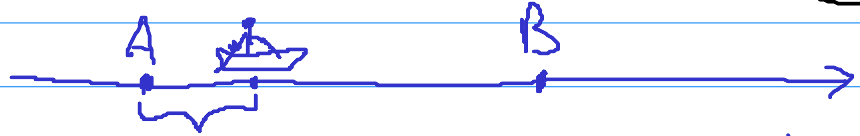
Лекція 1 Стохастичні диференціальні рівняння

$$\underbrace{3\,\text{кр} \times 10б + 2\,\text{кол} \times 10б}_{\text{семестр}} + \underbrace{\text{ДП}(25б) + \text{ДТ}(25б)}_{\text{екзамен}} = 100б$$

$\approx 7б$ кр $+ 3б$ ДЗ

Якщо ≥ 20, то можна ДП $= \frac{5}{6}$.

Пр.



$\eta(t)$ – відстань від т. A до надувного човна в час t

Задача Знайти закон руху човна, якщо він вийшов з т. A в час $t=0$ і рухається зі швидкістю $\mu(t)$.

Розв.

$\eta'(t)$ - швидкість

$$\eta'(t) = u(t) \quad (1)$$

$$\eta(0) = 0 \quad (2)$$

(1) - звичайне диф. р-ня (ЗДР)

(2) - початкова умова

(1)+(2) - задача Коші (з. К.)

$$(1) \Rightarrow \quad \eta(t) = \underbrace{\int_0^t u(\tau)\,d\tau + C}_{\text{загал. вигляд первісної}} \quad (3) \Rightarrow (2)$$

$$\Downarrow$$

$$\eta(0) \overset{(2)}{=} 0$$

$$\eta(0) \overset{(3)}{=} \int_0^0 u(\tau)\,d\tau + C = 0 + C = C$$

$$\Leftarrow \quad C = 0 \quad \longleftarrow (3) \longleftarrow$$

$$\boxed{\eta(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau} \quad (4) \text{ - р-ок з. К. (1)-(2).}$$

Задача умова та сама але давайте врахуємо в моделі вітер = випадковий чинник. Тоді замість (~e) отримаємо

$$\eta'(t) = \mu(t) + \underbrace{\sigma(t)}_{\substack{\text{звичайна}\\ \text{ф-ція}}}\cdot\underbrace{\xi(t)}_{\text{„білий шум"}} \qquad (5)$$

$\sigma: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$

„білий шум" = „випадкова величина" = „випадковий процес"

$\xi: \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$

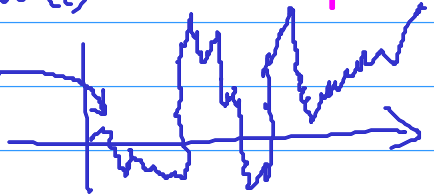
Ω — простір елементарних подій

Білий шум це об'єкт, який „має вигляд"

$$\xi(t) = \frac{dW(t)}{dt} \qquad (6)$$

це „похідна" від вінерівського процесу $W(t)$

← графік $W(t)$



(6) → (5)

$$\eta'(t) = \mu(t) + \sigma(t)\,\frac{dW(t)}{dt}$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \mu(t) + \sigma(t)\,\frac{dW(t)}{dt} \quad \Big|\cdot dt$$

$$\begin{cases} d\eta(t) = \mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t) & (7) \\ \eta(0) = 0 & (2) \end{cases}$$

(7) – стохастичне диф. р-ння (СДР)

стохастична задача Коші СЗК

Аналогічно як (4), отримаємо розв'язок (7) у вигляді

$$\boxed{\eta(t) = \int_0^t \mu(\tau)\,d\tau + \int_0^t \sigma(\tau)\,dW(\tau)} \quad (8)$$

– р-ок СЗК (7), (2)

Невідомі речі

1) Що таке $W(t)$? $\longrightarrow$ $W(t)$ – вінерівський процес

це ф-ція двох змінних

$$W(\omega, t) = W(t) = W$$

ω – випадкова змінна, t – час

і володіє властив.:

1) $W(0)=0$ з ймовірністю 1
2) $\mathbb{M}(W(t))=0 \quad \forall t$
3) $\mathbb{M}(W^2(t))=t \quad \forall t$

2) Що таке $dW(t)$? $\longrightarrow$ стохастичний диференціал W

3) Що таке $\int_0^t m(\tau)d\tau$? $\longrightarrow$ інтеграл Бохнера

4) Що таке $\int_0^t \sigma(\tau)dW(\tau)$? $\longrightarrow$ інтеграл Пелі-Вінера-Зигмунда

інтеграл Іто

Коли в нас буде ф-ція $\eta = \eta(\omega, t)$,

ω - випадкова змінна, $\omega \in \Omega$ - простір елементарних подій

t - не випадкова $\equiv$ детермінована змінна.

Якщо ф-ція не залежить від ω, то її називатимемо детермінованою ф-цією.

Якщо ф-ція залежить від ω, то — випадковою ф-цією.

Лекція 2

Розділ 1 Початкові відомості з аналізу та теорії інтегрування

1.1. Лінійні векторні простори

Озн. Непорожня множина X назив. лінійним векторним простором (над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$), якщо $\forall\, x, y \in X$ визначено операцію „+", тобто елемент $x+y \in X$ та $\forall\, x \in X$ та $\lambda \in \mathbb{R}$ визначено операцію „$\cdot$", тобто елемент $\lambda \cdot x \in X$ та:

1) $\forall\, x, y \in X \quad x+y = y+x$
2) $\forall\, x, y, z \in X \quad (x+y)+z = x+(y+z)$
3) $\exists\, 0 \in X \ \forall\, x \in X \quad x+0 = x$
4) $\forall\, x \in X \ \exists\, -x \in X : \quad x+(-x) = 0$ $\qquad x - x = 0$

5) $\forall x \in X \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

6) $\forall x \in X \quad 1 \cdot x = x$

7) $\forall x \in X \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

8) $\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

<u>Озн.</u> Нормою на ЛВП X називається ф-ція $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^1$ така, що

а) $\forall x \in X \quad \|x\| \geq 0$; $\quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

б) $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

в) $\forall x, y \in X \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

<u>Озн.</u> Нормованим простором назив пара $\{X, \|\cdot\|\}$

ЛВП $\quad$ норма

$\|x\| = \|x\|_X = \|x; X\|$ — позначення норми $x \in X$

Нехай дано X — норм. простір

$\forall x^0 \in X$:
$\forall R > 0$

$$B_R(x^0) = \{ x \in X \mid \|x - x^0\|_X < R \}$$

куля в просторі X радіуса R з центром в т. x^0.

<u>Озн</u> Послідовність елементів $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ назив.

- обмеженою, якщо $\exists\, C > 0 : \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B_C(0)$
- збіжною, якщо $\exists\, x \in X$ $\lim\limits_{k \to \infty} \|x_k - x\|_X = 0$

  (пишемо $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} x$ в просторі X)
- фундаментальною, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ $\forall k, p \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$

$$\|x_{k+p} - x_k\|_X < \varepsilon$$

Твердження 1.1. 1) Всі збіжні послідовності в нормованому просторі є обмеженими та фундаментальними

2) Якщо $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ в X, то $\|x_k\|_X \xrightarrow[k\to\infty]{} \|x\|_X$ в $\mathbb{R}^1$

без дов

Озн. Нормований простір назив банаховим або повним простором якщо всі фундаментальні послідовності є збіжними

$C[a,b]$ – ЛВП неперервних на $[a,b]$ функцій $-\infty < a < b < +\infty$

$$\|f\|_1 = \|f; C[a,b]\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

$$\|f\|_2 = \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Тоді $\{C[a,b], \|\cdot\|_1\}$ – банаховий, $\{C[a,b], \|\cdot\|_2\}$ не є банахов.

Озн. Скалярним добутком на ЛВП H назив ф-ція двох змінних $(\cdot,\cdot)_H : H\times H \to \mathbb{R}^1$ яка задов умови

1) $\forall x,y\in H \qquad (x,y)_H = (y,x)_H$

2) $\forall x,y,z\in H \qquad (x+y,z)_H = (x,z)_H + (y,z)_H$

3) $\forall x,y\in H \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}^1 \qquad (\lambda x,y)_H = \lambda\cdot(x,y)_H$

4) $\forall x\in H \qquad (x,x)_H \geqslant 0 \; ; \qquad (x,x)_H = 0 \iff x=0$

Озн. Гільбертовим простором H назив пара $\{H,(\cdot,\cdot)_H\}$ така, що H є банаховим простором стосовно норми

$$\|x\|_H = |x|_H = \sqrt{(x,x)_H}$$

Нерівність Коші - Буняковського

$\forall x, y \in H \qquad (x, y)_H \leq |x|_H \cdot |y|_H$

Позначення: якщо розглядаємо простір $\mathbb{R}^n$, то

$(x, y) = (x, y)_{\mathbb{R}^n} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n$, де

$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$|x| = |x|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

1.2. Вимірні простори і теорія інтегрування в них

Нехай $X \neq \varnothing$ – деяка множина. Тоді 2^X – це множина всіх підмножин X

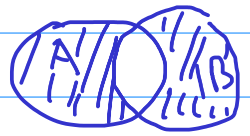
<u>Пр</u> $X = \{1, A\}$ $\qquad 2^X = \{\varnothing, \{1\}, \{A\}, \{1, A\}\}$

число $\quad$ буква

$A, B \in 2^X$ то $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \times B$, – відпов. операції над множинами

перетин $\quad$ об'єднання $\quad$ різниця $\quad$ декартів добуток

симетрична різниця $\quad A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



Нехай $a, b \in \mathbb{R}^1$: $-\infty < a < b < +\infty$

<u>Озн.</u> Множина $\langle a, b \rangle$ називається скінченним проміжком якщо вона співпадає з однією з множин

$$[a, b], \quad (a, b), \quad [a, b), \quad (a, b]$$

<u>Озн</u> Мірою (або довжиною) скінченного проміжка $\langle a, b \rangle$ назив число $b - a$.

$A \subset \mathbb{R}^1$ – обмежена множина

<u>Озн.</u> Зовнішньою мірою A назив число

$$\mu^*(A) = \inf \sum_i (b_i - a_i)$$

де інф. береться по всіх обʼєднаннях скінченної або зліченої к-ті скінченних проміжків, які покривають A

$$\left(A \subset \bigsqcup_i \langle a_i, b_i \rangle \right)$$

$A \sqcup B$ - диз'юнктне об'єднання A та B, тобто це $A \cup B$ але за умови, що $A \cap B = \varnothing$.

Озн Обмежена множина $A \subset \mathbb{R}^1$ назив вимірною за Лебегом, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує така множина $E \subset \mathbb{R}^1$, що

1) $\mu^*(A \triangle E) < \varepsilon$;

2) E - є об'єднанням скінченної кількості скінченних проміжків, що попарно не перетинаються

Мірою Лебега цієї множини A назив число $mes_1 A = \mu^*(A)$.

Озн. Паралелепіпедом в $\mathbb{R}^n$ назив. декартів добуток скінченних проміжків, тобто

$$P = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n \rangle$$

Міроно $\mathbb{R}$ назив число $\prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$

або об'ємом

Аналогічно як в $\mathbb{R}^1$ вводимо поняття вимірної за Лебегом множини в $\mathbb{R}^n$ та міри Лебега mes_n в $\mathbb{R}^n$ (замість „скінченний проміжок" говоримо „паралелепіпед")

$\mathcal{L}(G)$ – множина всіх вимірних за Лебегом підмножин деякої множини $G \subset \mathbb{R}^n$

Лекція 3 Озн Сім'я множин $\mathcal{R} \subset 2^X$ $\quad$ $\boxed{X \neq \emptyset}$
назив півкільцем, якщо
1) $\emptyset \in \mathcal{R}$
2) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$
3) $\left.\begin{array}{l} A_1, A \in \mathcal{R} \\ A_1 \subset A \end{array}\right\} \Rightarrow \exists A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{R}:$

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j$$

Пр 1. $X = [a, b]$ $\quad -\infty < a < b < +\infty$
Нехай $\mathcal{I}_a^b$ - множина всіх півінтервалів $[\alpha, \beta) \subset X$
де $\alpha \leq \beta$
Тоді $\mathcal{I}_a^b$ - півкільце

2) Нехай $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$. Тоді множина $\mathcal{P}(G)$ всіх паралелепіпедів $P \subset G$ теж є півкільцем.

<u>Озн</u> Сім'я множин $\Sigma \subset 2^X$ називається σ-алгеброю якщо

1) $\varnothing \in \Sigma$, $X \in \Sigma$

2) Разом з $A, B, A_1, \dots, A_i, \dots$ до Σ належать множини

$$A \setminus B, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Сім'ї $\mathcal{R}_1$ та $\mathcal{R}_2$ можна порівнювати

Якщо $A \in \mathcal{R}_1 \Rightarrow A \in \mathcal{R}_2$, то $\mathcal{R}_1$ менше за $\mathcal{R}_2$

$\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ а $\mathcal{R}_2$ більше за $\mathcal{R}_1$

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}(G)$ – півкільце напрямл.

<u>Озн</u>. Найменшу σ-алгебру, що містить $\mathcal{P}(G)$ позначимо $\mathcal{B}(\mathcal{P}(G))$ (або просто $\mathcal{B}(G)$) і назив. борелівською σ-алгеброю множин з G. Її елементи назив борелівськими підмнож. G.

<u>Пр</u> $n=1$, $G=\mathbb{R}^1$, то до $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ входять

$\{a\}$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $[a,b]$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$

Пр $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}(G)$ — вимір. за Лебегом підмножини.

$\mathcal{L}(G)$ — є σ-алгеброю,
всі відкриті і всі замкнені підмножини G містяться в $\mathcal{L}(G)$

$\mathcal{B}(G) \subset \mathcal{L}(G)$.

Нехай $\mathcal{R} \subset 2^X$

Озн. Ф-ція множин $\mu: \mathcal{R} \to \mathbb{R}^1$ назив мірою, якщо

1) $\mathcal{R}$ — півкільце;

2) $\forall A \in \mathcal{R}$ $\mu(A) \geq 0$;

3) $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ $\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$

(скінченна адитивність)

Півкільце R з мірою μ на ньому познач R_μ.

Нехай R_μ та R_ν - два півкільця зі своїми мірами

<u>Озн</u> Декартовим добутком мір μ та ν назив ф-ція $\mu\times\nu$ така, що

$$(\mu\times\nu)(S) = \inf\left\{ \sum_i \mu(A_i)\cdot\nu(B_i) \;\middle|\; \begin{array}{l} A_i\in R_\mu \\ B_i\in R_\nu \\ S\subset\bigcup_i A_i\times B_i \end{array} \right\}$$

<u>Тв 1.2.</u> Якщо $A\in R_\mu$, $B\in R_\nu$, то множина $A\times B$ є вимірною за мірою $\mu\times\nu$ та

$$(\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A)\cdot\mu(B)$$

Пр. Міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ є n-вим декартовим добутком міри Лебега mes_1

Зауваж. $\emptyset = \emptyset \sqcup \emptyset \Rightarrow \mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$

і тому $\mu(\emptyset) = 0$.

Озн Міра $\mu : \mathcal{R}_\mu \to \mathbb{R}^1$ називається повною якщо

$$\left.\begin{matrix} A \in \mathcal{R}_\mu \\ \mu(A) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{ \forall B \subset A \quad \begin{matrix} 1)\ B \in \mathcal{R}_\mu \\ 2)\ \mu(B) = 0 \end{matrix} \right.$$

Озн Міра $\mu : \mathcal{R}_\mu \to \mathbb{R}^1$ називається σ-адитивною (злічено-адитивною), якщо для всіх множин $A_1, \dots, A_i, \dots \in \mathcal{R}_\mu$

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Озн Міра $\mu : R_\mu \to \mathbb{R}^1$ назив скінченною мірою, якщо 1) $X \in R_\mu$; 2) $\mu(X) < +\infty$

Озн Міра $\mu : R_\mu \to \mathbb{R}^1$ назив σ-скінченною мірою, якщо існують такі $X_1, \ldots, X_i, \ldots \in R_\mu$:

1) $\mu(X_i) < +\infty \quad \forall i \in \mathbb{N}$

2) $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$

$$\boxed{\mu(X) \simeq +\infty}$$

Пр Міра Лебега mes_n є повною, σ-адитивною, σ-скінченною мірою в $\mathbb{R}^n$. І не є скінченною.

Озн. Міра $\hat{\mu} : \mathcal{R}_{\hat{\mu}} \to \mathbb{R}^1$ називається продовженням міри $\mu : \mathcal{R}_\mu \to \mathbb{R}^1$ якщо

1) $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{R}_{\hat{\mu}}$ (тобто $\mathcal{R}_{\hat{\mu}}$ більше за $\mathcal{R}_\mu$)

2) $\forall A \in \mathcal{R}_\mu : \quad \mu(A) = \hat{\mu}(A)$

Міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ – це продовження міри паралелепіпедів з $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ на σ-алгебру $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ вимірних за Лебегом множин.

Озн Трійку (X, Σ_μ, μ) назив вимірним простором, якщо

$X \neq \varnothing$ – деяка множина, $\Sigma_\mu \subset 2^X$ є σ-алгеброю підмножин X,

μ є σ-адитивною, σ-скінченною мірою, яка є продовженням на Σ_μ деякої міри μ_1, що задана на певному півкільці $R_{\mu_1} \subset \Sigma_\mu$.

<u>Пр</u> $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), mes_n)$ - вимірний простір.

Лекція 4

(X, Σ_μ, μ) – вимірний простір

X – непорож. множ.

Σ_μ – σ-алгебра

μ – міра σ-адитивна, σ-скінченна

Пр $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), mes_n)$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ – вимірні за Лебегом мн.

mes_n – міра Лебега

Озн. Ф-ція $f : X \to \mathbb{R}$ назив. вимірною стосовно міри μ якщо $\forall c \in \mathbb{R}$ прообраз проміжку $(-\infty, c)$ належить Σ_μ

Множину всіх вимірних ф-цій познач. $M(\Sigma_\mu)$ або $M(X)$.

Пр Характеристична ф-ція вимірних множин є вимірною

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus A \end{cases}, \quad A\text{- вимірна відносно } X$$

Пр При розгляді $\mathbb{R}^n$ з мірою Лебега позначатимемо $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ чи $\mathcal{M}(G)$, де $G \subset \mathbb{R}^n$ множини всіх вимірних за Лебегом ф-цій

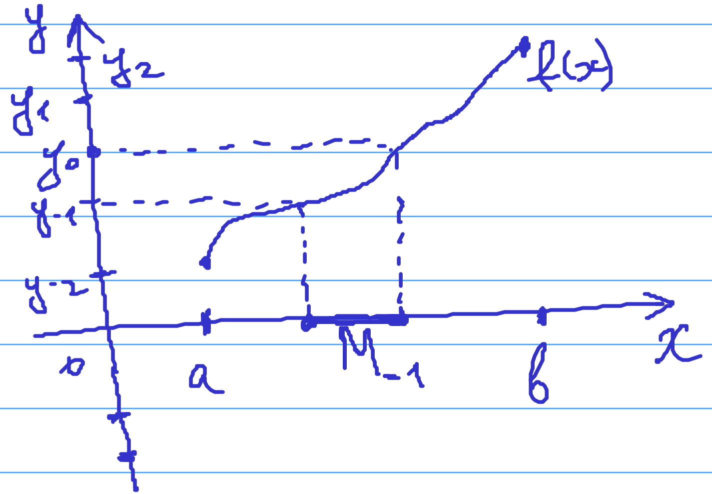
Тв. 1.3 Якщо ф-ція $f: X \to [0, +\infty)$ є μ-вимірною, то існують такі μ-вимірні множини $A_1, A_2, \ldots,$ що

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}$$

Інтеграл по мірі

Нехай (X, Σ_μ, μ) - вимір. прост.

1) Нехай $\mu(X) < +\infty$, $f \in M(\Sigma_\mu)$ - обмежена ф-ція.



Розбиваємо множину значень f на інтервали

$$\ldots < y_{-2} < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$$

$$M_i = \{x \in X \mid y_i \le f(x) < y_{i+1}\},$$

$i \in \mathbb{Z}$

f - вимірна $\Rightarrow$ $M_i \in \mathcal{L}(X)$

Виберемо $\forall i \in \mathbb{Z}$ точку $\eta_i \in [y_i, y_{i+1})$

Складаємо інтегральну суму $S_\mu = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} \eta_i \mu(M_i)$

записано тут нескінченну суму. Проте f – обмежена ф-ція а тому ця сума має скінченну к-ть ненульових доданків.

<u>Озн.</u> Ф-ція $f: X \to \mathbb{R}$ називається μ-інтегровною а число $J = \int\limits_X f\,d\mu$ називається інтегралом f по мірі μ, якщо

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall$ розбиття $\forall$ вибраних точок:

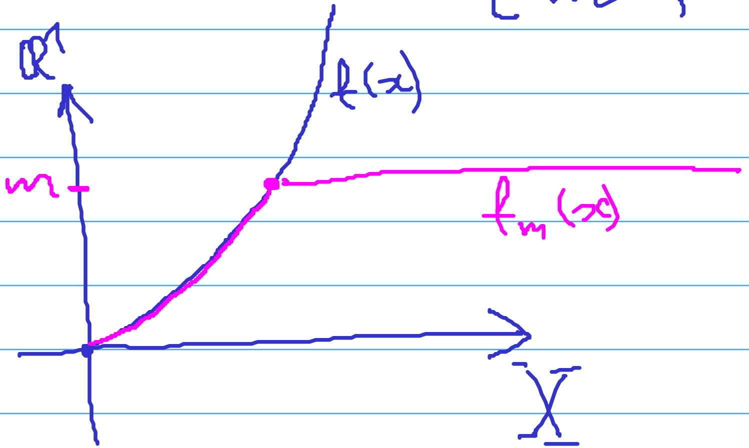
$$\sup_i (y_{i+1} - y_i) < \delta \Rightarrow |J - S_\mu| < \varepsilon$$

В частковому випадку $X = [a, b]$ $(a < b)$ замість $\int\limits_{[a,b]} f\,d\mu$ традиційно пишуть $\int\limits_a^b f\,d\mu$ або $\int\limits_a^b f(x)\,\mu(dx)$.

2) Нехай $\mu(X) < +\infty$, $f \in M(\Sigma_\mu)$ – необмежена, $f \geq 0$.

Розглянемо послідовність зрізаючих для f функцій

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq f(x) \leq m, \\ m, & f(x) > m, \end{cases} \quad x \in X$$



Озн.

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{m \to +\infty} \underbrace{\int_X \overbrace{f_m}^{\text{обмежена ф-ція}} d\mu}_{\text{інтеграл означено в п. 1.}}$$

3) Нехай $\mu(\overline{X}) = +\infty$, $f \in M(\Sigma_\mu)$ – необмежена, $f \geq 0$.

В нас (X, Σ_μ, μ) – вимірний простір $\Rightarrow$ μ – σ-скінченна міра

$\Downarrow$

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \text{ де } X_1 \subset X_2 \subset \ldots\ldots; \ \mu(X_i) < +\infty, \ i \in \mathbb{N}.$$

Озн.

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{i \to +\infty} \int_{X_i} f \, d\mu$$

інтеграл введено в п. 2.

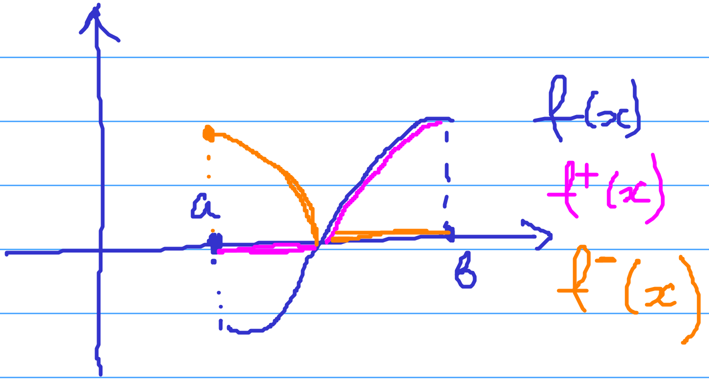
міра скінч.

4) Нехай $\mu(X) \le +\infty$, $f \in M(\Sigma_\mu)$ – (не)обмежена ф-ція яка може приймати значення обох знаків.

Нехай $f^{\pm} = \max\{\pm f, 0\}$

Зрозуміло, що $f = f^+ - f^-$

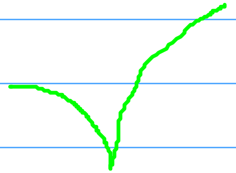
$f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$



Озн.

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \overbrace{f^+ d\mu}^{\geq 0} - \int_X \overbrace{f^- d\mu}^{\geq 0}$$

взято з попередніх пунктів



__Зауваження__ Іноді допускається рівність $\int\limits_X f d\mu = +\infty$ але якщо кажемо, що f - інтегровна, то це означає, що інтеграл існує і є скінченним.

Всі варіанти інтегралу по „всьому простору X" ми розглянули. Тепер інтеграл по множині:

$A \in \Sigma_\mu$, χ_A - характеристична ф-ція A.

__Озн.__ $$\int\limits_A f d\mu = \int\limits_X f \cdot \chi_A \, d\mu$$

Можна переконатися, що інтеграл введено коректно і він володіє властивостями:

$\mathbf{1}^o$) (лінійність) якщо $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\int\limits_X (\alpha f_1 + \beta f_2)\, d\mu = \alpha \int\limits_X f_1\, d\mu + \beta \int\limits_X f_2\, d\mu$;

$\mathbf{2}^o$) якщо $f \geq 0$ на X, то $\int\limits_X f\, d\mu \geq 0$.

$\mathbf{3}^o$) якщо $X = [a, b]$ і $c \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f\, d\mu = \int\limits_a^c f\, d\mu + \int\limits_c^b f\, d\mu$;

Твердження 1.4. *Функція f є μ-інтегровною тоді і тільки тоді, коли функція $|f|$ є μ-інтегровною; тоді*

$$\left|\int\limits_X f\, d\mu\right| \leq \int\limits_X |f|\, d\mu. \tag{1.11}$$

$b < a \Rightarrow \int\limits_a^b f\, d\mu = -\int\limits_b^a f\, d\mu$

1.3. Основні простори детермінованих функцій

Нехай $n \in \mathbb{N}$ – фіксоване число, $G \subset \mathbb{R}^n$ – деяка множина, $\mathcal{L}(G)$ – множина всіх вимірних за Лебегом підмножин G, $\mathrm{mes}(A)$ – міра Лебега множини $A \in \mathcal{L}(G)$, $\mathcal{M}(G)$ – множина вимірних стосовно $\mathcal{L}(G)$ функцій.

|A|
міра
Лебега

Казатимемо, що якась властивість виконується майже скрізь (м.с.) на G або майже для всіх (м.д.в.) $x \in G$, якщо вона виконується на $G \setminus A$, де $A \in \mathcal{L}(G)$ і $\mathrm{mes}(A) = 0$.

Приклад. $f(x) = 0$ м.д.в. $x \in \mathbb{R}$ (те саме, що $f = 0$ м.с. на $\mathbb{R}$), якщо існує така, можливо порожня, множина $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, що

1) для всіх $x \in \mathbb{R} \setminus A$ виконується рівність $f(x) = 0$; 2) $\mathrm{mes}(A) = 0$.

Множину неперервних на G функцій позначимо через $C(G)$, тобто

$$C(G) = \left\{ u : G \to \mathbb{R} \;\middle|\; \forall\, \xi \in G \;\; u(\xi) = \lim_{G \ni x \to \xi} u(x) \right\}.$$

Відомо, що $C(G) \subset \mathcal{M}(G)$, тобто кожна неперервна функція є вимірною.

Означення. Функція $y : G \to \mathbb{R}$ називається *рівномірно неперервною на* G, якщо

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in G : \quad [|x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |y(x_1) - y(x_2)| < \varepsilon].$$

Відомо, що кожна рівномірно неперервна на G функція є неперервною на G, а протилежне твердження виконується коли G – компакт в $\mathbb{R}^n$.

Означення. Функція $y : G \to \mathbb{R}$ називається *рівномірно неперервною за Гельдером з показником* $\gamma \in (0, 1]$, якщо існує така стала $L = L(\gamma) > 0$, що

$$\forall\, x_1, x_2 \in G : \quad |y(x_1) - y(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|^{\gamma}.$$

стала Гельдера

Множину всіх рівномірно неперервних на G *за Гельдером функцій з показником*
$\gamma \in (0, 1]$ позначають $C^{0,\gamma}(G)$. Відомо, що $C^{0,\gamma}(G) \subset C(G)$.

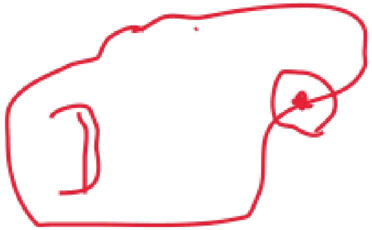
Означення. Функція $u : G \to \mathbb{R}$ задовольняє *умову Ліпшиця*, якщо $u \in C^{0,1}(G)$, тобто якщо існує така стала $L > 0$, що для всіх $x_1, x_2 \in G$ виконується нерівність

стала Ліпшиця

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$. Традиційно позначають $\mathrm{Lip}(G) := C^{0,1}(G)$.

Нагадаємо, що відкрита і зв'язна множина в $\mathbb{R}^n$ називається *областю.* Якщо $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, то замикання цієї області традиційно позначатимемо через $\overline{D}$, а її границю – через ∂D. Відомо, що $D, \overline{D}, \partial D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{mes}_n(\partial D) = 0$.

Визначимо *множини неперервно диференційовних функцій:*



$$C^1(D) = \{u \in C(D) \ \mid \ \exists\, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n} \in C(D)\},$$

$$C^1(\overline{D}) = \{u \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \ \mid \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \ \ \exists\, v_i \in C(\overline{D}) : u_{x_i}(x) = v_i(x), \quad x \in D\}.$$

Нехай $C^0(D) := C(D)$, $C^0(\overline{D}) := C(\overline{D})$. Відомо, що якщо $D \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область, то $C(\overline{D})$ та $C^1(\overline{D})$ є банаховими просторами відповідно з нормами

$$||u; C(\overline{D})|| = \max_{x \in \overline{D}} |u(x)|, \tag{1.12}$$

$$||v; C^1(\overline{D})|| = ||v; C(\overline{D})|| + \sum_{i=1}^{n} ||v_{x_i}; C(\overline{D})||. \tag{1.13}$$

Якщо D ще і опукла область, то $C^{0,\gamma}(\overline{D})$ є банаховим простором з нормою

$$||u; C^{0,\gamma}(\overline{D})|| = \sup_{x,y\in\overline{D}\ x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma},$$

Зрозуміло, що для обмеженої опуклої області D матимемо вкладення $C^1(\overline{D}) \subset \mathrm{Lip}\,(\overline{D}) \subset C^{0,\gamma}(\overline{D}) \subset C(\overline{D})$, де $\gamma \in (0,1]$.

Означення. *Носієм* неперервної функції $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ називається множина

$$\mathrm{supp}\,\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Згідно до означення носій функції є замкненою множиною. Якщо ця множина є ще і обмеженою, то зрозуміло, що $\mathrm{supp}\,\varphi$ – компакт в $\mathbb{R}^n$.

Означення. Неперервна функція $\varphi : D \to \mathbb{R}$ називається *фінітною функцією*, якщо $\mathrm{supp}\,\varphi$ – компакт в D. Множину всіх таких функцій позначатимемо $C_0(D)$.

$D = [0,1]$!

$D = (0,1)$

Нехай $C_0^1(D) = C^1(D) \cap C_0(D)$.

Розглядатимемо також деякі спеціальні множини неперервних на відрізку функцій. Нехай $-\infty < a < b < +\infty$.

Означення. Функція f називається *абсолютно неперервною на відрізку* $[a,b]$, якщо для всіх $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх наборів інтервалів (a_k, b_k), $k = \overline{1,m}$, з $[a,b]$, які не перетинаються, виконується твердження

$$\left[\ \sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{m}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon\ \right].$$

Множину всіх абсолютно неперервних на $[a,b]$ функцій позначатимемо $AC(a,b)$.

Твердження 1.5. *1)* $\mathrm{Lip}([a,b]) \subset AC(a,b)$;

2) $f \in AC(a,b)$ $\underset{\not\Longleftarrow}{\overset{\Longrightarrow}{}}$ f *– рівномірно неперервна на* $[a,b]$;

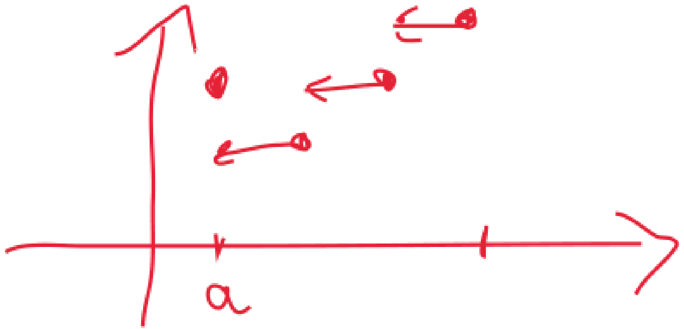
3) якщо $f \in AC(a,b)$, *то майже для всіх* $x \in (a,b)$ *існує* $f'(x)$ *– класична похідна функції* f.

Означення. *Кусково неперервною функцією* називатимемо таку функцію, яка має не більше як скінченну кількість точок розриву і вони всі є точками розриву 1-го роду.

Множину всіх кусково неперервних на $[a, b]$ функцій позначатимемо $PC(a, b)$. Зрозуміло, що $C([a, b]) \subset PC(a, b)$.

Означення ([Appl, с. 139]). Відображення $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ називають каглад-функцією
(від *cáglád*, з французск. *continue á gauche et limité á droite)* якщо в кожній точці $t \in (a, b)$ функція f є неперервною зліва та має праву границю (в кінцевих точках: при $t = a$ функція має праву границю; при $t = b$ функція є неперервною зліва).

Множину всіх каглад-функцій позначатимемо $Cag([a, b])$.



Дякую за увагу!