t_0)$ $\blacksquare$

$T>0$, $\mathcal{O}_{0,T}=(0,T)\times D$, $D\subset\mathbb{R}^n$ – обмежена область

Лема (про еквівалентні трактування диференційовних ф-цій).

Якщо $u\in C([0,T];C(\overline{D}))$, $v\in C(\overline{\mathcal{O}_{0,T}})$,

$$(u(t))(x)=v(t,x),\quad (t,x)\in\overline{\mathcal{O}_{0,T}}, \qquad (9)$$

То
$$u \in C^1([0,T]; C(\overline{D})) \iff v_t \in C(\overline{O}_{0,T}).$$

Крім того
$$(u'(t))(x) = v_t(t,x), \quad (t,x) \in \overline{O}_{0,T} \quad (10)$$

$\boxed{\text{Д}}$ ($\Rightarrow$) $u \in C^1([0,T]; C(\overline{D}))$. Тоді $\forall\, (t,x) \in \overline{O}_{0,T}$
$h \in \mathbb{R}$, $t+h \in [0,T]$

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{v(t+h,x) - v(t,x)}{h} - (u'(t))(x) \right| \underset{(9)}{\le} \left\{ \sup_{x\in \overline{D}} \right\} \le$$

$$\le \lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - u'(t); C(\overline{D}) \right\| = 0$$

Тобто ми знайшли частинну похідну v_t і вона така як в (10). З леми про еквівал. трактування неперер. ф-цій випливає, що $v_t \in C(\overline{O}_{0,T})$.

($\Leftarrow$) Нехай $\underbrace{v_t \in C(\overline{O}_{0,T})}$, $t_0 \in [0,T]$.

т. Кантора $\Rightarrow$ v_t - рівном. непер.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall h : |h| < \delta \ \forall (t,x) \in \overline{O}_{0,T}$

$$t+h \in [0,T] \Rightarrow |v_t(t+h,x) - v_t(t,x)| < \varepsilon$$

Тому

$$\left\| \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} - v_t(t_0,\cdot) \,;\, C(\overline{D}) \right\| = \sup_{x \in \overline{D}} \left| \frac{v(t_0+h,x) - v(t_0,x)}{h} - \right.$$

$$\left. - v_t(t_0,x) \right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{з класичної} \\ \text{ф-ли} \\ \text{Лагранжа} \end{array} \right\} = \sup_{x \in \overline{D}} \left| v_t(t_0 + h \cdot \Theta(x), x) - v_t(t_0,x) \right| < \varepsilon$$

для фіксов $x \in \overline{D}$ $\in$ своя стала $\Theta(x) \in [0,1]$, що викон

Отже, $u'(t_0) = v_t(t_0, \cdot)$. З леми про еквівалентні трактування неперервн. ф-ції $u' \in C([0,T]; C(\overline{D}))$.

$\blacksquare$

Лекція 9

2.3. Інтеграл Бохнера

$S = \langle 0, T \rangle$, X - банахів простір

Озн. Ф-ція $u : S \to X$ назив. простою, якщо $\exists$ $x_1, \dots, x_m \in X$, $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{L}(S)$ ($B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$)

$$u(t) = \begin{cases} x_i, & t \in B_i, \ i = \overline{1,m} \\ 0, & t \in S \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} B_i \end{cases} \qquad (1)$$

Озн. Якщо $B_1, \dots, B_m$ - інтервали, то u назив. східчастою ф-цією.

Озн. Інтегралом Бохнера простої ф-ції u з (1) назив. такий елемент X:

$$(B)\int_S u(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{x_i}_{\text{елемент з } X} \cdot \underbrace{\operatorname{mes}_1 B_i}_{\text{число}} \qquad (2)$$

Стандартно покажемо, що

$$(B)\int\limits_{S}\left[\alpha u(t)+\beta v(t)\right]dt=\alpha\cdot(B)\int\limits_{S}u(t)dt+\beta\cdot(B)\int\limits_{S}v(t)dt \quad (3)$$

Озн. Ф-ція $u: S\to X$ назив. вимірною за Бохнером, якщо існує послідовність $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ - прості ф-ції типу (1) така, що

$$\text{м.д.в. } t\in S: \quad u_k(t)\xrightarrow[k\to\infty]{} u(t) \text{ в сенсі простору } X. \quad (4)$$

Якщо крім (4) маємо, що $\lim\limits_{k\to\infty}(L)\int\limits_{S}\|u(t)-u_k(t)\|_X\,dt=0$, (5)

то u назив. інтегровною за Бохнером.

Інтеграл Бохнера від такої ф-ції - це елемент

$$(B)\int\limits_{S} u(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} (B)\int\limits_{S} u_k(t)\,dt. \qquad (6)$$

Якщо $M \in \mathcal{L}(S)$, χ_M – індикатор M, то

$$(B)\int\limits_{M} u(t)\,dt = (B)\int\limits_{S} u(t)\cdot\chi_M(t)\,dt \qquad (7)$$

Озн. $\mathcal{M}(S;X)$ – множина всіх ф-цій $u: S \to X$, які є вимірні за Бохнером.

Озн. Якщо $M = \langle a,b\rangle \subset S$ то $(B)\int\limits_{a}^{b} u(t)\,dt \overset{df}{=} (B)\int\limits_{\langle a,b\rangle} u(t)\,dt$

Якщо $a > b$ $(B)\int\limits_{a}^{b} u(t)\,dt \overset{df}{=} -(B)\int\limits_{b}^{a} u(t)\,dt$

Можна довести, що

$$(B)\int_a^b u(t)\,dt + (B)\int_b^c u(t)\,dt = (B)\int_a^c u(t)\,dt$$

Властивості:

1) Ф-ції з $C([0,T];X)$ є вимірними та інтегровними за Бохнером

2) Якщо $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(S;X)$ та $u_k(t) \to u(t)$ в X м.д.в. $t\in S$, то

$$u \in \mathcal{M}(S;X)$$

3) Ф-ція $u: S \to X$ є інтегровною за Бохнером тоді і тільки тоді, коли ф-ція $\|\cdot\|_X : S \to \mathbb{R}$ є інтегровною за Лебегом. Крім того,

$$\left\| (B)\int_M u(t)\,dt \right\|_X \le (L)\int_M \|u(t)\|_X\,dt \quad (8)$$

Лема. Нехай $u: S \to X$ - інтегровна за Бохнером, $t_0 \in S$. Тоді правило

$$v(t) = (B)\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau, \quad t \in S, \qquad (9)$$

визначає ф-цію $v \in C([0,T]; X)$. Крім того, v - дифер. м.с. на S,

$$v'(t) = u(t) \text{ м.д.в. } t \in S \qquad (10)$$

Якщо, додатково, $u \in C([0,T]; X)$, то $v \in C^1(S; X)$.

$\boxed{\Xi}$ Доведемо спершу неперервність v. $\forall t_1 \in S$, $\forall h \in \mathbb{R}$ $t_1 + h \in S$

$$\|v(t_1+h) - v(t_1)\|_X \overset{(9)}{=} \left\| (B)\int_{t_0}^{t_1+h} u(\tau)\,d\tau - (B)\int_{t_0}^{t_1} u(\tau)\,d\tau \right\|_X =$$

$$= \left\| (B)\int_{t_0}^{t_1+h} \dots + (B)\int_{t_1}^{t_0} \dots \right\|_X = \left\| (B)\int_{t_1}^{t_1+h} u(\tau)\,d\tau \right\|_X \underset{(8)}{\leq}$$

$$\leq (L)\int_{t_1}^{t_1+h} \|u(\tau)\|_X \, d\tau \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$ з абсолютної неперервності інтегралу Лебега.

Отже, $v \in C(S; X)$. ∎

<u>Заув.</u> Як і в доведенні леми можна показати, що інтеграл Бохнера по множині малої міри є малим. Зокрема

$$(B)\int_a^a u(t)\,dt = 0$$

Лема (про винесення сталого елемента з під інтегралу Бохнера)

Якщо $\varphi \in L_1^1(S)$ та $x \in X$ - фіксований елемент, то

$$(B)\int_S x\cdot\varphi(t)\,dt = x\cdot (L)\int_S \varphi(t)\,dt\,. \quad (11)$$

$\boxed{\Xi}$ $\varphi \in L_1^1(S) \Rightarrow$ існує послідовність $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ - простих інтегровних за Лебегом ф-цій, які збігаються до φ в $\mathbb{R}$.

φ_k - проста $\Rightarrow \exists\ B_i^k \subset S,\ r_i^k \in \mathbb{R}$

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} r_i^k, & t\in B_i, \forall i, \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases}$$

Тоді $x\cdot\varphi_k(t)$ - проста за Бохнером. Крім того,

$$\|x\varphi_k(t) - x\varphi(t)\|_X = \|\underbrace{(\varphi_k(t) - \varphi(t))}_{\text{число}}\cdot x\|_X =$$

$$= |\varphi_k(t) - \varphi(t)|\cdot \underbrace{\|x\|_X}_{\text{число}} \to 0 \quad \text{при } k\to\infty$$

$$(B)\int_S x\cdot\varphi_k(t)\,dt = \sum_i \underbrace{r_i^k}_{\text{число}}\cdot x\cdot \underbrace{\operatorname{mes} B_i^k}_{\text{число}} = \underbrace{\left(\sum_i r_i^k \operatorname{mes} B_i^k\right)}_{\text{число}}\cdot x =$$

$$= \left((L)\int_S \varphi_k(t)\,dt\right)\cdot x$$

Спрямувавши $k\to\infty$, отримаємо (11). ∎

Лема (аналог ф-ли Ньютона - Лейбніца) Якщо $u \in C^1(S;X)$, $t_1, t_2 \in S$, то

$$(B)\int_{t_1}^{t_2} u'(t)\,dt = u(t_2) - u(t_1) \qquad (12)$$

$\boxed{\text{Д}}$ $u \in C^1(S;X)$ то розглянемо

$$z(t) = (B)\int_{t_1}^{t} u'(\tau)\,d\tau - u(t), \quad t \in S. \qquad (13)$$

З доведеної леми $z'(t) = \left((B)\int_{t_1}^{t} u'(\tau)\,d\tau\right)' - u'(t) =$

$= u'(t) - u'(t) = 0$ м.д.в. $t \in S$.

З леми $\Rightarrow$ $\exists\, y \in X$ $z(t) \equiv y$ для $y \in S$

Отже,

$$y = (B)\int_{t_1}^{t} u'(\tau)\,d\tau - u(t).$$ Візьмемо тут $t = t_1$

$$y = 0 - u(t_1) \Rightarrow y = -u(t_1)$$

$$-u(t_1) = (B)\int_{t_1}^{t} u'(\tau)\,d\tau - u(t).$$ Візьмемо тут $t = t_2$

$$-u(t_1) = (B)\int_{t_1}^{t_2} u'(\tau)\,d\tau - u(t_2),$$ тобто (τ_2) виконується

$\blacksquare$

Лекція 10 Простори Лебега – Бохнера

$S = \langle 0, T \rangle$, X – банахів простір.

Озн. Ф-ції $u: S \to X$ та $v: S \to X$ назив. еквівалентними, якщо $u(t) = v(t)$ м.д.в. $t \in S$

Нехай $1 \le p < +\infty$. Простором Лебега-Бохнера $L^p(S; X)$ назив множина функцій $u \in \mathcal{M}(S; X)$ (вимірні за Бох.) і

$$\exists \, (L)\int_S \|u(t)\|_X^p \, dt < +\infty$$

Ми не розрізняємо еквівалентні ф-ції з $L^p(S; X)$.

Далі пишемо $\mathcal{M}(0, T; X)$ замість $\mathcal{M}(S; X)$
$L^p(0, T; X)$ замість $L^p(S; X)$

$L^1(0,T;X)$ - це множина інтегровних за Бохнером ф-цій, які на минулій лекції були введені.

<u>Т-ма</u> Якщо $p \in [1,+\infty)$, X - банахів простір, то простір Лебега - Бохнера $L^p(0,T;X)$ є банаховим стосовно норми

$$\|u; L^p(0,T;X)\| = \left((L)\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} \qquad (1)$$

$\boxed{\equiv}$ Доведемо лише нерівність трикутника:

$$\|u+v; L^p(0,T;X)\| = \left((L)\int_0^T \|u(t)+v(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} \le \left\{ \begin{matrix} \text{нерівність} \\ \text{трикутника} \\ \text{в } X \end{matrix} \right\} \le$$

$$\le \left((L)\int_0^T \left(\|u(t)\|_X + \|v(t)\|_X \right)^p dt \right)^{1/p} \le \left\{ \begin{matrix} \text{нерівність} \\ \text{Мінковського} \\ \text{для і-лу} \\ \text{Лебега} \end{matrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} \text{нерівність} \\ \text{трикутника} \\ \text{в} \\ L^p(0,T) \end{matrix} \right\} \le$$

$$\le \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} =$$

$$= \|u; L^p(0,T;X)\| + \|v; L^p(0,T;X)\| \quad \blacksquare$$

<u>Твердження</u> Нехай $p \in [1, +\infty)$, X - банахів пр, H - гільбертів простір. Тоді

1) $q \geq p \Rightarrow L^q(0,T;X) \subset L^p(0,T;X)$

2) множина простих p-цій з $(0,T)$ в X щільна в $L^p(0,T;X)$

3) $L^2(0,T;H)$ - гільбертів простір стосовно скалярного добутку

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(t), v(t))_H \, dt \qquad (2)$$

4) якщо $u, v \in L^2(0,T;H)$, то функ. $t \mapsto (u(t), v(t))_H$ належить до $L^1(0,T)$ і

$$\left| \int_0^T (u(t), v(t))_H \, dt \right| \le \|u; L^2(0,T;H)\| \cdot \|v; L^2(0,T;H)\| \qquad (3)$$

<u>Озн.</u> Простором Лебега-Бохнера $L^\infty(0,T;X)$ назив. множина всіх ф-цій $u \in M(0,T;X)$ таких, що

$$\exists K > 0 \qquad \|u(t)\|_X \le K \text{ м.д.в. } t \in (0,T) \qquad (4)$$

(такі ф-ції u назив. суттєво обмеженими).

Інфімум тих K, для яких викон. (4) позначається

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_X$$

Еквівалентні ф-ції ми не розрізняємо.

Т-ма. Простір Лебега – Бохнера $L^\infty(0,T;X)$ є банахов. стосовно норми

$$\|u; L^\infty(0,T;X)\| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_X \qquad (5)$$

$\boxed{\square}$ без дов $\boxed{\square}$

Заув. $C([0,T];X) \subset L^\infty(0,T;X) \subset L^p(0,T;X)$

Нехай $n\in\mathbb{N}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ - обмежена обл, $Q_{0,T}=(0,T)\times D$ циліндр.

Аналогічно до $L^p(0,T;X)$ можна ввести простір Л.-Б. $L^p(D;X)$. Так само розглядають $L^\infty(D;X)$

Лема (про еквівалентні трактування інтегровних ф-цій)

$$L^p(Q_{0,T}) = L^p(0,T; L^p(D)) = L^p(D; L^p(0,T))$$

$\boxed{\equiv}$ без. дов
(див. т-му Фубіні) $\boxed{\equiv}$

Колоквіум № 1 (17 жовтня)

|||

математичний диктант

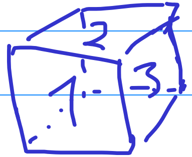
|||

означення та формулювання теорем, лем і т.д.

Розділ 3: Вступ до теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів.

3.1. Ймовірність.

Розглянемо гру „в кості": кидатимемо гральний кубик



„куб, на гранях якого є числа"

„генератор випадкових чисел $\{1,2,3,4,5,6\}$"

Елементарна подія – це результат експерименту, тобто випадання числа $\{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}$.

Простір елементарних подій

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Подія - підмножина Ω.

Пр $\Omega_1 = \{2, 4, 6\} = \{$ випало парне число $\}$

тут $\Omega_1 \subset \Omega_2$

$\Omega_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{$ випала не „1" $\}$

Озн. Якщо $A \subset B$, то кажуть, що подія A сприяє настанню події B.

Озн. Ймовірністю появи події $A \subset \Omega$ назив число

$$P(A) = \frac{\text{кількість елем. подій, що сприяють } A}{\text{кількість всіх ел. подій}} \qquad (1)$$

Ω – вірогідна подія $\quad \mathbb{P}(\Omega)=1$

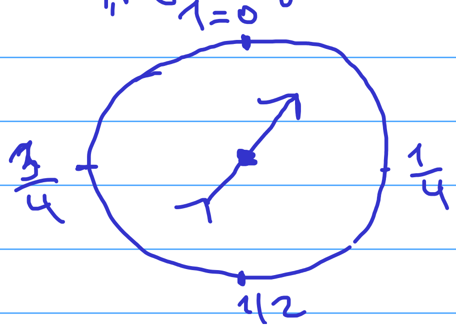
$\varnothing$ – неможлива подія $\quad \mathbb{P}(\varnothing)=0$

A та B – несумісні події, якщо $A \cap B = \varnothing$. Для них

$$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \qquad (2)$$

Узагальненнями означення (1) є такі означення (геометричні ймовірності)

Гра в „рулетку": маємо круг, довжина кола якого $= 1$ м



нанесемо шкалу на коло

в центр круга закріпимо стрілку, яка може обертатися і вказувати на якусь точку (результат – число від 0 до 1)

Тут простір елементарних подій $\Omega = [0, 1]$

$$A \subset \Omega \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{„довжина дуги } A\text{"}}{\text{„довжину дуги } \Omega\text{"} = 1} \qquad (3)$$

<u>Пр</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, то замість „довжини" буде „площа".