

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь

Затверджено

На засіданні
кафедри математичної статистики і
диференціальних рівнянь
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 11 від 22.06.2021 р.)



Завідувач кафедри: Бугрій О.М.

Силабус з навчальної дисципліни
“ Рівняння математичної фізики ”,
що викладається в межах ОПП “Комп’ютерний аналіз
математичних моделей”, “Комп’ютерна алгебра, криптологія і
теорія ігор”, “Математична економіка”,
“Середня освіта (математика)”
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів із
спеціальностей 111 – математика та 014 -- освіта

Львів 2021 р.

Назва дисципліни	Рівняння математичної фізики
Адреса викладання дисципліни	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичного факультет Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	11 – математика і статистика 112 – статистика
Викладачі дисципліни	Бокало М.М., доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь
Контактна інформація викладачів	mykola.bokalo@lnu.edu.ua, http://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/bokalo_m_m ; Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 267. м. Львів, вул. Університетська, 1
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю).
Сторінка курсу	http://new.mmf.lnu.edu.ua/course/dr_for_112
Інформація про дисципліну	Курс розроблено для ознайомлення студентів з основними поняттями та методами теорії рівнянь математичної фізики.
Коротка анотація дисципліни	Дисципліна “Рівняння математичної фізики” є нормативною дисципліною із спеціальності 111 – математика для освітніх програм “Комп’ютерний аналіз математичних моделей”, “Комп’ютерна алгебра, криптологія і теорія ігор”, “Математична економіка”, “Середня освіта (математика)”, яка викладається в 3-му та 4-ому семестрах в обсязі 7,5 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Мета та цілі дисципліни	Мета: ознайомлення з основними поняттями та методами теорії рівнянь математичної фізики. Завдання: викласти основні положення теорії рівнянь математичної фізики, ознайомити з методами розв’язування задач для найпростіших рівнянь з частинними похідними другого порядку.
Література для вивчення дисципліни	1. <i>Перестюк М.О.</i> Теорія рівнянь математичної фізики / <i>М.О.Перестюк, В.В.Маринець</i> – Київ: Либідь, 1993. 2. <i>Тихонов А.Н.</i> Уравнения математической физики / <i>А.Н.Тихонов, А.А.Самарский</i> – М.: Наука, 1964.

	<p>3. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С.Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов – М.: Высшая школа, 1970.</p> <p>4. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка / М.М.Смирнов – М.: Наука, 1964.</p> <p>5. Бицадзе А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А.В.Бицадзе, Д.Ф.Калиниченко – М.: Наука, 1985.</p> <p>6. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики / М.М.Смирнов – М.: Наука, 1968.</p> <p>7. Бугрій О.М. Методичні рекомендації до вивчення курсу “Рівняння математичної фізики” / О.М. Бурій. – Львів: ЛНУ, 2008. – 108 с.</p> <p>8. Пабірівська Н.В. Збірник задач з рівнянь у частинних похідних / Н.В.Пабірівська – Львів: ЛНУ, 2005.</p>
Обсяг курсу	<p>Загальний обсяг у 3-ому семестрі: 120 годин. Аудиторних занять: 64 год., з них 32 год. лекційних та 32 годин лабораторних робіт. Самостійної роботи: 56 год. Кредитів – 4.</p> <p>Загальний обсяг у 4-ому семестрі: 105 годин. Аудиторних занять: 64 год., з них 32 год. лекційних та 32 годин лабораторних робіт. Самостійної роботи: 41 год. Кредитів – 3,5.</p>
Очікувані результати навчання	<p><u>В результаті вивчення даного курсу студент повинен знати:</u> формулювання основних задач для рівнянь гіперболічного, параболічного та еліптичного типів, доведення їх коректності та властивостей розв’язків, методи розв’язування сформульованих задач;</p> <p><u>вміти:</u> зводити до канонічного вигляду рівняння з частинними похідними другого порядку з двома та більшою кількістю незалежних змінних; розв’язувати задачу Коші для гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними, а також розв’язувати крайові задачі для найпростіших рівнянь гіперболічного, параболічного та еліптичного типів.</p>
Ключові слова	Рівняння з частинними похідними другого порядку, еліптичне рівняння, параболічне рівняння, гіперболічне рівняння, задача Коші, крайова задача, мішана задача.
Формат курсу	Очний, дистанційний Проведення лекційних та практичних занять та консультацій.

Теми	Вступ.
	<p>Поняття рівняння з частинними похідними. Лінійні, майже лінійні та квазілінійні рівняння другого порядку.</p> <p>Змістовий модуль 1. Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь другого порядку. Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними.</p> <p>Тема 1.1. Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь.</p> <p>1.1.1. Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь у загальному випадку.</p> <p>1.1.2. Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь з двома незалежними змінними.</p> <p>Тема 1.2. Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними.</p> <p>1.2.1. Знаходження загальних розв'язків.</p> <p>1.2.2. Знаходження розв'язків задач Коші, Гурса і Дарбу.</p> <p>Змістовий модуль 2. Математичні моделі природних процесів.</p> <p>Тема 2.1. Математичні моделі процесів коливань.</p> <p>2.1.1. Природні процеси, вивчення яких приводить до задач для гіперболічних рівнянь.</p> <p>2.1.1.1. Поперечні коливання однорідної струни.</p> <p>2.1.1.2. Поздовжні коливання однорідного стержня.</p> <p>2.1.1.3. Поперечні коливання мембрани.</p> <p>2.1.1.4. Поширення звукових хвиль.</p> <p>2.1.2. Постановки задач для рівняння коливань.</p> <p>Тема 2.2. Математичні моделі процесів теплопровідності та дифузії.</p> <p>2.2.1. Природні процеси, вивчення яких приводить до задач для параболічних рівнянь.</p> <p>2.2.2. Постановки задач для рівняння теплопровідності.</p> <p>Тема 2.3. Математичні моделі стаціонарних процесів.</p>

2.3.1. Природні процеси, вивчення яких приводить до задач для еліптичних рівнянь.

2.3.2. Постановки задач для рівняння Пуассона (Лапласа).

Тема 2.4. Поняття коректності задач для рівнянь з частинними похідними.

Змістовий модуль 3. Задача Коші для рівнянь з частинними похідними другого порядку.

Тема 3.1. Задача Коші для загальних лінійних рівнянь другого порядку.

3.1.1. Постановка задачі Коші. Характеристична поверхня (лінія).

3.1.2. Задача Коші в класі аналітичних функцій. Теорема Коші-Ковалевської.

Тема 3.2. Задача Коші для рівняння коливань.

3.2.1. Існування розв'язку задачі Коші для рівняння коливань.

3.2.1.1. Формули Кірхгофа, Пуассона та Д'Аламбера розв'язку задачі Коші для однорідного рівняння коливань.

3.2.1.2. Існування розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння коливань.

3.2.2. Єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння коливань.

3.2.3. Неперервна залежність від вхідних даних розв'язку задачі Коші для рівняння коливань.

Тема 3.3. Задача Коші для рівняння теплопровідності.

3.3.1. Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності.

3.3.1.1. Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності з обмеженою областю визначення.

3.3.1.2. Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності з необмеженою областю визначення.

3.3.2. Існування розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності.

3.3.2.1. Фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності.

3.3.2.2. Формула Пуассона розв'язку задачі Коші для однорідного

рівняння теплопровідності.

3.3.2.3. Існування розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння теплопровідності.

3.3.3. Єдиність та неперервна залежність від вхідних даних розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності.

Змістовий модуль 4. Мішані задачі для рівнянь гіперболічного та параболічного типів.

Тема 4.1. Мішані задачі для гіперболічних рівнянь.

4.1.1. Класичний розв'язок першої мішаної задачі для однорідного рівняння коливання струни.

4.1.1.1 Деякі факти з теорії тригонометричних рядів.

4.1.1.2 Перша мішана задача для однорідного рівняння коливання струни в класичній постановці.

4.1.2. Задача Коші для диференціально-операторних рівнянь другого порядку.

4.1.2.1. Деякі поняття і факти з математичного та функціонального аналізу.

4.1.2.2. Коректність задачі Коші для диференціально-операторних рівнянь другого порядку.

4.1.2.2.1. Сильний розв'язок задачі Коші для диференціально-операторного рівняння другого порядку.

4.1.2.2.2. Слабкий розв'язок задачі Коші для диференціально-операторного рівняння другого порядку.

4.1.3. Існування, єдиність та неперервна залежність від вхідних даних узагальнених

розв'язків мішаних задач для рівняння коливань.

Тема 4.2. Мішані задачі для параболічних рівнянь.

4.2.1. Класичний розв'язок першої мішаної задачі для однорідного рівняння теплопровідності.

4.2.1.1. Постановка мішаних задач для одновимірного рівняння

теплопровідності.

4.2.1.2. Коректність першої мішаної задачі для одновимірного однорідного рівняння

теплопровідності (в класичній постановці).

4.2.2. Задача Коші для диференціально-операторних рівнянь першого порядку.

4.2.2.1. Сильний розв'язок задачі Коші для диференціально-операторного рівняння першого порядку.

4.2.2.2. Слабкий розв'язок задачі Коші для диференціально-операторного рівняння першого порядку.

4.2.3. Існування, єдиність та неперервна залежність від вихідних даних узагальнених розв'язків мішаних задач для рівняння теплопровідності.

4.2.4. Розв'язування задачі Коші для диференціального-операторного рівняння

з використанням півгруп лінійних обмежених операторів в гільбертовому просторі.

4.2.5. Задача Коші для загальних диференціально-операторних рівнянь.

Змістовий модуль 5. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу. Гармонічні функції.

Тема 5.1. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу.

5.1.1. Операторні рівняння.

5.1.2. Регулярні крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь.

5.1.2.1. Крайова задача для рівняння типу "рівняння Пуассона".

5.1.2.2. Крайова задача для рівняння типу "рівняння коливання струни".

5.1.3. Сингулярні крайові задачі.

Тема 5.2. Гармонічні функції та їх застосування.

5.2.1. Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа.

5.2.2. Перша і друга формули Гріна.

5.2.3. Властивості гармонічних функцій.

5.2.3.1. Інтегральне зображення гармонічної функції.

5.2.3.2. Нескінченна диференційовність гармонічної функції.

5.2.3.3. Інтеграл по замкненій поверхні від нормальної похідної гармонічної функції.

5.2.3.4. Теорема про середнє значення гармонічної функції на сфері та кулі.

5.2.3.5. Принцип екстремуму для гармонічної функції.

5.2.3.6. Усувні ізолювані особливі точки гармонічної функції.

5.2.3.7. Перетворення Кельвіна гармонічних функцій.

5.2.3.8. Поведінка на нескінченності регулярної гармонічної функції та її градієнта.

5.2.4. Застосування властивостей гармонічних функцій для дослідження крайових задач для еліптичних рівнянь.

5.2.4.1. Знаходження розв'язків задач Діріхле та Неймана для рівняння Лапласа за допомогою функції Гріна.

5.2.4.2. Єдиність та неперервна залежність від вхідних даних розв'язків задач Діріхле та Неймана для рівнянь Пуассона (Лапласа).

Змістовий модуль 6. Методи інтегральних перетворень розв'язування задач для гіперболічних та параболічних рівнянь.

Тема 6.1. Дискретні інтегральні перетворення.

Тема 6.2. Перетворення Фур'є.

Тема 6.3. Перетворення Лапласа.

Змістовий модуль 7. Теорія потенціалів для еліптичних рівнянь.

Тема 7.1. Поняття та властивості об'ємного та поверхневих потенціалів.

7.1.1. Поняття та властивості об'ємного потенціалу.

7.1.2. Поняття та властивості потенціалу подвійного шару.

7.1.3. Поняття та властивості потенціалу простого шару

	<p>Тема 7.2. Зведення крайових задач для рівняння Лапласа до інтегральних рівнянь та їх дослідження.</p> <p>7.2.1. Основи теорії інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду.</p> <p>7.2.2. Зведення крайових задач для рівняння Лапласа до інтегральних рівнянь.</p> <p>7.2.3. Дослідження на розв'язність інтегральних рівнянь, до яких зводяться крайові задачі для рівняння Лапласа.</p>
Підсумковий контроль, форма	Залік в 5-ому семестрі, іспит в 6-ому семестрі
Пререквізити	Для вивчення даного курсу студенти повинні мати базові знання з: <ul style="list-style-type: none"> - алгебри та геометрії. - математичного аналізу.
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	Презентації, лекції, інтерактивна комунікація
Необхідне обладнання	Комп'ютер із необхідним програмним забезпеченням, доступ до Internet мережі.
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	<p>Оцінювання проводиться в кожному семестрі за 100-бальною шкалою.</p> <p>Бали в 5-ому семестрі нараховуються так:</p> <ul style="list-style-type: none"> • контрольна робота №1 – 16; контрольна робота №2 – 12; контрольна робота №3 – 15; колоквіум №1 – 10; колоквіум №2 – 10; виконання домашніх завдань – 24; самостійні роботи – 10, премія за активну роботу на заняттях – 3. Всього – 100. <p>Бали в 6-ому семестрі нараховуються так:</p> <ul style="list-style-type: none"> • контрольна робота №4 – 8; контрольна робота №5 – 8; контрольна робота №6 – 8; контрольна робота №7 – 8; колоквіум №3 – 6; колоквіум №4 – 6; колоквіум №5 – 6; іспит – 50. Всього – 100. <p>Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Списування та втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в написанні завдань є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p>

	<p>Відвідання занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів робіт, передбачених курсом.</p> <p>Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали, набрані при поточному контролі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвочасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p>
Питання до заліку чи екзамену	Перелік питань розміщений на сторінці курсу.
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

**Схема курсу “Рівняння математичної фізики”
для студентів спеціальностей 111 – математика, 014 – середня освіта (математика)**

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин			
	Денна форма			
	Усього	у тому числі		
лекцій		практичних	самостійна робота	
1	2	3	4	5
Змістовий модуль 1. Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь другого порядку. Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними.				

Тема 1.1. Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь.	8	3	3	2
Тема 1.2. Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними.	3	1	1	1
Змістовий модуль 2. Математичні моделі природних процесів.				
Тема 2.1. Математичні моделі процесів коливань.	2	1	-	1
Тема 2.2. Математичні моделі процесів теплопровідності та дифузії.	2	1	-	1
Тема 2.3. Математичні моделі стаціонарних процесів.	2	1	-	1
Тема 2.4. Поняття коректності задач для рівнянь з частинними похідними.	2	1	-	1
Змістовий модуль 3. Задача Коші для рівнянь з частинними похідними другого порядку.				
Тема 3.1. Задача Коші для загальних лінійних рівнянь другого порядку.	1,5	0,5	-	1
Тема 3.2. Задача Коші для рівняння коливань.	4,5	1,5	2	1
Тема 3.3. Задача Коші для рівняння теплопровідності.	5	2	2	1
Змістовий модуль 4. Мішані задачі для рівнянь гіперболічного та параболічного типів.				
Тема 4.1. Мішані задачі для гіперболічних рівнянь.	26	10	8	8
Тема 4.2. Мішані задачі для параболічних рівнянь.	18	8	4	6
Разом – змістовий модуль 4				
Змістовий модуль 5. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу. Гармонічні функції.				

Тема 5.1. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу.	12	4	4	4
Тема 5.2. Гармонічні функції та їх застосування.	12	6	-	6
Змістовий модуль 6. Методи інтегральних перетворень розв'язування задач для гіперболічних та параболічних рівнянь.				
Тема 6.1. Дискретні інтегральні перетворення.	8	2	4	2
Тема 6.2. Перетворення Фур'є.	4	1	2	1
Тема 6.3. Перетворення Лапласа.	4	1	2	1
Змістовий модуль 7. Теорія потенціалів для еліптичних рівнянь.				
Тема 7.1. Поняття та властивості об'ємного та поверхневих потенціалів.	4	2	-	2
Тема 7.2. Зведення крайових задач для рівняння Лапласа до інтегральних рівнянь та їх дослідження.	4	2	-	2
Контрольні роботи №№ 1 -- 7		-	14	
	90	48	48	42

Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Класифікація і зведення до канонічного вигляду майже лінійних рівнянь	3
2.	Метод характеристик знаходження розв'язків лінійних гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними	1
3.	Контрольна робота №1	2
4.	Задача Коші для рівняння коливань	2
5.	Задача Коші для рівняння теплопровідності	2
6.	Контрольна робота №2	2
7.	Задачі Штурма-Ліувілля на власні значення і функції	2

8.	Мішані задачі для коливання струни	2
9.	Контрольна робота №3	2
10.	Мішані задачі для прямокутної мембрани	2
11.	Мішані задачі для круглої мембрани	2
12.	Контрольна робота №4	2
13.	Мішані задачі для рівняння теплопровідності в стержні	2
14.	Мішані задачі для рівняння теплопровідності в циліндрі	2
15.	Контрольна робота №5	2
16.	Крайові задачі для рівняння Пуассона в прямокутнику	2
17.	Крайові задачі для рівняння Пуассона в крузі, зовні круга і в кільці	2
18.	Контрольна робота №6	2
19.	Функція Гріна та її використання при розв'язуванні крайових задач для рівнянь Лапласа і Пуассона	2
20.	Дискретні інтегральні перетворення	2
22.	Інтегральне перетворення Фур'є	2
23.	Інтегральне перетворення Лапласа	2
24.	Контрольна робота №7	2
Разом:		48

Викладач: проф. М.М. Бокало