Лекція 6 Почнемо з приклади до практичної №3

5.3.3. $d\eta = (2t+3\eta)dt + (5t+7\eta)dW$ звести до СДР в якому $\widehat{\sigma} = 1$

$\mu$ $\sigma$

Шукаємо заміну:

$$\sigma(t,\eta) z_\eta(t,\eta) = \widehat{\sigma}(t, g(t,\eta))$$

$\sigma$ $\widehat{\sigma}$ $1$

$$(5t+7\eta) z_\eta = 1 \quad \Rightarrow \quad z_\eta = \frac{1}{5t+7\eta}$$

$$z = \frac{1}{7}\int \frac{d\eta}{5t+7\eta} = \frac{1}{7}\ln|5t+7\eta| + C_1$$

Заміна $\zeta = z(t,\eta)$, де $z(t,\eta) = \frac{1}{7}\ln(5t+7\eta) + C_1$

$$z_t = \frac{5}{7}\,\frac{1}{5t+7\eta} \qquad z_\eta = \frac{1}{5t+7\eta} \qquad z_{\eta\eta} = -\frac{7}{(5t+7\eta)^2}$$

$$dz = \left[ z_t + \mu z_\eta + \frac{1}{2}\sigma^2 z_{\eta\eta} \right] dt + \sigma z_\eta dW$$

$$dz = \left[ \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5t+7\eta} + (2t+3\eta) \cdot \frac{1}{5t+7\eta} + \frac{1}{2}(5t+7\eta)^2 \cdot \frac{(-7)}{(5t+7\eta)^2} \right] dt$$

$$+ (5t+7\eta) \cdot \frac{1}{5t+7\eta}\, dW$$

...

Повертаємося до лекції

Нагадаємо, що таке інтеграл Рімана

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ – обмежена ф-уія $\quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ розбиття

$\xi_k \in [x_k, x_{k+1})$ – вибрана точка

Інтегральна сума Рімана: $\sigma_R = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$

Опр. Число $I = (R)\int_a^b f(x)dx$ назив. інтегралом Рімана від $f$ по множині $[a,b]$, якщо

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall$ розбиттів $\forall$ вибраних точок

$$\left[ \max_k (x_{k+1} - x_k) < \delta \Rightarrow |I - \sigma_R| < \varepsilon \right]$$

Теорема 1.6. Неперервна на $[a,b]$ ф-уія є інтегровна за Рімана

Інтеграл Лебега: Якщо розглянути інтеграл по мірі і взяти цю міру як міру Лебега, то математично і-л Лебега

інтеграл Лебега $f(x)$ по $[a,b]$ позначають $(L)\int_a^b f(x)dx$

**Твердження 1.7**

$f$ – інтегровна за Ріманом $\Rightarrow$ $f$ інтегровна за Лебегом та $(L)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx$

$\not\Leftarrow$

Пр Функція Дірісле

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\psi$ інтегровна за Лебегом, наприклад, на $[-2,2]$

а інтеграла Рімана не існує.

$D \subset \mathbb{R}^n$

**Опр.** Ф-уія $f : D \to \mathbb{R}^1$ називається простою, якщо існують такі числа $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}$ та множини $D_1, \dots, D_m \in \mathcal{L}(D)$, що

$D_i \cap D_j = \emptyset$ при $i \neq j$,

$$f(x) = \begin{cases} f_j, & x \in D_j \\ 0, & x \in D \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{m} D_j \right) \end{cases}$$

**Опр.** Якщо $D \subset \mathbb{R}$, $D_1, \dots, D_m$ – інтервали, то така проста ф-уія назив. східчастою.

Проста ф-уія є інтегровною за Лебегом і

$$(L) \int_D f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} f_j \, mes_n(D_j)$$

Озн. Простором Лебега $L^p(D)$, де $p \in [1, +\infty)$, називається множина ф-цій $u \in \mathcal{M}(D)$ для яких $\exists \ (L)\int_D |u(x)|^p dx < +\infty$

Елементи з $L^p(D)$ ми не розрізняємо на множині міри нуль за Лебегом, тобто

$u_1 = u_2$ в сенсі простору $L^p(D)$ якщо $u_1(x) = u_2(x)$ м.д.в. $x \in D$.

Пр Ф-ція Діріхле належить, наприклад, до $L^1(\mathbb{R})$. Тому оскільки ми не розрізняємо $\psi(x)$ на множині міри нуль, то можна вважати, що $\psi(x) \equiv 0$, тобто $\psi \in C(\mathbb{R})$.

Відомо, що $L^p(D)$ є банаховим простором стосовно норми $\|u; L^p(D)\| = \left((L)\int_D |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$

При $p=2$ простір Лебега $L^2(D)$ є гільбертовим стосовно скалярного добутку

$$(u,v)_{L^2(D)} = \int_D u(x)\,v(x)\,dx$$

**Твердження 1.8.** Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область, $p \in [1,\infty)$.

1) $C(\overline{D}) \subset L^p(D)$

2) якщо $q \geq p$, то $L^q(D) \subset L^p(D)$

3) множина простих ф-цій щільна в $L^p(D)$

4) множини $C(\overline{D})$ та $C_0^1(D)$ щільні в $L^p(D)$

5) якщо $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $u \in L^p(D)$, $v \in L^{p'}(D)$, то $u \cdot v \in L^1(D)$ і виконується нерівність Гельдера $\int_D u \cdot v\,dx \leq \|u; L^p(D)\| \cdot \|v; L^{p'}(D)\|$

6) збіжна в $L^p(D)$ послідовність має збіжну майже скрізь підпослідовність.

Озн. Функція $u: D \to \mathbb{R}$ назив. суттєво обмеженою, якщо існує така стала $K > 0$, що

$$|u(x)| \le K \quad \text{м.с.в. } x \in D \qquad (1)$$

Точна нижня грань (inf) тих $K > 0$, для яких виконується (1) позначається

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)|$$

Озн. Множину всіх суттєво обмежених ф-ій $u \in M(D)$ теж наділяють простором Лебега і позначають $L^\infty(D)$

Відомо, що $L^\infty(D)$ є банаховим простором стосовно норми

$$\|u; L^\infty(D)\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)|$$

Відомо, що $C(\overline{D}) \subset L^\infty(D)$,

множина $C(\overline{D})$ НЕ є усюдною в $L^\infty(D)$

## Інтеграли Стільтьєса

$$\int_a^b \varphi(t)\,dW(t) - ?$$

Нехай $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

розбиття $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$

Озн. Число $V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \;\middle|\; \text{по всіх розбиттях} \right\}$

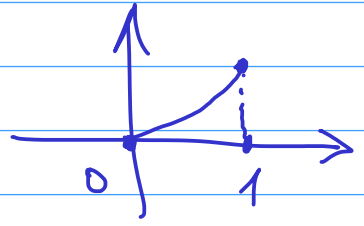
назив повною варіацією ф-ції $f$ на відрізку $[a,b]$.

Озн. Множину всіх ф-цій з обмеженою варіацією (тобто $V_a^b(f) < +\infty$) позначимо $BV(a,b)$

Відомо таке:

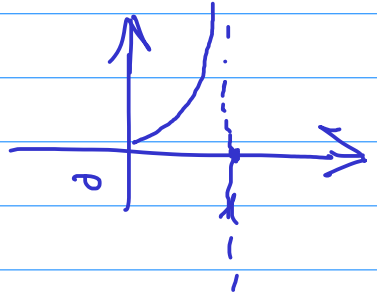
1) монотонна ф-ція на компакті є ф-ією обмеженої варіації

2) $AC(a,b) \subset BV(a,b)$




обм. вар.

Нехай $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$




не обм. вар.

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ – розбиття

$\xi_k \in [x_k, x_{k+1})$ – вибрані точки

Інтегральна сума $\sigma_{RS} = \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k)\left(g(x_{k+1}) - g(x_k)\right)$

**Опр.** Число $I = (RS)\int_a^b f(x)\,dg(x)$ называється інтегралом Рімана-Стільтьєса ф-ції $f(x)$ по ф-ції $g(x)$ на $[a,b]$, якщо

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall$ розбиття $\forall$ вибраних точках

$$\left[ \max_k (x_{k+1} - x_k) < \delta \Rightarrow |I - \sigma_{RS}| < \varepsilon \right]$$

Властивості

$$\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))\,dg(x) = \alpha \int_a^b f_1(x)\,dg(x) + \beta \int_a^b f_2(x)\,dg(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,d(\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)) = \alpha \int_a^b f(x)\,dg_1(x) + \beta \int_a^b f(x)\,dg_2(x)$$

**Твердження.** Якщо $f$ – інтегровна за Ріманом, $g \in Lip[a,b]$, то

$$(RS)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

**Твердження.** Нехай $f \in C([a,b])$, $g \in PC(a,b)$, існує $g'$ яка є абсолютно інтегровною за Ріманом,

$r_1, \dots, r_m \in (a,b)$ – всі точки розриву функції $g$ (якщо вони є). Тоді

$$(RS)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + f(a)\big(g(a+0)-g(a)\big) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} f(r_j)\big(g(r_j+0)-g(r_j-0)\big) + f(b)\big(g(b)-g(b-0)\big)$$

Інтеграл Лебега – Стілтьєса: $X = \Omega = [a,b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$

$F$ – монот. неспадна неперервна зліва ф-ція $(F \in Cag(a,b))$

На півкільці $\mathcal{J}_a^b$ всіх півінтервалів $[\alpha,\beta) \subset [a,b]$

будуємо $\sigma$-адитивну міру $\mu_F : \mathcal{J}_a^b \to \mathbb{R}$ :

$$\mu_F([\alpha,\beta)) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Цю міру продовжуємо до міри $\mu_F$, яка визначена на деякій $\sigma$-алгебрі $\Sigma_F$ всіх $\mu_F$-вимірних множин з $\Omega$.

Озн. Міра $\mu_F$ називається мірою Лебега – Стілтьєса на $\Sigma_F$, що відповідає ф-ції $F$, а сама $F$ назив. твірною ф-цією цієї міри.

Інтеграл за мірою $M_F$ назвав інтегралом Леб.-Ст.

Лекція 7

**Опр.** Функція $\varphi(x)$ назив регулярною в т. $x_0$, якщо $\varphi(x_0) = \frac{1}{2}[\varphi(x_0-0) + \varphi(x_0+0)]$.

**Тв.** Якщо $f, F \in BV(a,b)$ і кожна з цих функцій є регулярною в точці, де інша ф-ція не є регулярною, то

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = f(x)F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)\,df(x)$$

крім того $f(x) = 2f(a) - f(a+0)$ при $x < a$

$f(x) = 2f(b) - f(b-0)$ при $x > b$

і аналог. ф-ли є для $F$.

**Твердж.** Нехай $F(x) = H(x)$, де $H(x)$ – деякого невід'ємна ф-ція стрибків, тобто кусково-стала ф-ція, яка має не більше як зліченну к-ть точок розриву $x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots$

Нехай $h_k = F(x_k + 0) - F(x_k - 0) > 0$ – стрибок в т. $x_k$

Якщо $\sum\limits_k h_k < +\infty$ то вимоги твердження

$f$ – $\mu_H$ – інтегровна $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_k |f(x_k)| \cdot h_k < +\infty$

При цьому

$$(LS) \int_a^b f(x)\, dH(x) = \sum_k f(x_k) \cdot h_k$$

**Теорема.** Нехай $F(x) = A(x)$, де $A \in AC(a,b)$

Тоді $f$ – $\mu_A$-інтегровна $\Leftrightarrow$ $f \cdot A' \in L^1((a,b)) = L^1(a,b)$

При цьому

$$(LS)\int_a^b f(x)\,d\,A(x) = (L)\int_a^b f(x)\,A'(x)\,dx$$

# Розділ 2. Функції зі значеннями в банахових просторах

Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O} = (0,T) \times D$. Нехай $V: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^1$

$T > 0$ – число, 'циліндр

Ф-цію багатьох змінних $V = V(t,x)$, $t \in (0,T)$, $x \in D$, можна подати у вигляді ф-ції одної змінної $V(\cdot, x)$ (параметр)

ф-ція за часом / змінною

# 1. Простір неперервних ф-у'ій

Нехай $T>0$, $S = \langle 0, T\rangle$ - це або $[0,T]$, або $(0,T)$, або $[0,T)$, або $(0,T]$.

$X$ - банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$

**Опр.** Ф-ція $u: S \to X$ назив. неперервною в т. $t_0 \in S$ якщо з числової збіжності $t_k \underset{k\to\infty}{\Rightarrow} t_0$ ($t_k \in S$)

випливає $u(t_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(t_0)$ в просторі $X$

$\Updownarrow$

$\|u(t_k) - u(t_0)\|_X \to 0$

як числова послідовність

$C(S;X)$ або $C^0(S;X)$ – це множина всіх ф-цій $u: S \to X$ які неперервні в кожній точці $t_0 \in S$.

**Т-ма** Множина $C([0,T];X)$ є банаховим простором стосовно норми

$$\|u;\ C([0,T];X)\| = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X \qquad (1)$$

Всі аксіоми норми для (1) велися. Тому доведемо, що цей простір повний.

Нехай $\{u_N\}$ – довільна фундаментальна в $C([0,T];X)$ послідовність. Тоді

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall N,K \geq n_0 \quad \|u_N - u_K;\ C([0,T];X)\| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall t \in [0,T] \quad \|u_N(t) - u_K(t)\|_X < \varepsilon \qquad (2)$$

Спершу фіксуємо $t \in [0,T]$. Тоді (2) $\Rightarrow$ послідовність $\{u_N(t)\}$ фундам. в $X$ - банахів пр. $\Rightarrow$ вона збіжна в $X$ до деякого елемента $v$. $\forall t$ це буде свій $v$, тобто маємо ф-цію $v = v(t)$, $t \in [0,T]$. Тому, що

$$\forall t \in [0,T] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \quad \forall n > n_1 \quad \|u_n(t) - v(t)\|_X < \varepsilon \qquad (3)$$

Спрямовуючи $n \to \infty$ в (2) отримаємо, що $u_N$ збігається до $v$ рівномірно на $[0,T]$.

Покажемо, що $v$ - неперер.

Візьмемо $t_0 \in [0,T]$, $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [0,T] : t_k \underset{k \to \infty}{\to} t_0$

$$\|v(t_0) - v(t_k)\|_X = \| v(t_0) - u_{n_1+1}(t_0) + u_{n_1+1}(t_0) - u_{n_1+1}(t_k) +$$

$$+ u_{n_1+1}(t_k) - v(t_k) \|_X \leq \left\{ \begin{matrix} \text{нерівність} \\ \text{трикутника} \end{matrix} \right\} \leq$$

$$\leq \|v(t_0) - u_{n+1}(t_0)\|_X + \|u_{n+1}(t_0) - u_{n+1}(t_k)\|_X +$$

$$+ \|u_{n+1}(t_k) - v(t_k)\|_X <$$

$$\underset{(3)}{<} \varepsilon + \|u_{n+1}(t_0) - u_{n+1}(t_k)\|_X + \varepsilon <$$

$u_{n+1}$ – непрерывна ф-ция в т. $t_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \ \forall k > k_0$

$$\|u_{n+1}(t_0) - u_{n+1}(t_k)\|_X < \varepsilon$$

$$< 3\varepsilon$$

Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область, $Q_{0,T} = (0,T) \times D$, $T > 0$ – число.

'циліндр

**Лема 2.1** (про еквівалентне трактування неперервних ф-цій).
Функції $v \in C(\overline{\mathcal{O}_{0,T}})$ та $u \in C([0,T]; C(\overline{D}))$
можна ототожнити за правилом $u(t) = v(t, \cdot)$ (4)

тобто $(u(t))(x) = v(t,x)$, $x \in \overline{D}$, $t \in [0,T]$. (4')

Тоді $C(\overline{\mathcal{O}_{0,T}}) = C([0,T]; C(\overline{D}))$.

(⇒) Нехай $v \in C(\overline{\mathcal{O}_{0,T}})$. Нехай $u$ взято з (4)
покажемо, що $u$ – неперер. ф-ція.
$\forall t_0 \in [0,T]$, $\forall h \in \mathbb{R}$: $t_0 + h \in [0,T]$

Оскільки $v$ - неперер на $\overline{\mathcal{O}_{0,T}}$ - компакт ⇒ $v$ - рівномір. неперервна
Тому $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall h \in \mathbb{R}$ : $|h| < \delta$ ⇒ $|v(t+h, x) - v(t,x)| < \varepsilon$
$(\forall x \in \overline{D})$ (5)

Розглянемо

$$\|u(t_0+h)-u(t_0)\|_{C(\overline{D})} = \max_{x\in\overline{D}} \left| \big(u(t_0+h)\big)(x) - \big(u(t_0)\big)(x) \right| \overset{(4')}{=}$$

$$= \max_{x\in\overline{D}} |v(t_0+h,x) - v(t_0,x)| \overset{(5)}{<} \varepsilon$$

Отже, $u \in C([0,T]; C(\overline{D}))$.

($\Leftarrow$) Нехай $u \in C([0,T]; C(\overline{D}))$. Нехай $v$ будемо з (4).

Візьмемо довільну точку $(t_0, x^0) \in \overline{\mathcal{O}}_{0,T}$.

1) покажемо, що $v$ неперервна за $x$ в т. $x^0$.

$h = (h_1, \dots, h_n)$ $\quad x+h = (x_1+h_1, \dots, x_n+h_n)$

$u \in C([0,T]; C(\overline{D})) \Rightarrow u(t_0) \in C(\overline{D})$, $\overline{D}$ – компакт

З т-ми Кантора і з рівном. непер за $x$ отримаємо таке:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall h\in\mathbb{R}^n : |h|<\delta, \ x+h\in\overline{D} \quad \forall x\in\overline{D}$$

$$\Big|\underbrace{(u(t_0))(x+h)}_{=\,v(t_0,x+h)} - \underbrace{(u(t_0))(x)}_{=\,v(t_0,x)}\Big| < \varepsilon$$

Отже, $v$ - непер. за $x$ в т. $x_0$.

2) покажемо, що $v$ неперервна за $t$ в т. $t_0$

Оскільки $u\in C([0,T];C(\overline{D}))$, то

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall h\in\mathbb{R} \ |h|<\delta \quad t_0+h\in[0,T]$$

$$\|u(t_0+h)-u(t_0)\|_{C(\overline{D})} < \varepsilon$$

$$|V(t_0+h, x^0) - V(t_0, x^0)| = \sup_{x \in \overline{D}} |V(t_0+h, x) - V(t_0, x)| = \quad (4')$$

$$= \sup_{x \in \overline{D}} \left| \big(u(t_0+h)\big)(x) - \big(u(t_0)\big)(x) \right| = \| u(t_0+h) - u(t_0) \|_{C(\overline{D})} < \varepsilon$$

Тому $V$ - неперервна за $t$.

3) $V \in C(\overline{\mathcal{O}}_{0,T})$. ∎

Аналогічно як простір $C(S; X)$ можна ввести $C(\overline{D}; X)$ і показати його повноту за нормою (з $\mathbb{R}^n$, банах. пр.)

$$\| u; C(\overline{D}; X) \| = \max_{x \in \overline{D}} \| u(x) \|_X$$

і довести аналогічну лему.

Висновок $C([0,T]; C(\overline{D})) = C(\overline{\mathcal{O}}_{0,T}) = C(\overline{D}; C([0,T]))$

Лекція 8 2.2. Простори неперер.-диф. ф-цій зі значеннями в банахових просторах

$S = \langle 0, T \rangle$, $T > 0$, $X$ – банахів простір.

Озн. Ф-ція $u: S \to X$ наз. диференційовною в т. $t_0 \in S$ якщо існує $x \in X$:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ t_0 + h \in S}} \left\| \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} - x \right\|_X = 0$$

Цей елемент $x$ наз. похідною $u$ в т. $t_0$ і позн. $u'(t_0)$

Похідні старших порядків: $u^{(k+1)} = (u^{(k)})'$, $k \in \mathbb{N}$

$C^m(S; X)$ – множина всіх неперер на $S$ ф-цій, які мають неперер на $S$ похідні до порядку $m$ включно.

Опр. Ф-ція, диффер. $\forall t_0 \in S$ назив. диференційовною на $S$

Лема 1) Якщо $u, v : S \to X$ - диф на $S$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то правило

$$w(t) = \alpha u(t) + \beta v(t), \quad t \in S \quad (1)$$

визначає ф-цію $w : S \to X$, яка є диффер. на $S$ та

$$w'(t) = \alpha u'(t) + \beta v'(t), \quad t \in S \quad (2)$$

2) Якщо $b \in X$ - фіксований елемент, $\varphi : S \to \mathbb{R}$ - диффер. в звичайному розумінні ф-ція, то правило

$$z(t) = \varphi(t) \cdot b, \quad t \in S \quad (3)$$

визначає ф-цію $z : S \to X$, яка є диф. на $S$ та

$$z'(t) = \varphi'(t) \cdot b, \quad t \in S \quad (4)$$

1) $$\left\| \frac{w(t_0+h)-w(t_0)}{h} - (\alpha \dot{u}(t_0) + \beta v'(t_0)) \right\|_X =$$

$$= \left\| \alpha \cdot \frac{1}{h}\left(u(t_0+h)-u(t_0)\right) - \alpha u'(t_0) + \beta \frac{1}{h}\left(v(t_0+h)-v(t_0)\right) - \beta v'(t_0) \right\|_X \le$$

$$\le |\alpha| \cdot \underbrace{\left\| \frac{1}{h}\left(u(t_0+h)-u(t_0)\right) - u'(t_0) \right\|_X}_{u\text{-grad} \to 0} + |\beta| \cdot \underbrace{\left\| \frac{1}{h}\left(v(t_0+h)-v(t_0)\right) - v'(t_0) \right\|_X}_{v\text{-grad.} \to 0}$$

2) $$\left\| \frac{z(t_0+h)-z(t_0)}{h} - \varphi'(t_0)\, b \right\|_X = \left\| \underbrace{\left[ \frac{1}{h}\left(\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)\right) - \varphi'(t_0) \right]}_{\text{skalar}} \cdot b \right\|_X =$$

$$= \underbrace{\left| \frac{1}{h}\left(\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)\right) - \varphi'(t_0) \right|}_{\varphi\text{-grad} \to 0} \cdot \underbrace{\|b\|_X}_{\text{skalar}} \to 0 \quad (h \to 0)$$

∎

**Лема** Нехай $u \in C^1(S; \bar{X})$. Тоді

1) $\forall t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$ виконується аналог формули Лагранжа

$$\|u(t_2) - u(t_1)\|_X \le (t_2 - t_1) \cdot \sup_{t_1 \le t \le t_2} \|u'(t)\|_X \qquad (5)$$

2) Якщо $u'(t) = 0$ м.с.в. $t \in S$, то $u$ - стала ф-ція, тобто існує таке $y \in X$

$$u(t) \equiv y \text{ на } S \qquad (6)$$

1) без дов.

2) Нехай $t_0 \in S$, $y \overset{\text{def}}{=} u(t_0)$, $\forall t \in S$.

$$\|u(t) - y\|_X = \|u(t) - u(t_0)\|_X \underset{(5)}{\le} |t - t_0| \cdot \sup_{0 \le t \le T} \|u'(t)\|_X = 0$$

$\|u'(t)\| = 0$

**Т-ма** Множина $C^1([0,T];X)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|u;C^1([0,T];X)\| = \underbrace{\max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_X}_{=\|u;C([0,T];X)\|} + \underbrace{\max_{t\in[0,T]}\|u'(t)\|_X}_{=\|u';C([0,T];X)\|} \quad (7)$$

✍ аксіоми норми очевидно, що виконуються. Доведемо повноту простору $C^1([0,T];X)$.

Нехай $\{u_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset C^1([0,T];X)$ – довільна фундаментальна послідовність

З озн. фундаментальної, за нормою (7) випливає таке:

$\{u_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ – фунд. в $C([0,T];X) \Rightarrow$ збіжна до деякого $u$

$\{u'_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ – фунд. в $C([0,T];X) \Rightarrow$ збіжна до деякого $v$

Доведемо, що $v = u'$

Нехай $t_0 \in [0,T]$, $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset [0,T]$, $t_i \xrightarrow[i \to \infty]{} t_0$

$$\| u(t_i) - u(t_0) - (u_k(t_i) - u_k(t_0)) \|_X =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \| (u_N(t_i) - u_k(t_i)) - (u_N(t_0) - u_k(t_0)) \|_X \leq \left\{ \begin{array}{l} \text{аналог} \\ \varphi\text{-ли} \\ \text{Лагранжа} \end{array} \right\} \leq$$

$$\leq \lim_{N \to \infty} |t_i - t_0| \cdot \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq T} \| u_N'(t) - u_k'(t) \|_X}_{\text{норма в } C([0,T];X)} =$$

$$= |t_i - t_0| \cdot \| v - u_k' ; C([0,T];X) \| \qquad (8)$$

Тоді

$$\left\| \frac{u(t_i)-u(t_0)}{t_i-t_0} - v(t_0) \right\|_X = \left\| \frac{1}{t_i-t_0} \cdot \left( u(t_i) - u(t_0) - \left( u_k(t_i) - u_k(t_0) \right) \right) + \frac{1}{t_i-t_0} \left( u_k(t_i) - u_k(t_0) \right) - v(t_0) \right\|_X \leq$$

$$\leq \frac{1}{|t_i-t_0|} \cdot \underbrace{\left\| u(t_i) - u(t_0) - \left( u_k(t_i) - u_k(t_0) \right) \right\|_X}_{\text{gub. (8)} \quad \leq \dots} +$$

$$+ \left\| \frac{1}{t_i-t_0} \left( u_k(t_i) - u_k(t_0) \right) - v(t_0) \right\|_X \leq$$

$$\leq \| v - u_k' ; C([0,T];X) \| + \left\| \frac{1}{t_i-t_0} \left( u_k(t_i) - u_k(t_0) \right) - v(t_0) \right\|_X$$

З обох частин взявши $\lim_{t_i \to t_0}$

$$\lim_{t_i \to t_0} \left\| \frac{u(t_i)-u(t_0)}{t_i-t_0} - v(t_0) \right\|_X \le \| v - u_k' ; C([0,T];X) \| +$$

$$+ \underbrace{\| u_k'(t_0) - v(t_0) \|_X}_{\le \sup_{t_0} \dots} \le 2 \cdot \| v - u_k' ; C([0,T];X \| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Отже, $u'(t_0) = v(t_0)$ ∎

$T>0$, $\mathcal{O}_{0,T} = (0,T) \times D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область

**Лема** (про еквівалентні практування диференціюваних ф-цій). Якщо $u \in C([0,T]; C(\overline{D}))$, $v \in C(\overline{\mathcal{O}_{0,T}})$,

$$(u(t))(x) = v(t,x), \quad (t,x) \in \overline{\mathcal{O}_{0,T}}, \quad (g)$$

то

$$u \in C^1([0,T]; C(\overline{D})) \iff v_t \in C(\overline{\mathcal{O}}_{0,T}).$$

Крім того

$$(u'(t))(x) = v_t(t,x), \quad (t,x) \in \overline{\mathcal{O}}_{0,T} \quad (10)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $u \in C^1([0,T]; C(\overline{D}))$. Тоді $\forall (t,x) \in \overline{\mathcal{O}}_{0,T}$

$h \in \mathbb{R}$, $t+h \in [0,T]$

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{v(t+h,x) - v(t,x)}{h} - (u'(t))(x) \right| \underset{(9)}{\leq} \left\{ \sup_{x \in \overline{D}} \right\} \leq$$

$$\leq \lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t); C(\overline{D}) \right\| = 0$$

Тобто ми знайшли частинну похідну $v_t$ і вона така як в (10). З леми про еквівал. трактування непер. ф-цій випливає, що $v_t \in C(\overline{\mathcal{O}}_{0,T})$.

($\Leftarrow$) Нехай $v_t \in C(\overline{\Theta}_{0,T})$, $t_0 \in [0,T]$.

т. Кантора $\Rightarrow$ $v_t$ - рівном. непер.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall h : |h| < \delta \quad \forall (t,x) \in \overline{\Theta}_{0,T}$

$t + h \in [0,T] \Rightarrow \quad |v_t(t+h,x) - v_t(t,x)| < \varepsilon$

Тому

$$\left\| \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} - v_t(t_0,\cdot) \,;\, C(\overline{D}) \right\| = \sup_{x \in \overline{D}} \left| \frac{v(t_0+h,x) - v(t_0,x)}{h} - v_t(t_0,x) \right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{з кінцевих} \\ \text{ф-ли} \\ \text{Лагранжа} \end{array} \right\} = \sup_{x \in \overline{D}} \left| v_t(t_0 + h \cdot \Theta(x), x) - v_t(t_0,x) \right| < \varepsilon$$

для фіксов $x \in \overline{D}$ є своя стала $\Theta(x) \in [0,1]$, що викон

Отже, $u'(t_0) = V_t(t_0, \cdot)$. З леми про еквівалентні трактування непер. ф-цій $u' \in C([0,T]; C(\overline{D}))$.

Лекція 9

## 2.3. Інтеграл Бохнера

$S = \langle 0, T \rangle$, $X$ – банахів простір

**Опр.** Ф-ція $u: S \to X$ назив. простою, якщо $\exists$ $x_1, \dots, x_m \in X$, $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{L}(S)$ ($B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$)

$$u(t) = \begin{cases} x_i, & t \in B_i, \ i = \overline{1,m} \\ 0, & t \in S \setminus \bigsqcup_{i=1}^{m} B_i \end{cases} \qquad (1)$$

**Опр.** Якщо $B_1, \dots, B_m$ – інтервали, то $u$ назив ссідчастою ф-цією.

**Опр.** Інтегралом Бохнера простої ф-ції $u$ з (1) назив такий елемент $X$:

$$(B)\int_S u(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{x_i}_{\text{елемент } X} \cdot \underbrace{mes_1 B_i}_{\text{число}} \qquad (2)$$

Стандартно показуємо, що

$$(B)\int_S [\alpha u(t) + \beta v(t)]\,dt = \alpha \cdot (B)\int_S u(t)\,dt + \beta \cdot (B)\int_S v(t)\,dt \quad (3)$$

Опр. Ф-ція $u: S \to X$ назив вимірною за Бохнером, якщо існує послідовність $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – простих ф-цій типу (1) така, що

$$\text{м.с.в. } t \in S: \quad u_k(t) \underset{k\to\infty}{\to} u(t) \text{ в сенсі простору } X. \quad (4)$$

Якщо крім (4) маємо, що

$$\lim_{k\to\infty} (L)\int_S \|u(t) - u_k(t)\|_X\,dt = 0, \quad (5)$$

то $u$ назив інтегровною за Бохнером.
Інтеграл Бохнера від такої ф-ції – це елемент

$$(B)\int_S u(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} (B)\int_S u_k(t)\,dt. \quad (6)$$

Якщо $M \in \mathcal{L}(S)$, $\chi_M$ – індикатор $M$, то

$$(B)\int_M u(t)\,dt = (B)\int_S u(t)\cdot\chi_M(t)\,dt \quad (7)$$

Озн. $\mathcal{M}(S;X)$ – множина всіх ф-цій $u: S \to X$, які є вимірні за Бохнером.

Озн. Якщо $M = \langle a,b\rangle \subset S$ то $(B)\int_a^b u(t)\,dt \overset{df}{=} (B)\int_{\langle a,b\rangle} u(t)\,dt$

Якщо $a > b$ $(B)\int_a^b u(t)\,dt \overset{df}{=} -(B)\int_b^a u(t)\,dt$

Можна довести, що

$$(B)\int_a^b u(t)\,dt + (B)\int_b^c u(t)\,dt = (B)\int_a^c u(t)\,dt$$

Властивості:

1) Ф-ції з $C([0,T];X)$ є вимірними та інтегровними за Бохнером

2) Якщо $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(S;X)$ та $u_k(t) \to u(t)$ в $X$ м.у.в. $t \in S$, то

$$u \in \mathcal{M}(S;X)$$

3) Ф-ція $u: S \to X$ є інтегровною за Бохнером тоді і тільки тоді, коли ф-ція $\|\cdot\|_X : S \to \mathbb{R}$ є інтегровною за Лебегом. Крім того,

$$\left\| (B)\int_M u(t)\,dt \right\|_X \le (L)\int_M \|u(t)\|_X\,dt \quad (8)$$

**Лема** Нехай $u: S \to X$ – інтегровна за Бохнером, $t_0 \in S$. Тоді правило

$$v(t) = (B)\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau, \quad t \in S, \quad (9)$$

визначає ф-цію $v \in C([0,T];X)$. Крім того, $v$ – диферен. м.с. на $S$,

$$v'(t) = u(t) \text{ м.с.в. } t \in S \quad (10)$$

Якщо, додатково, $u \in C([0,T];X)$, то $v \in C^1(S;X)$.

▣ Доведемо лише неперервність $v$. $\forall t_1 \in S$, $\forall h \in \mathbb{R}$ $t_1+h \in S$

$$\|v(t_1+h)-v(t_1)\|_X \underset{(9)}{=} \left\| (B)\int_{t_0}^{t_1+h} u(\tau)\,d\tau - (B)\int_{t_0}^{t_1} u(\tau)\,d\tau \right\|_X =$$

$$= \left\| (B)\int_{t_0}^{t_1+h} \dots + (B)\int_{t_0}^{t_1} \dots \right\|_X = \left\| (B)\int_{t_1}^{t_1+h} u(\tau)\,d\tau \right\|_X \overset{(8)}{\leq}$$

$$\leq (L)\int_{t_1}^{t_1+h} \|u(\tau)\|_X\, d\tau \longrightarrow 0$$

$h \to 0$

з абсолютної неперервності інтеграла Лебега.

Отже, $v \in C(\Delta; X)$. ∎

Заув. Як і в доведеній лемі можна показати, що інтеграл Бохнера по множині малої міри є малим. Зокрема

$$(B)\int_a^a u(t)\,dt = 0$$

**Лема** (про винесення сталого елемента з під інтеграла Бохнера)
Якщо $\varphi \in L_1^1(S)$ та $x \in X$ - фіксований елемент, то

$$(B)\int_S x \cdot \varphi(t)\,dt = x \cdot (L)\int_S \varphi(t)\,dt \quad . \quad (11)$$

$\varphi \in L_1^1(S) \Rightarrow$ існує послідовність $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ - простих інтервальних за Лебегом ф-цій, які збігаються до $\varphi$ в $\mathbb{R}$.

$\varphi_k$ - проста $\Rightarrow \exists\ B_i^k \subset S,\ r_i^k \in \mathbb{R}$

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} r_i^k, & t \in B_i,\ \forall i, \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}.$$

Тоді $x \cdot \varphi_k(t)$ - проста за Бохнером. Крім того,

$$\|\varphi_k(t)\cdot x - \varphi(t)\cdot x\|_X = \|\underbrace{(\varphi_k(t)-\varphi(t))}_{\text{число}}\cdot x\|_X =$$

$$= \underbrace{|\varphi_k(t)-\varphi(t)|}_{\text{число}}\cdot \|x\|_X \to 0 \quad \text{при } k\to\infty$$

$$(B)\int_S x\cdot\varphi_k(t)\,dt = \sum_i \underbrace{r_i^k}_{\text{число}}\cdot x\cdot \underbrace{\operatorname{mes} B_i^k}_{\text{число}} = \underbrace{\left(\sum_i r_i^k \operatorname{mes} B_i^k\right)}_{\text{число}}\cdot x =$$

$$= \left((L)\int_S \varphi_k(t)\,dt\right)\cdot x$$

Спрямувавши $k\to\infty$, отримаємо (11). ∎

**Лема** (аналог ф-ли Ньютона - Лейбніца) Якщо $u \in C^1(S;X)$, $t_1, t_2 \in S$, то

$$(B)\int_{t_1}^{t_2} u'(t)\,dt = u(t_2) - u(t_1) \qquad (12)$$

Нехай $u \in C^1(S;X)$ то розглянемо

$$z(t) = (B)\int_{t_1}^{t} u'(\tau)\,d\tau - u(t), \quad t \in S. \qquad (13)$$

З доведеної леми $z'(t) = \left((B)\int_{t_1}^{t} u'(\tau)\,d\tau\right)' - u'(t) =$

$= u'(t) - u'(t) = 0$ м.с.в. $t \in S$.

З леми $\Rightarrow \exists\, y \in X \quad z(t) = y$ для $y \in S$

Отже, $y = (B)\int_{t_1}^{t} u'(\tau)\,d\tau - u(t)$. Відомо тут $t = t_1$

$y = 0 - u(t_1) \Rightarrow y = -u(t_1)$

$-u(t_1) = (B)\int_{t_1}^{t} u'(\tau)\,d\tau - u(t)$. Відомо тут $t = t_2$

$-u(t_1) = (B)\int_{t_1}^{t_2} u'(\tau)\,d\tau - u(t_2)$, тобто (2) вимоги

Лекція 10 Простори Лебега – Бохнера

$S = \langle 0, T \rangle$, $X$ - банахів простір.

Озн. Ф-ції $u : S \to X$ та $v : S \to X$ назив. еквівалентними, якщо $u(t) = v(t)$ м.с.в. $t \in S$

Нехай $1 \le p < +\infty$. Простором Лебега-Бохнера $L^p(S; X)$ назив. множина функцій $u \in M(S; X)$ (вимірні за Бох.) і

$$\exists \int_S \|u(t)\|_X^p \, dt < +\infty$$

Ми не розрізнюємо еквівалентні ф-ції з $L^p(S; X)$.

Далі писатимемо $M(0,t; X)$ замість $M(S; X)$

$L^p(0,T; X)$ замість $L^p(S; X)$

$L^1(0,T;X)$ - це множина інтегровних за Бохнером ф-цій, які на минулій лекції були введені.

**Т-ма** Якщо $p \in [1, +\infty)$ $X$ – банахів простір, то простір Лебега - Бохнера $L^p(0,T;X)$ є банаховим стосовно норми

$$\|u; L^p(0,T;X)\| = \left( (L) \int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} \qquad (1)$$

Доведемо лише нерівність трикутника:

$$\|u+v; L^p(0,T;X)\| = \left( (L) \int_0^T \|u(t)+v(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} \le \left\{ \begin{array}{c} \text{нерівність} \\ \text{трикутника} \\ \text{в } X \end{array} \right\} \le$$

$$\le \left( (L) \int_0^T \left( \|u(t)\|_X + \|v(t)\|_X \right)^p dt \right)^{1/p} \le \left\{ \begin{array}{c} \text{нерівність} \\ \text{Мінковського} \\ \text{для і-лу} \\ \text{Лебега} \end{array} \right\} \le \left\{ \begin{array}{c} \text{нерівність} \\ \text{трикутника} \\ \text{в} \\ L^p(0,T) \end{array} \right\} \le$$

$$\leq \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} + \left( \int_0^T \|v(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} =$$

$$= \|u; L^p(0,T; X)\| + \|v; L^p(0,T; X)\|$$

<u>Твердження</u> Нехай $p \in [1, +\infty)$, $X$ - банахів пр, $H$ - гільбертів простір. Тоді

1) $q \geq p \Rightarrow L^q(0,T;X) \subset L^p(0,T;X)$

2) множина простих р-ції з $(0,T)$ в $X$ щільна в $L^p(0,T;X)$

3) $L^2(0,T;H)$ - гільбертів простір стосовно скалярного добутку

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(t), v(t))_H \, dt \qquad (2)$$

4) якщо $u, v \in L^2(0,T;H)$, то функ. $t \mapsto (u(t), v(t))_H$ належить до $L^1(0,T)$ і

$$\left| \int_0^T (u(t), v(t))_H \, dt \right| \le \|u; L^2(0,T;H)\| \cdot \|v; L^2(0,T;H)\| \quad (3)$$

Озн. Простором Лебега-Бохнера $L^\infty(0,T;X)$ назив множина всіх ф-цій $u \in M(0,T;X)$ таких, що

$$\exists K > 0 \qquad \|u(t)\|_X \le K \text{ м.с.в. } t \in (0,T) \quad (4)$$

(такі ф-ції ще назив суттєво обмеженими).
Інфімум тих $K$, для яких виконн (4) позначається

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \|u(t)\|_X$$

Еквівалентні ф-ції ми не розрізняємо.

**Т-ма.** Простір Лебега – Бохнера $L^\infty(0,T;X)$ є банаховим стосовно норми

$$\|u; L^\infty(0,T;X)\| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_X \qquad (5)$$

Без дов

**Заув.** $C([0,T];X) \subset L^\infty(0,T;X) \subset L^p(0,T;X)$

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена обл, $Q_{0,T} = (0,T)\times D$ – циліндр.

Аналогічно до $L^p(0,T;X)$ можна ввести простір Л.–Б. $L^p(D;X)$. Так само розглядають $L^\infty(D;X)$

**Лема** (про еквівалентні трактування інтегровних ф-цій)

$$L^p(\mathcal{O}_{0,T}) = L^p(0,T; L^p(D)) = L^p(D; L^p(0,T))$$

без. дов
(див. т-му Фубіні)

Колоквіум №1 (17 жовтня)

|||

математичний диктант

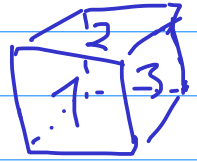
|||

означення та формулювання теорем, лем і т.д.

# Розділ 3: Вступ до теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів.

## 3.1. Ймовірність.

Розглянемо гру "в кості": кидаємо граальний кубик




куб, на гранях якого є числа

генератор випадкових чисел "

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

Елементарна подія – це результат експерименту, тобто випадання числа {1}, {2}, ..., {6}.

Простір елементарних подій $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Подія - підмножина $\Omega$.

Пр $\Omega_1 = \{2,4,6\} = \{$ випало парне число $\}$

$\Omega_2 = \{2,3,4,5,6\} = \{$ випала не „1" $\}$

тут $\Omega_1 \subset \Omega_2$

Опр. Якщо $A \subset B$, то кажуть, що подія $A$ сприяє настанню події $B$.

Опр. Ймовірністю появи події $A \subset \Omega$ назив число

$$P(A) = \frac{\text{кількість елем. подій, що сприяють } A}{\text{кількість всіх ел. подій}} \quad (1)$$

$\Omega$ – вірогідна подія $\quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$

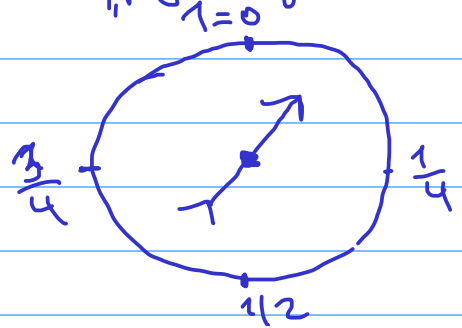
$\varnothing$ – неможлива подія $\quad \mathbb{P}(\varnothing) = 0$

A та B – несумісні події, якщо $A \cap B = \varnothing$. Для них

$$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \qquad (2)$$

Узагальненням означення (1) є такі означення (геометричні ймовірності)

Гра в „рулетку": маємо круг, довжина кола якого = 1 м




нанесемо шкалу на коло

в центр круга закріпимо стрілку, яка може обертатися і вказувати на якусь точку (результат – число від 0 до 1)

Тут простір елементарних подій $\Omega = [0, 1]$

$A \subset \Omega \Rightarrow$ $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{"довжина дуги } A\text{"}}{\text{"довжину дуги } \Omega\text{"} = 1}$ (3)

Пр $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, то ймовірність "довжини" буде "площа".