Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь

Навчальна дисципліна

"Оптимальне керування процесами, що описуються рівняннями з частинними похідними"

Бокало Микола Михайлович

Львів 2022

ЗМІСТ

Вступ 3

Розділ 1. Мінімізація функціоналів 4
1.1. Мінімізація коерцитивних функціоналів 4
1.1.1. Позначення і основні припущення 4
1.1.2. Характеризація мінімізуючого елемента функціонала 6
1.1.3. Узагальнення задачі 8
1.1.4. Модифікація варіаційних нерівностей 8
1.2. Пряме доведення існування та єдиності розв'язку варіаційної задачі 9

Розділ 2. Керування системами, які описуються еліптичними рівняннями 12
2.1. Керування в еліптичних варіаційних задачах 12
2.1.1. Основні позначення і припущення 12
2.1.2. Формулювання задачі опимального керування системами, що описуються еліптичними рівняннями 13
2.1.3. Приклади застосувань загальних результатів для еліптичних рівнянь 15

Розділ 3. Оптимальне керування системами, які описуються параболічними рівняннями 20
3.1. Вихідні положення 20
3.1.1. Функційні простори 20
3.1.2. Основні припущення 20
3.1.3. Задача Коші для еволюційних операторних рівнянь 21
3.2. Задача оптимального керування 21
3.2.1. Постановка задачі і основні результати. 21
3.2.2. Приклади застосувань загальних результатів для параболічних рівнянь 28

Література 21

Вступ

1. Теорія оптимального керування детермінованими системами опирається на такі вхідні положення:

1) керування v вибирається з деякої множини U_∂ (множина допустимих керувань), що є підмножиною простору U (простору керувань);

2) стан $y(v)$ керованої системи визначається для вибраного керування v як розв'язок рівняння

$$\Lambda y(v) = \Theta(v), \tag{1}$$

де Λ – заданий оператор, який визначається керованою системою (Λ – "модель" системи), $\Theta(v)$ – задана функція;

3) спостереження $z(v)$ визначається як певна функція стану $y(v)$;

4) функція вартості $J : U \to \mathbb{R}$ задається за допомогою деякої числової функції

$$(z, v) \mapsto \Phi(z, v) \geqslant 0$$

на "просторі спостережень" та просторі (множині) допустимих керувань за законом

$$J(v) = \Phi(z(v), v), \quad v \in U\,(U_\partial). \tag{2}$$

Задача оптимального керування детермінованими системами полягає у відшуканні керування $u \in U_\partial$ такого, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{3}$$

Будь-яке таке значення u називається *оптимальним керуванням.*

В теорії оптимального керування вирішують такі проблеми:

(i) отримати умови існування глобального мінімуму функціоналу J;

(ii) вивчити структуру і властивості рівнянь, які виражають ці умови (в них повинна брати участь "модель" Λ);

(iii) скласти конструктивний алгоритм чисельного знаходження апроксимацій оптимального керування u.

2. Побудова теорії оптимального керування детермінованими системами залежить від моделі Λ. Ця теорія у випадку, коли Λ є звичайним диференціальним оператором і розглядаються сформульовані вище питання ***(i)*** та ***(ii)***, викладена в книгах Болтянського, Гамклелідзе, Міщенка і Хестенеса [**?**, **?**, **?**, **?**]. Але в багаточисельних прикладних задачах через складність керованих систем в якості Λ розглядається оператор з частинними похідними. Іншими словами, досліджуються системи, для яких стан $y(v)$ визначається як розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними типу (1), що задовольняє певні крайові умови, а у випадку еволюційних рівнянь, ще і початкову умову (див. [**?**]).

Розділ 1. Мінімізація функціоналів

1.1 Мінімізація коерцитивних функціоналів

1.1.1 Позначення і основні припущення.

Нехай U – гільбертів простір над полем дійсних чисел зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\| := \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Елементи простору U позначаємо через $u, v, w, ...$

Припустимо, що задано

(i) білінійну, неперервну, симетричну форму на U, тобто відображення

$$(u,v) \to \pi(u,v)$$

простору $U \times U$ в $\mathbb{R}$, яке задовольняє умови:

• $\pi(\lambda u + \mu v, w) = \lambda\pi(u,w) + \mu\pi(v,w)$ для будь-яких дійсних чисел λ, μ і елементів u, v, w простору U,

• існує стала $C_1 > 0$ така, що

$$|\pi(u,v)| \leqslant C_1\|u\| \cdot \|v\| \tag{1.1}$$

для довільних $u, v \in U$,

• $\pi(u,v) = \pi(v,u)$ для довільних $u, v \in U$;

(ii) лінійну неперервну форму на U, тобто відображення

$$u \to L(u)$$

простору U в $\mathbb{R}$ таке, що

• $L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v)$ для довільних $u, v \in U$ і будь-яких $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

• існує стала $C_2 > 0$ така, що

$$|L(u)| \leqslant C_2||u||, \quad u \in U; \tag{1.2}$$

(iii) задано замкнену опуклу множину $U_\partial \subset U$.

Розглянемо квадратичний функціонал

$$J(v) = \pi(v,v) - 2L(v), \quad v \in U, \tag{1.3}$$

і задачу його мінімізації: знайти елементи $u \in U_\partial$ такі, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{1.4}$$

Елементи $u \in U_\partial$, для яких виконується умова (1.4) називають мінімізуючими елементами функуціоналу J. Далі цю задачу називатимемо задачею (1.4). Для розв'язування цієї задачі додатково припустимо, що форма π є коерцитивною, тобто існує стала $\mu > 0$, така, що

$$\pi(v,v) \geqslant \mu\|v\|^2, \ \ v \in U. \tag{1.5}$$

Зауваження 1.1. Нехай $U = \mathbb{R}^2$ і $\pi(u,v) = u_1v_1 + u_2v_2$ для будь-яких $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Очевидно, що π є білінійною, неперервною, симетричною і коерцитивною формою.

Зауваження 1.2. Нехай $U = L_2(\Omega)$, де Ω - область в $\mathbb{R}^n$, і $\pi(u,v) = \int\limits_\Omega uvdx$, $u, v \in L_2(\Omega)$. Легко переконатися, що π є білінійною, неперервною, симетричною і коерцитивною формою.

Теорема 1.1 *Якщо форма π задовольняє умову (1.5), то існує єдиний мінімізуючий елемент $u \in U_\partial$ функціоналу J, тобто задача (1.4) має єдиний розв'язок.*

Доведення. Спочатку доведемо існування розв'язку задачі (1.4). Відмітимо, що з (1.2), (1.3), (1.5) випливає

$$J(v) = \pi(v,v) - 2L(v) \geqslant \mu\|v\|^2 - 2C_2\|v\| = \mu(\|v\|^2 - 2\frac{C_2}{\mu}\|v\|) =$$

$$= \mu\Big(\|v\| - \frac{C_2}{\mu}\Big)^2 - \frac{(C_2)^2}{\mu} \tag{1.6}$$

для будь-яких $v \in U$.

З (1.6) маємо $J(v) \geqslant -\frac{(C_2)^2}{\mu}$ для будь-якого $v \in U$, тобто функціонал J обмежений знизу. Отже, $\inf\limits_{v\in U_\partial} J(v) > -\infty$. Звідси випливає існування мінімізуючої послідовності $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset U_\partial$ функціонала J такої, що

$$\lim_{n\to\infty} J(v_n) = \inf_{v\in U_\partial} J(v). \tag{1.7}$$

Оскільки числова послідовність $\{J(v_n)\}$ є збіжною, то вона є обмеженою, тобто існує стала M така, що $J(v_n) \leqslant M$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Звідси та з (1.6) маємо

$$\|v_n\| \leqslant C_3, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.8}$$

де $C_3 \geqslant 0$ – деяка стала.

З властивостей гільбертового простору та оцінки (1.8) випливає існування підпослідовності $\{v_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ послідовності $\{v_n\}$ такої, що

$$v_{n_j} \to u \text{ слабко в } U, \tag{1.9}$$

тобто $(v_{n_j}, w)_U \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} (u,w)_U$ для кожного $w \in U$.

Оскільки U_∂ – опукла і замкнена множина в гільбертовому просторі, то U_∂ є слабко замкненою, а отже, $u \in U_\partial$. Тепер зауважимо, що функціонал J слабко півнеперервний знизу на U (іншими словами, півнеперервний знизу в слабкій топології), тобто для довільної точки $v_0 \in U$ і будь-якої послідовності $\{\widetilde{v}_n\}$, яка слабко збігається до v_0, маємо $\underline{\lim}_{n\to\infty} J(\widetilde{v_n}) \geqslant J(v_0)$. Справді, з неперервності квадратичного функціоналу π випливає його слабка півнеперервність знизу, а з неперервності лінійного функціоналу L випливає його слабка неперервність. Отже, маємо $\lim\limits_{j\to\infty} J(v_{n_j}) \geqslant J(u)$. Звідси, враховуючи (1.7), випливає $J(u) \leqslant \inf J(v)$, $v \in U_\partial$, що дає рівність

$$J(u) = \inf_{v\in U_\partial} J(v).$$

Отже, існування розв'язку задачі (1.4), тобто задачі мінімізації функціонала J на U_∂ доведено.

Встановимо єдиність розв'язку нашої задачі. Спочатку зауважимо, що функціонал $v \to \pi(v,v)$ – строго опуклий, тобто для будь-яких елементів $v_1, v_2 \in U, v_1 \neq v_2$, та довільного числа $\theta \in (0;1)$ маємо нерівність

$$\pi(\theta v_1 + (1-\theta)v_2, \theta v_1 + (1-\theta)v_2) < \theta\pi(v_1,v_1) + (1-\theta)\pi(v_2,v_2). \tag{1.10}$$

Справді, в силу білінійності та симетричності форми π отримаємо

$$\pi(\theta v_1 + (1-\theta)v_2, \theta v_1 + (1-\theta)v_2) = \theta^2\pi(v_1,v_1) + 2\theta(1-\theta)\pi(v_1,v_2) + (1-\theta)^2\pi(v_2,v_2). \tag{1.11}$$

З умови (1.5) маємо

$$0 < \pi(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = \pi(v_1 v_2) - 2\pi(v_1, v_2) + \pi(v_2, v_2),$$

звідси

$$2\pi(v_1, v_2) < \pi(v_1, v_1) + \pi(v_2, v_2).$$

Звідси та з лінійності L легко отримуємо (1.10). На підставі (1.10) робимо висновок, що функціонал J є строго опуклим.

Єдиність роз'язку задачі мінімізації функціоналу J доведемо від супротивного. Нехай $u_1, u_2 \in U_\partial, u_1 \neq u_2$, такі що

$$J(u_1) = J(u_2) = inf J(v), \quad v \in U_\partial.$$

Оскільки U_∂ – опукла множина, то $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ є елементом U_∂. Зі строгої опуклості функціонала J при $\theta = \frac{1}{2}$ випливає

$$J\Big(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2\Big) < \frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2) = \inf_{v \in U_\partial} J(v).$$

Отримали суперечність, що доводить єдиність розв'язку даної задачі. □

Зауваження 1.3. Можна послабити умову теореми 1.1, зокрема, вважати, що J – довільний функціонал (не обов'язково вигляду (1.3)), який задовольняє умови: $\lim\limits_{\|v\| \to \infty} J(v) = +\infty$, J – обмежений знизу (тобто існує стала C_4 така, що $J(v) \geqslant C_4$ для всіх $v \in U$) і слабко півнеперервний знизу. Цього достатньо для доведення існування розв'язку. Більше того, можна вважати, що функціонал J визначений тільки на U_∂. Якщо множина U_∂ – обмежена, то від умови $\lim\limits_{\|v\| \to \infty} J(v) = +\infty$ можна відмовитись. Строга опуклість функціоналу потрібна для доведення єдиності розв'язку.

1.1.2 Характеризація мінімізуючого елемента функціонала J.

Правильним є таке твердження.

Теорема 1.2. *Якщо виконуються умови теореми 1.1, то мінімізуючий елемент $u \in U_\partial$ характеризується нерівністю*

$$\pi(u, v - u) \geqslant L(v - u) \qquad \forall v \in U_\partial, \tag{1.12}$$

тобто елемент u множини U_∂ є мінімізуючим елементом фунціонала J тоді і лише тоді, коли виконується нерівність (1.12).

Доведення. (Необхідність) Нехай $u \in U_\partial$ – мінімізуючий елемент функціоналу J, тобто $J(u) = \inf\limits_{v \in U_\partial} J(v)$. Тоді

$$J(u) \leqslant J(u + \theta(v - u)) \ \ \forall v \in U_\partial \ \ \forall \theta \in (0; 1),$$

а отже,

$$\frac{J(u + \theta(v - u)) - J(u)}{\theta} \geqslant 0, \quad v \in U_\partial \ \ \forall \theta \in (0; 1). \tag{1.13}$$

Перейдемо в (1.13) до границі при $\theta \to 0+$. У результаті отримаємо

$$J'(u) \cdot (v - u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in U_\partial. \tag{1.14}$$

Тут $J'(u) : U \to \mathbb{R}$ – функціонал, який називається похідною J за Гато, а $J'(u) \cdot \varphi$ позначає дію функціонала $J'(u)$ на елемент $\varphi \in U$.

Обчислимо $J'(u)\cdot\varphi$. За означенням похідної Гато маємо

$$J'(u)\cdot\varphi=\lim_{\alpha\to 0}\frac{J(u+\alpha\varphi)-J(u)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\pi(u+\alpha\varphi,u+\alpha\varphi)-2L(u+\alpha\varphi)-\pi(u,u)+2L(u)}{\alpha}=$$

$$=2\pi(u,\varphi)-2L(\varphi). \tag{1.15}$$

Отже, з (1.14), (1.15) при $\varphi=v-u$ отримаємо нерівність (1.12).

(Достатність) Нехай виконується нерівність (1.12), тобто (1.14) для заданого функціоналу J (див. (1.13)). Оскільки функціонал $v\to J(v)$ опуклий, тобто виконується нерівність

$$J(\theta v+(1-\theta)w)\leqslant\theta J(v)+(1-\theta)J(w)$$

для будь-яких $v,w\in U$ і $\theta\in[0,1]$, то маємо

$$\theta(J(v)-J(w))\geqslant J(\theta v+(1-\theta)w)-J(w)=J(w+\theta(v-w))-J(w). \tag{1.16}$$

Поділимо нерівність (1.16) на $\theta\in(0,1)$ і перейдемо до границі при $\theta\to 0+$. У результаті отримаємо нерівність

$$J(v)-J(w)\geqslant J'(w)(v-w).$$

Звідси здобуваємо

$$J(v)\geqslant J(w)+J'(w)(v-w) \tag{1.17}$$

для будь-яких $v,w\in U$. В нерівності (1.17) покладемо $w=u$ і використаємо (1.14). Тоді отримаємо $J(v)\geqslant J(u)$ для будь-якого $v\in U_\partial$, а це означає, що u – мінімізуючий елемент функціоналу J. Теорему доведено. □

Зауваження 1.4. Нерівності вигляду (1.12) чи (1.14) називають варіаційними нерівностями. Це поняття можна узагальнити так. Нехай $A:U\to U'$ – деякий оператор. Розглянемо задачу: знайти елемент $u\in U_\partial$ такий, що

$$A(u)\cdot(v-u)\geqslant 0\quad\forall v\in U_\partial.$$

Зауваження 1.5. Нехай U – гільбертів простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Припустимо, що $\pi:U\times U\to\mathbb{C}$ – півторалінійна, неперервна, антисиметрична і коерцитивна форма, тобто форма, яка задовольняє всі умови, які були раніше вказані в (i), крім умови симетрії, замість якої маємо умову

$$\pi(u,v)=\overline{\pi(v,u)}\ \ \forall u,v\in U.$$

Тоді правильною є теорема 1.1 і мінімізуючий елемент характеризується нерівністю

$$\mathrm{Re}\ \pi(u,v-u)\geqslant\ \mathrm{Re}\,L(v-u),\ v\in U_\partial,$$

де через $\mathrm{Re}\,\xi$ позначено дійсну частину числа $\xi\in\mathbb{C}$.

Зауваження 1.6. Якщо $U_\partial=U$, то нерівність (1.12) еквівалентна тотожності

$$\pi(u,\varphi)=L(\varphi)\quad\forall\varphi\in U. \tag{1.18}$$

Справді, візьмемо в нерівності (1.12) спочатку $v=u+\varphi$, а потім $v=u-\varphi$, де φ – довільний елемент з U. У результаті отримуємо рівність (1.18). З іншого боку, якщо покласти в (1.18) $\varphi=v-u$, то матимемо (1.12).

Зауваження 1.7. Нехай U_∂ – опуклий замкнений конус, тобто опукла замкнена множина, яка володіє властивістю: для довільного елемента $v\in U_\partial$ і будь-якого числа

$k > 0$ елемент kv належать U_∂. Звідси легко випливає, що $0 \in U_\partial$ і $u + v \in U_\partial$ для будь-яких $u, v \in U_\partial$.

Легко переконатися, що у випадку, коли U_∂ – опуклий замкнений конус, нерівність (1.12) рівносильна системі співвідношень

$$\begin{cases} \pi(u,v) \geq L(v) & \forall\, v \in U_\partial, \\ \pi(u,u) = L(u). \end{cases} \tag{1.19}$$

Справді, те, що з (1.19) випливає (1.12), отримаємо, якщо віднімемо від нерівності рівність в (1.19). Покажемо, що з (1.12) випливає (1.19). Для цього візьмемо в (1.12) $u+v$ замість v.

У результаті отримаємо перше з співвідношень (1.19). Якщо ж покласти в (1.12) $v = 0$, то врахувавши вже отриману нерівність, матимемо друге зі співвідношень (1.19).

1.1.3 Узагальнення задачі (1.4)

Можна розглядати випадок, коли J не є обов'язково квадратичним функціоналом.

Теорема 1.3. *Нехай J – строго опуклий і диференційовний функціонал, який, коли U_∂ – необмежена множина, задовольняє умову*

$$J(v) \to +\infty \quad \textit{при} \quad \|v\| \to +\infty, \quad v \in U_\partial.$$

Тоді існує єдиний елемент $u \in U_\partial$ такий, що виконується (1.4), і він характеризується нерівністю

$$J'(u)(v-u) \geqslant 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{1.20}$$

Доведення. Досить довести слабку неперервність знизу функціоналу J, бо доведення цієї теореми практично повторює доведення теорем 1.1 і 1.2. Нехай $\{v_n\}$ – послідовність така, що $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ слабко в U і $\alpha \in (0;1)$ – довільне число. Тоді

$$J(\alpha v_n + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(v_n) + (1-\alpha)J(v).$$

Звідси маємо

$$\alpha(J(v_n) - J(v)) \geqslant J(v + \alpha(v_n - v)) - J(v).$$

Поділимо отриману нерівність на α і перейдемо до границі при $\alpha \to 0+$. У результаті отримаємо

$$J(v_n) - J(v) \geqslant J^{'}(v)(v_n - v), \tag{1.21}$$

Оскільки $J^{'}(v) \cdot (v^n - v) \to 0$ при $n \to \infty$, то звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} J(v_n) \geq J(v)$.

Теорему доведено. □

1.1.4. Модифікація варіаційних нерівностей.

Доведемо спочатку одне допоміжне твердження.

Лема 1.1. *Нехай $J : U \to \mathbb{R}$ – опуклий і диференційовний функціонал. Тоді відображення $J'(\cdot) : U \to U'$ є монотонним, тобто*

$$(J'(v) - J'(w)) \cdot (v - w) \geqslant 0 \quad \forall v, w \in U. \tag{1.22}$$

Доведення. Нехай v, w – довільні елементи з U. Як було показано при доведенні теореми 1.2. (див. нерівність (1.17)), маємо

$$J(v) - J(w) \geqslant J'(w)(v - w),$$

а отже, і

$$J(w) - J(v) \geqslant J'(v)(w - v).$$

Додавши ці дві нерівності, отримаємо $0 \geqslant (J'(w) - J'(v))(v - w)$, звідси випливає (1.22).

Лему доведено. □

Теорема 1.4. *Нехай виконуються умови теореми 1.3. Тоді нерівність (1.20) рівносильна нерівності*

$$J'(v) \cdot (v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{1.23}$$

Доведення. Покажемо, що з (1.23) випливає (1.20). Для цього покладемо в (1.23)

$$v = \theta w + (1 - \theta)u \equiv u + \theta(w - u), \text{ де } w \in U_\partial,\ \theta \in (0, 1).$$

У результаті простих перетворень матимемо

$$\theta J'(u + \theta(w - u))(w - u) \geqslant 0.$$

Поділивши цю нерівність на θ і перейшовши до границі при $\theta \to 0_+$, отримаємо $J'(u)(w - u) \geqslant 0$ для довільного $w \in U_\partial$, тобто правильність (1.20).

Тепер покажемо, що з (1.20) випливає (1.23). Справді, для довільного елемента $v \in U_\partial$ на підставі леми 1.1 випливає нерівність

$$(J'(v) - J'(u))(v - u) \geqslant 0 \quad \forall\, v \in U_\partial.$$

Звідси та з рівності

$$J'(v)(v - u) = J'(u)(v - u) + (J'(v) - J'(u))(v - u),$$

врахувавши, що на підставі (1.20) перший член правої частини даної рівності невід'ємний, отримаємо (1.23). Теорему доведено. □

Зауваження 1.8. При виконанні умов теореми 1.3 такі три твердження еквівалентні:
(i) $J(u) = \inf\limits_{v \in U_\partial} J(v)$;
(ii) $J'(u)(v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in U_\partial$;
(iii) $J'(v)(v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in U_\partial$.

1.2. Пряме доведення існування та єдиності розв'язку варіаційної задачі

Нехай U - гільбертів простір над полем дійсних чисел зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$. Припустимо, що $\pi : U \times U \to \mathbb{R}$ – білінійна і неперервна форма, а $L : U \to \mathbb{R}$ – лінійний неперервний функціонал, U_∂ – опукла замкнена множина в U.

Теорема 1.5. *Нехай виконуються вище вказані умови та, крім того, нерівність*

$$\pi(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq c\|u_1 - u_2\|^2 \ \ \forall u_1, u_2 \in U_\partial, \tag{1.24}$$

де $c = const > 0$. *Тоді існує єдиний розв'язок варіаційної нерівності*

$$u \in U_\partial : \quad \pi(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in U_\partial. \tag{1.25}$$

Доведення. Спочатку покажемо, що варіаційна нерівність (1.25) не може мати більше одного розв'язку.

Припустимо протилежне, і, наприклад, u_1, u_2 – два різні розв'язки (1.25) такі, що

$$\pi(u_1, v - u_1) \geq L(v - u_1) \quad \forall v \in U_\partial, \tag{1.26}$$

$$\pi(u_2, v - u_2) \geq L(v - u_2) \quad \forall v \in U_\partial. \tag{1.27}$$

Покладемо в (1.26) $v \equiv u_2$, а в (1.27) $v = u_1$ і додамо отримані нерівності. У результаті отримаємо

$$\pi(u_1, u_2 - u_1) + \pi(u_2, u_1 - u_2) \geq 0 \Rightarrow \pi(u_2 - u_1, u_1 - u_2) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\pi(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq 0 \Rightarrow \pi(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$$

Отримали протиріччя, що доводить наше твердження.

Тепер доведемо існування розв'язку варіаційної нерівності. Для цього використаємо теорему Банаха про нерухому точку стискуючого відображення.

Твердження 1.1(*Теорема Банаха*). *Нехай (M, ρ) – повний метричний простір і $A : M \to M$ – стискуюче відображення, тобто, $\rho(Ax_1, Ax_2) \leq k\rho(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in M$, де $k \in (0, 1)$. Тоді існує єдина нерухома точка відображення A, тобто існує єдиний елемент $x \in M$ такий, що $Ax = x$.*

Розглянемо варіаційну нерівність

$$w \in U_\partial : (w, v - w) \geq (g, v - w) - \rho(\pi(g, v - w) - L(v - w)) \quad \forall v \in U_\partial, \tag{1.28}$$

де $\rho > 0$ – деяке число, $g \in U_\partial$ – який-небудь фіксований елемент.

Ця варіаційна нерівність зводиться до (1.12), якщо покласти $\widetilde{\pi}(v, w) = (v, w)$, $\widetilde{L}(v) = (g, v) - \rho(\pi(g, v) - L(v))$, $v \in U$, $w \in U$. Очевидно, що $\widetilde{\pi}$ – білінійна, неперервна, симетрична і коерцитивна форма.

Для форми $\widetilde{\pi}$ вже доведене існування мінімізуючого елемента, оскільки, на відміну від π, вона є симетричною. Отже, існує єдиний елемент w – розв'язок (1.28), тобто, визначений оператор $S : U \to U$ такий, що $w = Sg$, $g \in U_\partial$, (кожному $g \in U_\partial$ оператор S ставить у відповідність розв'язок $w \in U_\partial$ нерівності (1.28)). Очевидно, що нерухома точка оператора S є розв'язком нерівності (1.25) (випливає з нерівності (1.28), якщо замість g і w поставити u, оскільки $Su = u$).

Залишається довести, що S – стискуючий оператор, тобто існує $k \in (0, 1)$ такий, що для будь-яких g_1, g_2 і $w_1 = Sg_1$, $w_2 = Sg_2$ маємо

$$\|w_1 - w_2\| \leq k\|g_1 - g_2\|.$$

Відомо, що

$$(w_1, v - w_1) \geqslant (g_1, v - w_1) - \rho(\pi(g_1, v - w_1) - L(v - w_1)),$$

$$(w_2, v - w_2) \geqslant (g_2, v - w_2) - \rho(\pi(g_2, v - w_2) - L(v - w_2)).$$

Покладемо в першій нерівності $v = w_2$, а в другій – $v = w_1$ і додамо отримані нерівності

$$-(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \geq -(g_1 - g_2, w_1 - w_2) + \rho\pi(g_1 - g_2, w_1 - w_2). \tag{1.29}$$

Зауважимо, що $\forall g \in U$ функціонал $v \to \pi(g, v)$ є лінійним та неперервним на U. За теоремою Ріса існує єдиний елемент Bg : $\pi(g, v) = (Bg, v)$ для кожного $g \in U$.

Легко переконатися, що B є лінійним неперервним функціоналом, який переводить U в себе (кожному елементу $g \in U$ ставить у відповідність такий елемент $Bg \in U$, що $\pi(g, v) = (Bg, v)$).

Отже, нерівність (1.29) можемо записати у вигляді

$$\|w_1-w_2\|^2 \le ((g_1-g_2)-\rho B(g_1-g_2), w_1-w_2) \Rightarrow \|w_1-w_2\|^2 \le ((I-\rho B)(g_1-g_2),(w_1-w_2)) \le$$

$$\le \|(I-\rho B)(g_1-g_2)\|\|w_1-w_2\| \Rightarrow \|w_1-w_2\| \leqslant \|(I-\rho B)(g_1-g_2)\|.$$

За означенням норми можемо записати

$$\|(I-\rho B)g\|^2 = ((I-\rho B)g,(I-\rho B)g) = \|g\|^2 - 2\rho(Bg,g) + \rho^2\|Bg\|^2 \le$$

$$= \|g\|^2 - 2\rho\pi(g,g) + \rho^2\|Bg\|^2 \le \|g\|^2 - 2\rho C\|g\|^2 + \rho^2\|B\|^2\|g\|^2 =$$

$$= (1-2\rho C + \rho^2\|B\|^2)\|g\|^2, \quad g \in U.$$

Звідси випливає, що

$$\|w_1-w_2\| \le \sqrt{1-2\rho C+\rho^2\|B\|^2}\|g_1-g_2\|.$$

Отже, вибираємо ρ таким, щоб виконувалась нерівність

$$0 < \sqrt{1-2\rho C+\rho^2\|B\|^2} < 1, \quad 0 < 1-2\rho C+\rho^2\|B\|^2 < 1. \tag{1.30}$$

Друга з нерівностей (1.30) рівносильна нерівності $\rho^2\|B\|^2 - 2\rho C < 0$, звідки $\|B\|^2\rho(\rho - \frac{2C}{\|B\|^2}) < 0$. Отже, візьмемо ρ з інтервалу $(0, \frac{2C}{\|B\|^2})$.

Очевидно, що можна ρ вибрати настільки близьким до нуля, щоб виконувалась і перша з нерівностей (1.30). Отже, S – стискуючий оператор, тобто існує нерухома точка, що гарантує існування розв'язку нерівності (1.25).

Теорему доведено. □

Зауваження 1.9. Якщо в (1.25) $U_\partial = U$, то (1.25) виконується тоді і лише тоді, коли

$$u \in U: \ \pi(u,v) = L(v) \ \ \forall v \in U. \tag{1.31}$$

Наслідок (лема Лакса-Мільграма). Нехай виконуються умови теореми 1.5 і $\pi(v,v) \ge C\|v\|^2 \ \ \forall v \in U$, де $C = \text{const} > 0$. Тоді існує і єдиний розв'язок рівняння (1.31).

Розділ 2. Керування системами, які описуються еліптичними рівняннями

2.1. Керування в еліптичних варіаційних задачах

2.1.1. Основні позначення і припущення.

Нехай V і H – гільбертові простори над полем дійсних чисел зі скалярними добутками і нормами, відповідно, $((\cdot,\cdot))$, $(\cdot,\cdot)$ та $\|\cdot\|$, $|\cdot|$.

Припустимо, що V вкладається в H неперервно і щільно, тобто $\exists\ G : V \to H$ – лінійний, ін'єктивний і неперервний оператор зі щільною в H множиною значень, зокрема $\|G(v)\| \le \|G\|_{L(V,H)}\|v\|\ \ \forall v \in V$ (неперервність), $\forall h \in H\ \forall \varepsilon > 0\ \exists v_\varepsilon \in V : |h - G(v_\varepsilon)| < \varepsilon$ (щільність множини значень G в H).

Позначимо через V' і H' спряжені відповідно до V і H простори (V' – простір лінійних неперервних функціоналів на V, аналогічно визначається H').

З наших припущень випливає, що H' вкладається в V' - неперервно і щільно.

Твердження 2.1 (*Теорема Ріса*). *Нехай X – гільбертів простір і F – довільний лінійний неперервний функціонал на X. Тоді*

$$\exists!\ w_F \in X : \ \ \langle F, v\rangle_{X'\times X} = (w_F, v)_X \ \ \forall\, v \in X,$$

причому $\|F\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{R})} = \|w_F\|_X$.

Наслідок. Існує бієктивний лінійний оператор $\Lambda_X : X \to X'$ такий, що $\|\Lambda_X v\|_{X'} = \|v\|_X \quad \forall\, v \in X$.

На підставі теореми Ріса ототожнимо простори H і H'. У результаті матимемо такі неперервні і щільні вкладення

$$V \subset H \subset V'. \tag{2.1}$$

Зауважимо, що $\langle f, v\rangle_{V'\times V} = (f, v)\ \ \forall\ f \in H$, $\forall v \in V$. Тому далі часто писатимемо (f, v) замість $\langle f, v\rangle_{V'\times V}$.

Нехай $a : V \times V \to \mathbb{R}$ – білінійна, неперервна і коерцитивна форма, тобто

$$a(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 a(v_1, w) + \lambda_2 a(v_2, w),$$
$$a(v, \mu_1 w + \mu_2 w) = \mu_1 a(v, w_1) + \mu_2 (v, w_2)$$

для будь-яких $\alpha_1, \alpha_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ і $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$, і

$$|a(v, w)| \le C_1 \|v\|\|w\| \ \ \forall\, v, w \in V, \tag{2.2}$$

$$a(v, v) \ge \alpha \|v\|^2 \quad \forall\, v \in V, \tag{2.3}$$

де C_1, α – деякі додатні сталі.

Твердження 2.2. *Нехай $f \in V'$, тоді (на підставі леми Лакса-Мільграма), існує єдиний елемент u простору V такий, що*

$$a(u, v) = (f, v) \ \ \forall\, v \in V. \tag{2.4}$$

Зауважимо, що коли в (2.4) взяти $v = u$, то матимемо

$$\alpha \|u\|^2 \le a(u, u) = (f, u) \le \|f\|_{V'}\|u\|$$

звідки

$$\|u\|_V \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V'}.$$

Відмітимо, що $\forall\ v \in V$ функціонал $w \mapsto a(v,w) : V \to \mathbb{R}$ є лінійним і неперервним, тобто елементом простору V'. Отже, можна визначити оператор $A : V \to V'$ за правилом

$$(Av, w) = a(v, w) \quad \forall\ v, w \in V. \tag{2.5}$$

Легко переконатись, що $A \in \mathcal{L}(V, V')$. Справді, лінійність оператора A базується на його означенні і білінійності форми $a(\cdot,\cdot)$.

Неперервність оператора A випливає з таких міркувань:

$$|(Av, w)| = |a(v, w)| \le C_1\|v\|\|w\| \ \ \forall\ v, w \in V \Rightarrow \|Av\|_{V'} \le C_1\|v\| \ \ \forall\ v \in V \Rightarrow \|A\|_{L(V,V')} \le C_1.$$

Також A є коерцитивним, тобто $(Av, v) \ge \alpha\|v\|^2$, бо $(Av, v) = a(v, v) \geqslant \alpha\|v\|^2$ $\forall v \in V$.

Крім того, маємо

$$\|Av\|_{V'}\|v\| \ge (Av, v) = a(v, v) \ge \alpha\|v\|^2 \Rightarrow \|Av\|_{V'} \ge \alpha\|v\| \ \ \forall\ v \in V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\ A^{-1} : V' \to V \text{ і } A^{-1} \in \mathcal{L}(V', V).$$

На підставі твердження 2.2 і (2.5) маємо

$$\forall\ f \in V' \quad \exists!\ u \in V : \quad Au = f. \tag{2.6}$$

Отже, оператор A – сюр'єктивний, а отже, A – бієкція.

Якщо в нерівності $\|Av\|_{V'} \ge \alpha\|v\|$ покласти $f \equiv Av$, то отримаємо

$$\|A^{-1}f\| \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V'}, \qquad f \in V'.$$

Зауваження 2.1. Нехай $f \in L_2(\Omega)$. Задача: знайти $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ таке, що

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u \nabla v + kuv)\, dx = \int\limits_{\Omega} fv\, dx \ \ \forall\ v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),$$

є задачею на знаходження узагальненого розв'язку задачі

$$\begin{cases} -\triangle u + ku = f \ \text{ в } \ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

де $k \in \mathbb{R}$, Ω – область в $\mathbb{R}^2$.

2.1.2. Формулювання задачі оптимального керування системами, що описуються еліптичними рівняннями

Нехай U – гільбертів простір керувань, $B \in \mathcal{L}(U, V')$ – деякий оператор.

Вважаємо, що для будь-яких $v \in U$ стан системи описується функцією $y = y(v)$, яка є розв'язком операторного рівняння

$$Ay(v) = f + Bv, \tag{2.7}$$

де $f \in V'$ - деякий елемент.

Нехай $\mathcal{H}$ – гільбертів простір спостережень, а $C \in \mathcal{L}(V, \mathcal{H})$. Скажемо, що $z(v) = Cy(v)$ – спостереження.

Введемо функцію вартості

$$J(v) = \|Cy(v) - z_0\|^2_{\mathcal{H}} + (Nv, v)_U,\ v \in U,$$

де $z_0 \in \mathcal{H}$ – деякий елемент, а $N : U \to U$ – лінійний, неперервний, симетричний і коерцитивний оператор, тобто

$$(Nv, v) \geq \nu \|v\|_U^2, \ v \in U,$$

де $\nu = \text{const} > 0$.

Нехай U_∂ – опукла замкнена підмножина в U.

Задача оптимального керування полягає у знаходженні

$$u \in U_\partial : \quad J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{2.8}$$

Дослідимо цю задачу. Із (2.7) бачимо, що $y(v) = A^{-1}(f + Bv) \equiv A^{-1}f + A^{-1}Bv$.

Позначимо $g := A^{-1}f$. Тоді $y(v) = (A^{-1}B)v + g, \ v \in U$, – афінне відображення.

Тепер перепишемо функціонал J так

$$J(v) = \|CA^{-1}Bv + Cg - z_0\|_{\mathcal{H}}^2 + (Nv, v)_U =$$

$$= \|CA^{-1}Bv\|_{\mathcal{H}}^2 + (Nv, v)_U + 2(Cg - z_0, CA^{-1}Bv)_{\mathcal{H}} + \|Cg - z_0\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Введемо позначення

$$\pi(v, w) := (CA^{-1}Bv, CA^{-1}Bw)_{\mathcal{H}} + (Nv, w)_U, \quad v, w \in U.$$

Очевидно, що π – неперервна, білінійна, симетрична і коерцитивна форма. Також позначимо $L(v) := -(Cg - z_0, CA^{-1}Bv)_{\mathcal{H}}$, $v \in U$, очевидно, що $L(v)$ – лінійна неперервна форма.

Отож, на функціонал J маємо умови, які фігурували в розділі 1. При них була доведена теорема про існування єдиного мінімізуючого елемента функціоналу J. Отже, існує і єдиний розв'язок (2.8).

Також в попередньому розділі було доведено твердження, що u – мінімізуючий елемент тоді і лише тоді, коли

$$u \in U_\partial : J'(u)(v - u) \geq 0 \ \ \forall \quad v \in U_\partial. \tag{2.9}$$

"Розшифруємо" (2.9). Для цього спочатку знайдемо $J'(v)w$, $v, w \in U$, тобто

$$J'(v)w = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J(v + \alpha w) - J(v)}{\alpha}.$$

Очевидно, що якщо покласти $h(\alpha) = J(v + \alpha w)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то $J'(v)w = h'(0)$

Зауваження 2.2.

Нехай $U = L_2(\Omega)$, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, і $J(v) = \int\limits_\Omega v^2 \, dx$, $v \in L_2(\Omega)$. Легко переконатися, що для будь-яких $v, w \in L_2(\Omega)$ і $\alpha \in \mathbb{R}$ маємо

$$J(v + \alpha w) - J(v) = \int\limits_\Omega (v + \alpha w)^2 \, dx - \int\limits_\Omega v^2 \, dx = 2\alpha \int\limits_\Omega vw \, dx + \alpha^2 \int\limits_\Omega w^2 \, dx.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{J(v + \alpha w) - J(v)}{\alpha} = 2 \int\limits_\Omega vw \, dx$$

– похідна за Гато в точці v.

Зауваження 2.3. Нехай $U = H^1(\Omega) := \{v \in L_2(\Omega) \quad | \quad v_{x_i} \in L_2(\Omega),\ i = \overline{1,n}\}$ і $J(v) = \int\limits_\Omega (|\nabla v|^2 + kv^2)\ dx$, $v \in U$. Тоді $J(v+\alpha w) - J(v) = \int\limits_\Omega (|\nabla(v+\alpha w)|^2 + k(v+\alpha w)^2 - |\nabla v|^2 - kv^2)\ dx = 2\alpha \int\limits_\Omega (\nabla v \nabla w + kvw)\ dx + \alpha^2 \int\limits_\Omega (|\nabla w|^2 + k|w|^2)\ dx$, звідки $J'(v)w = 2\int\limits_\Omega (\nabla v \nabla w + kvw)\ dx$.

Обчислимо $J'(v)w$. Маємо, поклавши $Mv := (A^{-1}B)v$, $v \in U$, такий ланцюжок рівностей

$$J(v+\alpha w) - J(v) = \|Cy(v+\alpha w) - z_0\|^2_{\mathcal{H}} + (N(v+\alpha w), v+\alpha w)_U - \|Cy(v) - z_0\|^2_{\mathcal{H}} - (Nv, v)_U =$$

$$= \|Cg + CM(v+\alpha w) - z_0\|^2_{\mathcal{H}} + (Nv, v)_U + \alpha(Nv, w)_U + \alpha(Nw, v)_U + \alpha^2(Nw, w)_U -$$

$$- \|Cg + CMv - z_0\|^2_{\mathcal{H}} - (Nv, v)_U =$$

$$= \|Cg + CMv - z_0 + \alpha CMw\|^2_{\mathcal{H}} + 2\alpha(Nv, w)_U + \alpha^2(Nw, w)_U - \|Cg + CMv - z_0\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Оскільки

$$\|Cg+CMv-z_0+\alpha CMw\|^2_{\mathcal{H}} = \|Cg+CMv-z_0\|^2_{\mathcal{H}} + 2\alpha(Cg+CMv-z_0, CMw)_{\mathcal{H}} + \alpha^2\|CMw\|^2_{\mathcal{H}},$$

то

$$J'(v)w = 2(Cg + CMv - z_0, CMw)_{\mathcal{H}} + 2(Nv, w)_U = 2(Cy(v) - z_0, CMw)_{\mathcal{H}} + 2(Nv, w)_U.$$

Враховуючи це, задачу (2.9) можна записати у вигляді:

$$u \in U_\partial : \quad (Cy(u) - z_0, C(y(v) - y(u)))_{\mathcal{H}} + (Nu, v-u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{2.10}$$

Нагадаємо, що оператором Ріса називається оператор $\Lambda : H \to H'$, визначений за правилом

$$\langle \Lambda v, w\rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} = (v, w), \quad v, w \in \mathcal{H}. \tag{2.11}$$

Якщо X, Y – банахові простори, $D \in \mathcal{L}(X, Y)$, то спряжений оператор $D^* \in \mathcal{L}(Y', X')$ визначений за правилом

$$\langle f, Dx\rangle_{Y' \times Y} = \langle D^* f, x\rangle_{X' \times X} \quad \forall x \in X, f \in Y'.$$

Перший член лівої частини нерівності (2.10) запишемо так

$$(Cy(u) - z_0, C(y(v) - y(u)))_{\mathcal{H}} = \langle \Lambda(Cy(u) - z_0), C(y(v) - y(u))\rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} =$$

$$= \langle C^*\Lambda(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u)\rangle_{V' \times V}. \tag{2.12}$$

Оскільки $A \in \mathcal{L}(V, V')$, то $A^* \in \mathcal{L}(V, V')$. Нехай $p(u) \in V$ таке, що

$$A^* p(u) = C^*\Lambda(Cy(u) - z_0).$$

Величину $p(u)$ називають спряженим станом.

Тоді з (2.12) випливають рівності

$$(Cy(u) - z_0, C(y(v) - y(u))) = \langle A^* p(u), y(v) - y(u)\rangle_{V' \times V} = \langle p(u), A(y(v) - y(u))\rangle_{V \times V'} =$$

$$= \langle p(u), B(v-u)\rangle_{V \times V'} = \langle B^* p(u), v-u\rangle_{U' \times U} == (\Lambda_U^{-1} B^* p(u), v-u)_U,$$

де $\Lambda_U : U \times U'$ – оператор Ріса.

Отже, варіаційна нерівність (2.10) еквівалентна варіаційній нерівності

$$u \in U_\partial : (\Lambda_U^{-1} B^* p(u) + Nu, v - u)_U \geq 0 \ \ \forall\, v \in U_\partial,$$

де $p(u)$ таке, що $A^* p(u) = C^* \Lambda (Cy(u) - z_0)$.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються вище зазначені умови. Для того, щоб елемент $u \in U_\partial$ був мінімізуючим елементом J, тобто оптимальним керуванням, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови*

$$\begin{cases} Ay = f + Bu, \\ A^* p = C^* \Lambda (Cy - z_0), \\ (\Lambda_U^{-1} B^* p + Nu, v - u)_U \geq 0 \ \ \forall\, v \in U_\partial. \end{cases} \tag{2.13}$$

2.1.3. Приклади застосувань загальних результатів

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$. Під $L_2(\Omega)$ розуміємо простір (класів) вимірних за Лебегом дійсних функцій на Ω, квадрат модуля яких є інтегровними функціями, тобто $L_2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} | \int\limits_\Omega |f(x)|^2\, dx < \infty\}$. Цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком $(f, g)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega fg\, dx, \ \ f, g \in L_2(\Omega)$.

Нехай $D(\Omega)$ – простір основних функцій, $D'(\Omega)$ – простір узагальнених функцій.

Оператор диференціювання: $\partial_j : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$, де $j \in \{1, ..., n\}$, вводиться за правилом

$$\langle \partial_j F, \varphi \rangle = -\Big\langle F, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big\rangle \ \ \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Побудуємо відображення $L_2(\Omega) \ni f \to F_f \in D'(\Omega)$ за правилом

$$\langle F_f, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega f\varphi\, dx, \ \ \varphi \in D(\Omega).$$

Це відображення є ін'єктивним. Ототожнимо простір $L_2(\Omega)$ з його образом при цьому відображенні, тобто з деяким підпростором $D'(\Omega)$. Далі елементи цього підпростору називаємо регулярними узагальненими функціями і позначаємо їх так само, як і елементи простору $L_2(\Omega)$.

Приймемо $H^1(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) \ | \ \partial_j f \in L_2(\Omega) \ j = \overline{1, n}\}$, тобто

$$H^1(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) \ | \ \ \forall j \in \{1, ..., n\} \ \ \exists g_j \in L_2(\Omega) : \int\limits_\Omega g_j \varphi\, dx = -\int\limits_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\}.$$

Враховуючи, що для $f \in C^1(\Omega) \subset L_2(\Omega) \subset D'(\Omega)$ її класична похідна $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ є узагальненою похідною в $D'(\Omega)$, тобто $\partial_j f = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, то далі часто писатимемо $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ або $D_j f$ замість $\partial_j f$ ($j = \overline{1, n}$).

В просторі $H^1(\Omega)$ введемо норму за правилом

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \Big(\int\limits_\Omega \Big(|v|^2 + \sum_{i=1}^n \Big| \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big|^2 \Big)\, dx \Big)^{1/2}.$$

Позначимо через $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ замикання $C_0^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ за нормою $H^1(\Omega)$. Зауважимо, що замикання $C_0^\infty \subset L_2(\Omega)$ за нормою $L_2(\Omega)$ співпадає з $L_2(\Omega)$.

Простір $H^1(\Omega)$ – гільбертів простір зі скалярним добутком $(u,v)=\int\limits_\Omega (uv+\nabla u\nabla v)\,dx$, $v,w\in H^1(\Omega)$.

Зауважимо, що вкладення $D(\Omega)\subset \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)\subset D'(\Omega)$ є щільним і неперервним.

Відомо, що коли вкладення $X\subset Y$ - щільне і неперервне, де X і Y – банахові простори, то $Y'\subset X'$ – щільно і неперервно.

Оскільки $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)$, то $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)$, де $H^{-1}(\Omega)$ - простір, спряжений до $\overset{\circ}{H}{}^1$. Елементи $H^{-1}(\Omega)$ можна трактувати як елементи $D'(\Omega)$ вигляду $F(x)=f_0(x)+\sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}$, $x\in\Omega$, де $f_k\in L_2(\Omega)$ $(k=\overline{1,n})$, причому $<F,\varphi>=\int\limits_\Omega\Big(f_0\varphi-\sum\limits_{i=1}^n f_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big)\,dx$, $\varphi\in D(\Omega)$.

Перейдемо до безпосереднього застосування отриманих раніше результатів. Покладемо $V=\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $H=L_2(\Omega)$, $V'=H^{-1}(\Omega)$, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\Gamma:=\partial\Omega$. Припустимо, що $U=\mathcal{H}=L_2(\Omega)$, B – оператор вкладення H в V', C – оператор вкладення V в H. Тоді задача оптимального керування матиме вигляд:

$L_2(\Omega)$ – простір керувань, маємо $y(v)\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ – стан системи, який визначається з рівняння

$$\text{для кожного}\quad v\in L_2(\Omega)\quad Ay(v)=f+v,$$

$f\in H^{-1}(\Omega)$, а $A:\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ – визначається білінійною формою

$$a(u,v)=\int\limits_\Omega\Big(\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x)u_{x_k}v_{x_l}+a_0(x)uv\Big)\,dx,\quad u,v\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{2.14}$$

Тут і далі a_{kl}, a_0 – вимірні за Лебегом і обмежені функції, причому

$$\sum_{k,l=1}^n a_{kl}\xi_k\xi_l\ge\alpha(\xi_1^2+...+\xi_n^2)\ \text{ для майже всіх } x\in\Omega \text{ і довільних } \xi\in\mathbb{R},$$

де $\alpha=\text{const}>0$, $a_{kl}=a_{lk}$ $(k,l=\overline{1,n})$.

Приймемо

$$J(v)=\|y(v)-z_0\|^2_{L_2(\Omega)}+(Nv,v)_{L_2(\Omega)},\quad v\in L_2(\Omega)$$

де $z_0\in L_2(\Omega)$ – заданий елемент.

Пояснимо деякі наші припущення. Розглянемо форму $a(u,v)$, $u,v\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, вважаючи, що $a_{kl}\in C^1(\overline{\Omega})$, $a_0\in C(\overline{\Omega})$, $u,v\in C^2(\overline{\Omega})$, $u\Big|_{\partial\Omega}=0$, $v\Big|_{\partial\Omega}=0$, і використаємо формулу інтегрування частинами:

$$\int\limits_\Omega f_{x_i}g\,dx=\int\limits_{\partial\Omega}fg\cos(\nu,x_i)\,dS-\int\limits_\Omega fg_{x_i}\,dx,$$

де $i\in\{1,...,n\}$, $f,g\in C^1(\overline{\Omega})$, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Ω.

Легко бачити, що

$$a(u,v)=\int\limits_\Omega\Big(\sum_{k,l=1}^n(a_{kl}(x)u_{x_k})v_{x_l}+a_0(x)uv\Big)\,dx=$$

$$=\int\limits_\Omega\Big(-\sum_{k,l=1}^n(a_{kl}(x)u_{x_k})_{x_l}+a_0(x)u\Big)v\,dx=<Au,v>,$$

де $Au = -\sum\limits_{k,l=1}^{n} (a_{kl}(x)u_{x_k})_{x_l} + a_0(x)u$ – дивергентна форма оператора A.

Рівняння стану може бути записане у вигляді

$$a(y,\varphi) = \langle f,\varphi\rangle_{V'\times V} + (v,\varphi)_{L_2(\Omega)} \ \ \forall\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), y \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \ \ (\text{тобто } \ y|_{\partial\Omega} = 0). \tag{2.15}$$

Треба знайти

$$u \in U_\partial : \quad J(u) = \inf_{v\in U_\partial} J(v)$$

, де

$$J(v) = \int\limits_\Omega |y(x;v) - z_0(x)|^2\, dx + \int\limits_\Omega (Nv(x), v(x))\, dx, \quad v \in L_2(\Omega).$$

В даному випадку система записується у вигляді

$$\begin{cases} Ay = f + u \ \text{ в } \ \Omega, \quad y = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \\ A^*p = y - z_0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad p = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \\ (p + Nu, v - u)_{L_2(\Omega)} \geq 0 \ \forall\ v \in U_\partial \Leftrightarrow \int\limits_\Omega (p + Nu)(v - u)\, dx \geq 0 \ \forall v \in U_\partial. \end{cases} \tag{2.16}$$

Зауваження 2.4. Припустимо, що $U_\partial = U = L_2(\Omega)$. Відзначимо, що $A^* = A$, бо $a_{kl} = a_{lk}$ $(i,k = \overline{1,n})$. Тоді

$$\int\limits_\Omega (p + Nu)\psi\, dx \geq 0 \ \ \forall\psi \in L_2(\Omega) \Rightarrow p + Nu = 0 \Rightarrow u = -N^{-1}p. \tag{2.17}$$

Отже, система (2.13) зводиться до системи

$$\begin{cases} Ay + N^{-1}p = f \text{ в } \Omega, \ \ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ -A^*p + y = z_0 \text{ в } \Omega, \ \ p|_{\partial\Omega} = 0, \\ u = -N^{-1}p. \end{cases}$$

Дуже часто маємо $Nv = \nu v$, де $\nu = \text{const} > 0$.

Приклад 2.1. Нехай $\Omega = (0;\pi)\times(0;\pi)$ і $L_2(\Omega)$ – простір керувань. Припустимо, що $f \in L_2(\Omega)$ і для кожного керування $v \in L_2(\Omega)$ стан системи $y(v) = y(x;v)$, $x \in \overline{\Omega}$, визначається як узагальнений розв'язок задачі

$$-\Delta y(v) = f + v \quad \text{в} \quad \Omega, \ \ y = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2.18}$$

Під узагальненим розв'язком задачі (2.18) розуміємо функцію $y = y(v) \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, яка задовольняє рівняння (2.18) майже всюди в Ω.

Нехай функція вартості $J : L_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ задана у вигляді

$$J(v) = \int\limits_\Omega |y(x;v) - z_0(x)|^2\, dx + \nu \int\limits_\Omega |v(x)|^2\, dx, \tag{2.19}$$

де $\nu = \text{const} > 0$, $z_0 \in L_2(\Omega)$ – задані.

Розглянемо задачу: знайти функцію $u \in L_2(\Omega)$ таку, що

$$J(u) = \inf_{v\in L_2(\Omega)} J(v). \tag{2.20}$$

Згідно з вище викладеним можна зробити висновок, що задача (2.20) має єдиний розв'язок $u \in L_2(\Omega)$ і він визначається як компонент набору (y, p, u), який є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} -\Delta y = f + u \ \text{ в } \ \Omega, \quad y = 0 \ \text{ на } \ \partial\Gamma, \\ -\Delta p = y - z_0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad p = 0 \ \text{ на } \ \partial\Gamma, \\ \ p + \nu u = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Виключаючи p з системи (2.21), отримаємо

$$\begin{cases} -\Delta y = f + u \ \text{ в } \ \Omega, \quad y = 0 \ \text{ на } \ \partial\Gamma, \\ -\Delta u = -\frac{1}{\nu}(y - z_0) \ \text{ в } \ \Omega, \quad u = 0 \ \text{ на } \ \partial\Gamma. \end{cases} \tag{2.22}$$

Розв'яжемо систему (2.22) методом рядів Фур'є. Спочатку зауважимо, що система функцій $\{\sin kx_1 \sin lx_2, (x_1, x_2) \in \overline{\Omega} \ | \ k, l \in \mathbb{N}\}$ є базисом в $L_2(\Omega), H^1(\Omega)$ і $H^2(\Omega)$.

Отже, запишемо

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k,l=1}^{\infty} f_{kl} \sin kx_1 \sin lx_2, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{2.23}$$

$$z_0(x_1, x_2) = \sum_{k,l=1}^{\infty} z_{0,kl} \sin kx_1 \sin lx_2, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{2.24}$$

і перепишемо розв'язок задачі (2.22) у вигляді

$$y(x_1, x_2) = \sum_{k,l=1}^{\infty} y_{kl} \sin kx_1 \sin lx_2, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{2.25}$$

$$u(x_1, x_2) = \sum_{k,l=1}^{\infty} u_{kl} \sin kx_1 \sin lx_2, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \tag{2.26}$$

Підставимо вирази (2.23)–(2.26) в (2.22). У результаті простих перетворень отримаємо

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} (k^2 + l^2) y_{kl} \sin kx_1 \sin lx_2 = \sum_{k,l=1}^{\infty} f_{kl} \sin kx_1 \sin lx_2 + \sum_{k,l=1}^{\infty} u_{kl} \sin kx_1 \sin lx_2, \tag{2.27}$$

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} (k^2 + l^2) u_{kl} \sin kx_1 \sin lx_2 = -\frac{1}{\nu}(\sum_{k,l=1}^{\infty} y_{kl} \sin kx_1 \sin lx_2 - \sum_{k,l=1}^{\infty} z_{0,kl} \sin kx_1 \sin lx_2). \tag{2.28}$$

З (2.27) і (2.28) випливають рівності

$$\begin{cases} (k^2 + l^2) y_{kl} = f_{kl} + u_{kl}, \\ (k^2 + l^2) u_{kl} = -\frac{1}{\nu}(y_{kl} - z_{0,kl}), \quad k, l \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.29}$$

З системи (2.29) знаходимо

$$(k^2 + l^2) u_{kl} = -\frac{1}{\nu}\Big(\frac{f_{kl} + u_{kl}}{k^2 + l^2} - z_{0,kl}\Big), \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Роблячи в цій рівності ланцюжок перетворень

$$(k^2 + l^2) u_{kl} + \frac{u_{kl}}{\nu(k^2 + l^2)} = -\frac{f_{kl}}{\nu(k^2 + l^2)} + \frac{z_{0,kl}}{\nu}, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

$$u_{kl} = \frac{\nu(k^2+l^2)}{\nu(k^2+l^2)^2+1}\Big(-\frac{f_{kl}}{\nu(k^2+l^2)} + \frac{z_{0,kl}}{\nu}\Big), \quad k,l \in \mathbb{N},$$

остаточно отримаємо

$$u_{kl} = -\frac{f_{kl}}{\nu(k^2+l^2)^2+1} + \frac{(k^2+l^2)z_{0,kl}}{\nu(k^2+l^2)^2+1}, \quad k,l \in \mathbb{N}.$$

Отже, приходимо до висновку про правильність такого твердження.

Теорема 2.3. *Якщо*

$$f(x_1,x_2) = \sum_{k,l=1}^{\infty} f_{kl} \sin kx_1 \sin lx_2, \quad (x_1,x_2) \in \Omega,$$

$$z_0(x_1,x_2) = \sum_{k,l=1}^{\infty} z_{0,kl} \sin kx_1 \sin lx_2, \quad (x_1,x_2) \in \Omega,$$

то задача (2.20) має єдиний розв'язок і він подається у вигляді суми ряду

$$u(x_1,x_2) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \Big(-\frac{f_{kl}}{\nu(k^2+l^2)^2+1} + \frac{(k^2+l^2)z_{0,kl}}{\nu(k^2+l^2)^2+1}\Big) \sin kx_1 \sin lx_2, \quad (x_1,x_2) \in \Omega.$$

Розділ 3. Оптимальне керування системами, які описуються параболічними рівняннями

3.1. Вихідні положення

3.1.1. Функційні простори. Нехай X – банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$, а $T>0$ - деяке число. Через $L_p(0,T;X)$ позначатимемо простір (класів) вимірних функцій $f:(0,T)\to X$ таких, що

$$\int\limits_0^T \|f(t)\|_X^p\,dt<\infty.$$

Цей простір є банаховим з нормою

$$\|f\|_{L_p(0,T;X)}=\Big(\int\limits_0^T \|f\|_X^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Якщо $p=2$ і X – гільбертів простір над полем дійсних чисел зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і нормою $|\cdot|_X=\sqrt{(\cdot,\cdot)_X}$, то $L_2(0,T;X)$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L_2(0,T;X)}=\int\limits_0^T (f(t),g(t))_X\,dt,\quad f,g\in L_2(0,T;X).$$

Через $D(0,T)$ позначимо простір основних функцій, а через $D'(0,T;X)$ – простір узагальнених функцій, тобто простір лінійних неперервних відображень $F:D(0,T)\to X$ або, іншими словами, $D'(0,T;X)=\mathcal{L}(D(0,T),X)$. Дію елемента $F\in D'(0,T;X)$ на елемент $\varphi\in D(0,T)$ позначатимемо $\langle F,\varphi\rangle=F(\varphi)$. Скажемо, що $F_n\to F$ в $D'(0,T;X)$, якщо $<F_n,\varphi>\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}<F,\varphi>$ в X.

Для довільного елемента $F\in D'(0,T;X)$ через $\partial F\equiv F'$ позначимо елемент з $D'(0,T;X)$ такий, що $\langle\partial F,\varphi\rangle=-\langle F,\varphi'\rangle\ \ \forall\varphi\in D(0,T)$.

Легко переконатись, що $L_p(0,T;X)$ вкладається в $D'(0,T;X)$ за правилом

$$L_p(0,T;X)\ni f\to F_f\in D'(0,T;X),$$

де $\langle F_f,\varphi\rangle=\int\limits_0^T f(t)\varphi(t)\,dt$, $\varphi\in D(0,T)$. Далі замість F_f писатимемо f. Введемо простір $W_p^1(0,T;X)=\{f\in L_p(0,T;X)\mid \partial f\equiv f'\in L_p(0,T;X)\}$, де тут і далі через ∂f або f' позначають похідну f в сенсі $D'(0,T;X)$.

Простір $W_p^1(0,T;X)$ є банаховим з нормою

$$\|f\|_{W_p^1(0,T;X)}=\|f\|_{L_p(0,T;X)}+\|f'\|_{L_p(0,T;X)}.$$

Відомо, що $W_p^1(0,T;X)\subset C([0,T];X)$. Якщо $p=2$ і X – гільбертів простір, то $W_p^1(0,T;X)$ позначають через $H^1(0,T;X)$. Простір $H^1(0,T;X)$ – гільбертів зі скалярним добутком

$$(f,g)_{H^1(0,T;X)}=(f,g)_{L_2(0,T;X)}+(f',g')_{L_2(0,T;X)}.$$

Зауваження 3.1. Нехай $Q\equiv\Omega\times(0,T)$, де Ω - область в $\mathbb{R}^n$. Будь-яку функцію $f:Q\to\mathbb{R}$ можна трактувати, як функцію $t\to f(\cdot,t):(0,T)\to P(\Omega)$, де $P(\Omega)$ простір функцій, визначених на Ω зі значеннями в $\mathbb{R}$. Нехай $(x,t)\to f(x,t)\in L_2(Q)$. Тоді $t\to f(\cdot,t)\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$.

Приймаємо $f(t)(x) \equiv f(t,x)$, $t \in (0,T)$, $x \in \Omega$.

3.1.2. Основні припущення. Нехай V, H – гільбертові простори над полем дійсних чисел і V вкладається в H щільно і неперервно. Тоді вкладення $V \subset H \subset V'$ є щільними і неперервними після відповідних ототожнень. Через $((\cdot,\cdot))$ і $(\cdot,\cdot)$ позначатимемо скалярні добутки, відповідно, в V і H, а через $\|\cdot\|$ і $|\cdot|$ – норми, породжені скалярними добутками, відповідно, в V і H.

Розглянемо сім'ю білінійних форм $a(t;\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, з властивостями

1) функція $t \mapsto a(t;v,w)$ є вимірною для будь-яких $v, w \in V$,

2) існує $K = \text{const} > 0$: $|a(t;v,w)| \le K\|v\|\|w\|$ $\forall v, w \in V$ (неперервність)

3) існують сталі $\alpha > 0$, $\lambda \geqslant 0$ такі, що $a(t;v,v) + \lambda|v|^2 \ge \alpha\|v\|^2$ $\forall v \in V$, $t \in [0,T]$ (коерцитивність).

З білінійності і неперервності сім'ї форм $a(t;\cdot,\cdot)$, $t \in [0,T]$, випливає, що для довільного $t \in [0,T]$ існує оператор $A(t) \in \mathcal{L}(V,V)$ такий, що $< A(t)v, w >_{V' \times V} = a(t;v,w)$, $v, w \in V$.

З властивості 2) маємо, що

$$\|A(t)v\|_{V'} \le K\|v\|_V \quad \forall v \in V, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.1}$$

Можна показати, що коли $f : [0,T] \to V$ – довільна вимірна функція, то $t \to A(t)f(t) : [0,T] \to V'$ – вимірна функція.

Доведемо, що $f_\cdot \in L_2(0,T;V)$, то маємо $A(\cdot)f(\cdot) \in L_2(0,T;V')$. Справді, взявши в (3.1) $v = f(t)$, піднісши до квадрату обидві частини отриманої нерівності і проінтегрувавши, отримаємо

$$\int_0^T \|A(t)f(t)\|^2\, dt \le K^2 \int_0^T \|f(t)\|^2\, dt.$$

Позначимо

$$W(0,T) := \{v \in L_2(0,T;V) \mid v' \in L_2(0,T;V')\}.$$

Тут і далі похідна v' розуміється в сенсі простору $D'(0,T;V')$.

Твердження 3.1. *Простір $W(0,T)$ неперервно вкладається в $C([0,T];H)$.*

3.1.3. Задача Коші

Формулювання задачі Коші: знайти функцію $y \in W(0,T)$ таку, що

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (0,T), \tag{3.2}$$

$$y(0) = y_0, \tag{3.3}$$

де $f \in L_2(0,T;V')$, $y_0 \in H$ - задані.

Твердження 3.2. *При вказаних вище припущеннях задача (3.2), (3.3) має єдиний розв'язок і він неперервно залежить від f, y_0, причому*

$$\int_0^T (\|y(t)\|^2 + \|y'(t)\|^2_{V'})\, dt \le C\Big(\int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}\, dt + |y_0|^2\Big), \tag{3.4}$$

де $C > 0$ - стала, яка від y, f та y_0 не залежить.

Доведення. Використаємо метод Гальоркіна. Для спрощення міркувань припустимо, що V – сепарабельний простір, тобто існує зліченна підмножина множини V, яка щільна в цьому просторі.

Нехай $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ – зліченна лінійно незалежна повна система елементів простору V (будь-яка її підсистема лінійно незалежна). Введемо позначення $V_m := \{\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n \mid \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ – лінійна оболонка, натягнута на систему $\{w_k\}_{k=1}^{m}$. Очевидно, що V_m – лінійний m-вимірний простір і $\overline{\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} V_m}^{V} = V$.

Розглянемо гальоркінські наближення $\{y_m\}$, які для кожного $m \in \mathbb{N}$ визначаються за правилом

$$y_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{mj} w_j, t \in [0, T], \tag{3.5}$$

де c_{m1} ,..., c_{mm} – абсолютно неперервні на $[0, T]$ функції такі, що виконуються рівності

$$(y_m'(t), w_l) + (A(t)y_m(t), w_l) = (f(t), w_l), \quad t \in (0, T), \quad l = \overline{1, m}, \tag{3.6}$$

$$y_m(0) = y_{0,m}, \tag{3.7}$$

де $y_{0,m} \in V_m$ і $|y_0 - y_{0,m}| \to 0$ при $m \to \infty$.

Іншими словами, шукаємо функцію y_m вигляду (3.5), де $c_{m1}, ..., c_{mm}$ є розв'язками задачі Коші

$$\sum_{j=1}^{m}(w_j, w_l)(c_{mj}(t))_t' + \sum_{j=1}^{m}(A(t)w_j, w_l)c_{mj}(t) = (f(t), w_l), \ \ t \in (0, T], \ l = \overline{1, m}, \tag{3.8}$$

$$c_{mj}(0) = y_{0,mj}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{3.9}$$

де $y_{0,mj}$ знаходяться з рівності $y_{0,m} = \sum\limits_{j=1}^{m} y_{0,mj} w_j$.

Введемо позначення: $a_{lj} := (w_l, w_j)$, $l, j = \overline{1, m}$. Матриця, утворена з елементів a_{lj}, є невиродженою. Це випливає з таких міркувань:
$0 < (\xi_1 w_1 + ... + \xi_m w_m, \xi_1 w_1 + ... + \xi_m w_m) = \sum\limits_{j,l=1}^{m} a_{lj}\xi_l\xi_j \Rightarrow$ матриця (a_{lj}) - невироджена.

Задачу (3.8), (3.9) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} (c_{m1}(t))' = g_{m1}(t, c_{m1}(t), ..., c_{mm}(t)), \\ ... \\ (c_{mm}(t))' = g_{mm}(t, c_{m1}(t), ..., c_{mm}(t)), \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} c_{m1}(0) = y_{0,m1}, \\ ... \\ c_{mm}(0) = y_{0,mm}. \end{cases} \tag{3.11}$$

З відомих результатів випливає, що існують функції $c_{m1}, ..., c_{mm}$, які визначені на інтервалі $[0, T]$ і є непродовжуваними розв'язками задачі (3.10), (3.11).

Помножимо перше рівняння (3.6) на $c_{m1}(t)$, друге - на $c_{m2}(t)$ і т.д., а потім додамо отримані рівності. У результаті отримаємо рівність

$$(y_m'(t), y_m(t)) + (A(t)y_m(t), y_m(t)) = (f(t), y_m(t)), \ \ t \in [0, T]. \tag{3.12}$$

Зауважимо, що

$$(y_m'(t), y_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_m(t)|^2, \ \ t \in [0, T], \tag{3.13}$$

$$(A(t)y_m(t), y_m(t)) \geq \alpha \|y_m(t)\|^2, \quad t \in [0,T], \tag{3.14}$$

$$|(f(t), y_m(t))| \leq \|f(t)\|_{V'} \|y_m(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|y_m(t)\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|f(t)\|^2, \quad t \in [0,T]. \tag{3.15}$$

З (3.12), на підставі (3.13)–(3.15), отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_m(t)|^2 + \alpha\|y_m(t)\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}\|y_m(t)\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|f(t)\|^2_{V'}.$$

Звідси, вибравши $\varepsilon = \alpha$, матимемо

$$\frac{d}{dt}|y_m(t)|^2 + \alpha\|y_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\alpha}\|f(t)\|^2_{V'}.$$

Проінтегруємо цю нерівність

$$\int\limits_0^t \frac{d}{ds}|y_m(s)|^2 ds + \alpha \int\limits_0^t \|y_m(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t \|f(s)\|^2_{V'} ds.$$

Звідси, врахувавши (3.7), маємо

$$|y_m(t)|^2 + \alpha \int\limits_0^t \|y_m(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t \|f(s)\|^2_{V'} ds + |y_{0,m}|^2.$$

А це дає такі оцінки

$$\max_{t\in[0,T]} |y_m(t)|^2 \leq \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^T \|f(s)\|^2_{V'} ds + |y_{0,m}|^2 =: C_1; \tag{3.16}$$

$$\int\limits_0^T \|y_m(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\alpha^2}\int\limits_0^T \|f(s)\|^2_{V'} ds + \frac{1}{\alpha}|y_{0,m}|^2 =: C_2. \tag{3.17}$$

Отже, послідовність $\{y_m\}$ обмежена в $L_\infty(0,T;H)$, що випливає з (3.16), а з (3.17) випливає, що послідовність $\{y_m\}$ обмежена в $L_2(0,T;V)$. Тому, існують підпослідовність $\{y_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ та функція $y \in L_\infty(0,T;H) \cap L_2(0,T;V)$ такі, що

$$y_{m_k} \to y \quad *-\text{ слабко в } L_\infty(0,T;H) \text{ і } y_{m_k} \to y \quad \text{слабко } L_2(0,T;V). \tag{3.18}$$

Помножимо (3.6) при $m = m_k$ на φ, де $\varphi \in C^1[0,T]$, $\varphi(T) = 0$, і проінтегруємо за t від 0 до T:

$$\int\limits_0^T \Big(-(y_{m_k}(t), \varphi'(t)w_j) + (A(t)y_{m_k}(t), \varphi(t)w_j)\Big)dt = \int\limits_0^T (f(t), \varphi(t)w_j)dt + (y_{0,m}, \varphi(0)w_j). \tag{3.19}$$

Перейдемо в (3.19) до границі при $k \to \infty$, врахувавши, що $t \to \varphi(t)w_j \in L_2(0,T;V) \subset L_2(0,T;V') = (L_2(0,T;V))'$ і (3.18). У результаті отримаємо

$$\int\limits_0^T \Big(-(y(t), \varphi'(t)w_j) + (A(t)y(t), \varphi(t)w_j)\Big)dt = \int\limits_0^T (f(t), \varphi(t)w_j)dt + \varphi(0)(y_0, w_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

При $\varphi \in D(0,T)$ з (3.20) матимемо

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t) \ \text{ в } \ D'(0,T;V'). \tag{3.21}$$

Звідси випливає рівність $y'(t) = -A(t)y(t) + f(t), \quad t \in (0,T)$. Оскільки $-A(\cdot)y(\cdot) \in L_2(0,T;V')$ і $f \in L_2(0,T;V')$, то $y' \in L_2(0,T;V')$. А це означає, що $y \in W(0,T)$.

Домножимо (3.21) скалярно на φw_j, де $\varphi \in C([0,T])$, $\varphi(T) = 0$, $j \in \mathbb{N}$, і проінтегруємо отриману рівність за t від 0 до T. У результаті отримаємо

$$\int\limits_0^T \Big(-(y(t), \varphi'(t)w_j) + (A(t)y(t), \varphi(t)w_j)\Big)dt = \int\limits_0^T (f(t), \varphi(t)w_j)dt + \varphi(0)(y(0), w_j), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.22}$$

Якщо порівняти (3.20) і (3.22), то отримаємо

$$(y(0), w_j) = (y_0, w_j) \qquad \forall j \in \mathbb{N},$$

звідси, в силу повноти $\{w_j\}$, маємо

$$y(0) = y_0.$$

Твердження доведено. □

Зауваження 3.2. Визначимо оператор $(f, y_0) \to y : L_2(0,T;V') \times H \to W(0,T)$, де – розв'язки задачі (3.2), (3.3). Цей оператор є лінійним і неперервним. Справді, візьмемо $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2,\ y_0 = \lambda_1 y_{01} + \lambda_2 y_{02}$. Тоді

$$(f_1, y_{01}) \to y_1,\ (f_2, y_{02}) \to y_2 \Rightarrow (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \lambda_1 y_{01} + \lambda_2 y_{02}) \to \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

В силу єдиності розв'язку задачі (3.2), (3.3) маємо лінійність даного оператора.

Заданий оператор є неперервним. Це випливає з оцінки (3.4), яку можна записати у вигляді

$$\|y\|^2_{W(0,T)} \le C(\|f\|^2_{L_2(0,T;V')} + |y_0|^2). \tag{3.23}$$

Щоб це довести, потрібно взяти послідовність y_n, що збігається до y, написати нерівність (3.23) для $y_m - y_k$. При $m,\ k$ прямуючих до нескінченності будемо мати, що права і ліва частини прямують до нуля, це означає неперервність даного оператора.

3.2. Задача оптимального керування

3.2.1. Постановка задачі. Нехай U – гільбертів простір керувань, $B \in \mathcal{L}(U; L_2(0,T;V'))$, $f \in L_2(0,T;V')$, $y_0 \in H$.

Стан $y(v)$ керованої системи при керуванні $v \in U$ визначається як розв'язок задачі Коші

$$y' + A(t)y = f(t) + Bv, \quad t \in (0,T), \tag{3.24}$$

$$y(0) = y_0, \tag{3.25}$$

де A – сім'я операторів, які описані вище.

Нехай $\mathcal{H}$ – гільбертів простір спостережень, $C \in \mathcal{L}(W(0,T), \mathcal{H})$, $z(v) = Cy(v)$ – спостереження,

$$J(v) = \|z(v) - z_0\|^2_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}v, v)_U \quad v \in U, \text{ – функція вартості,}$$

де $\mathcal{N} : U \to U$ – симетричний, лінійний, неперервний і коерцитивний оператор.

Нехай U_∂ – опукла замкнена підмножина U.

Задача оптимального керування полягає в знаходженні $u \in U_\partial$ таких, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{3.26}$$

Дослідження цієї задачі проводиться аналогічно, як в еліптичному випадку.

Теорема 3.1. *При наших припущеннях задача (3.26) має єдиний розв'язок (оптимальне керування) і він характеризується варіаційною нерівністю*

$$J(u)(v - u) \geq 0 \qquad \forall v \in U_\partial. \tag{3.27}$$

Позначимо через L оператор $(f, y_0) \to y : L_2(0,T;V') \times H \to W(0,T)$, який визначений задачею (3.2), (3.3). Оператор L є афінним. Цей факт використовується аналогічно, як в попередньому розділі, для доведення, що нерівність (3.27) рівносильна нерівності

$$(Cy(u) - z_0, C(y(v) - y(u)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N}u, v - u)_U \geq 0 \qquad \forall v \in U_\partial. \tag{3.28}$$

Розглянемо два випадки:

I. $C \in \mathcal{L}(L_2(0,T;V'), \mathcal{H})$.

II. $Cy(v) = Dy(T;v)$, де $D \in \mathcal{L}(H)$.

Випадок **I**.

Зауважимо, що

$$(Cy(u) - z_0, C(y(v) - y(u)))_{\mathcal{H}} = \langle \Lambda(Cy(u) - z_0), C(y(v) - y(u)) \rangle_{\mathcal{H}} =$$

$$= \langle C^* \Lambda(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u) \rangle_{L_2(0,T;V)}.$$

$$(\mathcal{N}u, v - u) = \langle \Lambda_U \mathcal{N}u, v - u \rangle_U,$$

де $\Lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, $\Lambda_U : U \to U'$ – канонічні ізоморфізми.

Отже, нерівність (3.28) рівносильна нерівності

$$\langle C^* \Lambda(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u) \rangle_{L_2(0,T;V)} + \langle \Lambda_U \mathcal{N}u, v - u \rangle_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{3.29}$$

Тепер відмітимо, що нерівність (3.29) можна записати у вигляді

$$\int_0^T \langle C^*\Lambda(Cy(u)-z_0), y(v)-y(u)\rangle_V dt + \langle \Lambda_U \mathcal{N} u, v-u\rangle_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial.$$

Введемо спряжений стан $p(u)$, як розв'язок задачі

$$-\frac{dp(u)}{dt} + A^*(t)p(u) = C^*\Lambda(Cy(v)-z_0), \tag{3.30}$$

$$p(u)|_{t=T} = 0. \tag{3.31}$$

Зауважимо, що $C^*\Lambda(Cy(u)-z_0) \in L_2(0,T;V')$. Ця задача ідентична до задачі (3.2), (3.3), звідси випливає, що вона має єдиний розв'язок.

На підставі (3.30), (3.31) маємо

$$\int_0^T \langle C^*\Lambda(Cy(u)-z_0), y(v)-y(u)\rangle_V dt = \int_0^T \langle -\frac{dp(u)}{dt} + A^*(t)p(u), y(v)-y(u)\rangle_V dt =$$

$$= \int_0^T \langle p(u), \frac{d}{dt}(y(v)-y(u))\rangle_V dt + \int_0^T \langle p(u), A(y(v)-y(u))\rangle_V dt =$$

$$= \int_0^T \langle p(u), (A+\frac{d}{dt})(y(v)-y(u))\rangle_V dt = \int_0^T \langle p(u), B(v-u)\rangle_V dt.$$

Отже, нерівність (3.29) виконується тоді і лише тоді, коли

$$\int_0^T \langle p(u), B(v-u)\rangle_V dt + \langle \Lambda_U \mathcal{N} u, v-u\rangle_U \geq 0 \qquad \forall v \in U_\partial,$$

тобто

$$\langle p(u), B(v-u)\rangle_{L_2(0,T;V)} + \langle \Lambda_U \mathcal{N} u, v-u\rangle_U \geq 0 \qquad \forall v \in U_\partial.$$

А ця нерівність рівносильна нерівності

$$\langle B^* p(u), v-u\rangle_U + \langle \Lambda_U \mathcal{N} u, v-u\rangle_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial,$$

яку можна записати у вигляді

$$\langle B^* p(u) + \Lambda_U \mathcal{N} u, v-u\rangle_U \geq 0 \qquad \forall v \in U_\partial,$$

що рівносильно

$$(\mathcal{N}_u^{-1} B^* p(u) + \mathcal{N} u, v-u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{3.32}$$

Теорема 3.2. *Оптимальне керування, про яке говориться в теоремі 3.1, описується співвідношеннями (3.24), (3.25) при* $v = u$, *(3.30), (3.31) і (3.32).*

Випадок **II**. В даному випадку нерівність (3.28) можна записати у вигляді

$$(D^*(Dy(T,u)-z_0), y(T,v)-y(T,u))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{N} u, v-u)_U \geq 0 \qquad \forall v \in U_\partial. \tag{3.33}$$

Введемо спряжений стан $p(u)$ як розв'язок задачі

$$-\frac{dp(u)}{dt} + A^*(t)p(u) = 0, \tag{3.34}$$

$$p(u)|_{t=T} = D^*(Dy(T,u) - z_0). \tag{3.35}$$

Помножимо (3.34) скалярно на $y(v)-y(u)$ і проінтегруємо за t від 0 до T. У результаті отримаємо рівність

$$-\int_0^T \Big\langle \frac{dp(u)}{dt}, y(v) - y(u) \Big\rangle_V dt + \int_0^T \langle A^* p(u), y(v) - y(u) \rangle_V dt = 0.$$

Звідси та умови (3.35) випливає рівність

$$-(D^*(Dy(T,u) - z_0), y(T,v) - y(T,u))_H + \int_0^T \langle p(u), (\frac{d}{dt} + A)(y(v) - y(u)) \rangle_V dt = 0.$$

Легко бачити, що цю рівність можна подати у вигляді

$$-(D^*(Dy(T,u) - z_0), y(T,v) - y(T,u))_H + \int_0^T \langle p(u), B(v-u) \rangle_V dt = 0,$$

тобто

$$-(D^*(Dy(T,u) - z_0), y(T,v) - y(T,u))_H + \langle p(u), B(v-u) \rangle_{L_2(0,T,V)} = 0,$$

а її можна переписати у вигляді

$$-(D^*(Dy(T,u) - z_0), y(T,v) - y(T,u))_H + \langle B^* p(u), v-u \rangle_U = 0,$$

звідки отримуємо рівність

$$(D^*(Dy(T,u) - z_0), y(T,v) - y(T,u))_H = \langle B^* p(u), v-u \rangle_U. \tag{3.36}$$

Отже, нерівність (3.33) на підставі (3.36) можна подати у вигляді

$$\langle B^* p(u), v-u \rangle_U + (\mathcal{N}u, v-u)_U \geq 0 \qquad \forall v \in U_\partial,$$

тобто

$$\langle B^* p(u) + \Lambda_U \mathcal{N} u, v-u \rangle_U \geq 0 \qquad \forall v \in U_\partial. \tag{3.37}$$

Теорема 3.3. *При виконанні вказаних умов оптимальне керування, про яке говориться в теоремі 3.1 описується системою співвідношень (3.24), (3.25) при* $v = u$, *(3.34), (3.35) і (3.37).*

Відмітимо, що нерівність (3.37) можна записати у вигляді

$$(\Lambda_u^{-1} B^* p(u) + \mathcal{N}u, v-u)_U \geq 0 \qquad \forall v \in U_\partial.$$

Зауваження 3.3. Якщо $U_\partial = U$, то нерівність (3.37) рівносильна рівності

$$\Lambda_U^{-1} B^* p(u) + \mathcal{N}u = 0.$$

Приклад 3.1. Нехай $\Omega = (0, \pi)$, $Q = (0; \pi) \times (0, T)$, $\sum = \{0, \pi\} \times (0, T)$, де $T > 0$ – довільне фіксоване число. Важатимемо, що $L_2(Q)$ – простір керувань і для кожного $v \in L_2(Q)$ стан $y(v) : Q \to \mathbb{R}$ керованої системи визначається, як розв'язок $y(v) = y(x, t; v)$, $(x, t) \in \overline{Q}$, задачі

$$y_t(v) - y_{xx}(v) = f + v \quad \text{в} \quad Q, \tag{3.38}$$

$$y|_{x=0 \vee x=\pi} = 0, \;\; y|_{t=0} = y_0(x), \;\; x \in \Omega, \tag{3.39}$$

де $f \in L_2(Q)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$ – задані.

Функція вартості $J : L_2(Q) \to \mathbb{R}$ задається за правилом

$$J(v) = \iint\limits_{\Omega} |y(x, t; v) - z_0(x, t)|^2 dxdt + \nu \iint\limits_{\Omega} |v(x, t)|^2 dxdt, \tag{3.40}$$

де $v = \text{const} > 0$, $z_0 \in L_2(Q)$ – задані.

Розглянемо *задачу*: знайти функцію $u \in L_2(Q)$ таку, що

$$J(u) = \inf_{v \in L_2(Q)} J(v). \tag{3.41}$$

Згідно з вищевикладеним, зокрема, з твердження теореми 3.2 можна зробити висновок, що задача (3.41) має єдиний розв'язок $u \in L_2(Q)$ і він визначається, як компонента набору (y, p, u), який є розв'язком мішаної задачі для системи рівнянь

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = f + u \quad \text{в} \quad Q, \quad y|_{x=0 \vee x=\pi} = 0, \; y|_{t=0} = y_0(x), \;\; x \in \Omega, \\ -p_t - u_{xx} = y - z_0 \quad \text{в} \quad Q, \quad p|_{x=0 \vee x=\pi} = 0, \;\; p|_{t=T} = 0, \\ p + \nu u = 0 \quad \text{в} \quad Q. \end{cases}$$

Виключаючи з цієї системи p, отримаємо задачу

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = f + u \quad \text{в} \quad Q, \quad y|_{x=0 \vee x=\pi} = 0, \; y|_{t=0} = y_0(x), \;\; x \in \Omega, \\ u_t + u_{xx} = \frac{1}{v}(y - z_0) \quad \text{в} \quad Q, \quad u|_{x=0 \vee x=\pi} = 0, \;\; u|_{t=T} = 0. \end{cases} \tag{3.42}$$

Роз'яжемо задачу (3.42) методом відокремлення змінних. Шукаємо розв'язок у вигляді суми тригонометричних рядів

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \sin kx, \;\; u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \;\; (x, t) \in \overline{Q}. \tag{3.43}$$

Запишемо

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin kx, \;\; (x, t) \in Q, \tag{3.44}$$

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_{0,k} \sin kx, \;\; x \in \Omega, \tag{3.45}$$

$$z_0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_{0,k}(t) \sin kx, \;\; (x, t) \in Q. \tag{3.46}$$

Підставимо вирази (3.43) – (3.46) в (3.42). У результаті простих перетворень отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k'(t) \sin kx + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 y_k(t) \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin kx + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \;\; (x, t) \in Q, \tag{3.47}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k(0)\sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} y_{0,k}\sin kx, \quad x\in\Omega, \tag{3.48}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\sin kx - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k(t)\sin kx = \frac{1}{\nu}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)\sin kx - \sum_{k=1}^{\infty} z_{0,k}(t)\Big), \quad (x,t)\in Q, \tag{3.49}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(T)\sin kx = 0, \quad x\in\Omega. \tag{3.50}$$

З (3.47) – (3.50) отримуємо задачі для знаходження функцій y_k, u_k $(k\in\mathbb{N})$:

$$\begin{cases} y_k' + k^2 y_k = f_k + u_k(t) \quad \text{в} \quad (0;T), \quad y_k(0) = y_{0,k}, \\ u_k' - k^2 u_k = \frac{1}{\nu}(y_k - z_{0,k}), \quad u_k(T) = 0, \quad k\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.51}$$

Розв'яжемо перше рівняння з (3.51):

$$y_k'(t) + k^2 y_k(t) = f_k(t) + u_k(t) \ \mid \ e^{k^2 t}, \quad t\in[0,T],$$

$$(y_k(t)e^{k^2 t})' = (f_k(t) + u_k(t))e^{k^2 t}, \quad t\in[0,T],$$

$$y_k(t)e^{k^2 t} = y_{0,k} + \int_0^t e^{k^2 s}(f_k(s) + u_k(s))ds, \quad t\in[0,T],$$

$$y_k(t) = y_{0,k}e^{-k^2 t} + \int_0^t e^{-k^2(t-s)}(f_k(s) + u_k(s))ds, \quad t\in[0,T]. \tag{3.52}$$

Тепер розв'яжемо друге рівняння

$$u_k'(t) - k^2 u_k(t) = \frac{1}{\nu}(y_k(t) - z_{0,k}(t)) \ \mid \ e^{-k^2 t}, \quad t\in[0,T],$$

$$\Big(u_k(t)e^{-k^2 t}\Big)' = \frac{1}{\nu}(y_k(t) - z_{0,k}(t))e^{-k^2 t}, \quad t\in[0,T],$$

$$u_k(t)e^{-k^2 t} = \frac{1}{\nu}\int_T^t (y_k(\tau) - z_{0,k}(\tau))e^{-k^2\tau}d\tau, \quad t\in[0,T],$$

$$u_k(t) = \frac{1}{\nu}\int_T^t e^{k^2(t-\tau)}(y_k(\tau) - z_{0,k}(\tau))d\tau, \quad t\in[0,T]. \tag{3.53}$$

Підставимо вираз (3.52) в (3.53). У результаті здобудемо

$$u_k(t) = \frac{1}{\nu}\int_t^T z_{0,k}(\tau)e^{-k^2(\tau-t)}d\tau - \frac{1}{\nu}\int_t^T \Big[y_{0,k}e^{-k^2\tau} + \int_0^\tau e^{-k^2(\tau-s)}(f_k(s) + u_k(s))ds\Big]\times$$

$$\times e^{-k^2(\tau-t)}d\tau, \quad t\in(0,T]. \tag{3.54}$$

Маємо

$$\int\limits_t^T y_{0,k}e^{-k^2\tau}e^{-k^2(\tau-t)}d\tau = y_{0,k}\Big(\int\limits_t^T e^{-2k^2\tau}d\tau\Big)e^{k^2t} = y_{0,k}e^{-k^2(t)}\Big(-\frac{1}{2k^2}e^{-k^2\tau}\Big|_t^T\Big) =$$
$$= y_{0,k}e^{-k^2t}\Big(e^{-2k^2t} - e^{-2k^2T}\Big)/2k^2. \tag{3.55}$$

Якщо покласти

$$g_k(s) := f_k(s) + u_k(s), \quad s \in [0,T],$$

то, міняючи порядок інтегрування за формулою

$$\int\limits_t^T d\tau \int\limits_0^\tau (...)ds = \int\limits_0^t ds \int\limits_t^T (...)d\tau + \int\limits_t^T ds \int\limits_s^T (...)d\tau,$$

отримаємо

$$\int\limits_t^T e^{-k^2(\tau-t)}d\tau \int\limits_0^\tau e^{-k^2(\tau-s)}(f_k(s)+u_k(s))ds = \int\limits_t^T e^{-k^2(\tau-t)}d\tau \int\limits_0^\tau e^{-k^2(\tau-s)}g_k(s)ds =$$
$$= \int\limits_0^t e^{k^2(t+s)}g_k(s)\Big(\int\limits_t^T e^{-2k^2\tau}d\tau\Big)ds + \int\limits_t^T e^{k^2(t+s)}g_k(s)\Big(\int\limits_s^T e^{-k^2\tau}\,d\tau\Big)\,ds =$$
$$= \frac{1}{2k^2}\int\limits_0^t e^{k^2(t+s)}(e^{-2k^2t} - e^{-2k^2T})g_k(s)ds + \frac{1}{2k^2}\int\limits_t^T e^{k^2(t+s)}(e^{-2k^2s} - e^{-2k^2T})g_k(s)ds =$$
$$= \int\limits_0^T G_k(t,s)g_k(s)ds = \int\limits_0^T G_k(t,s)(f_k(s)+u_k(s))ds, \tag{3.56}$$

де

$$G_k(t,s) = \frac{1}{2k^2}e^{k^2(t+s)} \times \begin{cases} e^{-2k^2t} - e^{-2k^2T}, & \text{якщо } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \\ e^{-2k^2s} - e^{-2k^2T}, & \text{якщо } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T. \end{cases} \tag{3.57}$$

З (3.54) на піставі (3.55) і (3.56) отримаємо

$$u_k(t) = \frac{1}{\nu}\int\limits_t^T e^{-k^2(\tau-t)}z_{0,k}(\tau)d\tau - \frac{1}{\nu}y_{0,k}G(t,0) - \frac{1}{\nu}\int\limits_0^T G(t,s)f_k(s)ds - \frac{1}{\nu}\int\limits_0^T G(t,s)u_k(s)ds. \tag{3.58}$$

Отож, доведено таке твердження.

Теорема 3.4. *Задача (3.41) має єдиний розв'язок і він зображується у вигляді*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin kx,$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція u_k є розв'язком інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (3.58), в якому f_k, $z_{0,k}$, $y_{0,k}$ – коефіцієнти відповідних рядів (3.44)–(3.46), а G_k визначена в (3.57).

Література

1. Lions J.-L. Optimal Control of Systems Gocerned by Partial Differentiul Equations // Springer, Berlin, 1971. 2. Balakrishnan V. Semigroup theory and control theory. Washington, 1965. 3. M. M. Bokalo, A. M. Tsebenko, Optimal control for systems governed by parabolic equations without initial conditions with controls in the coefficients // Electron. J. Differential Equations. – 2017. – Vol. 2017 (2017), No. 72. – P. 1–22