Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу

Методичні вказівки до курсу

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Уклав доц. Т.С.Кудрик

гр. МТП - 21С

Львів - 2023

Метричні простори

12.1 Нехай (X, d) - метричний простір. Довести, що
1) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$;
2) $|d(x,z) - d(y,t)| \leq d(x,y) + d(z,t)$ (нерівність чотирикутника)

1) За аксіомою трикутника

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$$

звідки

$$d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y), \qquad (*)$$

де x, y, z - довільні елементи множини X.

Тому аналогічно, замінивши x на y і y на x, одержимо

$$d(y,z) - d(z,x) \leq d(y,x)$$

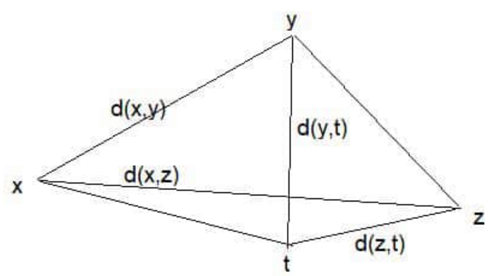
або

$$-(d(x,z) - d(z,y)) \leq d(x,y). \qquad (**)$$

Із нерівностей $(*)$ і $(**)$ випливає, що

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

2) Ілюстрація - пояснення назви цієї властивості:



Доведення:

$$|d(x,z) - d(y,t)| = |d(x,z) - d(x,t) + d(x,t) - d(y,t)| \leq$$

$$\leq |d(x,z) - d(x,t)| + |d(x,t) - d(y,t)| \leq d(z,t) + d(x,y)$$

за доведеним у пункті 1).

12.3. З'ясувати, чи є функція d віддаллю на множині X, якщо

$$X = \mathbb{R}, \qquad d(x,y) = \sqrt{|x-y|}.$$

Легко довести, що це справді віддаль. Потрібно перевірити виконання аксіом віддалі для функції d. Аксіоми віддільності і симетрії тут очевидні. Пояснимо, що аксіома трикутника також виконується:

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sqrt{|x-y|} \le \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|y-z|} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad |x-y| \le |x-z| + |y-z| + 2\sqrt{|x-z| \cdot |y-z|}.$$

Одержана в результаті еквівалентних перетворень нерівність, очевидно, правильна, тому що $|x-y| \le |x-z| + |y-z|$, а додатковий доданок праворуч може тільки збільшити праву частину нерівності.

12.4. $\qquad X = \mathbb{R}, \qquad d(x,y) = |x-y|^2.$

Ця функція d не є віддаллю, бо не виконується нерівність трикутника. Для доведення розглянемо певні дійсні числа:

$$x = 0, \qquad y = 1, \qquad z = \frac{1}{2}.$$

Для цих елементів множини $\mathbb{R}$ маємо

$$d(x,y) = (0-1)^2 = 1 \not\le d(x,z) + d(y,z) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

12.9. Нехай X - довільна множина і

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in X \qquad d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Довести, що (X, d) є метричним простором. Він називається простором ізольованих точок.

Розглянемо всі можливі варіанти для трьох довільних елементів множини X:

1) Нехай $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$. Тоді нерівність трикутника $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ виглядає так: $1 \leq 1 + 1$, що, очевидно, правильно.

2) Нехай $x \neq y$, $y = z$, $x \neq z$. Тоді нерівність трикутника $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ виглядає так: $1 \leq 1 + 0$, що, очевидно, правильно.

3) Нехай $x \neq y$, $y \neq z$, $x = z$. Тоді нерівність трикутника $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ виглядає так: $1 \leq 0 + 1$, що, очевидно, правильно.

4) Нехай $x = y$, $y \neq z$, $x \neq z$. Тоді нерівність трикутника $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ виглядає так: $0 \leq 1 + 1$, що, очевидно, правильно.

5) Нехай $x = y = z$. Тоді $0 \leq 0 + 0$ - правильно.

12.11. Довести, що в кожному з просторів $\mathbb{R}_1^m$, $\mathbb{R}_2^m$, $\mathbb{R}_\infty^m$ збіжність (фундаментальність) послідовності $(x_n)_{n=1}^\infty$, де $x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(m)})$, рівносильна збіжності (фундаментальності) кожної з послідовностей $(x_n^{(1)}), \ldots, (x_n^{(m)})$, зокрема, кожний з цих просторів є повним.

Доведення для $\mathbb{R}_1^m$. Нехай послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(m)})$ збігається до елемента $x = (x^1, \ldots, x^m)$ в $\mathbb{R}_1^m$. Це означає, що

$$d_1(x_n, x) = \sum_{k=1}^m |x_n^{(k)} - x^{(k)}| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Якщо сума модулів збігається до нуля, то зрозуміло, що для кожного k (від 1 до m) також $|x_n^{(k)} - x^{(k)}| \to 0$. А це означає, що для кожного k послідовність $(x_n^{(k)})$ збігається до $x^{(k)}$.

Очевидно, що правильне і обернене твердження, бо якщо всі доданки суми збігаються до нуля, то так само поводить себе і скінченна сума нескінченно малих величин.

Так само проводиться доведення про фундаментальність.

Тепер доведемо повноту простору $(\mathbb{R}_1^m)$. Нехай послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(m)})$ фундаментальна в $\mathbb{R}_1^m$. Це означає, що

$$d_1(x_p, x_q) \to 0 \quad \text{при} \quad p, q \to \infty,$$

тобто

$$\sum_{k=1}^m |x_p^{(k)} - x_q^{(k)}| \to 0.$$

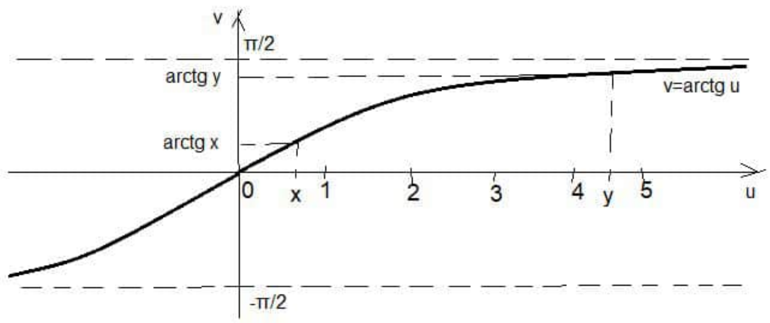
Звідси випливає, що

$$|x_p^{(k)} - x_q^{(k)}| \to 0$$

для довільного фіксованого k. Це означає, що послідовність $(x_p^{(k)})_{p=1}^\infty$ є фундаментальною в $(\mathbb{R}, d)$, де d - звичайна віддаль на $\mathbb{R}$. За критерієм Коші з курсу математичного аналізу послідовність $(x_n^{(k)})$ збіжна, тобто $x_n^{(k)} \to x^{(k)} \in \mathbb{R}$ (для кожного фіксованого k). Тоді $x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(m)}) \to x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$, тому що $d_1(x_n, x) = \sum\limits_{k=1}^m |x_n^{(k)} - x^{(k)}| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$. Отже, з фундаментальності послідовності (x_n) випливає її збіжність. Тому простір повний.

12.17. Довести, що d є метрикою на $\mathbb{R}$ і дослідити метричний простір $(\mathbb{R}, d)$ на повноту:

$$d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|.$$



Очевидно, що аксіоми метрики для d виконуються. Віддільність випливає з монотонності функції $v = \operatorname{arctg} u$; симетрія виконується, бо значення виразу для $d(x, y)$ не зміниться при заміні x на y і y на x; аксіома трикутника випливає з властивостей абсолютної величини.

Дослідимо простір на повноту. Легко навести приклад фундаментальної послідовності в цьому метричному просторі, яка не збігається. Нехай $x_n = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Тоді

$$d(x_n, x_{n+p}) = |\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(n + p)| = \left|\operatorname{arctg} \frac{n - (n + p)}{1 + n(n + p)}\right| =$$

$$= \left|\operatorname{arctg} \frac{-p}{1 + n^2 + np}\right| = \operatorname{arctg} \frac{p}{n^2 + np + 1} <$$

$$< \operatorname{arctg} \frac{p}{np} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

при достатньо великих n. Тому послідовність $x_n = n$ є фундаментальною. Вона не є збіжною до жодного фіксованого елемента множини $\mathbb{R}$.

Відповідь: заданий метричний простір не є повний.

12.22. Охарактеризувати всі збіжні (фундаментальні) послідовності в просторі ізольованих точок і довести, що цей простір є повним.

Легко зрозуміти, що збіжними (фундаментальними) в цьому метричному просторі є тільки стаціонарні (починаючи з деякого номера) послідовності. Достатньо взяти будь-яке число $\varepsilon < 1$ у відповідних означеннях. А якщо послідовність має вигляд

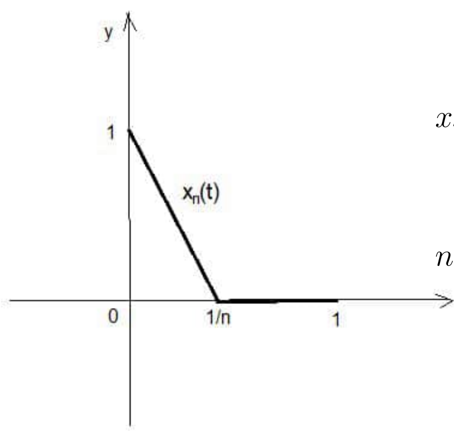
$$x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, x, x, x, \ldots,$$

то ця послідовність збігається до елемента x.

12.23. Дослідити на повноту метричний простір

$$X = C[0;1], \qquad \forall x, y \in C[0;1] \quad d(x,y) = \int\limits_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt.$$

Цей простір неповний, тому що в ньому існує фундаментальна послідовність, яка не є збіжною (в ньому!). Справді, розглянемо таку послідовність неперервних функцій:



$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{n} \le t \le 1, \\ 1 - nt, & 0 \le t \le \frac{1}{n}. \end{cases}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Оцінимо

$$d(x_n, x_{n+p}) = \int\limits_0^{\frac{1}{n+p}} [1 - nt - (1 - (n+p)t)]\, dt + \int\limits_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}} [1 - nt]\, dt =$$

$$= p\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{n+p}} + (t - n\frac{t^2}{2})\Big|_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}} = \frac{p}{2(n+p)^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+p} + \frac{n}{2(n+p)^2} =$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+p)} < \frac{1}{2n} < \varepsilon.$$

Але

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \le 1, \\ 1, & t = 0 \end{cases} = y(t) \notin C[0;1].$$

Наша фундаментальна послідовність збігається поточково до розривної функції. Доведемо, що послідовність функцій (x_n) не може збігатися до жодної неперервної функції.

Нехай

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \le 1, \\ 1, & t = 0, \end{cases}$$

а $x(t)$ - довільна функція з простору $C[0;1]$. Тоді

$$0 \le \int\limits_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt \le \int\limits_0^1 |x(t) - x_n(t)|\, dt + \int\limits_0^1 |x_n(t) - y(t)|\, dt.$$

Оскільки $\int\limits_0^1 |x_n(t) - y(t)|\, dt = \frac{1}{2n} \to 0$ при $n \to \infty$, то послідовність чисел $\int\limits_0^1 |x(t) - x_n(t)|\, dt = d(x_n, x)$ не може збігатися до нуля при $n \to \infty$ для жодної функції $x \in C[0;1]$, бо у протилежному випадку одержали б, що $\int\limits_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt = 0$, звідки $x(t) = y(t)$, що неможливо, бо $y(t)$ - розривна функція, а $x(t)$ неперервна.

Про вправи з лекції.

1. Приклад 3 про простір ℓ_2. Доповнення. У прикладі 1 лекції вже доведено, що для кожного фіксованого натурального числа n виконується нерівність

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2}. \qquad (*)$$

У поясненнях прикладу 3 вже встановлено, що нескінченний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k)^2$ збігається, якщо збігаються ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^2$.

Тому із нерівності $(*)$ випливає, що

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - y_k)^2}. \qquad (**)$$

А тепер перейдемо до границі у лівій частині нерівності $(**)$ при $n \to \infty$. Тоді зрозуміло, що виконується така нерівність:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - y_k)^2}.$$

А ця нерівність означає, що для заданої функції $\rho(x, y)$ виконується нерівність трикутника.

2. Доведемо, що будь-яка збіжна послідовність у метричному просторі є фундаментальною.

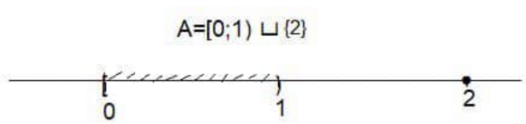
Справді, нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тоді згідно з аксіомою трикутника і означенням збіжності послідовності

$$\rho(x_{n'}, x_{n''}) \leq \rho(x_{n'}, a) + \rho(a, x_{n''}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

А це й означає, що послідовність фундаментальна.

Топологічні поняття

13.1. Нехай $X = \mathbb{R}$ і $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $d(x,y) = |x - y|$. У просторі (X,d) знайти замикання $\overline{A}$ та внутрішність $\operatorname{Int} A$ множини $A = [0;1) \cup \{2\}$.



$$\overline{A} = [0;1] \cup \{2\}, \qquad \operatorname{Int} A = (0;1),$$

2 - ізольована точка;

всі точки x відрізка $[0;1]$ - граничні, тому що існують послідовності $(x_n) \subset A$, збіжні до x, причому $1 \notin A$; замикання множини утворюється приєднанням до множини всіх її граничних точок;

всі точки відкритого інтервалу $(0;1)$ - внутрішні, тому що містяться в множині A разом із деяким своїм околом. Внутрішність множини - це сукупність всіх внутрішніх точок.

13.2. $A = \mathbb{Q}$.

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Int} \mathbb{Q} = \varnothing.$$

Перша рівність випливає з того, що для будь-якого дійсного числа існує збіжна до нього послідовність раціональних чисел, а друга - з того, що будь-який відкритий інтервал $(\alpha;\beta)$ містить ірраціональні числа і тому не міститься в $\mathbb{Q}$.

13.3. $A = \{\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^n} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

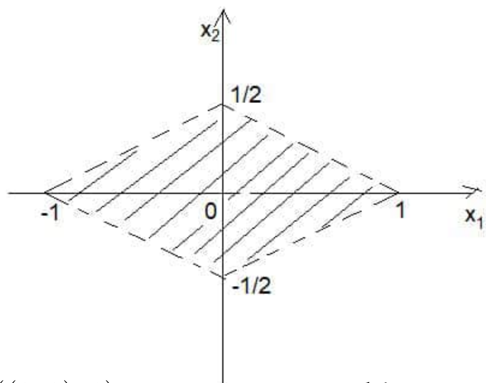
$$\overline{A} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, 0\}, \qquad \operatorname{Int} A = \varnothing.$$

13.4. У метричному просторі $(\mathbb{R}^2, d)$ зобразити кулі $B((0;0),1)$ та $\overline{B}((0;0),1)$, якщо

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1 - y_1| + 2|x_2 - y_2|.$$

За означенням відкритої кулі в метричному просторі

$B((0;0),1) = \{(x_1,x_2): \ d((x_1,x_2),(0,0)) < 1\} = \{(x_1,x_2): \ |x_1|+2|x_2| < 1\}.$



(ромб без границі)

$\overline{B}((0;0),1)$ - той самий ромб із границею.

13.5.

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + 4(x_2-y_2)^2}.$$

$B((0;0),1) = \{(x_1,x_2): \ d((x_1,x_2),(0,0)) < 1\} = \{(x_1,x_2): \ \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2} < 1\}.$

Зрозуміло, що це внутрішність еліпса $x_1^2 + \frac{x_2^2}{\frac{1}{4}} < 1$ з півосями 1 та $\frac{1}{2}$. Замкнена куля - той самий еліпс із границями.

13.6.
$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1-y_1|, 2|x_2-y_2|\}.$$

$$B((0;0),1) = \{(x_1,x_2): \ d((x_1,x_2),(0,0)) < 1\} = \{(x_1,x_2): \ \max\{|x_1|, 2|x_2|\} < 1\}.$$

Зрозуміло, що це внутрішність прямокутника з вершинами в точках $(1,\frac{1}{2})$, $(1,-\frac{1}{2})$, $(-1,\frac{1}{2})$, $(-1,-\frac{1}{2})$.

Замкнена куля - той самий прямокутник із границями.

13.7. Довести, що об'єднання будь-якої кількості, а також перетин скінченної кількості відкритих множин є відкритою множиною.

Нехай A_i - відкриті множини, $i \in I$, I - довільна (скінченна або нескінченна) множина.

Множина $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ відкрита, бо $\forall x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ $\exists i$: $x \in A_i$, звідки (оскільки A_i відкрита) $\exists \varepsilon > 0$: $B(x,\varepsilon) \subset A_i \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Це означає, що точка x належить до $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ разом із деяким ε-околом.

Множина $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ відкрита, бо $\forall x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ маємо, що $\forall i = \overline{1,n}$ $x \in A_i$, звідки $\exists \varepsilon_i > 0$: $B(x,\varepsilon_i) \subset A_i$. Візьмемо $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$. Тоді $B(x,\varepsilon) \subset A_i$ для кожного i. Звідси $B(x,\varepsilon) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

13.8. Довести, що перетин будь-якої кількості, а також об'єднання скінченної кількості замкнених множин є замкненою множиною.

Нехай B_i - довільна кількість замкнених множин і $B = \bigcap\limits_{i \in I} B_i$. Розглянемо довільну граничну точку x множини B і доведемо, що вона належить до B. Будь-який окіл $B(x, \varepsilon)$ містить нескінченно багато точок із B. Але тоді тим більше $B(x, \varepsilon)$ містить нескінченно багато точок із кожної множини B_i. Оскільки всі множини B_i замкнені, то точка x належить до кожної B_i. Тому $x \in B = \bigcap\limits_{i \in I} B_i$.

Нехай $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ - скінченне об'єднання замкнених множин і нехай точка $x \notin C$. Доведемо, що x не може бути граничною точкою множини C. Справді, x не належить до жодної з замкнених множин B_i і тому не є граничною точкою для жодної з них. Тому для кожного індекса i (від 1 до n) можна знайти такий окіл $B(x, \varepsilon_i)$, який містить не більше ніж скінченне число точок із B_i. Візьмемо найменший з околів $B(x, \varepsilon_1), \ldots, B(x, \varepsilon_n)$. Для числа $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ окіл $B(x, \varepsilon)$ містить не більше ніж скінченне число точок із B, що й т.б.д.

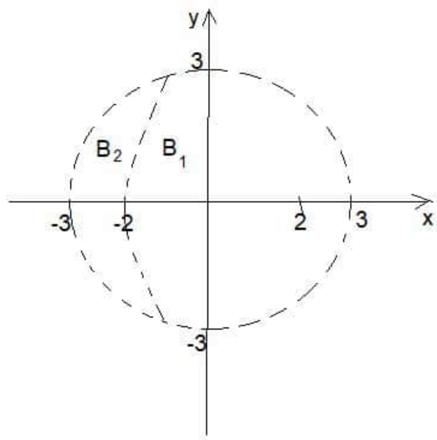
13.9. Підмножина метричного простору відкрита тоді і тільки тоді, коли її доповнення є замкненим.

Нехай M - відкрита множина в X. Тоді кожна точка із M має окіл, який повністю належить до M, тобто не має ні одної спільної точки з доповненням $X \setminus M$. Тому ні одна з точок, що не належать до $X \setminus M$, не може бути точкою дотику для множини $X \setminus M$, тобто множина $X \setminus M$ замкнена.

Навпаки, якщо $X \setminus M$ замкнена, то будь-яка точка із множини M має окіл, який повністю лежить в M, тобто M відкрита (бо якщо $x \in M$, то $x \notin X \setminus M$, тобто $\exists \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus M) = \varnothing$, тобто $B(x, \varepsilon) \subset M$).

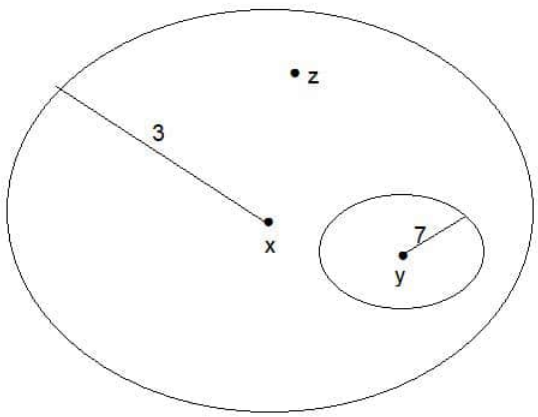
13.12. Чи може куля радіуса 4 бути власною підмножиною кулі радіуса 3?

Може. Для доведення розглянемо приклад. Нехай (X, d) - метричний простір всіх точок круга $x^2 + y^2 < 9$ зі звичайною евклідовою метрикою. Нехай $B_2 = X$ - куля радіуса 3, а $B_1 = \{(x, y): \ (x-2)^2 + y^2 < 16\}$ - куля радіуса 4. Тоді $B_1 \subset B_2$ і $4 > 3$.



13.13. Довести, що якщо куля радіуса 7 міститься в кулі радіуса 3, то ці кулі збігаються (тобто рівні).

Умовна ілюстрація до цього прикладу, бо, як ми бачили, кулі можуть виглядати інакше:



Нехай $d(x, y) < 3$ і існує z

таке, що

$d(x, z) < 3$, $d(z, y) \geq 7$.

Тоді
$$3 > d(x, y) \geq |d(y, z) - d(x, z)| \geq |7 - 3| = 4$$
- суперечність. Тому не може існувати такий елемент z. Це й означає, що кулі збігаються.

13.14. Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

Нехай (X, d) - повний метричний простір, $Y \subset X$ - замкнений підпростір. Розглянемо довільну фундаментальну послідовність в Y. Тоді ця сама фундаментальна послідовність є підмножиною простору X, який повний. Тому послідовність збігається до деякого елемента x: $x_n \to x$ у метричному просторі X і $x \in X$. Але $x_n \in Y$ і множина Y замкнена, тобто містить всі свої граничні точки. Тому $x \in Y$. Отже, Y - повний простір.

Простори першої та другої категорії.

14.1. Довести еквівалентність таких тверджень:

а) $\mathrm{Int}\overline{M} = \varnothing$**,**

б) $\overline{M}$ **не містить відкритих куль (тобто не є щільною в жодній відкритій кулі),**

в) $\overline{M}$ **не містить замкнених куль,**

г) $\overline{M}$ **не містить відкритих множин** .

Доведення від протилежного:

а) $\Rightarrow$ б) Якби множина $\overline{M}$ містила відкриту кулю, то тоді $\mathrm{Int}\overline{M} \neq \varnothing$

б) $\Rightarrow$ в) Якби $\overline{M}$ містила замкнену кулю, то тоді $\overline{M}$ містила би і цю саму відкриту кулю

б) $\Rightarrow$ г) Якби $\overline{M}$ містила відкриту множину, то тоді розглядаємо будь-яку точку цієї відкритої множини разом із деяким її околом - відкритою кулею, що суперечить умові

в) $\Rightarrow$ б) Множина $\overline{M}$ замкнена. Якби вона містила відкриту кулю, то містила би і цю саму замкнену

г) $\Rightarrow$ а) Якби $\mathrm{Int}\overline{M} \neq \varnothing$, то $\overline{M}$ містить деяку точку разом із околом - відкритою кулею. Це означає, що $\overline{M}$ містить відкриту множину - суперечність.

Завершити доведення!

14.2. Чи завжди одноточкова множина є ніде не щільною в метричному просторі?

Ні. У просторі ізольованих точок $\mathrm{Int}\overline{\{x\}} = \{x\} = B_\varepsilon(x) \neq \varnothing$.

14.3. Навести приклад двох скрізь щільних множин, перетин яких не є скрізь щільним.

У метричному просторі $(\mathbb{R}, d)$ зі звичайною віддаллю

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \quad \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \text{ але } \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \varnothing.$$

14.4. Довести, що доповнення до відкритої скрізь щільної множини є ніде не щільним.

Нехай A відкрита і скрізь щільна, тобто $\overline{A} = X$. Тоді за №13.9 доповнення до A, тобто множина $X \setminus A =: CA$, замкнене. Припустимо, що CA не є ніде не щільною множиною, тобто $\mathrm{Int}\overline{CA} \neq \varnothing$. Тоді (за №14.1) $\overline{CA}$ містить деяку кулю. Але $\overline{CA} = CA$. Тому CA містить деяку кулю. Звідси A не містить цієї кулі, тобто $\exists x \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall a \in A \; d(x, a) \geq \varepsilon$, тобто x не є точкою дотику множини A і $\overline{A} \not\ni \{x\}$ - суперечність.

14.5. Якщо X - повний метричний простір, $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ і кожна з множин F_k $(k = 1, 2, \ldots)$ є замкненою, то хоча би одна з множин F_k містить відкриту кулю.

Припустимо, що жодна з множин F_k не містить ні одної відкритої кулі. Оскільки F_k замкнена ($\overline{F_k} = F_k$), це означає, що кожна множина F_k ніде не щільна. Простір X є зліченним об'єднанням ніде не щільних множин F_k, тобто він першої категорії. За умовою він повний, а це суперечить теоремі Бера про категорії.

14.8. Повний метричний простір без ізольованих точок є незліченним.

Нехай X - повний метричний простір без ізольованих точок, тобто кожна точка x є граничною: $\forall \varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap X$ - нескінченна множина.

Припустимо, що $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$ - зліченне об'єднання одноточкових множин. Тоді за теоремою Бера хоча би одна з множин $\{x_i\}$ не є ніде не щільною, тобто $\mathrm{Int}\overline{\{x_i\}} \neq \varnothing$. Тому (за №14.1) $\exists \varepsilon$ $B(x, \varepsilon) \subseteq \{x_i\}$. Це означає, що x_i - ізольована точка множини X - суперечність.

14.9. Метричний простір, що складається з однієї точки, є повним. Чому це не суперечить теоремі Бера?

Суперечності немає, бо одноточкова множина $\{x\}$ не є ніде не щільною в метричному просторі $X = \{x\}$. Ця множина є скрізь щільна в X: $\overline{\{x\}} = X$.

Принцип стискаючих відображень

16.1. Нехай $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \overset{def}{=} \frac{\pi}{2} + x - \text{arctg}\ x$**. Довести, що**

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists \alpha \in (0;1):\ |f(x) - f(y)| < \alpha |x - y|,$$

проте f **не має нерухомих точок**.

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{\pi}{2} + x - \text{arctg}\, x - \frac{\pi}{2} - y - \text{arctg}\ y \right| =$$

$$= |x - y - (\text{arctg}\ x - \text{arctg}\ y)|.$$

Але за теоремою Лагранжа про кінцеві прирости

$$|\text{arctg}\ x - \text{arctg}\ y| = \left| (\text{arctg}\ t)'|_{t \in [x;y]} \cdot (x - y) \right| =$$

$$= \frac{1}{1+t^2} \cdot |x - y| \leq |x - y|.$$

Насправді тут строгий знак нерівності, бо рівність

$$\text{arctg}\ x - \text{arctg}\ y = x - y$$

неможлива. Справді, якби вона виконувалася, то тоді

$$x - \text{arctg}\ x = y - \text{arctg}\ y,$$

що неможливо, бо функція $v = u - \text{arctg}\ u$ є строго монотонно зростаючою: $(u - \text{arctg}\ u)' = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$ для всіх $x \neq 0$.

Із доведеного випливає, що

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

що можна записати і так:

$$|f(x) - f(y)| < \alpha |x - y|,$$

де константа $\alpha \in (0,1)$ може залежати від x і y.

Рівняння $f(x) = x$ не має розв'язків, бо якщо

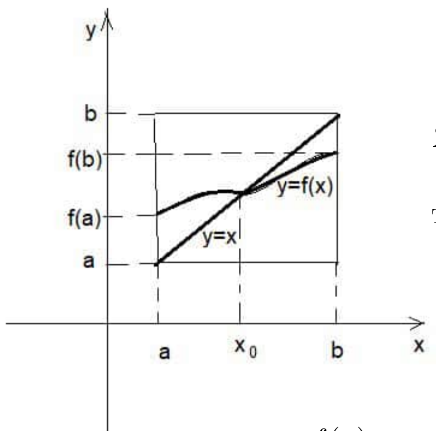
$$\frac{\pi}{2} + x - \text{arctg } x = x,$$

то

$$\text{arctg } x = \frac{\pi}{2},$$

що неможливо.

16.2. Довести, що будь-яке неперервне відображення відрізка в себе має нерухому точку.



Якщо $f(a) = a$ або $f(b) = b$,

то f має нерухому точку.

Тепер припустимо, що $f(a) > a$ і $f(b) < b$.

Розглянемо функцію

$$g(x) = f(x) - x.$$

За припущенням $g(a) > 0$ і $g(b) < 0$. За теоремою про проміжне значення неперервної функції існує така точка $x_0 \in (a,b)$, що $g(x_0) = 0$. А це означає, що

$$f(x_0) - x_0 = 0,$$

тобто

$$f(x_0) = x_0,$$

x_0 - нерухома точка.

16.4. Довести, що якщо $0 \le a \le 1$, $x_0 = 0$ і

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \quad \text{то} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

Знайдемо декілька послідовних значень членів послідовності x_n:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}a,$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - a\right) = a - \tfrac{1}{8}a^2,$$

$$x_3 = a - \tfrac{1}{8}a^2 - \tfrac{1}{2}\left((a - \tfrac{1}{8}a^2)^2 - a\right) = \dots$$

і т.д. Потрібно довести, що послідовність x_n збігається до числа $\sqrt{a}$. Такий метод побудови все точніших наближень $\sqrt{a}$ був відомий ще в Середньовіччі.

Розглянемо функцію $f(x) = x - \frac{1}{2}(x^2 - a)$ на $[0;1]$ за умови $a \in [0;1]$. Її графіком є парабола, причому $f(0) = \frac{1}{2}a$, $f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a$, $f'(x) = 1 - x \ge 0$, вершина параболи у точці $x = 1$. Нарисувати графік!

Зрозуміло, що $f(x)$ - неперервне відображення $[0;1]$ в себе. Тому згідно з результатом задачі 16.2 існує нерухома точка x відображення f, тобто така, що $x = f(x)$. Із рівняння $x = x - \frac{1}{2}(x^2 - a)$ випливає, що $x = \sqrt{a}$.

Залишається пояснити, що вказана вище послідовність збігається до $\sqrt{a}$. У випадку $a = 0$ маємо: $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n = 0$.

У випадку $0 < a \le 1$ розглянемо вказану вище функцію на відрізку $[\frac{a}{2}; 1]$. Легко довести, що в цьому випадку f є стиском:

$$|f(x) - f(y)| = |x - \tfrac{1}{2}(x^2 - a) - y + \tfrac{1}{2}(y^2 - a)| =$$

$$= |x - y - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2| = |x - y - \tfrac{1}{2}(x-y)(x+y)| =$$

$$= |x - y| \cdot |1 - \tfrac{x+y}{2}| \le \alpha \cdot |x - y|,$$

де $\alpha = 1 - \frac{a}{2} < 1$, тому що $x, y \ge \frac{a}{2}$.

Тому згідно з теоремою про стискуючі відображення вказана послідовність $\{x_n\}$ збігається до нерухомої точки відображення f.

16.5. Довести, що лінійний оператор $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, який у канонічній базі цього простору визначається матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

є узагальненим стиском (незалежно від вибору однієї з метрик d_1, d_2, d_∞).

Те, що A є узагальненим стиском, означає, що для деякого числа k відображення A^k є стиском. Щоб знайти результат дії оператора A на вектор (x_1, x_2, x_3), потрібно помножити дану матрицю на даний вектор.

Знайдемо матрицю оператора (відображення) A^2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тепер знайдемо матрицю A^3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тому A^3 - це нульове відображення ($A^3 : \mathbb{R}^3 \to \{0\}$), тобто стиск.

16.7. При яких $\lambda \in \mathbb{R}$ застосовний принцип стискаючих відображень у просторі $C[0;1]$ з метрикою $d(x,y) = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|$ до інтегрального рівняння

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^1 t^2 \cdot s \cdot x(s)\,ds + t \quad ?$$

При $\lambda = \frac{1}{2}$ знайти розв'язок методом послідовних наближень.

Розглянемо відображення $A : C[0;1] \to C[0;1]$, яке діє за формулою

$$(Ax)(t) = \lambda \int\limits_0^1 t^2 \cdot s \cdot x(s)\,ds + t.$$

Оцінимо

$$|(Ax)(t)-(Ay)(t)| = |\lambda| \cdot \left| \int\limits_0^1 t^2 \cdot s \cdot (x(s)-y(s)\,ds \right| \le$$

$$\le |\lambda| \cdot \max_{0\le t\le 1} t^2 \cdot \max_{0\le s\le 1}|x(s)-y(s)| \cdot \int\limits_0^1 s\,ds =$$

$$= |\lambda| \cdot 1 \cdot d(x,y) \cdot \frac{1}{2} = \frac{|\lambda|}{2} d(x,y).$$

Тому A - стиск при $|\lambda| < 2$.

Нехай тепер $\lambda = \frac{1}{2}$. Маємо інтегральне рівняння

$$x(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 t^2 \cdot s \cdot x(s)\, ds + t.$$

Візьмемо нульове наближення $x_0(t) \equiv 0$. Обчислюємо наступні наближення:

$$x_1(t) = t,$$

$$x_2(t) = \frac{t^2}{2} \int\limits_0^1 s^2\, ds + t = \frac{t^2}{6} + t,$$

$$x_3(t) = \frac{t^2}{2} \int\limits_0^1 \left(\frac{s^3}{6} + s^2 \right) ds + t = \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{3} \right) + t = \frac{t^2}{48} + \frac{t^2}{6} + t,$$

$$x_4(t) = \frac{t^2}{2} \int\limits_0^1 \left(\frac{s^3}{48} + \frac{s^3}{6} + s^2 \right) ds + t = \frac{t^2}{384} + \frac{t^2}{48} + \frac{t^2}{6} + t,$$

$$x_5(t) = \frac{t^2}{2} \int\limits_0^1 \left(\frac{s^3}{384} + \frac{s^3}{48} + \frac{s^2}{6} + s^2 \right) ds + t = \frac{t^2}{3056} + \frac{t^2}{384} + \frac{t^2}{48} + \frac{t^2}{6} + t,$$

і т.д. Легко довести, що $x_n(t) \to \frac{4}{21} t^2 + t$ при $n \to \infty$ $\left(\frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{4}{21} \right)$. Функція $x(t) = \frac{4}{21} t^2 + t$ є точним розв'язком даного інтегрального рівняння при $\lambda = \frac{1}{2}$.

16.13. Визначимо в $\mathbb{R}^n$ метрику так: $d_2(x,y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)^{1/2}$. Довести, що лінійний оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ з матрицею $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ є стискуючим, якщо $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 < 1$.

Знайдемо і оцінимо квадрат відстані між образами довільних векторів $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d_2^2(Ax, Ay) = \sum_{k=1}^{n}\left((Ax)_k - (Ay)_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}y_j\right)^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x_j - y_j)\right)^2 \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right) \cdot d_2^2(x,y)$$

(тут використали нерівність Коші-Буняковського).

17. Компактність у метричних просторах

Спочатку нагадаємо твердження з курсу математичного аналізу. Відома лема Гейне-Бореля (деколи називають лемою Бореля-Лебега) стверджує:

Із будь-якої системи інтервалів, що покривають скінченний відрізок, можна вибрати скінченну підсистему, що також покриває цей відрізок.

(Самостійно довести або знайти доведення.)

Ця лема фундаментальна для аналізу і топології. На основі цього твердження запроваджено різні поняття компактності.

Метричний простір (X, d) називають компактним, якщо з будь-якого його покриття відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття, тобто якщо для будь-якої системи $\{G_\alpha\}$ відкритих множин такої, що $X = \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$, існують такі $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_n} \in \{G_\alpha\}$, що $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_n}$.

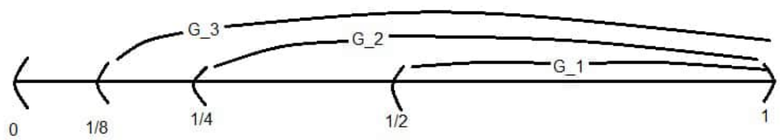
Множину $K \subset X$ називають компактною, якщо K, що розглядається як метричний простір з індукованою метрикою, є компактним.

Нескладно довести, що множина K є компактною тоді і тільки тоді, коли з будь-якої нескінченної послідовності її елементів можна вибрати збіжну в K підпослідовність. (Саме це взято за означення у лекціях.)

17.1. Для множини $(0, 1)$, яку розглядаємо як підпростір метричного простору $(\mathbb{R}, d)$, де $d(x, y) = |x-y|$, навести приклад відкритого покриття, що не містить скінченного підпокриття.

Розглянемо таку нескінченну систему відкритих інтервалів:

$$(\frac{1}{2^n}, 1), \quad \text{де} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

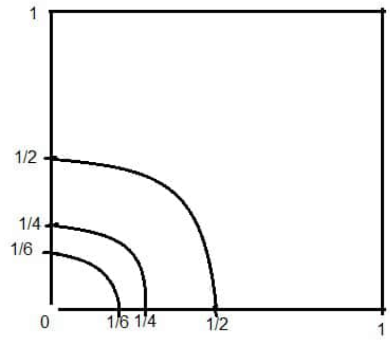


Зрозуміло, що кожне дійсне число $x \in (0,1)$ належить до інтервалів цієї системи, бо $x > \frac{1}{2^n}$ для всіх номерів n, починаючи з деякого n_0.

Тому $(0,1) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}, 1)$. Із цього нескінченного покриття інтервалу $(0,1)$ неможливо вибрати скінченне підпокриття, бо у будь-якого скінченного набору таких інтервалів знайдеться найбільший номер N і відповідний найменший лівий кінець $\frac{1}{2^N}$ і тоді всі числа $x \in (0, \frac{1}{2^N}]$ залишаться непокритими.

17.2. Для множини $([0,1] \times [0,1]) \setminus \{0,0\}$ навести приклад відкритого покриття, що не містить скінченного підпокриття.

Задана множина являє собою квадрат зі стороною 1 з виколотою лівою нижньою вершиною на площині. Розглянемо, наприклад, таке покриття цієї множини відкритими кільцями: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{1}{2n}\right)^2 < x^2 + y^2 < 2^2\}$. (Зовнішній радіус можна зменшити як завгодно близько до числа $\sqrt{2}$ і кожний наступний зовнішній радіус також можна зменшити.)



Очевидно, що ніяка скінченна підсистема цієї системи кілець не покриє лівий нижній кут цього квадрата.

17.4. Довести, що компактна множина є замкненою.

Нехай множина $K \subset X$ є компактною множиною у метричному просторі (X, d). Доведемо, що доповнення до множини K є відкритою множиною. Потрібно показати, що довільна точка $x_0 \in X \setminus K$ є внутрішньою точкою цього доповнення, тобто належить до доповнення разом із деяким своїм околом. Для кожного елемента $x \in K$ позначимо $r(x) = \frac{1}{3}d(x, x_0)$. Тоді зрозуміло, що відкрита куля $B(x, r(x))$ з центром у точці x і радіусом $r(x)$ не перетинається з відкритою кулею $B(x_0, r(x))$. Очевидно, що сукупність всіх куль $\{B(x, r(x)) : \ x \in K\}$ є відкритим покриттям множини K. За умовою множина K компактна, тому з цього покриття можна вибрати скінченне підпокриття $\{B(x_1, r(x_1)), B(x_2, r(x_2)), \ldots, B(x_n, r(x_n))\}$, де n - деяке скінченне число. Позначимо $\varepsilon := \min(r(x_1), r(x_2), \ldots, r(x_n))$. Для кожного номера i (від 1 до n) $B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_0, \varepsilon) = \varnothing$. Крім цього, $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Тому $K \cap B(x_0, \varepsilon) = \varnothing$. А це означає, що $B(x_0, \varepsilon) \subset X \setminus K$, що й т.б.д.

17.6. Довести, що об'єднання скінченної кількості компактних множин є компактною множиною.

Нехай множина A у довільному метричному просторі є об'єднанням скінченної кількості компактних множин: $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Міркуємо згідно з означенням компактності. Нехай $G = \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ - довільне покриття множини A. Тоді зрозуміло, що G є і покриттям кожної з множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Оскільки множина A_1 компактна, то існує скінченне підпокриття $\bigcup\limits_{i=1}^{n_1} G_{\alpha_i} \supset A_1$, а оскільки множина A_2 компактна, то існує скінченне підпокриття $\bigcup\limits_{i=1}^{n_2} G_{\alpha_i} \supset A_2$, і т.д. до номера n включно. Об'єднаємо всі елементи G_α цих скінченних підпокриттів. Одержимо скінченний набір. Тоді очевидно, що $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{i=1}^{n_k} G_{\alpha_i} \supset A$. А це означає, що множина A компактна.

Аналогічно можна довести, що перетин будь-якої (скінченної чи нескінченної) кількості компактних множин є компактною множиною.

17.14. Нехай A - компактна множина в метричному просторі (X, d). Довести, що

$$(\forall x \in X)(\exists y \in A) \quad d(x, y) = \inf_{\alpha \in A} d(x, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{dist}(x, A),$$

де $\operatorname{dist}(x, A)$ називають віддаллю від елемента x до множини A. (Іншими словами, потрібно довести, що віддаль від довільного елемента x до компактної множини A завжди досягається на певному конкретному елементі y.)

Нехай a_n - послідовність у множині A, яка реалізує цю точну нижню грань (інфімум), тобто (згідно з означенням точної нижньої грані числової множини) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists a_n \in A$: $d(x, a_n) < \inf\limits_{a \in A} d(x, a) + \frac{1}{n}$. Оскільки A - компактна множина, то можна вибрати збіжну в A підпослідовність (a_{n_k}). Нехай $a_{n_k} \to y \in A$ при $k \to \infty$. Тепер використаємо неперервність функції віддалі d (неперервність функції d випливає з вправи 12.1, яку розглядали в темі "Метричні простори"). Із записаної вище нерівності випливає, що $\lim\limits_{k \to \infty} d(x, a_{n_k}) = d(x, y) \leq \inf\limits_{a \in A} d(x, a)$. Оскільки $y \in A$, то звідси зрозуміло, що $d(x, y) = \inf\limits_{a \in A} d(x, a)$.

Аксіоми норми. Норма та метрика.

Еквівалентні норми.

Банахові простори.

18.2i). Нехай $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ - дві норми на лінійному просторі X. Чи можна прийняти за норму елемента $x \in X$ таку величину: $\|x\|_1 + \|x\|_2$?

Перевіримо аксіоми норми:

1) $\|x\| \overset{def}{=} \|x\|_1 + \|x\|_2 = 0 \;\Rightarrow\; \|x\|_1 = 0$ і $\|x\|_2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$.

2) $\|ax\| \overset{def}{=} \|ax\|_1 + \|ax\|_2 = |a| \cdot \|x\|_1 + |a| \cdot \|x\|_2 = |a| \cdot \|x\|$.

3) $\|x+y\| \overset{def}{=} \|x+y\|_1 + \|x+y\|_2 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 + \|x\|_2 + \|y\|_2 = \|x\| + \|y\|$.

Тому це норма.

Аналогічно пояснюються пункти ii), iii), v) - це норми.

У пунктах iv), vi) не норми, бо не виконуються аксіоми (які саме?).

18.2. ii) $\max(\|x\|_1, \|x\|_2)$.

Доведемо, що $\|x\| := \max(\|x\|_1, \|x\|_2)$ - справді норма.

1) Очевидно, $\|x\| \geq 0$, бо максимум з двох невід'ємних чисел завжди невід'ємний. Якщо $\|x\| = 0$, то й максимум рівний 0, а тоді згідно з першою аксіомою для першої і другої норм маємо, що елемент x є нульовим елементом простору.

2)
$$\|\lambda x\| = \max(\|\lambda x\|_1, \|\lambda x\|_2) = \max(|\lambda| \cdot \|x\|_1, |\lambda| \cdot \|x\|_2) =$$

$$= |\lambda| \cdot \max(\|x\|_1, \|x\|_2) = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

3) Чи обов'язково виконується нерівність

$$\|x+y\| = \max(\|x+y\|_1, \|x+y\|_2) \leq \max(\|x\|_1, \|x\|_2)+\max(\|y\|_1, \|y\|_2) = \|x\|+\|y\|, \quad (*)$$

якщо відомо, що

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 \quad (**)$$

і

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \quad (***) \quad ?$$

Очевидно, що нерівність (*) завжди правильна, тому що права частина нерівності (*) може бути тільки більшою від більшої з правих частин нерівностей (**) і (***). Але одна з тих правих частин (**) і (***) вже була не меншою, ніж максимальна ліва частина нерівностей (**) і (***).

18.2. iii) $\alpha(\|x\|, \alpha > 0$.
Очевидно, що аксіоми норми для такої функції виконуються.

18.2. iv) $\|x\|_1 - \|x\|_2$.

Якщо для деякого елемента $x \in X$ виконується нерівність $\|x\|_1 < \|x\|_2$, то зрозуміло, що не виконується аксіома невід'ємності норми.

Але якщо $\forall x \in X$ виконується $\|x\|_1 \geq \|x\|_2$, то це може бути норма. Наприклад, якщо норми пропорційні, як у випадку iii). Самостійно подумайте про випадок непропорційних норм.

Пункт v) із min аналогічний до ii).
Пункт vi) $-\|x\|$ - очевидно, не норма.

18.3. Нехай $(X, \|\cdot\|)$ - нормований простір. Довести, що для будь-яких $x, y \in X$ виконується така нерівність:

$$\|x\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

Якби для деяких $x, y \in X$ виконувалася нерівність

$$\|x\| > \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\},$$

то тоді згідно з аксіомою трикутника маємо таке:

$$\|2x\| = \|x+y+x-y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\| < 2\|x\|.$$

Це суперечить аксіомі однорідності норми.

18.8. Нехай X - лінійний простір, а d - віддаль на X. Довести, що d породжується деякою нормою тоді і тільки тоді, коли:

1) $\forall \alpha \in \Phi \ \forall x \in X \ d(0, \alpha x) = |\alpha| \cdot d(0, x)$ (тут Φ - поле скалярів, тобто множина дійсних або комплексних чисел),

2) $\forall x, y, z \in X \ d(x+z, y+z) = d(x, y)$.

Необхідність. Припустимо, що віддаль d породжується нормою. Це означає, що $d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x - y\|$. Потрібно довести, що виконуються умови 1) і 2).

Маємо

$d(0, \alpha x) \stackrel{\text{def}}{=} \|0 - \alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| = |\alpha| \cdot d(0, x)$,

$d(x+z, y+z) \stackrel{\text{def}}{=} \|x + z - y - z\| = \|x - y\| = d(x, y)$.

Достатність. Припустимо, що виконуються умови 1) і 2). Потрібно довести, що на метричному просторі (X, d) можна запровадити норму, що породжує цю метрику. Визначимо $\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} d(0, x)$. Легко перевірити, що для так визначеної норми виконуються всі аксіоми норми:

$\|x\| \geq 0$, бо $d \geq 0$;

$\|\alpha x\| = d(0, \alpha x) = |\alpha| \cdot d(0, x) = |\alpha| \cdot \|x\|$;

$\|x + y\| = d(0, x + y) = d(-x, y) \leq d(-x, 0) + d(0, y) = \|x\| + \|y\|$.

Крім цього, $\|x - y\| = d(0, x - y) = d(0 + y, x - y + y) = d(y, x) = d(x, y)$.

18.9. Довести, що визначена на $\mathbb{R}$ віддаль не породжується ніякою нормою:

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Перевіримо умову і) прикладу 18.8:

$$d(0,\alpha x) = \frac{|-\alpha x|}{1+|-\alpha x|} = \frac{|\alpha|\cdot|x|}{1+|\alpha|\cdot|x|} \neq |\alpha|\cdot\frac{|x|}{1+|x|} = |\alpha|\cdot d(0,x),$$

тому що рівність тут правильна тільки за умови $|\alpha| = 1$.

Тому d не породжується нормою.

19.1. Довести, що відношення еквівалентності норм є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Рефлексивність і симетричність очевидні. Доведемо транзитивність.

Нехай $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ і $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3$. Згідно з означенням еквівалентності норм це означає, що для кожного елемента x виконуються такі нерівності:

$\|x\|_1 \leq C_1\|x\|_2$ і $\|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$ і $\|x\|_2 \leq C_3\|x\|_3$ і $\|x\|_3 \leq C_4\|x\|_2$.

Тоді маємо

$\|x\|_1 \leq C_1\|x\|_2 \leq C_1C_3\|x\|_3 = C_5\|x\|_3$

і $\|x\|_3 \leq C_4C_2\|x\|_1 = C_6\|x\|_1$.

А це й означає, що $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$.

19.2. Послідовність у нормованому просторі збіжна відносно однієї з еквівалентних норм тоді і тільки тоді, коли вона збіжна відносно другої.

Припустимо, що довільна послідовність x_n збігається до деякого елемента x нормованого простору X за нормою $\|\cdot\|_1$. Це означає, що $\|x_n - x\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$.

Нехай $\|\cdot\|_2$ - норма в X, яка еквівалентна до $\|\cdot\|_1$. Згідно з означенням існує таке число $C > 0$, що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$.

Тепер доведемо, що послідовність x_n збігається до того самого елемента x нормованого простору X за нормою $\|\cdot\|_2$. Справді, маємо

$$\|x_n - x\|_2 \leq C\|x_n - x\|_1 \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty,$$

тому що C - константа, а $\|x_n - x\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$.

Так само доводимо, що зі збіжності за нормою $\|\cdot\|_2$ випливає збіжність за нормою $\|\cdot\|_1$.

19.3. Якщо лінійний простір є повним відносно однієї з двох еквівалентних норм, то він є повним і відносно другої.

Розглянемо довільну фундаментальну відносно $\|\cdot\|_2$ послідовність. Якщо ж послідовність (x_n) є фундаментальною відносно $\|\cdot\|_2$, то вона є фундаментальною і відносно $\|\cdot\|_1$, бо $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$:

$$\|x_p - x_q\|_1 \leq C_1 \|x_p - x_q\|_2 \to 0 \text{ при } p, q \to \infty.$$

Якщо лінійний простір X повний відносно $\|\cdot\|_1$, то кожна фундаментальна відносно $\|\cdot\|_1$ послідовність (x_n) збігається в X до деякого x (за нормою $\|\cdot\|_1$).

Тепер доведемо, що $x_n \to x$ за нормою $\|\cdot\|_2$:

$$\|x_n - x\|_2 \le C_2\|x_n - x\|_1 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Тому X повний відносно $\|\cdot\|_2$.

19.4. Якщо підмножина є відкритою (замкненою) відносно однієї з еквівалентних норм, то вона відкрита (замкнена) й відносно другої. Іншими словами, еквівалентні норми породжують ту саму топологію (сукупність відкритих множин).

Нехай $M \subset X$ відкрита відносно норми $\|\cdot\|_1$, тобто кожна точка $x \in M$ міститься в M разом з деяким $B(x, \varepsilon)$-околом.

Нехай $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$. Це означає, зокрема, що $\exists C > 0$ таке, що $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$.

Розглянемо тепер $B(x, \frac{\varepsilon}{C})$-окіл точки x відносно $\|\cdot\|_2$.

Маємо $\forall y \in B(x, \frac{\varepsilon}{C})$ $\|y - x\|_1 \leq C\|y - x\|_2 < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$.

Тому $y \in M$ і $B(x, \frac{\varepsilon}{C}) \subset M$. Це означає, що точка x міститься в M разом із $\frac{\varepsilon}{C}$-околом відносно норми $\|\cdot\|_2$. Тому $M \subset X$ відкрита відносно норми $\|\cdot\|_2$.

Для доведення цього твердження про замкнені множини скористатися результатом прикладу 13.9.

19.7. Чи еквівалентні на просторі неперервних функцій, визначених на $[a, b]$, такі норми:

$$\text{i)} \quad \max_{a \le t \le b} |x(t)|, \qquad \text{ii)} \quad \int_a^b |x(t)|\, dt \ ?$$

Позначимо $\|x\| = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)|$, $\|x\|_1 = \int\limits_a^b |x(t)|\, dt$.

Оцінимо норму $\|x\|_1$:

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt \le \max_{a \le t \le b} |x(t)| \cdot (b - a) = (b - a)\|x\|,$$

тобто $\|x\|$ сильніша від норми $\|x\|_1$.

Доведемо, що $\|x\|_1$ не є сильніша від норми $\|x\|$. Для цього, не обмежуючи загальності, припустимо, що $a = 0$, $b = \pi$. У просторі $C[0;\pi]$ розглянемо таку послідовність функцій:

$$x_n(t) = \begin{cases} \sin nt, & 0 \le nt \le \pi, \\ 0, & \frac{\pi}{n} \le t \le \pi. \end{cases}$$

Обчислимо

$$\|x_n\| = \max_{0 \le t \le \pi} |\sin nt| = 1, \quad \|x_n\|_1 = \int\limits_0^\pi |x_n(t)|\, dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} |\sin nt|\, dt = \frac{2}{n}.$$

Не існує такої константи C, що для кожного числа n $1 \le C \cdot \frac{2}{n}$.
Тому ці норми не еквівалентні.

20.1. Переконатися, що виконуються аксіоми норми і визначити, чи простір є банаховим:

$$\mathbb{R}^m \text{ (або } \mathbb{C}^m\text{) з нормою } \|x\|_p = \|(x_1, x_2, \ldots, x_m)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1).$$

Аксіома про невід'ємність норми, рівність до нуля тоді і тільки тоді, коли елемент нульовий, та аксіома напіводнорідності тут очевидно виконуються.

Для перевірки аксіоми опуклості потрібно застосувати нерівність Мінковського:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тепер доведемо повноту цього простору. Нехай $(x^{(n)})$ - довільна фундаментальна послідовність в $\mathbb{R}^m$, тобто

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k^{(r)} - x_k^{(s)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \text{ при } r, s \to \infty. \qquad (*)$$

Звідси $|x_k^{(r)} - x_k^{(s)}| \to 0$ при $r, s \to \infty$ для кожного номера k, тобто послідовність k-их координат послідовності $(x^{(n)})$ фундаментальна. Оскільки множина $\mathbb{R}$ зі звичайною віддаллю повна (виконується критерій Коші), то послідовність $x_k^{(n)}$ збігається при $n \to \infty$ до деякого числа $x_k^{(0)} \in \mathbb{R}$. Визначимо вектор $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$.

Залишається довести, що $x^{(n)} \to x^{(0)}$ при $n \to \infty$. Для цього достатньо перейти до границі при $s \to \infty$ вище в умові $(*)$.

Зауваження. Важливо пам'ятати простори прикладів 20.1-20.15 та вміти перевірити, чи довільна послідовність збігається в них (приклади 20.21-20.30).

20.7. Перевірити аксіоми норми і визначити, чи простір банахів:

$$X = C[a,b], \qquad \|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|.$$

Аксіоми норми:
1) $\max\limits_{a \le t \le b} |x(t)| \ge 0$, бо модуль $|x(t)| \ge 0$;
$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a,b]\ |x(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv 0$ на $[a,b]$;
2) $\|kx\| = \max\limits_{a \le t \le b} |kx(t)| = \max\limits_{a \le t \le b} |k| \cdot |x(t)| = |k| \cdot \max\limits_{a \le t \le b} |x(t) = |k| \cdot \|x\|$;
3) $\|x + y\| = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t) + y(t)| \le$ (за властивістю модуля)

$\le \max\limits_{a \le t \le b} (|x(t)| + |y(t)| \le$ (за властивістю максимуму)

$$\leq \max_{a\leq t\leq b}|x(t)| + \max_{a\leq t\leq b}|y(t)| = \|x\| + \|y\|.$$

Тому це справді норма.

Для доведення повноти розглянемо довільну фундаментальну послідовність $(x_n) \subset C[a,b]$, тобто таку, для якої виконується твердження

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p: \ \ \|x_n - x_{n+p}\| < \varepsilon. \ (1)$$

Це твердження можна записати так:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall p\ \forall t \in [a,b]: \ \ |x_n(t) - x_{n+p}(t)| < \varepsilon. \ (2)$$

Це означає, що для кожного $t \in [a,b]$ числова послідовність $(x_n(t))$ є фундаментальною, а, отже, і збіжною (в силу повноти $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$).

Розглянемо функцію $[a,b] \ni t \mapsto x(t) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$.

Покажемо, що $x \in C[a;b]$ і що послідовність (x_n) збігається до x відносно норми $\max\limits_{a\le t\le b} |x(t)|$. Переходячи до границі при $p \to \infty$ у нерівності (2), одержимо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \ \forall t \in [a,b] : \ \ |x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon. \ (3)$$

Це твердження означає,що послідовність (x_n) збігається до функції x рівномірно на $[a,b]$. Із курсу математичного аналізу відомо, що границя рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій є неперервною функцією. Отже, $x \in C[a,b]$. Із (3) випливає, що $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

20.9. Перевірити аксіоми норми і визначити, чи простір банахів, якщо $X = C^1[a,b]$ - простір неперервно диференційовних на $[a,b]$ дійсних (комплексних) функцій з нормою $\|x\| = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x'(t)|$.

Нехай (x_k) - фундаментальна за заданою нормою послідовність в $C^1[a,b]$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число N таке, що для всіх $n > N$ і всіх $p \in \mathbb{N}$

$$\|x_n - x_{n+p}\| = \max_{a\leq t\leq b} |x_n(t) - x_{n+p}(t)| + \max_{a\leq t\leq b} |x'_n(t) - x'_{n+p}(t)| < \varepsilon.$$

Використовуючи критерій рівномірної збіжності функціональної послідовності, з цієї нерівності одержуємо, що існує така функція $x_0(t) \in C^1[a,b]$, що $x_n(t) \overset{\to}{\to} x_0(t)$, $x'_n(t) \overset{\to}{\to} x'_0(t)$ при $n \to \infty$ на $[a,b]$. Це й означає, що послідовність $(x_n) \subset C^1[a,b]$ збігається за нормою $\|\cdot\|$ до $x_0(t) \in C^1[a,b]$.

22. Гільбертові простори.

22.3. Якщо H - унітарний простір, а $x, y \in H$, то $x \perp y$ тоді і тільки тоді, коли

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \qquad \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2.$$

Необхідність. Нехай $x \perp y$. Це означає, що $(x|y) = 0$. Тоді, використовуючи зв'язок між нормою та скалярним добутком і властивості скалярного добутку, маємо

$\|\lambda x+\mu y\|^2 = (\lambda x+\mu y|\lambda x+\mu y) = (\lambda x|\lambda x)+(\mu y|\lambda x)+(\lambda x|\mu y)+(\mu y|\mu y) = \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2$.

Достатність. Якщо $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \qquad \|\lambda x\|^2 + \|\mu u\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2$, то (враховуючи рівність у доведенні необхідності) одержуємо

$\mu\overline{\lambda}(y|x) + \lambda\overline{\mu}(x|y) = 0$ або так: $\lambda\overline{\mu}(x|y) + \overline{\lambda\overline{\mu}(x|y)} = 0$, звідки випливає, що $\forall c \in \mathbb{C}$ $c(x|y) + \overline{c(x|y)} = 0$, звідки $2\mathrm{Re}\, c(x|y) = 0$.

Нехай $(x|y) = u + iv$. Тоді при $c \in \mathbb{R}$ одержуємо, що $cu = 0$, тобто $u = 0$.

Тепер візьмемо $c = i$. Тоді $\mathrm{Re}\, c(x|y) = -v = 0$.

Отже, $(x|y) = 0$, що й треба було довести.

22.7. Доведемо, що скалярний добуток є неперервною функцією:

$|(x_n|y_n) - (x|y)| = |(x_n|y_n) - (x_n|y) + (x_n|y) - (x|y)| \leq |(x_n|y_n - y)| + |(x_n - x|y)| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0$ при $n \to \infty$,
де використано нерівність для абсолютної величини, нерівність Коші-Буняковського, обмеженість $\|x_n\|$ і $\|y\|$, а також збіжність до нуля (за умовою) $\|y_n - y\|$ і $\|x_n - x\|$.

22.9. i) Ні, бо для вектора $x = (1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots)$ маємо скалярний квадрат

$$(x|x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6} < 0,$$

що суперечить аксіомам скалярного добутку.

А цей вектор, очевидно, належить до простору ℓ_2, бо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$.

ii) Ні, бо для вектора $x = (1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots)$ $(x|x) = 0$, що суперечить аксіомам скалярного добутку, бо $x \neq 0$.

22.12. $H = \ell_2$, $(x|y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n \overline{y}_n$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n \overline{y}_n$ збігається абсолютно, тому що $\frac{1}{n}|x_n \overline{y}_n| \le \frac{1}{2n}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$. Аксіоми скалярного добутку легко перевірити.

Доведемо, що ℓ_2 із таким скалярним добутком є повним простором. Нехай $(x^{(k)}) = (\xi_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ - фундаментальна послідовність. Це означає, що $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0$ таке, що при $r > k_0$, $s > k_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\xi_n^{(r)} - \xi_n^{(s)}|^2 < \varepsilon^2.$$

Із цього випливає, що для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ тим більше виконується така нерівність:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} |\xi_n^{(r)} - \xi_n^{(s)}|^2 < \varepsilon^2.$$

Із цього випливає, що послідовність $(\xi_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ при кожному $n \in \mathbb{N}$ збігається до деякої границі ξ_n: $\xi_n = \lim\limits_{k\to\infty} \xi_n^{(k)}$.

Спрямуємо в останній нерівності $s \to \infty$ і одержимо

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} |\xi_n^{(r)} - \xi_n|^2 \le \varepsilon^2.$$

Оскільки ця нерівність виконується для будь-якого числа m, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\xi_n^{(r)} - \xi_n|^2 \le \varepsilon^2.$$

Зі збіжності рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\xi_n^{(r)}|^2$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\xi_n^{(r)} - \xi_n|^2$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\xi_n|^2$ (в силу нерівності $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$).

Отже, встановлено, що послідовність (елемент простору, елементами якого є знайдені числа ξ_n, а не раніше розглянута послідовність) $x = (\xi_n) \in (\ell_2, (\cdot|\cdot))$. Оскільки число ε довільне, то остання нерівність означає, що

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\|^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\xi_n^{(k)} - \xi_n|^2 = 0.$$

Це доводить, що $(\ell_2, (\cdot|\cdot))$ - повний простір.

22.16. **Правильна умова тут така**: Довести, що в евклідовому просторі Hвиконується ось що: $\forall x, y \in H\ (x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

Перетворимо праву частину, використовуючи зв'язок між нормою і скалярним добутком, а також властивості скалярного добутку:

$$\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left((x+y|x+y) - (x-y|x-y)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((x|x) + (y|x) + (x|y) + (y|y) - (x|x) + (y|x) + (x|y) - (y|y)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2(x|y) + 2(y|x)\right) = (x|y),$$

тому що тут простір евклідів, тобто $(x|y) = (y|x)$.

22.19. Щоб довести, що в просторі $C[0;1]$ неможливо ввести скалярний добуток, що породжує норму цього банахового простору, достатньо показати, що для деяких елементів x, y не виконується рівність паралелограма із №22.18.

Нехай $x(t) \equiv \frac{1}{2}$, $y(t) \equiv \frac{1}{2}t$. Тоді $\|x\| = \|y\| = \frac{1}{2}$, $\|x-y\| = \frac{1}{2}$, $\|x+y\| = 1$. Рівність паралелограма для цих елементів не виконується:

$$1^2 + \frac{1}{2^2} \neq 2(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}),$$

$$\frac{5}{4} \neq 1.$$

22.20. Розглянемо в просторі ℓ_p два такі вектори: $x = (1, 0, 0, 0, \ldots)$ і $y = (0, 1, 0, 0, \ldots)$.

Знайдемо норми, задіяні в рівності паралелограма:

$\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x+y\| = 2^{\frac{1}{p}}$, $\|x-y\| = 2^{\frac{1}{p}}$.

Рівність паралелограма $2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 2(1^1 + 1^2) = 4$ виконується тільки при $p = 2$.

24. Ортогональна проєкція.

24.1. а) Нехай $x \in M \cap M^{\perp}$. Тоді $(x|x) = 0$ і за аксіомою скалярного добутку із цього випливає, що $x = 0$.

б) Нехай $x_n \in M^{\perp}$ і $x_n \to x$ у просторі H. Тоді $\forall m \in M$ $(x_n|m) = 0$. За неперервністю скалярного добутку із цього випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n|m) = (x|m) = 0$. Тому $x \in M^{\perp}$.

24.2. Нехай $x \in M$. Тоді $\forall y \in M^{\perp}$ $(y|x) = 0$. Звідси $(x|y) = \overline{(y|x)} = 0$.

Згідно із означенням ортогонального доповнення це означає, що $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M^{\perp\perp}$. Тому $M \subset M^{\perp\perp}$.

24.3. Оскільки $M \subset N$, то для кожного $m \in M$ виконується $m \in N$. Тепер розглянемо довільний елемент $x \in N^{\perp}$. Для нього і для довільного $m \in N$ виконується $(x|m) = 0$.

Із вищесказаного випливає, що якщо $m \in M$, то $(x|m) = 0$. Отже, $x \in M^{\perp}$. Тому $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

24.4. Пояснення позначення: $\mathrm{sp}M$ позначає лінійну оболонку множини M, тобто сукупність всіх скінчених лінійних комбінацій елементів із M.

а) Доведемо, що $(\mathrm{sp}M)^{\perp} \subset M^{\perp}$. Нехай $x \in (\mathrm{sp}M)^{\perp}$, тобто $\forall m \in \mathrm{sp}M$ $(x|m) = 0$, тобто $\forall \alpha, \beta \in \Phi$ $\forall n, p \in M$ $(x|\alpha n + \beta p) = 0$. Звідси $\overline{\alpha}(x|n) + \overline{\beta}(x|p) = 0$. Оскільки числа α, β довільні, то з цього випливає, що $(x|n) = 0$ і $(x|p) = 0$ для всіх $n, p \in M$. Це означає, що $x \in M^{\perp}$. Отже, $(\mathrm{sp}M)^{\perp} \subset M^{\perp}$.

Доведемо, що $M^{\perp} \subset (\mathrm{sp}M)^{\perp}$. Нехай $x \in M^{\perp}$. Тоді $\forall m \in M$ $(x|m) = 0$. Звідси $\forall \alpha, \beta \in \Phi$ $\forall n, p \in M$ $(x|\alpha n + \beta p) = \overline{\alpha}(x|n) + \overline{\beta}(x|p) = 0$. Це означає, що $x \in (\mathrm{sp}M)^{\perp}$. Отже, $M^{\perp} \subset (\mathrm{sp}M)^{\perp}$.

б) Доведемо, що $\overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp}$. Нехай $x \in \overline{M}^{\perp}$, тобто $\forall m \in \overline{M}$ $(x|m) = 0$. Але $M \subset \overline{M}$. Тому $\forall m \in M$ $(x|m) = 0$. Це означає, що $x \in M^{\perp}$. Отже, $\overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp}$.

Доведемо, що $M^{\perp} \subset \overline{M}^{\perp}$. Нехай $x \in M^{\perp}$, тобто $\forall m \in M$ $(x|m) = 0$. Розглянемо тепер довільну точку $y \in \overline{M}$, тобто y - точка дотику множини M. Це означає, що $\forall \varepsilon > 0$ $(B(y, \varepsilon) \cap M) \neq \varnothing$, тобто (для $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$) знайдеться послідовність $m_n \in M$ така, що $\|y - m_n\| < \frac{1}{n}$. Розглянемо скалярний добуток $(x|y) = (x|y - m_n + m_n) = (x|y - m_n) + (x|m_n)$. Маємо $(x|m_n) =$

0, бо $m_n \in M$, а за нерівністю Коші-Буняковського $|(x|y - m_n)| \leq$
$\leq \|x\| \cdot \|y - m_n\| \leq \frac{\|x\|}{n}$. При $n \to \infty$ із цього одержуємо, що $(x|y) = 0$. Тому $x \in \overline{M}^{\perp}$.

24.5. $H = \mathbb{C}^4$. Знайти ортогональне доповнення множини $M = \{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

Нехай $x \in M^{\perp}$. У цьому просторі умова $\forall m \in M$ $(x|m) = 0$ означає, що

$$((x_1, x_2, x_3, x_4)|(m_1, m_2, m_3, m_4)) = \sum_{i=1}^{4} x_i \overline{m}_i = 0.$$

До множини M входять тільки два вектори: $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (1, 0, 1, 0)$ і $(0, 1, 0, 1)$. Тому $x_1 + x_3 = 0$ і $x_2 + x_4 = 0$.

Розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

є всі вектори x у $\mathbb{C}^4$ такі, що $x = (x_1, x_2, -x_1, -x_2)$.

Тому $M^{\perp} = \{x \in \mathbb{C}^4 : \ x = (x_1, x_2, -x_1, -x_2)\}$, де $x_i \in \mathbb{C}$.

24.6. $H = \ell_2$, $M = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,) \in \ell_2 : \ x_2 = x_4 = \ldots = 0\}$.

Аналогічно до попереднього прикладу. Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in M^{\perp}$. Згадавши, як задано скалярний добуток в ℓ_2, одержуємо, що $\forall x \in M$ повинна виконуватися така умова:

$$(x|y) = x_1\overline{y}_1 + 0 \cdot \overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3 + 0 \cdot \overline{y}_4 + \cdots = 0.$$

Приймемо тут $x_1 = 1$, $x_3 = x_5 = \ldots = 0$. Тоді одержуємо $y_1 = 0$. Аналогічно $y_3 = y_5 = y_7 = \ldots = 0$.

Компоненти $y_2, y_4, y_6, \ldots$ довільні з тою умовою, що вектор y повинен належати до ℓ_2:

$$M^{\perp} = \{y \in \ell_2 : \ y = (y_1, y_2, \ldots), y_1 = y_3 = y_5 = \ldots = 0\}.$$

24.7. $H = \ell_2$, M - множина фінітних послідовностей.

Нехай $x \in M^{\perp}$. Тоді згідно з означенням $\forall m \in M$ $(x|m) = 0$. Візьмемо $m = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0, \underbrace{-1}_{j}, 0, \ldots) \in M$. Тоді $(x|m) = x_i - x_j = 0$, звідки випливає, що $x_i = x_j = C$ для всіх номерів i, j. Оскільки вектор $x = (C, C, \ldots)$ належить до ℓ_2, тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C^2 < \infty$, то $C = 0$.

Відповідь: $M^{\perp} = \{0\}$.

24.8. $H = L_2(a, b)$, $M = \{x \in H: \ x(t) \overset{\text{м.с.}}{=} 0$ на $[c, d] \subset [a, b]\}$.
Відповідь: $M^{\perp} = \{x \in H: \ x(t) \overset{\text{м.с.}}{=} 0$ на $[a, b] \setminus [c, d]\}$.

(Тут м.с. - це скорочення терміну "майже скрізь", прийнятого у теорії міри й інтеграла Лебега. Рівність $f(x) \overset{\text{м.с.}}{=} g(x)$ означає, що значення функцій f і g рівні у всіх точках x множини, про яку йдеться в задачі, за винятком, можливо, деякої множини міри нуль (за Лебегом).)

24.9. $H = L_2(0; 1)$, $M = \{x \in H: \int\limits_0^1 x(t)\, d\mu = 0\}$ (тут μ - міра Лебега на $[0; 1]$).

Припустимо, що функція $x \in M^{\perp}$ набуває додатних значень на деякій (вимірній) множині $A \subset (0; 1)$ і від'ємних на іншій множині B такої самої додатної міри. Розглянемо функцію

$$m(t) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ -1, & x \in B, \\ 0, & x \in (0; 1) \setminus (A \cup B), \end{cases}$$

що належить до множини M, бо $\int\limits_0^1 m(t)\, d\mu = 1 \cdot \mu(A) - 1 \cdot \mu(B) + 0 \cdot \mu(A \cup B) = 0$. Тоді (згадуючи означення скалярного добутку в просторі $L_2(0; 1)$) з умови $(x|m) = \int\limits_0^1 x(t)\overline{m(t)}\, d\mu = \int\limits_{A \cup B} |x(t)|\, d\mu = 0$ випливає, що $x(t) \overset{\text{м.с.}}{=} 0$ на множині $A \cup B$. Із цього випливає, що функція $x(t)$ є м.с. додатна або м.с. від'ємна (у таких випадках неможливо вибрати вказані вище множини A і B) або м.с. дорівнює нулю на $[0; 1]$.

Так само доводимо, що $x(t) \overset{\text{м.с.}}{=} const$ - довільна константа. Якби функція $x(t)$ не була м.с. постійною, тобто для деякого числа C_1 виконувалася нерівність $x(t) > (\geq) C_1$ на деякій множині A (ненульової міри) і $x(t) \leq (<) C_1$ на іншій B, то аналогічно вибираємо функцію $m \in M$ і тоді $(x|m) \neq 0$, що суперечить умові.

Відповідь: $M^{\perp} = \{x \in H: \ x(t) \overset{\text{м.с.}}{=} const\}$.

24.10. $H = \mathbb{C}^m$, $G = \{g = (g_1, \ldots, g_m) \in H : \ g_m = 0\}$. Знайти ортогональну проєкцію довільного елемента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на заданий підпростір G.

Нехай g_0 - ортогональна проєкція елемента x на підпростір G. За означенням ортогональної проєкції маємо ось що: $g_0 \in G$ (тому $g_0 = (g_{01}, g_{02}, \ldots, g_{0,m-1}, 0)$) і $\forall g \in G$ $(x - g_0|g) = 0$. Тому згідно з означенням скалярного добутку в цьому просторі маємо

$$0 = (x - g_0|g) = \sum_{i=1}^{m}(x_i - g_{0i})g_i = \sum_{i=1}^{m-1}(x_i - g_{0i})g_i, \qquad \text{бо} \ \ g_m = 0.$$

Якщо у цій рівності прийняти $g_1 = 1$, $g_2 = \ldots = g_{m-1} = 0$, то одержимо, що $g_{01} = x_1$. Аналогічно $g_{02} = x_2$, ..., $g_{0,m-1} = x_{m-1}$.

Отже, $g_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0) = \text{пр}_G x$.

24.12. $H = L_2(0;1)$, $G = \left\{x \in H : \ \int\limits_0^1 g(t)\,dt = 0\right\}$, $x(t) = t$.

Нехай g_0 - ортогональна проєкція функції x на підпростір G. Тоді $\forall g \in G$ $\int\limits_0^1 (t - g_0(t)) \cdot g(t) = 0$. Тоді (як у №24.9) $t - g_0(t) \overset{\text{м.с.}}{=} const$, $g_0(t) = t - C$.

Оскільки $g_0 \in G$, то $\int\limits_0^1 (t - C)\,dt = 0 = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - C = \frac{1}{2} - C$, звідки $C = \frac{1}{2}$.

Отже, $g_0(t) = \text{пр}_G x = t - \frac{1}{2}$.

24.13. $H = \ell_2$, $x = (0, 1, 3, 5, 7, 0, \ldots)$,

$G = \text{sp}\{a_1, a_2, a_3\}$, $a_1 = (1, 1, 2, 0, \ldots)$, $a_2 = (1, i, 0, \ldots)$, $a_3 = (0, 1, -1, 0, \ldots)$.

Нехай $g_0 = (g_1, g_2, g_3, \ldots) = \text{пр}_G x$. Оскільки у векторів a_1, a_2, a_3 тільки три перші координати ненульові, а вектор g_0 належить до лінійної оболонки цих векторів, то $g_4 = g_5 = \ldots = 0$. Оскільки вектор $x - g_0$ ортогональний до підпростору G, то $(x - g_0|a_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Тому одержуємо таку систему рівнянь для визначення координат g_1, g_2, g_3:

$$\left\{\begin{array}{lcl} (-g_1, 1 - g_2, 3 - g_3, \ldots)|(1, 1, 2, 0, \ldots)) & = & 0, \\ (-g_1, 1 - g_2, 3 - g_3, \ldots)|(1, i, 0, 0, \ldots)) & = & 0, \\ (-g_1, 1 - g_2, 3 - g_3, \ldots)|(0, 1, -1, 0, \ldots)) & = & 0. \end{array}\right.$$

Коротше:

$$\begin{cases} -g_1 + 1 - g_2 + 6 - 2g_3 &= 0, \\ -g_1 + i - ig_2 &= 0, \\ 1 - g_2 - 3 + g_3 &= 0. \end{cases}$$

Ще коротше:

$$\begin{cases} -g_1 - g_2 - 2g_3 &= -7, \\ -g_1 - ig_2 &= -i, \\ -g_2 + g_3 &= 2. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи такий: $g_1 = 0$, $g_2 = 1$, $g_3 = 3$.

Отже, $g_0 = (0, 1, 3, 0, \ldots)$.

24.17. Нехай $M = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2 : \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}$. Довести, що M скрізь щільна в ℓ_2 (тобто $\overline{M} = \ell_2$).

Достатньо довести, що $M^{\perp} = \{0\}$. Нехай $x \in M^{\perp}$. Тоді $\forall m \in M$ $(x|m) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \overline{m}_i = 0$, де $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m_i = 0$. Розглянемо які-небудь дві координати x_i та x_j вектора x. Оскільки при $m_i = 1$, $m_j = -1$ маємо $m = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0, \underbrace{-1}_{j}, 0, \ldots) \in M$, то $x_i - x_j = 0$, звідки випливає, що $x_i = x_j$. Із цього випливає, що $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$ $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = C$, де C - деяка константа. Оскільки $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell_2$, тобто $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, то $C = 0$. Отже, $x = (0, 0, 0, \ldots)$.

24.18. Довести, що множина фінітних функцій з $L_2(\mathbb{R})$ щільна в цьому просторі.

Функцію $x \in L_2(\mathbb{R})$ називають фінітною, якщо вона (майже скрізь) дорівнює нулю зовні деякого скінченного відрізка, тобто $\exists a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ такі, що $x(t) \overset{\text{м.с.}}{=} 0$ на множині $\mathbb{R} \setminus [a, b]$.

Достатньо довести, що ортогональне доповнення до множини фінітних функцій в $L_2(\mathbb{R})$ складається лише з нульової функції. Нехай $x \in M^{\perp}$. Тоді для довільної фінітної функції $m \in M$ маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{m(t)}\, dx = 0 = \int\limits_{a}^{b} x(t)\overline{m(t)}\, dx$$

для деяких чисел a і b, що залежать від m, бо $m(t) \overset{\text{м.с.}}{=} 0$ при $t \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$.

Тепер виберемо тут замість фінітної функції $m(t)$ функцію $x(t)$ на $[a,b]$. Зрозуміло, що $m \in L_2(\mathbb{R})$. Тоді (якщо розкласти функцію x на дійсну і уявну частини і врахувати, що $x(t)\overline{x(t)} = (y(t)+iz(t))(y(t)-iz(t)) = y^2(t)+z^2(t) = |x(t)|^2$)

$$\int_a^b |x(t)|^2\,dt = 0.$$

Звідси за властивостями інтеграла Лебега випливає, що $x(t) \overset{\text{м.с.}}{=} 0$ на $[a;b]$. Оскільки відрізок $[a;b]$ тут міг бути вибраний довільно, то з цього випливає, що $x(t) \overset{\text{м.с.}}{=} 0$ на $\mathbb{R}$, що й т.б.д.

24.19. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Довести, що множина

$$M = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2 : \ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}$$

є замкненим лінійним підпростором простору ℓ_2 і знайти $M^\perp$.

Нехай $x, y \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha x_k+\beta y_k) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha x_k)+\sum_{k=1}^{n}(\beta y_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n}x_k+\beta\sum_{k=1}^{n}y_k = \alpha\cdot 0+\beta\cdot 0 = 0.$$

Із цього випливає, що M є лінійним многовидом.

Тепер доведемо замкненість M. Нехай $x^{(k)} \in M$ і $x^{(k)} \to x$ при $k \to \infty$ у просторі ℓ_2. Це означає, що $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i^{(k)} - x_i)^2} \to 0$ при $k \to \infty$. Звідси для кожного i $x_i^{(k)} \to x_i$ при $k \to \infty$. Зокрема, $\forall i = \overline{1,n}$ $x_i^{(k)} \to x_i$ при $k \to \infty$. Але за умовою $x_1^{(k)} + \ldots + x_n^{(k)} = 0$ і, крім цього, ця сума збігається (при $k \to \infty$) до суми $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Тому $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. А це й означає замкненість M.

Очевидно, $M^\perp = \{x \in \ell_2 : \ (\underbrace{c, c, \ldots, c}_{n}, 0, 0, \ldots)\}$, де $C \in \mathbb{R}$ - довільна константа. Пояснимо це. Якщо взяти $m = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, 1, 0, \ldots)$, то для $x \in M^\perp$ виконується умова $(x|m) = x_{n+1} = 0$. Аналогічно $x_{n+2} = \ldots = 0$.

Якщо $x \in M^{\perp}$, то взявши $m = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0, \underbrace{-1}_{j}, 0, \ldots) \in M$, одержуємо $(x|m) = x_i - x_j = 0$. Тому $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = C$, де C - довільна константа. На відміну від №2417 тут число C не мусить бути нулем.

23. Простори сумовних функцій

23.1. Множина $M = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} : \int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx < +\infty \right\}$ лінійного простору не утворює.

Покажемо, що ця множина не є замкненою. Нехай для простоти $a = 0$, $b = 1$. Оскільки множина $\mathbb{Q}$ злічення, ми можемо записати всі раціональні числа відрізка $[0,1]$ у вигляді деякої послідовності c_n, $n = 1, 2, \ldots$ Розглянемо таку послідовність функцій $x_n(t) \in M$:

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in \{c_1, \ldots, c_n\}, \\ 0, & t \in [0,1] \setminus \{c_1, \ldots, c_n\}. \end{cases}$$

Обчислимо інтеграли $\int\limits_0^1 |x_n(t)|^2\,dt = \int\limits_0^1 0\,dt = 0$, бо кожна функція $x_n(t)$ є нульовою функцією, за винятком скінченного числа точок. Ця послідовність функцій збігається поточково до функції

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{Q}, \\ 0, & t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ця функція не є інтегровна і не є інтегровна з квадратом, тому не належить до множини M.

23.2. Норма простору $L_1(a,b)$ не породжується ніяким скалярним добутком.

Покажемо, що для деяких елементів цього нормованого простору не виконується рівність паралелограма $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Нехай для простоти $a = 0$, $b = 1$ і нехай $x(t) = t$, $y(t) = 1-t$, $t \in (0,1)$. Нагадаємо, що норма в просторі $L_1(0,1)$ визначена так: $\|f\|_1 := \int\limits_{(0,1)} |f(t)|\,d\mu$. Тому

$$\|x\| = \int\limits_0^1 |t|\,dt = \frac{1}{2}, \quad \|y\| = \int\limits_0^1 |1-t|\,dt = \frac{1}{2},$$

$$\|x+y\| = \int\limits_0^1 1\,dt = 1,\ \|x-y\| = \int\limits_0^1 |2t-1|\,dt = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\,dt + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Маємо $1^2 + \frac{1}{2^2} \neq 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right)$.

23.3. Нехай $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in L_2(a,b)$. Довести, що $f \in L_1(a,b)$ і

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|^2 \le (b-a)\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx.$$

Застосуємо нерівність Гельдера при $p = q = 2$. Очевидно, що одинична функція належить до простору $L_2(a,b)$ і за умовою $f \in L_2(a,b)$. Тому

$$\left|\int\limits_a^b 1\cdot f(x)\,dx\right|^2 \le \left(\int\limits_a^b 1^2\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx\right) = (b-a)\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx.$$

Належність функції f до простору $L_1(a,b)$ (тобто існування інтеграла $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$) випливає із доведення нерівності Гельдера.

23.4 Навести приклад функції;
а) $f \in L_2(0,1)$ такої, що $f^2 \notin L_2(0,1)$,
б) $f \in L_1(0,1)$ такої, що $f \notin L_2(0,1)$.

а) Нехай $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Тоді $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = \int\limits_0^1 x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_0^1 = 3 < +\infty$, тобто $f \in L_2(0,1)$. Але $f^2(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \notin L_2(0,1)$, бо $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$ - розбіжний інтеграл (тут $\frac{4}{3} > 1$).

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

23.5. Знайти норму функції $f(x) = x^{-2}$ у тих просторах $L_p(0,1)$, до яких ця функція належить.

Обчислимо $\|\cdot\|_p$ функції f:

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_0^1 (x^{-2})^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_0^1 (x^{-2p})\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{x^{1-2p}}{1-2p}\Big|_0^1\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{1-2p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

тільки за умови, що $2p < 1$ (при $p \ge \frac{1}{2}$ цей інтеграл не існує; підстановка нуля означає тут обчислення границі функції у точці $x = 0$). Тому ця функція не належить до жодного з просторів $L_p(0,1)$, $p \ge 1$.

23.6. Довести, що будь-яка послідовність функцій, яка збіжна в $C[a,b]$, є збіжною в $L_p(a,b)$ $(p \geq 1)$.

Припустимо, що $f_n \to f$ при $n \to \infty$ в $C[a,b]$, тобто

$$\|f_n - f\|_{C[a,b]} := \max_{a \leq t \leq b} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тоді

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \max_{a \leq t \leq b} |f_n(x) - f(x)| \left(\int_a^b dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0, \; n \to \infty,$$

де інтеграл Лебега згідно з властивостями інтеграла можна розуміти як інтеграл Рімана, бо функції $f_n, f \in C[a,b]$.

23.7. Навести приклад послідовності функцій з $C[0,1]$, яка збігається в $L_1(0,1)$ та в $L_2(0,1)$, але не збігається в $C[0,1]$.

Нехай $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in [0,1]$. Нарисуйте графіки!
Тоді при $n \to \infty$ маємо:

$$f_n(x) \to \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases} =: f(x).$$

Гранична функція f, очевидно, майже скрізь на $(0,1)$ дорівнює нулю (в сенсі міри Лебега) і тому еквівалентна до нульової функції на $[0,1]$ і тому інтегровна, а також інтегровна з квадратом. Доведемо збіжність f_n до f в $L_1(0,1)$ та в $L_2(0,1)$:

$\|f_n - 0\|_1 = \|f_n\|_1 = \int\limits_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \to 0, \; n \to \infty;$

$\|f_n\|_2 = \sqrt{\int\limits_0^1 x^{2n} \, dx} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0, \; n \to \infty.$

Послідовність f_n не збігається в $C[0,1]$, бо $\max\limits_{0 \leq x \leq 1} |x^n - f(x)|$ не існує і, тим більше, не збігається до нуля при $n \to \infty$.

Тут насправді $\sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |x^n - f(x)| = 1 \not\to 0.$

23.8. Нехай $f_n(x) = n^2xe^{-nx}$. Довести, що для будь-якого $x \geq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, але послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ не є збіжною в $L_2(0,1)$.

$\forall x \geq 0 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2x}{e^{nx}} = 0$ (як відношення степеневої функції до показникової на нескінченності або ж за правилом Лопіталя). Гранична функція $f(x) \equiv 0$.

$$\|f_n - 0\|_{L_2} = \left(\int\limits_0^1 n^4x^2e^{-2nx}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{n^3}{2}\int\limits_0^1 x^2\,d(e^{-2nx})\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}n^3x^2e^{-2nx}\Big|_0^1 + \frac{n^3}{2}\int\limits_0^1 e^{-2nx}\cdot 2x\,dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(-\frac{n^3}{2e^{2n}} - \frac{n^2}{2}\int\limits_0^1 x\,d(e^{-2nx})\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(-\frac{n^3}{2e^{2n}} - \frac{n^2}{2}xe^{-2nx}\Big|_0^1 + \frac{n^2}{2}\int\limits_0^1 e^{-2nx}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(-\frac{n^3}{2e^{2n}} - \frac{n^2}{2e^{2n}} - \frac{n^2}{4n}e^{-2nx}\Big|_0^1\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(-\frac{n^3}{2e^{2n}} - \frac{n^2}{2e^{2n}} - \frac{n}{4e^{2n}} + \frac{n}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

23.9.Знайти кут між елементами x та y в $L_2(0,\pi)$, якщо $x(t)=\sin t$, $y(t)=t$.

Кут між елементами гільбертового простору $L_2(0,\pi)$ визначимо за допомогою скалярного добутку:

$$\cos\varphi = \frac{(x|y)}{\|x\|\cdot\|y\|}.$$

Обчислимо скалярний добуток і норми заданих елементів:

$$(\sin t|t)_{L_2} = \int\limits_0^\pi \sin t\cdot\bar{t}\,dt = -\int\limits_0^\pi t\,d(\cos t) = -t\,\cos t|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos t\,dt = \pi,$$

де $\bar{t}=t$, бо функція дійснозначна,

$$\|\sin t\|_2 = \left(\int\limits_0^\pi \sin^2 t\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|t\|_2 = \left(\int\limits_0^\pi t^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{t^3}{3}\bigg|_0^\pi\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi^3}}{\sqrt{3}}.$$

Звідси

$$\cos\varphi = \frac{\pi}{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi^3}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \approx 0,779696801,$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{6}}{\pi} \approx 0,67 \text{ рад}.$$

Лінійні оператори. Норма оператора.

Доведемо лінійність деяких операторів. Термін "лінійний оператор" - це синонім терміну "лінійне відображення".

1. Нехай $X = C^1[a,b]$ - лінійний простір неперервно-диференційовних функцій (тобто функцій, які самі та їх похідні є неперервні), $Y = C[a,b]$ - простір неперервних функцій на відрізку $[a,b]$. Нехай відображення A із X в Y діє так: $\forall f \in C^1[a,b] \;\; Af = f'$.

Тут мають на увазі, що для кожного числа $x \in [a,b] \;\; (Af)(x) = f'(x)$, хоча у виразі $Af = f'$ і не було жодного x.

Доведемо лінійність A, використовуючи властивості похідної, відомі з курсу математичного аналізу: для довільних $f, g \in X$ і $\lambda \in \mathbb{C}$ маємо

$$A(f+g)(x) = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = Af(x) + Ag(x),$$

$$A(\lambda f)(x) = (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x) = \lambda A f(x).$$

Ці два рядки доведення можна замінити і таким одним рядком:

$$A(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x) = Af(x) + Ag(x).$$

2. Нехай $X = L(a,b)$ - простір інтегровних (за Лебегом) функцій на інтервалі (a,b), $Y = \mathbb{C}$ - множина комплексних чисел (поле скалярів) і нехай оператор діє так: $\forall f \in L(a,b) \;\; Af = \int\limits_a^b f(t)\,dt$.

(Зауваження. Тут мають на увазі інтеграл Лебега і тому правильно було би писати $d\mu$ замість dt, але ми будемо використовувати звичне позначення, оскільки для звичайних елементарних функцій ці інтеграли рівні. Необхідно пам'ятати справжній зміст цих позначень у кожному контексті!)

Оператор A ставить у відповідність функції f деяке комплексне число Af, рівне інтегралу від цієї функції по інтервалу (a,b). Такий оператор називають функціоналом. Доведемо, що він лінійний, використовуючи властивості інтеграла (Лебега) і означення суми функцій та добутку функції на скаляр:

$$A(\lambda f + \mu g) = \int\limits_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \int\limits_a^b \lambda f(t)\,dt + \int\limits_a^b \mu g(t)\,dt =$$

$$= \lambda \int\limits_a^b f(t)\,dt + \mu \int\limits_a^b g(t)\,dt = \lambda A f + \mu A g$$

(зверніть увагу, що тут немає жодного x на відміну від прикладу 1).

Норми задіяних просторів не відігравали ролі.

3. Розглянемо лінійний оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, що діє за формулою $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$.

(Можна записувати і так: $(Ax)(t)$ - і потрібно розуміти, що це є значення неперервної функції Ax у точці $t \in [0,1]$. Лінійність довести самостійно.)

Знайдемо його норму. Для цього оцінимо норму образу довільного елемента (врахувавши норму заданого простору):

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} |(Ax)(t)| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau \right| \le \max_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t |x(\tau)|\,d\tau \le$$

$$\le \max_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 |x(\tau)|\,d\tau = \int\limits_0^1 |x(\tau)|\,d\tau \le \max_{\tau\in[0,1]} |x(\tau)| \int\limits_0^1 d\tau = \|x\| \cdot 1.$$

Ми довели обмеженість оператора A. Норма оператора A - це мінімальне число C таке, що $\forall x \in X\ \|Ax\| \le C\|x\|$. Тому із доведеного випливає, що $\|A\| \le 1\ \ (*)$. Тепер розглянемо фіксовану функцію-сталу $x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1]$. Для неї маємо

$$\|x_0\| = \max_{t\in[0,1]} 1 = 1, \quad Ax_0(t) = \int\limits_0^t d\tau = t, \quad \|Ax_0\| = \max_{t\in[0,1]} |t| = 1.$$

Одержали, що $\|Ax_0\| = 1 \cdot \|x_0\|$. Із цієї рівності робимо висновок, що константу 1 у нерівності $(*)$ не можна зменшити. Тому $\|A\| = 1$.

4. $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Ax(t) = t\int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau$. Знайдемо норму цього лінійного оператора. Оцінимо норму образу довільного елемента:

$$\|Ax\| = \sqrt{\int\limits_0^1 |Ax(t)|^2\,dt} = \sqrt{\int\limits_0^1 \left| t \int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau \right|^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\left| \int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau \right|^2 \int\limits_0^1 t^2\,dt} = \sqrt{\left| \int\limits_0^1 1 \cdot x(\tau)\,d\tau \right|^2} \sqrt{\int\limits_0^1 t^2\,dt} \le$$

$$\leq \sqrt{\int\limits_0^1 1^2\,d\tau \cdot \int\limits_0^1 |x(\tau)|^2\,d\tau} \sqrt{\int\limits_0^1 t^2\,dt} =$$

(тут застосували інтегральну нерівність Коші-Буняковського)

$$= \sqrt{\int\limits_0^1 |x(\tau)|^2\,d\tau} \sqrt{\int\limits_0^1 t^2\,dt} = \|x\| \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Із цього випливає, що $\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Розглянемо функцію $x(t) \equiv 1$, $t \in (0,1)$, яка належить до простору $L_2(0,1)$, бо $\int\limits_0^1 1^2\,dt = 1 < +\infty$. Для цієї функції виконується ось що:

$$\|x\| = \sqrt{\int\limits_0^1 1^2\,dt} = 1, \quad \int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^1 d\tau = 1,$$

$$Ax(t) = t, \quad \|Ax\| = \sqrt{\int\limits_0^1 t^2\,dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Тому $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Зауважимо, що у деяких прикладах не вдається знайти такої функції (або такого елемента простору) x, що $\|Ax\| = \|A\| \cdot \|x\|$. У таких випадках потрібно знаходити послідовність векторів x_n, для яких виконуються рівності $\|Ax_n\| = C_n\|x_n\|$, причому послідовність чисел C_n зростаюча і збіжна (до $\|A\|$).

29. Норма лінійного оператора

29.6. Довести, що відображення $A : C[a,b] \to C[a,b]$ є лінійним неперервним оператором і знайти його норму, якщо $(Ax)(t) = tx(t)$.

Це оператор множення на незалежну змінну. Він визначений на всьому просторі $C[a,b]$, бо для будь-якої неперервної функції $x(t)$ її добуток на функцію $x(t) = t$ також є неперервною функцією. Його лінійність очевидна (самостійно!). Доведемо обмеженість цього оператора. Нагадаємо, що норма в просторі $C[a,b]$ визначена так: $\|x\| = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)|$. Тепер обчислимо норму образу довільної неперервної функції і оцінимо її:

$$\|Ax\| = \max_{a \le t \le b} |(Ax)(t)| = \max_{a \le t \le b} |t \cdot x(t)| \le \max(|a|,|b|) \cdot \max_{a \le t \le b} |x(t)| = C \cdot \|x\|.$$

Із цієї нерівності випливає, що $\|A\| \le C = \max(|a|,|b|)$. Тому оператор A обмежений. Неперервність (**лінійного!**) оператора еквівалентна його обмеженості згідно з доведеною на лекції теоремою. Тому оператор A є неперервним. Його норма дорівнює $\max(|a|,|b|)$, тому що для функції $x_0(t) \equiv 1$, норма якої є число 1, норма її образу при відображенні A така: $\|Ax_0\| = \max\limits_{a \le t \le b} |t| = \max(|a|,|b|)$.

Зауважимо, що відрізок $[a,b]$ тут був скінченний. Якщо розглянути такий самий оператор в просторі $C[0,+\infty)$ (де норма така: $\|x\| = \sup\limits_{0 \le t < +\infty} |x(t)|$), то він буде необмежений. У цьому просторі оператор A має таку область визначення: $D(A) = \{x \in C[0,+\infty) : \sup\limits_{0 \le t < +\infty} |tx(t|) < +\infty\}$. Для прикладу, функція $x(t) = \frac{1}{1+\sqrt{t}}$ є елементом простору, але не належить до області визначення, бо $\sup\limits_{0 \le t < +\infty} \frac{t}{1+\sqrt{t}} = +\infty$.

Розглянемо у цьому просторі таку послідовність функцій:

$$x_n(t) = \frac{n}{n+t}, \qquad t \ge 0, \qquad n = 1,2,3,\dots.$$

Ці функції належать до $D(A)$, бо $\|x_n\| = \sup\limits_{0 \le t < +\infty} \frac{n}{n+t} = 1$[1] і $\|Ax_n\| = \sup\limits_{0 \le t < +\infty} \frac{nt}{n+t} = n < +\infty$[2]. Оскільки число n може бути як завгодно велике, то зрозуміло, що не існує такої константи C, для якої би виконувалося $\forall x \in C[0,+\infty)$ $\|Ax\| \le C\|x\|$.

[1] Подивіться на точку $t = 0$!

[2] Як функція поводиться на нескінченності?

29.11. Довести, що оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ є лінійним, неперервним і знайти його норму, якщо $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{t-s}x(s)\,ds$.

Лінійність очевидна. Доведемо неперервність. Нехай $x, y \in C[0,1]$ такі, що $\|x-y\| < \delta$. Тоді

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| = \max_{0\le t\le 1}\left|\int\limits_0^1 e^{t-s}(x(s)-y(s))\,ds\right| \le$$

$$\le \max_{0\le s\le 1}|x(s)-y(s)| \cdot \max_{0\le t\le 1}\left|\int\limits_0^1 e^{t-s}\,ds\right| =$$

$$= \|x-y\|\cdot(e-1) < \delta(e-1) = \varepsilon, \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{e-1}.$$

Із доведеної нерівності випливає, що якщо $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ у просторі $C[0,1]$, то $Ax_n \underset{n\to\infty}{\to} Ax$, тобто оператор A неперервний. Неперервність оператора еквівалентна його обмеженості, причому з доведеного випливає, що $\|A\| \le e-1$. Доведемо, що $\|A\| = e-1$. Нехай $x(t) \equiv 1$. Тоді $\|x\| = 1$, $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{t-s}x(s)\,ds = \int\limits_0^1 e^{t-s}\,ds = e^t\left(-e^{-s}\big|_0^1\right) =$ $= e^t(-e^{-1}+1)$ і $\max\limits_{0\le t\le 1} e^t(-e^{-1}+1) = e(1-\frac{1}{e}) = e-1$.

29.33. Довести, що $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$ - лінійний неперервний оператор і знайти його норму, якщо $(Ax)(t) = x'(t)$.

$C^1[0,1]$ - це простір неперервно диференційовних функцій з нормою $\|x\| = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$. Норма у просторі $C[0,1]$, як і раніше, така: $\|x\| = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$. Заданий оператор називають оператором диференціювання. Його лінійність очевидна. Доведемо обмеженість:

$$\|Ax\|_{C[0,1]} = \max_{0\le t\le 1}|Ax(t)| = \max_{0\le t\le 1}|x'(t)| \le \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max_{0\le t\le 1}|x'(t)| = \|x\|_{C^1[0,1]}.$$

Тому $\|A\| \le 1$ $(*)$. Тепер розглянемо послідовність функцій $x_n(t) = t^n \in C^1[0,1]$. Для цих функцій одержуємо, що $\|x_n\| = \max\limits_{0\le t\le 1}|t^n| + \max\limits_{0\le t\le 1}|nt^{n-1}| = 1+n$, $(Ax_n)(t) = nt^{n-1}$, $\|(Ax_n)\| = \max\limits_{0\le t\le 1} nt^{n-1} = n$. Маємо $\|(Ax_n)\| = n = C_n\|x_n\| = C_n(1+n)$, звідки $C_n = \frac{n}{n+1}$. Число n може бути як завгодно великим, а дріб $\frac{n}{n+1}$ як завгодно близьким до одиниці, тому константу 1 у нерівності $(*)$ зменшити не можна.

29.44. Нехай $X = \ell_2$, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, де $x_k \in \mathbb{C}$. Довести, що оператор $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$ і знайти його норму, якщо $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{k}x_k, \ldots)$.

ℓ_2 - це простір послідовностей, сумовних з квадратом. Запис $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$ означає, що оператор є лінійний обмежений і діє з простору ℓ_2 у той самий простір ℓ_2. Справді, для будь-якого вектора $x \in \ell_2$ одержуємо, прийнявши до уваги норму простору:

$$\|Ax\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(Ax)_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}x_k\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k^2}{k^2}} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2} = \|x\|_{\ell_2},$$

звідки $\|A\| \leq 1$.

Візьмемо вектор $x = (1, 0, 0, \ldots) \in \ell_2$. Тоді $\|x\| = 1$ і $\|Ax\| = \|(1, 0, 0, \ldots)\| = 1$. Тому $\|A\| = 1$.

28. Норма лінійного функціонала

28.1. Довести, що $f : X \to \mathbb{C}$ є лінійним неперервним функціоналом і знайти його норму, якщо $X = \mathbb{C}_1^m$, $f(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$, де $x_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, m}$.

Лінійність очевидна. Нагадаємо, що норма в просторі $X = \mathbb{C}_1^m$ визначена так: $\|x\| = \|(x_1, x_2, \ldots, x_m)\| = \sum\limits_{k=1}^{m}|x_k|$. Доведемо обмеженість заданого функціонала:

$$|f(x)| = |x_1 + x_2 + \cdots + x_m| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m| = \|x\|$$

(тут ліворуч знак $|\cdot|$ абсолютної величини комплексного числа $f(x)$, бо в $\mathbb{C}$ норма саме така). Тому $\|f\| \leq 1$ (а тут знак норми $\|\cdot\|$ функціонала, натомість $|f|$ - це корінь з суми квадратів його дійсної і явної частин). Розглянемо вектор $x = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Обчислимо $\|x\| = 1$ і $|f(x)| = 1$. Тому $\|f\| = 1$.

28.4. Довести, що функціонал $f(x) = \frac{1}{3}[x(-1) + x(1)]$ на просторі $C[-1; 1]$ є лінійним неперервним і знайти його норму.

Доведемо обмеженість:

$$|f(x)| \leq \frac{1}{3}\left[|x(-1)| + |x(1)|\right] \leq \frac{1}{3}\left[\max_t |x(t)| + \max_t |x(t)|\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\max_t |x(t)| = \frac{2}{3}\|x\|_{C[-1;1]}.$$

Якщо $x(t) \equiv 1$, то $\|x\| = 1$ і $|f(x)| = \frac{1}{3}[1 + 1] = \frac{2}{3}$. Тому $\|f\| = \frac{2}{3}$.

28.21. Знайти норму лінійного функціонала $C[0;1] \ni x \mapsto x(0) \in \mathbb{C}$ і довести, що цей функціонал є необмеженим як відображення $L_p(0;1) \to \mathbb{C}$.

Запис $C[0;1] \ni x \mapsto x(0) \in \mathbb{C}$ означає, що задано функціонал f на просторі $C[0;1]$ і він діє за формулою $f(x) = x(0)$. Доведемо, що цей функціонал є обмежений і знайдемо його норму:

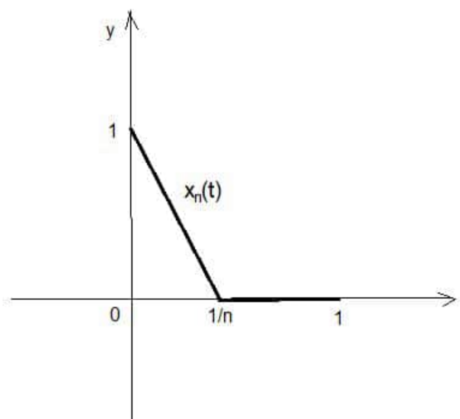
$$|f(x)| = |x(0)| \le \max_{0 \le t \le 1} |x(t)| = \|x\|_{C[0;1]},$$

$$\text{при} \quad x(t) \equiv 1 \quad \text{маємо} \quad \|x\| = 1 \quad \text{і} \quad f(x) = x(0) = 1.$$

Тому $\|f\| = 1$.

Тепер розглянемо функціонал, що діє за тою самою формулою на просторі $L_p(0;1)$, $p \ge 1$. Нехай для простоти $p = 1$. Для доведення необмеженості цього функціонала розглянемо послідовність функцій

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & 0 \le t \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \le t \le 1, \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$



Обчислимо норми цих функцій у просторі $L_1(0;1)$ і значення функціонала на них:

$$\|x_n\|_{L_1(0;1)} = \int_0^1 |x_n(t)|\,dt = \int_0^{\frac{1}{n}} |1 - nt|\,dt = \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ (площа трикутника)},$$

$$\text{а} \quad f(x_n) = x_n(0) = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0.$$

Тому функціонал необмежений на $L_1(0;1)$.

Для значень $p > 1$ обчислити норми $\|x_n\|_{L_p(0;1)}$ самостійно.

28.26. Довести, що $f : \ell_2 \to \mathbb{C}$ є лінійним неперервним функціоналом і знайти його норму, якщо для кожного $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$ функціонал діє так: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$.

Нагадаємо, що норма у просторі ℓ_2 визначена так: $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$.

Оцінимо значення функціонала:

$$|f(x)| = \left| \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}}_{\text{це скалярний добуток}} \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \le$$

(тут застосуємо числову нерівність Коші-Буняковського для нескінченної суми)

$$\le \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}}_{\text{це добуток норм}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|x\|$$

(з курсу математичного аналізу відомо, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$; див. збірник задач Б.П.Демидович, №2961).

Тепер розглянемо таку послідовність елементів простору ℓ_2:

$$x_1 = (1, 0, 0, \ldots),$$
$$x_2 = (1, \frac{1}{2}, 0. \ldots),$$
$$\ldots$$
$$x_n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots),$$
$$\ldots$$

Знайдемо $\|x_n\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$ і $f(x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \cdot \|x_n\|$,

причому $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. Тому $\|f\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

28.29. Довести, що $f : L_2(0;1) \to \mathbb{C}$ є лінійним неперервним функціоналом і знайти його норму, якщо для кожної функції $x \in L_2(0;1)$ функціонал діє так: $f(x) = \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)\,dt$.

Нагадаємо, що норма у просторі $L_2(0;1)$ визначена так: $\|x\| = \sqrt{\int\limits_0^1 |x(t)|^2\,dt}$ (точніше $d\mu$; ми про це домовлялися).

Оцінимо значення функціонала:

$$|f(x)| = \left| \underbrace{\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)\,dt}_{\text{це скалярний добуток}} \right| \le \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} |x(t)|\,dt \le$$[3]

(тут застосуємо інтегральну нерівність Коші-Буняковського)

$$\le \underbrace{\left(\int\limits_0^1 t^{-\frac{2}{3}}\,dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_0^1 |x(t)|^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{це добуток норм}} = \sqrt{3} \cdot \|x\|.$$

Звідси випливає, що $\|f\| \le \sqrt{3}$. Якщо взяти функцію $x(t) = t^{-\frac{1}{3}}$, то $\|x\| = \left(\int\limits_0^1 t^{-\frac{2}{3}}\,dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ і $|f(x)| = \left| \int\limits_0^1 t^{-\frac{2}{3}}\,dt \right| = 3 = \sqrt{3} \cdot \|x\|$. Тому доведено, що $\|f\| = \sqrt{3}$.

[3]Зауваження. Для комплекснозначних функцій $|x(t)|^2$ - не те саме, що $x^2(t)$, бо якщо $x(t) = y(t) + iz(t)$, то $|x(t)|^2 = y^2(t) + z^2(t)$, натомість $x^2(t) = y^2(t) - z^2(t) + 2iy(t)z(t)$; для дійснозначних функцій ці вирази рівні, бо в цьому випадку $z(t) = 0$. Те саме стосується і прикладу 28.26: там $|x_k|^2$ не обов'язково дорівнює x_k^2.

30. Сильна, слабка та $*$-слабка збіжність

30.1. Нехай $\{e_n\}$ - ортонормована система в гільбертовому просторі H. Довести, що $w\text{–}\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$ (тут риска не означає знак мінус, це слабка границя; а 0 - це нульовий елемент простору, а не число нуль), а $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$ не існує. (Ортонормована послідовність в гільбертовому просторі H слабко збігається до нуля, а в сильному розумінні не збігається.)

Нагадаємо, що термін "ортонормована система" означає, що всі вектори e_n є ортогональні, тобто $(e_i|e_j) = 0$ при $i \neq j$, і всі вектори мають норму 1, тобто $\|e_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots$. За означенням запис $w\text{–}\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$ означає, що для кожного лінійного неперервного функціонала f на гільбертовому просторі H (тобто $f \in H'$) виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} f(e_n) = 0$ (тут число нуль як значення функціонала). Доведемо, що це справді так, застосувавши теорему Ріса:

$$\lim_{n\to\infty} f(e_n) = \lim_{n\to\infty} (e_n|y),$$

де $y \in H$ - певний фіксований елемент, який однозначно залежить від функціонала f. Якби гільбертів простір був заданий конкретно, наприклад, $H = \ell_2$, то можна записати явний вираз для скалярного добутку $(y|e_n)$ і оцінити його. Елемент $y \in \ell_2$ - це послідовність $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, елемент e_n - це $(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots)$, а скалярний добуток в ℓ_2, як відомо, задано так: $(x|y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$. Тому $(y|e_n) = \overline{y_n}$. Але $\|y\| = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|^2} < +\infty$. Цей ряд під коренем збіжний, тому $|y_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Із цього випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} (e_n|y) = 0$. У випадку довільного (сепарабельного) гільбертового простору потрібно застосувати теорему про ізоморфізм гільбертових просторів і розглянути реалізацію H у вигляді ℓ_2.

30.2. Нехай $x_n(t) = e^{int}$, $t \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$. Довести, що $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} 0$ в $L_2(-\pi, \pi)$.

Згідно з лінійністю функціонала і теоремою Ріса для кожного $f \in (L_2(-\pi, \pi))'$

$$f(e^{int}) = f(\cos nt) + if(\sin nt) = (\cos nt|y) + i(\sin nt|y) =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\overline{y(t)}\, dt + i\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\overline{y(t)}\, dt,$$

де $y(t) \in L_2(-\pi, \pi)$. За лемою Рімана (твердження з курсу математичного аналізу при вивченні теорії рядів Фур'є) відомо, що ці інтеграли збігаються до нуля при $n \to \infty$ для будь-якої функції y, інтегровної за абсолютною величиною. А той факт, що функція y інтегровна за абсолютною величиною, випливає з доведення прикладу 23.3.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} f(e^{int}) = 0$, що й т.б.д.

30.3. Нехай H - гільбертів простір, $x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in H$, $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} x$, $\|x_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \|x\|$. Довести, що $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, тобто послідовність збігається до x і сильно.

Розглянемо норму різниці елементів x_n і x:

$$\|x_n - x\| = \sqrt{(x_n - x|x_n - x)} = \sqrt{(x_n|x_n) - (x|x_n) - (x_n|x) + (x|x)} =$$

$$= \sqrt{(x_n|x_n) - (x|x_n - x) - (x|x) - (x_n - x|x) - (x|x) + (x|x)} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{(x_n|x_n) - (x|x)}_{\to 0} - \underbrace{(x|x_n - x)}_{\to 0} - \underbrace{(x_n - x|x)}_{\to 0}} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

де $(x_n|x_n) - (x|x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, бо $\|x_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \|x\|$, а $(x|x_n - x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ і $(x_n - x|x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, бо $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} x$.

30.4. Для кожного $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$ приймемо $f_n(x) = x_n$. Довести, що $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} 0$. Чи правильно, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$?

Як і в прикладі 30.1, для кожного $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$ маємо $f_n(x) = x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 = 0(x)$, де 0 позначає нульовий функціонал. Тому $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} 0$.

Але $$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \inf\{C: \ \forall x \in \ell_2 \ |f_n(x)| \le C\|x\|\} =$$

$$= \sup\{|f_n(x)|: \ \|x\|_{\ell_2} \le 1\} = 1,$$

тому що $\|f_n\| = \sup\limits_x |f_n(x)| = \sup\limits_x |x_n| \le \sup\limits_x \|x\| \le 1$ і при $x = e_n$ одержуємо $f_n(e_n) = 1$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \ne 0$. Ця послідовність функціоналів збігається до нульового функціонала слабко, але не сильно.

31. Рівномірна, сильна та слабка збіжність послідовностей операторів у просторі $\mathcal{B}(X;Y)$

Для послідовностей операторів в просторі $\mathcal{B}(X;Y)$:

а) рівномірна збіжність $\{A_n\}$ до A означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$;

б) сильна збіжність означає, що для кожного елемента $x \in X$ виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$;

в) слабка збіжність означає, що для кожного функціонала $f \in Y'$ і кожного елемента $x \in X$ виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} f(A_n x) = f(Ax)$.

І тоді пишуть відповідно: $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, $A = s\text{–}\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, $A = w\text{–}\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Або так: $A_n \underset{n\to\infty}{\to} A$, $A_n \underset{n\to\infty}{\overset{s}{\to}} A$, $A_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} A$.

31.1. Довести, що якщо $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, то $s\text{–}\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Доведення в один рядок:

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\| \cdot \|x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

тому що $\|A_n - A\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ за умовою, а $\|x\|$ - фіксоване число.

31.2. Довести, що якщо $s\text{–}\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, то $w\text{–}\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Доведення. $|f(A_n x) - f(Ax)| = |f(A_n x - Ax)| \leq \|f\| \cdot \|A_n x - Ax\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, тому що за умовою $\|A_n x - Ax\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ для кожного фіксованого x, а $\|f\|$ - деяке фіксоване число.

31.3. Нехай $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортонормована база гільбертового простору H і, крім цього,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in H \qquad A_n x = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k) e_k.$$

Довести, що послідовність $\{A_n\}$ сильно, але не рівномірно збігається до одиничного оператора.

Нехай $Ix = x$ - одиничний (тотожний) оператор. Нагадаємо, що кожний елемент x можна розкласти за елементами бази простору так: $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x|e_k)e_k$, де $(x|e_k)$ - коефіцієнти розкладу.

Тепер розглянемо для кожного $x \in H$

$$\|A_n x - Ix\| = \|\sum_{k=1}^{n}(x|e_k)e_k - x\| = \|\sum_{k=1}^{n}(x|e_k)e_k - \sum_{k=1}^{\infty}(x|e_k)e_k\| =$$

$$= \|\sum_{k=n+1}^{\infty}(x|e_k)e_k\| = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

як залишок збіжного ряду, а норму обчислюємо як в ℓ_2. Тому $I = s\text{–}\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

З'ясуємо, чи $\|A_n - I\| = \sup\limits_{x\neq 0}\|A_n x - Ix\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Візьмемо $x = e_{n+1}$. Тоді $A_n x = 0$ і $\|A_n x - Ix\| = \|0 - e_{n+1}\| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$. Тому і $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n - I\| \neq 0$.

31.4. Нехай $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - о.н.с. в гільбертовому просторі H, $f \in H$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in H \qquad A_n x = (x|f)e_n.$$

Довести, що послідовність $\{A_n\}$ слабко, але не сильно збігається до нульового оператора.

Розглянемо для кожного $g \in H'$

$$g(A_n x) = g((x|f)e_n) = (\text{за т. Ріса}) = ((x|f)e_n)|y)$$

і

$$|g(A_n x) - g(0\cdot x)| = |g(A_n x)| = |((x|f)e_n)|y)| = |\underbrace{(x|f)}_{const}\cdot\underbrace{\overline{y_n}}_{\to 0}| \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

тому що $\overline{y_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, а $(x|f)$ - це деяка константа при фіксованому x. Тому послідовність $\{A_n\}$ слабко збігається до нульового оператора.

Разом з цим $\|A_n x - 0\cdot x\| = \|(x|f)e_n\| = |(x|f)| = \text{const} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$. Тому послідовність $\{A_n\}$ не збігається сильно до нульового оператора.

31.7. З'ясувати, чи правильне таке твердження:

$$(w\text{–}\lim_{n\to\infty} B_n = 0) \wedge (w\text{–}\lim_{n\to\infty} x_n = 0) \;\Rightarrow\; w\text{–}\lim_{n\to\infty} B_n x_n = 0.$$

Розглянемо послідовність векторів гільбертового простору $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в ℓ_2 і послідовність операторів $\{B_n\}$, що діють так:

$$B_n e_k = \begin{cases} 0, & k < n, \\ e_{k-n+1}, & k \geq n. \end{cases}$$

Тоді дія операторів B_n визначена за лінійністю і для всіх $x \in \ell_2$.

Знайдемо

$$\begin{array}{ccccc}
B_1 e_1 = e_1, & B_2 e_1 = 0, & \cdots & B_n e_1 = 0, & \cdots \\
B_1 e_2 = e_2, & B_2 e_2 = e_1, & \cdots & B_n e_2 = 0, & \cdots \\
B_1 e_3 = e_3, & B_2 e_3 = e_2, & \cdots & B_n e_3 = 0, & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & B_n e_n = e_1, & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & B_n e_{n+1} = e_2, & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Як вже доведено, $(e_n) \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} 0$ (№30.1). Крім цього, $B_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} 0$. Тут насправді $B_n \underset{n\to\infty}{\overset{s}{\to}} 0$, тому що для кожного $x \in H$ одержуємо

$$\|B_n x\| = \|(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\| = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Але $B_n e_n = e_1 \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\not\to}} 0$.

32. Оборотність та коректна оборотність лінійних операторів

Як відомо з курсу алгебри, добуток матриць, взагалі кажучи, некомутативний (згадайте або придумайте прості приклади матриць A і B розміру 2×2 таких, що $AB \neq BA$). Проте добуток матриць має властивість асоціативності: $(AB)C = A(BC)$. Те саме виконується для довільних лінійних операторів.

32.3. Нехай $A, B : X \to X$ - лінійні відображення і існують оператори $(AB)^{-1}$ та $(BA)^{-1}$. Чи випливає звідси оборотність операторів A та B?

Спочатку зауважимо, що записувати тут рівність $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (дехто зі студентів неправильно написали так: $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$) ми не маємо права, тому що невідомо, чи існують оператори A^{-1} і B^{-1}. Ця рівність правильна тільки тоді, коли відомо що ці обернені оператори існують.

Доведення від протилежного, що із записаного припущення випливає оборотність операторів A і B. Припустимо, що, наприклад, оператор A не є оборотний, тобто $\ker\ A = \{x : Ax = 0\} \neq \{0\}$. Тоді для векторів $x \neq 0$ із ядра оператора A будемо мати, що $(BA)x = 0$. Це суперечить умові оборотності оператора BA. Аналогічно із припущення $\ker\ B \neq \{0\}$ випливає, що $\ker\ (AB) \neq \{0\}$.

Тому відповідь така: так.

32.4. Нехай $A, B : X \to X$ - лінійні відображення і існує оператор $(I - AB)^{-1}$. Довести оборотність оператора $I - BA$.

За умовою оператор $I - AB$ (двосторонньо) оборотний. Розглянемо тепер рівняння

$$(I - BA)x = y, \qquad (*)$$

що означає, що

$$Ix - (BA)x = y.$$

За означенням добутку операторів це означає, що

$$x - B(Ax) = y. \qquad (**)$$

Подіємо на цю рівність зліва лінійним оператором A:

$$Ax - ABAx = Ay.$$

Перетворимо так:

$$(I - AB)Ax = Ay,$$

$$Ax = (I - AB)^{-1}Ay, \qquad \text{бо існує } (I - AB)^{-1},$$

$$BAx = B(I - AB)^{-1}Ay.$$

Тепер із рівності (∗∗) випливає, що

$$x - y = B(I - AB)^{-1}Ay,$$

$$x = y + B(I - AB)^{-1}Ay.$$

А це й означає оборотність оператора $I - BA$ (див. (∗)) і те, що

$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$

32.7. Довести, що оператор $A \in \mathcal{B}(\ell_p)$ $(p \geq 1)$ є коректним і знайти A^{-1}, якщо $Ax = (x_1 + x_2, x_1 - ix_2, x_3, x_4, \ldots)$. (Оператор A перетворює перші дві координати вектора x, всі інші залишаються незмінними.)

Лінійність цього оператора очевидна. Доведемо обмеженість:

$$\|Ax\|_{\ell_p} = \|(x_1 + x_2, x_1 - ix_2, x_3, x_4, \ldots)\|_{\ell_p}\| =$$

$$= \|(x_1, -ix_2, x_3, x_4, \ldots) + (x_2, x_1, 0, 0, \ldots)\| \leq$$

$$\leq \|(x_1, -ix_2, x_3, x_4, \ldots)\| + \|(x_2, x_1, 0, 0, \ldots)\| \leq \|x\| + \|x\| = 2\|x\|,$$

звідки $\|A\| \leq 2$.

Легко довести, що існує обернений до A оператор, тому що $\ker A = \{x \in \ell_p : \ Ax = 0\} = \{0\} = \{(0, 0, \ldots, 0, \ldots)\}$ (подумати самостійно, а в наступному абзаці це буде показано при $y = 0$).

Тепер знайдемо A^{-1} (обернений до A). Для цього розглянемо рівняння $Ax = y$ і запишемо його покоординатно:

$$(x_1 + x_2, x_1 - ix_2, x_3, x_4, \ldots) = (y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots).$$

Порівнюючи відповідні координати, бачимо, що повинна виконуватися така нескінченна система рівностей:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1, \\ x_1 - ix_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \\ \ldots \end{cases}$$

Звідси одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{iy_1 + y_2}{1+i} = \frac{-1+i}{2}y_1 + \frac{1-i}{2}y_2, \\ x_2 = \frac{y_1 - y_2}{1+i} = \frac{1-i}{2}y_1 - \frac{1-i}{2}y_2, \\ x_3 = y_3, \\ \ldots \end{cases}$$

Тому

$$x = A^{-1}y = \left(\frac{-1+i}{2}y_1 + \frac{1-i}{2}y_2, \frac{1-i}{2}y_1 - \frac{1-i}{2}y_2, y_3, y_4, \ldots\right).$$

Цей оператор неперервний. Це легко довести так само, як вище. Тому оператор A коректний.

32.14. Нехай для кожного $x \in \ell_2$ $Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots\right)$. Довести, що $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$ оборотний, але не коректно оборотний оператор.

Обмеженість оператора A легко довести за нерівністю Коші. Оборотність оператора A очевидна, тому що $\ker A = \{0\}$. Тепер розглянемо рівняння $Ax = y$, тобто

$$\left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots\right) = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots).$$

Тому покоординатно виконуються такі рівності:

$$x_1 = y_1, \quad \frac{1}{2}x_2 = y_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n = y_n, \ldots$$

Очевидно, що

$$x = A^{-1}y = (y_1, 2y_2, 3y_3, \ldots, ny_n, \ldots).$$

Отже, обернений до A існує. Але цей оператор необмежений, бо

$$\|A^{-1}e_n\| = \|(0, \ldots, 0, \underbrace{n}_{n}, 0, \ldots)\|_{\ell_2} = n \to +\infty.$$

Додаткове питання до цього прикладу: чи оператор A^{-1} визначений на всьому просторі ℓ_2?

32.22. Переконатися, що $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$, довести коректність оператора A і знайти A^{-1}, якщо $Ax = \left(x_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}, x_2, x_3, \ldots\right)$.

Оцінимо норму оператора A:

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \left\|\left(x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{x_n}{n}, x_2, x_3, \ldots\right)\right\| \le \\ &\le \|(x_1, x_2, x_3, \ldots)\| + \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{x_n}{n}, 0, 0, \ldots\right)\right\| = \\ &= \|x\| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{x_n}{n}\right| \le \|x\| + \|x\| \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2}} = \end{aligned}$$

(остання нерівність за нерівністю Коші)

$$= \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{6}}\right) \|x\|,$$

звідки $\|A\| \leq 1 + \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. Знайдемо A^{-1}:

$$\left(x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}, x_2, x_3, \ldots\right) = (y_1, y_2, y_3, \ldots).$$

Звідси $x_2 = y_1$, $x_3 = y_2$ і т.д. Для знаходження x_1 прирівняємо перші координати:

$$2x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots = y_1.$$

Звідси

$$x_1 = \frac{1}{2}(y_1 - \frac{y_2}{2} - \frac{y_3}{3} - \ldots) = \frac{1}{2}y_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y_n}{2n}.$$

Отже,

$$A^{-1}y = \left(\frac{1}{2}y_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y_n}{2n}, y_2, y_3, \ldots\right) = \left(y_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2n}, y_2, y_3, \ldots\right).$$

Зрозуміло, що $\|A^{-1}\| \leq 1 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

32.28. Довести коректність оператора $A \in \mathcal{B}(X)$ і знайти A^{-1}, якщо $X = C[0;1]$, $(Ax)(t) = x(t) - x(0) \cdot \sin t$.

Оцінимо норму:

$$\|Ax\|_{C[0;1]} = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - x(0) \sin t| \leq (1 + \sin 1) \cdot \|x\|.$$

(Тут враховано поведінку функції sin на відрізку $[0;1]$.)

Знайдемо A^{-1}:

$$Ax(t) = y(t),$$

$$x(t) - x(0) \sin t = y(t).$$

При $t = 0$ маємо

$$x(0) - x(0)0 = y(0),$$

звідки
$$x(0) = y(0).$$
Для всіх $t \in [0;1]$ одержуємо
$$x(t) = y(t) + y(0)\sin t.$$
Тому
$$A^{-1}y(t) = y(t) + y(0)\sin t.$$
Зрозуміло, що $\|A^{-1}\| \leq 1 + \sin 1$.

34. Спряжені оператори

34.1. Знайти оператор, спряжений до оператора $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$, якщо

$$Ax = A(x_1, x_2, \ldots, \underbrace{x_n}_{n}, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots, \underbrace{x_{n-1}}_{n}, \ldots).$$

Цей оператор в просторі ℓ_2 називають оператором зсуву на одиницю вправо. Оператор у прикладі 34.2 називають оператором зсуву на $n-1$ одиниць вліво. За означенням спряженого оператора повинна виконуватися така рівність (тут A^* позначатиме спряжений до A оператор):

$$\forall x, y \in \ell_2 \qquad (Ax|y) = (x|A^*y).$$

Оскільки скалярний добуток у просторі ℓ_2 визначено так: $(x|y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$, то можемо записати скалярні добутки ліворуч і праворуч:

$$(Ax|y) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ax)_n \overline{y_n},$$

$$(x|A^*y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{(A^*y)_n}.$$

Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Ax)_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{(A^*y)_n}$$

або розгорнено:

$$0 \cdot \overline{y_1} + x_1 \cdot \overline{y_2} + x_2 \cdot \overline{y_3} + \cdots = x_1 \cdot \overline{(A^*y)_1} + x_2 \cdot \overline{(A^*y)_2} + x_3 \cdot \overline{(A^*y)_3} + \cdots$$

Звідси (оскільки числа x_n, y_n можна вибрати довільно) знаходимо:

$$(A^*y)_1 = y_2, \quad (A^*y)_2 = y_3, \quad (A^*y)_3 = y_4, \ldots$$

Тому

$$A^*y = (y_2, y_3, y_4, \ldots).$$

Спряжений до A оператор A^* є оператором зсуву на одиницю вліво.

34.11. Те саме для $Ax = (2x_1 - x_3, ix_2, 0, x_3, 0, 0, \ldots)$.
За означенням спряженого оператора має виконуватися рівність

$$\begin{gathered}((2x_1 - x_3, ix_2, 0, x_3, 0, 0, \ldots)|(y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots)) = \\ (2x_1 - x_3) \cdot \overline{y_1} + ix_2 \cdot \overline{y_2} + 0 \cdot \overline{y_3} + x_3 \cdot \overline{y_4} + 0 \cdot \overline{y_5} + 0 = \\ x_1 \cdot \overline{2y_1} + x_2 \cdot \overline{(-iy_2)} + x_3 \cdot \overline{(-y_1 + y_4)} + x_4 \cdot 0 + 0 = \\ ((x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)|(2y_1, -iy_2, -y_1 + y_4, 0, \ldots)).\end{gathered}$$

Тому

$$A^*y = (2y_1, -iy_2, -y_1 + y_4, 0, \ldots).$$

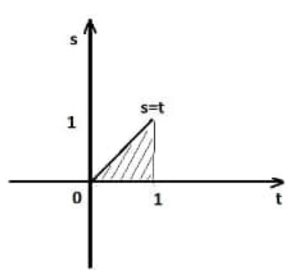
34.22. Знайти спряжений до оператора $A \in \mathcal{B}(L_2(0,1))$, якщо $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)\, ds$.

Скалярний добуток у просторі $L_2(0,1)$ визначено так: $(x|y) = \int\limits_0^1 x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt$.

Тому

$$(Ax|y) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t x(s)\, ds \right) \cdot \overline{y(t)}\, dt =$$

(тут виявляється, що потрібно вміти змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі, що *про-хо-ди-ли*[1] в курсі математичного аналізу; дивіться рисунок)



$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_s^1 x(s)\overline{y(t)}\, dt \right) ds = \int\limits_0^1 x(s) \overline{\int\limits_s^1 y(t)\, dt}\, ds.$$

[1] точно проходили, але невідомо, чи всі і як засвоїли

Тому одержуємо

$$(A^*y)(s) = \int\limits_s^1 y(t)\,dt,$$

що можна записати і так:

$$(A^*y)(t) = \int\limits_t^1 y(s)\,ds.$$

35. Спектр та резольвента лінійного оператора

35.1. Нехай $A : X \to X$ - лінійний оборотний оператор. Довести, що A та A^{-1} мають однакові власні елементи.

Якщо $Ax = \lambda x$ $(x \neq 0)$ і A оборотний, то $A^{-1}Ax = A^{-1}(\lambda x) = \lambda A^{-1}x$ (бо A^{-1} також лінійний). Звідси $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$, якщо $\lambda \neq 0$. Це означає, що оператор A^{-1} має власний елемент x, що відповідає власному значенню $\frac{1}{\lambda}$.

Якщо ж $\lambda = 0$, то з умови оборотності оператора A випливає, що $x = 0$. А це означає, що оператор A не має власних елементів, що відповідають власному значенню $\lambda = 0$.

Очевидно, що те саме справедливо і в обернену сторону.

35.2. Нехай X - банахів простір і $A \in \mathcal{B}(X)$, причому $A^2 = 0$ (нульовий оператор). Чи може оператор A мати ненульові власні значення?

Доводимо від протилежного. Припустимо, що існує число $\lambda \neq 0$ і елемент $x \in X$, $x \neq 0$ такі, що $Ax = \lambda x$. Тоді $A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x \neq 0$, що суперечить умові $A^2 = 0$.

35.4. У дійсному лінійному просторі $C[0;\pi]$ знайти власні значення і власні елементи оператора A двократного диференціювання $(Ax = x'')$, якщо $D(A) = \{x \in C[0;\pi] : \ x'' \in C[0;\pi], \ x(0) = x(\pi) = 0\}$.

Ця задача зводиться до розв'язування диференціального рівняння 2-го порядку з крайовими умовами:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x(t), \\ x(0) = x(\pi) = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цього однорідного рівняння виглядає так: $x(t) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}$, де C_1, C_2 - довільні сталі. Враховуючи крайові умови, одержуємо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0, \end{cases}$$

звідки $C_2 = -C_1 = -C$. Тому $C(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - \frac{1}{e^{\sqrt{\lambda}\pi}}) = 0$, звідки $e^{2\sqrt{\lambda}\pi} = 1$, $\sqrt{\lambda} = ni$ (бо $e^{2\pi ni} = 1$, де $n \in \mathbb{Z}$), $\lambda = -n^2$.

Тепер запишемо частковий розв'язок, що задовольняє ці крайові умови:

$$x(t) = Ce^{int} - Ce^{-int} = C(\cos nt + i \sin nt - \cos nt + i \sin nt) = 2iC \sin nt$$

(тут використали формулу Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$).

З точністю до довільного постійного множника власний елемент x, що відповідає власному значенню $\lambda = -n^2$, можна записати так:

$$x(t) = \sin nt.$$

Маємо безліч власних значень і кожному з них відповідає по одній (лінійно незалежній) власній функції. Наприклад, власному значенню $\lambda = -1$ відповідає власний елемент $x(t) = \sin t$.

Результати наступних двох прикладів відомі з лекції "Резольвента і спектр оператора". Повторення для відстаючих.

35.9. Нехай $A \in \mathcal{B}(X)$, $|\lambda| > \|A\|$. Довести, що $\lambda \in \rho(A)$ (резольвентна множина оператора A), $\|R_\lambda(A)\| \le (|\lambda| - \|A\|)^{-1}$. (Тут $R_\lambda(A)$ позначає оператор $(A - \lambda I)^{-1}$.)

Розгляньмо оператор $A - \lambda I$ і винесемо постійний множник λ за дужки: $A - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A)$. Тому $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}$. Якщо $|\lambda| > \|A\|$, то цей ряд Неймана збігається і задає на всьому просторі обмежений оператор, тобто $\lambda \in \rho(A)$. (Випадок $\lambda = 0$ тут неможливий за умовою.)

Крім цього,

$$\|R_\lambda(A)\| \le \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A^k\|}{|\lambda|^{k+1}}}_{\text{геометр.прогр.}} = \frac{\frac{1}{|\lambda|}}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = (|\lambda| - \|A\|)^{-1}.$$

35.10. Нехай $\lambda \in \rho(A)$, $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu - \lambda| < \|R_\lambda(A)\|^{-1}$. Довести, що $\mu \in \rho(A)$.

Застосуємо теорему про збурення коректного оператора з лекції "Ряд Неймана": якщо $A, B \in \mathcal{B}(X;Y)$, A - коректний оператор, $C = A^{-1}(A - B)$ і збігається ряд Неймана $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C^n$, то оператор B також коректний і $B^{-1} = (I - C)^{-1}A^{-1}$.

У ролі операторів A і B у цій теоремі підставимо оператори $A - \lambda I$ і $A - \mu I$. За умовою існує обмежений оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, визначений на всьому просторі. Тоді $C = (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I - A + \mu I) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)$. Для збіжності ряду Неймана $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C^n$ достатньо, щоб виконувалася умова

$\|C\| < 1$, тобто $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R_\lambda(A)\|}$. За цієї умови згідно з теоремою оператор $A - \mu I$ також коректний. А це й означає, що $\mu \in \rho(A)$.

35.12. Довести резольвентну тотожність Гільберта:

$$(\forall \lambda, \mu \in \rho(A)) \quad R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A).$$

Розгляньмо і перетворимо такий добуток операторів:

$$\begin{gathered}
[(R_\lambda(A) - R_\mu(A))(A - \mu I)]\,(A - \lambda I) = \\
= (R_\lambda(A) \cdot (A - \mu I) - I)(A - \lambda I) = \\
= (A - \lambda I)^{-1}(A - \mu I)(A - \lambda I) - (A - \lambda I) = \\
= A - \mu I - A + \lambda I = (\lambda - \mu) I
\end{gathered} \qquad (*)$$

(тут використано тотожність $B^{-1}AB = A$, яка правильна для комутуючих операторів A і B; а в нашому випадку справді $(A - \mu I)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)(A - \mu I)$).

Із рівності $(*)$, якщо домножити її справа спочатку на $R_\lambda(A)$, а потім на $R_\mu(A)$, і випливає тотожність Гільберта.

35.24. У просторі $C[0,1]$ розглянемо оператор диференціювання $A : x \to x'$ із областю визначення $D(A) = \{x \in C[0,1] : \ x(0) = 0\}$. Довести правильність такого твердження: $\sigma(A) = \varnothing$ (спектр порожній).

Доведемо, що резольвентна множина $\rho(A) = \mathbb{C}$. Потрібно показати, що довільне число $\lambda \in \mathbb{C}$ є резольвентним значенням, тобто що $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$ і $R(A - \lambda I) = C[0,1]$ (тут $R(A - \lambda I)$ позначає множину значень оператора $A - \lambda I$).

Розгляньмо рівняння $(A - \lambda I)x = 0$ із умовою $x(0) = 0$. Маємо рівняння $x'(t) = \lambda x(t)$, загальним розв'язком якого є функція $x(t) = Ce^{\lambda t}$. З умови $x(0) = 0$ випливає, що $C = 0$. Тому $x(t) \equiv 0$. А це означає, що $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$.

Тепер розглянемо рівняння $(A - \lambda I)x = y$ із умовою $x(0) = 0$, де $y \in C[0,1]$ - довільна функція. Задача звелася до такої задачі Коші:

$$\begin{cases} x'(t) - \lambda x(t) = y(t), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Із курсу диференнціальних рівнянь відомо, що така задача має єдиний розв'язок, бо $\lambda x(t) + y(t)$ - неперервна функція. Це й означає, що рівняння $(A-\lambda I)x = y$ розв'язне для довільного елемента y. Тому $R(A-\lambda I) = C[0,1]$.

35.27. Нехай

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2 \qquad Ax = (0, x_1, x_2, \ldots),\ Bx = (x_2, x_3, \ldots).$$

Знайти точковий, залишковий і неперервний спектри кожного з цих операторів.

Вказівка. Використати твердження про спектр, доведені у лекціях, і те, що це є оператори правостороннього і лівостороннього зсуву, які ми вже розглядали у №34.1 і показали, що $A^* = B$.

Розгляньмо рівняння $Ax = \lambda x$ покоординатно:

$$(0, x_1, x_2, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots),$$
$$\begin{cases} 0 = \lambda x_1, \\ x_1 = \lambda x_2, \\ x_2 = \lambda x_3, \\ \ldots \end{cases}$$

Якщо у першому рядку нескінченої системи рівнянь $\lambda = 0$, то тоді $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$. Якщо ж $x_1 = 0$, а $\lambda \neq 0$, то тоді $x_2 = x_3 = \cdots = 0$. У кожному випадку $x = 0$. Тому оператор A не має власних значень: $\sigma_p(A) = \varnothing$.

Розгляньмо рівняння $Bx = \lambda x$ покоординатно:

$$(x_2, x_3, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots),$$
$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1, \\ x_3 = \lambda x_2, \\ x_4 = \lambda x_3, \\ \ldots \end{cases}$$

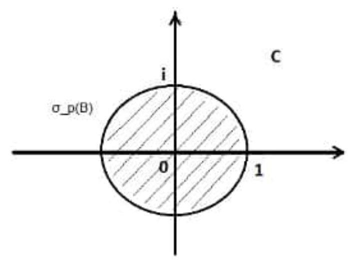
Число x_1 може бути довільне, а всі наступні координати вектора x такі: $x_2 = \lambda x_1$, $x_3 = \lambda x_2 = \lambda^2 x_1$, $x_4 = \lambda x_3 = \lambda^3 x_1$, ..., $x_n = \lambda^{n-1} x_1$, ... Але вектор-послідовність x не довільний. Він повинен належати до простору ℓ_2:

$$(x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \lambda^3 x_1, \ldots) \in \ell_2,$$

тобто норма цього елемента має бути скінченна:

$$\begin{gathered} \sqrt{|x_1|^2 + |\lambda x_1|^2 + |\lambda^2 x_1|^2 + |\lambda^3 x_1|^2 + \cdots} = \\ = |x_1| \sqrt{1 + |\lambda|^2 + |\lambda|^4 + |\lambda|^6 + \cdots} = \\ = |x_1| \sqrt{\tfrac{1}{1-|\lambda|^2}} < +\infty. \end{gathered}$$

Ця умова виконується, якщо $|\lambda| < 1$ (тоді під коренем сума нескінченно спадної геометричної прогресії). Тому $\sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| < 1\}$ (внутрішність круга радіуса 1):



Для числа λ відповідний власний елемент такий: $x_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots)$.

Оскільки спектр оператора завжди є замкненою множиною, то весь круг $\{\lambda : \ |\lambda| \leq 1\}$ належить до $\sigma(B)$. Як вже відомо з попереднього матеріалу, $\|B\| = 1$ (а також і $\|A| = 1$). Спектр оператора міститься в крузі з центром у точці 0 і радіусом, що дорівнює нормі оператора. Тому $\sigma(B) = \{\lambda : \ |\lambda| \leq 1\}$.

Тепер дослідимо точки комплексної площини, в яких $|\lambda| = 1$. Для таких чисел λ оператор $B - \lambda I$ оборотний, бо $\lambda \notin \sigma_p(B)$. Знайдемо множину значень $R(B - \lambda I)$, тобто сукупність таких елементів $y = (y_1, y_2, \ldots)$, що

$$\begin{cases} x_2 - \lambda x_1 = y_1, \\ x_3 - \lambda x_2 = y_2, \\ \ldots \end{cases}$$

Очевидно, що $R(B - \lambda I)$ містить всі фінітні вектори y (тобто ті, у яких скінченна кількість ненульових координат), що є образами фінітних векторів x при відображенні $B - \lambda I$. (Справді, беремо x_1 довільним чином, а $x_2 = \lambda x_1 + y_1$, $x_3 = \lambda x_2 + y_2$, і т.д.) Множина фінітних векторів всюди щільна в просторі ℓ_2.[1] Тому множина $R(B - \lambda I)$ всюди щільна в ℓ_2, тобто $\overline{R(B - \lambda I)} = \ell_2$. Згідно з означенням спектру це означає, що неперервний спектр $\sigma_c(B) = \{\lambda : \ |\lambda| = 1\}$, а залишковий спектр $\sigma_r(B) = \varnothing$.

[1] Пояснення для тих, хто не повірив на слово, але сам не знає, чому це так. Будь-який вектор $x = (x_1, x_2, \ldots)$ з якою завгодно точністю можна наблизити за нормою простору ℓ_2 такою послідовністю фінітних векторів: $x^{(n)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, бо $\|x - x^{(n)}\| = \sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |x_k|^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ як залишок збіжного ряду.

Залишається знайти неперервний і залишковий спектри оператора A. Оскільки оператори A і B взаємно спряжені, то згідно з твердженням про взаємозв'язок спектрів спряжених операторів

$$\sigma(A) = \sigma(B) = \{\lambda : \ |\lambda| \leq 1\} = \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A).$$

Крім цього, як відомо,

$$\lambda \in \sigma_r(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \ \text{ і } \ \lambda \in \sigma_p(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*).$$

Тому для $\lambda \in \sigma_p(B)$ (тобто для чисел $|\lambda| < 1$) маємо, що $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) = \sigma_r(A)$. Отже, $\{\lambda : \ |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma_r(A)$. Легко зрозуміти, що тут мусить бути знак рівності, бо якби певне число λ_0 із $|\lambda_0| = 1$ належало до $\sigma_r(A)$, то тоді відповідне спряжене число $\overline{\lambda_0} \in \sigma_p(B)$, що, як ми бачили, неправильно. Із цього остаточно одержуємо, що неперервний спектр $\sigma_c(A) = \{\lambda : \ |\lambda| = 1\}$.

Підсумок такий:

$$\sigma_p(A) = \varnothing, \quad \sigma_r(A) = \{\lambda : \ |\lambda| < 1\}, \quad \sigma_c(A) = \{\lambda : \ |\lambda| = 1\},$$

$$\sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| < 1\}, \quad \sigma_c(B) = \{\lambda : \ |\lambda| = 1\}, \quad \sigma_r(B) = \varnothing.$$

35.33. Нехай оператор A визначено в просторі $C[0;1]$ рівністю $(Ax)(t) = t \cdot x(t)$ (оператор множення на незалежну змінну). Довести, що $\sigma(A) = \sigma_r(A) = [0;1]$.

Для визначення точкового спектру цього оператора розглянемо рівняння $tx(t) = \lambda x(t)$, яке можна записати так:

$$(t - \lambda)x(t) = 0, \qquad t \in [0;1].$$

Тут змінна t пробігає $[0;1]$, а число λ - довільне комплексне. Очевидно, що $x(t) = 0$ за винятком, можливо, одної точки $t = \lambda$. Але функція $x(t)$ за умовою неперервна, тому $x(t) \equiv 0$. Отже, $\sigma_p(A) = \varnothing$.

Оцінимо норму оператора A:

$$\|Ax\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |(Ax)(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} |tx(t)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| = \|x\|,$$

звідки $\|A\| \leq 1$. Для функції $x(t) \equiv 1$ маємо: $\|x\| = 1$ і $\|Ax\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |t| = 1$, тому $\|A\| = 1$. Очевидно, що оператор A самоспряжений. Тому його спектр дійсний і міститься у відрізку $[-1;1]$.

Розглянемо рівняння $(A-\lambda I)x(t)=y(t)$ для чисел $\lambda\in[-1;1]$. Запишемо його так:

$$(t-\lambda)x(t)=y(t).$$

Якщо $\lambda\in[-1;0)$, то розв'язком цього рівняння є

$$x(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda}$$

і при цьому очевидно, що оператор $(A-\lambda I)^{-1}: y(t)\to\frac{y(t)}{t-\lambda}$ є обмежений і заданий на всьому просторі. Тому $[-1;0)\subset\rho(A)$.

Якщо ж $\lambda\in[0;1]$, то одержуємо, що $y(\lambda)=0$, функція y має значення 0 при $t=\lambda$. Висновок із цього такий: оператор $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$ існує, але його область визначення складається тільки з тих функцій $y(t)\in C[0;1]$, які перетворюються в 0 при $t=\lambda$. Така множина функцій не щільна в просторі $C[0;1]$ (тому що не кожну неперервну функцію можна наблизити як завгодно точно такими функціями $y(t)$ за нормою простору $C[0;1]$; справді, $\max_{0\le t\le 1,\, y\in C[0;1],\, y(\lambda)=0}|z(t)-y(t)|\ \ge\ |z(\lambda)|$). Тому $\sigma_r(A)=[0;1]$ і $\sigma_c(A)=\varnothing$ і $\sigma(A)=\sigma_r(A)=[0;1]$.

35.37. Знайти спектр, резольвенту та спектральний радіус оператора $A: C[0;1]\to C[0;1]$, якщо $(Ax)(t)=x(0)+tx(1)$.

Оператор A заданий на всьому просторі $C[0;1]$, а множина його значень складається тільки з многочленів першого степеня. Очевидно, що це лінійний оператор. Із нерівності

$$\|Ax\|=\max_{0\le t\le 1}|x(0)+tx(1)|\le 2\|x\|$$

випливає, що $\|A\|\le 2$. Для функції $x(t)\equiv 1$ маємо $\|x\|=1$ і $(Ax)(t)=1+t$, $\|Ax\|=2$, звідки $\|A\|=2$.

Знайдемо власні значення оператора A. Розглядаємо рівняння

$$x(0)+tx(1)=\lambda x(t),\qquad 0\le t\le 1.$$

У випадку $\lambda\ne 0$ бачимо, що функція $x(t)$ має такий вигляд: $x(t)=\alpha+\beta t$. Підставимо цей вираз у рівняння:

$$\alpha+t(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta t.$$

Оскільки функції 1 і t лінійно незалежні на $[0;1]$, то одержуємо систему

$$\begin{cases} (1-\lambda)\alpha = 0, \\ \alpha + (1-\lambda)\beta = 0. \end{cases}$$

Якщо $\lambda \neq 1$, то $\alpha = 0$ і $\beta = 0$. Нульовий розв'язок $x(t)$ нас не влаштовує, бо він не є власним елементом. Тому $\lambda = 1$, із другого рівняння $\alpha = 0$, а число β довільне. Відповідний власний елемент $x(t) = \beta t$ або просто $x(t) = t$ з точністю до константи.

Покажемо, що число $\lambda = 0$ також є власним значенням оператора A. Тепер маємо рівняння

$$x(0) + tx(1) = 0, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

з якого випливає при $t = 0$ і $t = 1$, що $x(0) = 0$, $x(1) = 0$. Тому нетривіальними розв'язками цього рівняння є всі неперервні функції, які перетворюються в 0 у точках $t = 0$ і $t = 1$.

Робимо висновок, що оператор A має два власні значення: 0 і 1. Тепер доведемо, що всі інші точки $\lambda \in \mathbb{C}$ є регулярними точками цього оператора. Нехай $\lambda \neq 0$ і $\lambda \neq 1$ і $y = y(t)$ - довільна функція з простору $C[0;1]$. Розв'яжемо рівняння

$$(Ax)(t) - \lambda x(t) = y(t), \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

$$x(0) + tx(1) - \lambda x(t) = y(t).$$

Підставимо у це рівняння спочатку $t = 0$, а потім $t = 1$ і знайдемо

$$x(0) = \frac{y(0)}{1-\lambda}, \qquad x(1) = \frac{y(1)}{1-\lambda} - \frac{y(0)}{(1-\lambda)^2}.$$

Тому розв'язок $x(t)$ цього рівняння такий:

$$x(t) = \frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)} + t\frac{y(1)}{\lambda(1-\lambda)} - t\frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)^2} - \frac{y(t)}{\lambda}.$$

Тут функція $y(t)$ може бути довільною неперервною функцією. Отже, множина значень оператора $A - \lambda I$ (при $\lambda \neq 0$ і $\lambda \neq 1$) є весь простір, оператор $A - \lambda I$ має обернений оператор, дія якого визначається рівністю

$$(A - \lambda I)^{-1} y(t) = \frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)} + t\frac{y(1)}{\lambda(1-\lambda)} - t\frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)^2} - \frac{y(t)}{\lambda}.$$

Видно безпосередньо, що цей оператор неперервний. Це також випливає і з теореми Банаха про обернений оператор. Тому він є резольвентою оператора A при $\lambda \neq 0$ і $\lambda \neq 1$.

Тепер остаточна відповідь про спектр: $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{0, 1\}$ - двоелементна множина.

Спектральним радіусом $r(A)$ оператора називають максимум модуля точок спектра. Очевидно, для заданого оператора $r(A) = 1$.

Спектральний радіус можна обчислити і за формулою $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} (\|A^n\|)^{\frac{1}{n}}$. Знайдемо степені оператора A:

$$(Ax)(t) = x(0) + tx(1),$$

$$(A^2x)(t) = A(Ax)(t) = A(x(0) + tx(1)) =$$
$$= x(0) + t(x(0) + x(1)),$$
$$(A^3x)(t) = A(x(0) + t(x(0) + x(1))) = x(0) + t(x(0) + x(0) + x(1)) =$$
$$= x(0) + t(2x(0) + x(1)),$$
$$\ldots$$
$$(A^nx)(t) = x(0) + t((n-1)x(0) + x(1)),$$
$$\ldots.$$

Тому $\|A^nx\| = \max\limits_{0\leq t\leq 1} |x(0) + t((n-1)x(0) + x(1))| \leq (1+n)\|x\|$. Для функції $x(t) \equiv 1$ маємо: $\|x\| = 1$ і $\|A^nx\| = 1+n$, звідки випливає, що $\|A^n\| = 1+n$. При $n = 1$ $\|A\| = 2$, що ми вже знали і вище. Тому

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} (1+n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n} = 1.$$

Зауваження. Якщо хтось подумав, що тут потрібно згадати важливу границю, яка дорівнює e, то це наслідок перевтоми від читання такого довгого тексту і йому корисно освіжити голову.

Задача із скінченновимірної алгебри. Нехай A і B - лінійні оператори у скінченновимірному просторі $\mathbb{C}^n$ такі, що $AB = BA$. Довести, що існує спільний власний вектор для цих операторів.

Потрібно довести, що існує ненульовий вектор $x \in \mathbb{C}^n$ такий, що $Ax = \lambda x$ і $Bx = \mu x$.

$\triangleleft$ *Розв'язок.* Нехай v - власний вектор оператора A, тобто $Av = \lambda v$, де $\lambda \in \mathbb{C}$. Розглянемо вектор $A(Bv)$:

$$A(Bv) = B(Av) = B(\lambda v) = \lambda(Bv).$$

Це означає, що Bv - також власний вектор оператора A із власним значенням λ. Розглянемо для $k \in \mathbb{N}$ вектор

$$A(B^k v) = B^k(Av) = B^k(\lambda v) = \lambda(B^k v).$$

Тому $B^k v$ - також власний вектор оператора A із власним значенням λ, де $k > 0$. Отже, $\forall a \in \mathbb{C}\ A(aB^k v) = \lambda(aB^k v)$.

Тепер доведемо, що для довільного полінома $f(z) \in \mathbb{C}[z] \quad f(B)v$ - також власний вектор оператора A із власним значенням λ. Справді, нехай

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n.$$

Тоді

$$f(B)v = c_0 v + c_1 Bv + \ldots + c_n B^n v,$$
$$A(f(B)v) = c_0 Av + c_1 A(Bv) + \ldots + c_n A(B^n v) =$$

$$= c_0 \lambda v + c_1 \lambda Bv + \ldots + c_n \lambda B^n v = \lambda f(B)v.$$

Отже,

$$A(f(B)v) = \lambda f(B)v. \qquad (1)$$

Розглянемо список $n+1$ векторів у просторі $\mathbb{C}^n$:

$$v,\ Bv,\ B^2 v,\ \ldots,\ B^n v.$$

Оскільки вони лінійно залежні, то існують числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, не всі рівні нулю, такі, що

$$a_0 v + a_1 Bv + a_2 B^2 v + \ldots + a_n B^n v = 0.$$

Визначимо поліном

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n.$$

Зрозуміло, що $p(B)v = 0$. Розкладемо $p(z)$ на множники:

$$p(z) = a(z - \mu_1)(z - \mu_2) \ldots (z - \mu_n).$$

Тоді
$$a(B-\mu_1 I)(B-\mu_2 I)\dots(B-\mu_n I)v=0.$$
Розглядаємо цей добуток справа наліво і встановлюємо, із якого номера добуток стає нульовим. Нехай для номера m добуток ненульовий, а для $m-1$ стає нульовим:

$$(B-\mu_m I)\dots(B-\mu_n I)\neq 0.$$

Позначимо
$$q(z)=(z-\mu_m)(z-\mu_{m+1})\dots(z-\mu_n)$$
так, що
$$q(B)v\neq 0, \quad \text{а} \quad (B-\mu_{m-1}I)q(B)v=0.$$
Перепозначимо $\mu=\mu_{m-1}$ і запишемо

$$(B-\mu I)q(B)v=0. \qquad (2)$$

Приймемо
$$w:=q(B)v\neq 0.$$
Тоді за (2) $Bw=\mu w$ і за (1) $Aw=\lambda w$. Це доводить, що w - спільний власний вектор. ▶

38. Компактні оператори

38.1. З'ясувати, чи є компактним оператор

$$A : \ell_2 \ni x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto Ax \in \ell_2,$$

якщо:
i) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$; ii) $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$.

Задано оператори правостороннього і лівостороннього зсуву на одну одиницю. Нагадаємо, що оператор $A : X \to Y$ називають компактним, якщо він переводить кожну обмежену множину E простору X у відносно компактну множину AE простору Y. (Зрозуміло, що якщо оператор переводить одиничну кулю у відносно компактну множину, то він компактний.) У цьому прикладі $X = Y = \ell_2$. Множину E називають обмеженою, якщо вона міститься в деякій кулі. Множину M називають відносно компактною, якщо кожна нескінченна послідовність точок цієї множини містить збіжну підпослідовність (проте, на відміну від означення компактної множини, та підпослідовність може збігатися до елемента, що не належить до самої множини M). Як відомо з лекції, у нескінченновимірному просторі $H = \ell_2$ існує обмежена, але не цілком обмежена множина, а саме множина $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортів простору: $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots)$, $\ldots$.
Згідно з теоремою Гаусдорфа ця множина ортів не є передкомпактною, тобто не кожна послідовність точок цієї множини містить фундаментальну послідовність. Тому зрозуміло, що ця множина E не є відносно компактною. Оператор A з пункту i) переводить обмежену множину E в її підмножину $AE = \{e_n\}_{n=2}^{\infty}$, яка не є відносно компактною. Висновок: оператор A не є компактним. Оператор A із пункту ii) переводить множину E у множину $AE = \{0\} \cup E$, яка також не є відносно компактною. Висновок: цей оператор A також не є компактним.

38.2. i) $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots)$; ii) $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{n-1}{n}x_n, \ldots)$.

Для доведення компактності оператора A пункту i) розглянемо таку послідовність скінченновимірних операторів A_n: $A_n x = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, 0, \ldots)$ (тобто занулюємо всі координати вектора після номера n). Як відомо, всі скінченновимірні оператори є компактними. Доведемо, що послідовність операторів A_n збігається до оператора

A за нормою (тобто рівномірно):

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A - A_n)x\| = \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\tfrac{1}{k} x_k|^2 \right)^{1/2} \leq$$
$$\leq \sup_{k>n} \tfrac{1}{k} \cdot \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \leq \tfrac{1}{n+1} \cdot 1 \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Згідно із теоремою, що множина компактних операторів у гільбертовому просторі є замкненим двостороннім ідеалом алгебри всіх лінійних обмежених операторів, із цього випливає компактність оператора A.

Знову розглянемо множину ортів простору ℓ_2: $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Знайдемо образ цієї обмеженої множини простору ℓ_2 при відображенні A пункту ii). Очевидно, що $Ae_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $Ae_2 = (0, \frac{1}{2}, 0, \ldots)$, $Ae_3 = (0, 0, \frac{2}{3}, 0, \ldots)$, $\ldots$, $Ae_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{n}, 0, \ldots)$, $\ldots$. Зрозуміло, що множина AE, як і сама множина E, не є цілком обмеженою і не є відносно компактною. Оператор A переводить обмежену множину у множину, яка не є відносно компактною. Тому він не є компактним.

38.5. Нехай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фіксована обмежена послідовність чисел (дійсних або комплексних). Довести, що оператор $A : \ell_2 \ni x \mapsto (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n, \ldots)$ компактний тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Необхідність. Нехай $e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots)$, $n = 1, 2, \ldots$. Оскільки ця послідовність ортонормована, то вона слабо збігається до нуля: $e_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} 0$. Оператор A компактний, тому він (згідно з твердженням з лекції) переводить цю послідовність у сильно збіжну послідовність, тобто $\|Ae_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Але $\|Ae_n\| = |a_n|$. Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Достатність. Самостійно за аналогією з доведенням прикладу 38.2i).

38.12. З'ясувати, які з зазначених операторів $A : C[0,1] \to C[0,1]$ є компактними:

i) $(Ax)(t) = x(0) + tx(1)$;

ii) $(Ax)(t) = x(t^2)$;

iii) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{ts}x(s)\,ds$.

i) Цей оператор, очевидно, є лінійний і неперервний. Компактність оператора A можна довести згідно з теоремою Арцела-Асколі. Нехай M - обмежена множина функцій у просторі $C[0,1]$, тобто існує таке число $C > 0$, що $\forall x \in M$ виконується нерівність $\|x\| \leq C$, де $x(t)$ - неперервна функція на $[0,1]$. Доведемо, що множина AM є рівномірно обмежена й одностайно неперервна.

Справді, по-перше,

$$\forall x \in M \; \|Ax\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(0) + tx(1)| \leq \\ \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(0)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |tx(1)| \leq 2\|x\| \leq 2C,$$

по-друге,

$\forall x \in M$ і $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$, якщо $|t_1 - t_2| < \delta$, то

$$|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)| = |x(0) + t_1x(1) - x(0) - t_2x(1)| \leq \\ \leq \delta \cdot \|x\| \leq \delta \cdot C = \varepsilon, \text{ причому } \delta = \tfrac{C}{\varepsilon}.$$

(Зауваження. Якщо розглядати цей самий оператор у просторі $L_2(0,1)$, то він не є компактний. Самостійно пояснити причину цього факту. Хто пояснить, буде винагороджений.)

ii) Ні, бо A переводить обмежену послідовність $x_n(t) = t^n$ у множину, яка не відносно компактна в просторі $C[0,1]$. Справді, для кожного n маємо $\|x_n\| = \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |t^n| = 1$, а $At^n = t^{2n}$, причому з послідовності t^{2n} неможливо вибрати збіжну в $C[0,1]$ підпослідовність, тому що ця послідовність поточково збігається до розривної функції.

iii) Доведемо компактність цього оператора за теоремою Арцела-Асколі. Нехай M - обмежена за нормою простору $C[0,1]$ множина функцій, тобто $\exists C > 0 \; \forall x \in M \; \|x\| \leq C$. Розглянемо множину $N = AM = \{Ax : x \in M\}$. Доведемо, що множина N відносно компактна в $C[0,1]$, що згідно з теоремою Арцела-Асколі означає, що вона рівномірно обмежена й одностайно неперервна. Рівномірна обмеженість (яка означає, що всі функції цієї множини обмежені за нормою одним числом, а це сильніша вимога, ніж обмеженість за нормою кожної окремої функції) множини

N випливає з обмеженості множини M:

$$\|Ax\| = \max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 e^{ts}x(s)\,ds\right| \le e\cdot\max_{0\le s\le 1}|x(s)|\cdot\int_0^1 ds = e\|x\| \le Ce.$$

Для доведення одностайної неперервності (яка означає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta_\varepsilon > 0$, незалежне від функції x, для якого з умови $|t_1 - t_2| < \delta$ випливає нерівність $|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)| < \varepsilon$) множини N розглянемо

$$|(Ax)(t_1)-(Ax)(t_2)| = \left|\int_0^1 (e^{t_1 s} - e^{t_2 s})x(s)\,ds\right| = \left|\int_0^1 e^{t_2 s}(e^{(t_1-t_2)s} - 1)x(s)\,ds\right| \le$$

$$\le e\int_0^1 |e^{(t_1-t_2)s} - 1|\cdot|x(s)|\,ds \le Ce\int_0^1 |e^{(t_1-t_2)s} - 1|\,ds \le$$

$$\le Ce\int_0^1 e|t_1 - t_2|s\,ds = \frac{1}{2}Ce^2|t_1 - t_2|$$

(тому що $e^x - 1 \le ex$ при $0 \le x \le 1$). Зауважимо, що тут можна було оцінювати і за формулою Лагранжа про кінцевий приріст.

Якщо тепер прийняти, що $|t_1 - t_2| < \delta = \frac{2\varepsilon}{Ce^2}$, то з цих нерівностей одержуємо $|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)| < \varepsilon$ для всіх функцій $x \in M$. Доведення закінчене.

38.18. Довести, що ортопроєктор у гільбертовому просторі компактний тоді і тільки тоді, коли його область значень скінченновимірна.

Необхідність. Нехай $P : H \to G$ компактний. Доведення від протилежного. Припустимо, що G - нескінченновимірний підпростір простору H. Розглянемо довільну нескінченну множину ортів (тобто векторів з нормою 1, які взаємно ортогональні) у множині G. Зрозуміло, що оператор P відображає цю множину саму на себе. Ця множина ортів обмежена, але не відносно компактна (це доведено у лекції). Тому оператор P не є компактним. Отримали суперечність з умовою.

Достатність. Якщо $P : H \to G$ - ортопроєктор і G - скінченновимірний підпростір, то оператор P є скінченновимірним, а тому і компактним.

38.23. Довести, що компактний оператор у гільбертовому просторі відображає слабко збіжні послідовності у сильно збіжні.

У лекціях є доведення цього твердження. Тут розглянемо спрощене доведення. Нехай $A: H \to H$ - компактний оператор і нехай $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} x$ в H. Оскільки послідовність елементів x_n слабко збіжна, то вона обмежена за нормою (це легко довести). А оскільки оператор A компактний, то він переводить цю обмежену послідовність у відносно компактну множину, тобто з множини образів Ax_n можна вибрати збіжну підпослідовність Ax_{n_k}. Нехай $Ax_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} y$. Але послідовність Ax_n, як легко вивести з неперервності A, є слабко збіжною. Тому послідовність Ax_n не може мати більше одної граничної точки. Отже, Ax_n - збіжна послідовність.

39. Нормально розв'язні та фредгольмові оператори

Нагадаємо, що оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ називають *нормально розв'язним*, якщо множина значень $R(A)$ цього оператора замкнена в H, тобто $\overline{R(A)} = R(A)$ або, що еквівалентно, $H = R(A) \oplus \ker A^*$. (Про позначення: $\ker A^*$ - це те саме, що $Z(A^*)$ - ядро оператора.)

Оператор називають *фредгольмовим*, якщо, крім того, $\dim \ker A = \dim \ker A^* < +\infty$.

39.2. Чи є оператор $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ такий, що

$$\forall x \in L_2(0,1) \quad (Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)\, ds,$$

нормально розв'язним?

У прикладі 34.22 ми знайшли спряжений до оператора A:

$$(A^* y)(t) = \int_t^1 y(t)\, dt.$$

Знайдемо ядра операторів A і A^*. Якщо $\int\limits_0^t x(s)\, ds = 0$, то з властивостей інтеграла Лебега випливає, що $x(t) \overset{\text{м.с.}}{=} 0$. Тому $n = \dim \mathrm{Z}(A) = \dim \ker A = 0$. Якщо $\int\limits_t^1 y(s)\, ds = 0$, то $y(t) \overset{\text{м.с.}}{=} 0$. Тому $m = \dim \mathrm{Z}(A^*) = \dim \ker A^* = 0$. Отже, можемо знайти індекс оператора: $\operatorname{ind} A = n - m = \operatorname{def} A - \operatorname{codef} A = 0$. Якби оператор A був нормально розв'язним і $m = \operatorname{codef} A = 0$, то $R(A) = L_2(0,1) = H$. Проте це, очевидно, є неправильно, тому що всі функції з множини значень $R(A)$ оператора A абсолютно неперервні (як інтеграл Лебега) і дорівнюють нулю у точці 0. Простір $L_2(0,1)$ містить значно більше функцій. Висновок: оператор A не є нормально розв'язним.

39.3. Дослідити на нормальну розв'язність та фредгольмовість такі оператори $A \in \mathcal{B}(H)$:

i) A - ортопроєктор;

ii) $A \in \mathcal{B}^f(H)$ (тобто скінченновимірний: $\dim \mathrm{R}(A) < +\infty$);

iii) $H = \ell_2$, $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$;

iv) $H = \ell_2$, $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$;

v) $H = \ell_2$, $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots)$;

vi) $H = \ell_2$, $Ax = (2x_1, \frac{3}{2}x_2, \ldots, (1 + \frac{1}{n})x_n, \ldots)$.

i) Ортопроєктор $A : H \to G$ нормально розв'язний, бо $R(A) = G$ - замкнений підпростір. Ортопроєктор завжди самоспряжений і тому $\dim \ker A = \dim \ker A^*$.

Якщо обидва простори H і G нескінченновимірні, то $\dim \ker A$, як різниця розмірностей просторів H і G, може бути скінченним числом, а може бути і нескінченним. У першому випадку оператор фредгольмів, а в другому - ні.

Якщо простір H нескінченновимірний і G скінченновимірний, то $\dim \ker A = \infty$ і тому A не є фредгольмовим.

Якщо ж H і G - скінченновимірні, то $\dim \ker A = \dim \ker A^* < +\infty$ і A - фредгольмів оператор.

ii) Якщо $A \in \mathcal{B}^f(H)$, то множина $R(A)$ замкнена в H і A - нормально розв'язний.

Якщо простір H нескінченновимірний і (за умовою) $R(A)$ скінченновимірна, то $\dim \ker A^* = \infty$ і тому A не є фредгольмовим.

Якщо простір H скінченновимірний і $R(A)$ скінченновимірна, то обидва числа $\dim \ker A^*$ і $\dim \ker A$ скінченні. Якщо вони рівні (що може виконуватися, а може і не виконуватися), то тоді оператор A фредгольмів.

iii) і iv) досліджуємо разом. Із прикладів 34.1 і 34.2 знаємо, що ці оператори взаємно спряжені. Для оператора A із пункту iii) множина

$$R(A) = \{(0, x_1, x_2, \ldots) : \ (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2\}$$

замкнена в ℓ_2. Крім цього, дефект оператора $\dim \ker A = 0$ (бо якщо $Ax = 0$, то $x = 0$). Крім цього, кодефект оператора $\dim \ker A^* = 1$ (бо якщо $A^*x = 0$, то $x_2 = x_3 = \ldots = 0$, а x_1 - довільне число, причому елементи $(x_1, 0, 0 \ldots)$ утворюють одновимірний підпростір в ℓ_2). Для оператора A із

iv) дефект і кодефект відповідно дорівнюють 1 і 0 (тобто просто навпаки до оператора A). Висновок: ці оператори, очевидно, нормально розв'язні, але не є фредгольмовими.

v) Цей оператор, очевидно, самоспряжений і (згідно з 38.2 або 38.5) компактний. Також очевидно, що $\dim\ker A = \dim\ker A^* = 0$. Якби оператор A був фредгольмовим, то це би означало, що $R(A) = \ell_2$. Але компактність оператора A разом із нескінченновимірністю $R(A)$ суперечать нормальній розв'язності A. Покажемо це, просто пред'явивши вектор $y \in \ell_2$, який не має прообразу при відображенні A. Нехай $y = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$. Очевидно, що рівняння $Ax = y$ не має розв'язку в просторі ℓ_2 (бо послідовність $(1, 1, 1, \ldots) \notin \ell_2$). Висновок: оператор не є фредгольмовим.

vi) Цей оператор також самоспряжений і (згідно з 38.5) не компактний. Очевидно, що $\dim\ker A = \dim\ker A^* = 0$. Доведемо, що $R(A) = \ell_2$. Розглянемо рівняння $Ax = y$, де y - довільний елемент простору ℓ_2. Бачимо, що $x_1 = \frac{1}{2}y_1$, $x_2 = \frac{2}{3}y_2$, ..., $x_n = \frac{n}{n+1}y_n$, $\ldots$ Елемент $x = (\frac{1}{2}y_1, \frac{2}{3}y_2, \ldots, \frac{n}{n+1}y_n, \ldots)$ належить до простору ℓ_2, бо $\|x\|_{\ell_2} \leq \|y\|_{\ell_2}$. Висновок: оператор A фредгольмів.

Спектр компактного оператора

39.8. Довести, що оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$ такий, що $Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$ компактний і знайти його спектр.

Позначимо літерами B і C вже відомі оператори:

$$Bx = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots), \qquad Cx = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots).$$

Оператор B обмежений, але згідно з 38.1 не компактний, а оператор C згідно з 38.5 компактний. Заданий оператор A є добутком цих операторів:

$$A = B \cdot C,$$

причому саме в такому порядку. (Оператор $C \cdot B \neq B \cdot C$.) Згідно з теоремою про добуток обмеженого і компактного операторів оператор A

є компактним. Знайдемо власні значення і власні елементи оператора A. Розглядаємо рівняння $Ax = \lambda x$ покоординатно:

$$(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Бачимо, що

$$\begin{cases} \lambda x_1 = 0, \\ \lambda x_2 = x_1, \\ \lambda x_3 = \frac{x_2}{2}, \\ \ldots \\ \lambda x_n = \frac{x_{n-1}}{n-1}, \\ \ldots \end{cases}$$

Якщо у першій рівності $\lambda = 0$, то з наступних $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = 0$. Якщо $x_1 = 0$ і $\lambda \neq 0$, то $x_2 = x_3 = \ldots = 0$. У кожному випадку $x = 0$. Тому оператор не має власних значень. Оскільки A компактний, то його неперервний або залишковий спектр може містити тільки одне число $\lambda = 0$. Крім цього, для компактного оператора завжди $0 \in \sigma(A)$. Розглянемо рівняння $Ax - \lambda x = y$ для довільного елемента y при $\lambda = 0$:

$$(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots) = (y_1, y_2, y_3, \ldots).$$

Звідси $x_1 = y_2$, $x_2 = 2y_3$, ..., $x_n = ny_{n+1}$, $\ldots$ і $x = (y_2, 2y_3, \ldots, ny_{n+1}, \ldots)$. Зрозуміло, що $\underset{\lambda=0}{\overline{R(A - \lambda I)}} = \ell_2$ (бо для будь-якого фінітного вектора y існує прообраз x), але $\underset{\lambda=0}{R(A - \lambda I)} \neq \ell_2$ (бо, наприклад, для елемента $y = (C, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$, де C довільне, відповідний елемент x не належить до простору ℓ_2). Висновок: $\sigma(A) = \sigma_c(A) = \{0\}$.

39.9. Довести, що оператор $A : L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$ такий, що

$$\forall x \in L_2(0,1) \quad (Ax)(s) = \int\limits_{-1}^{1} s^2 t x(t)\, dt,$$

компактний і знайти його спектр.

Це є оператор із неперервним ядром $K(t,s) = s^2 t$. Компактність оператора A можна пояснювати довго: розглянути одиничну кулю в просторі $L_2(-1,1)$ і довести, що її образ при відображенні A є відносно компактною множиною в просторі $C[-1,1](!)$, а тим більше в $L_2(-1,1)$. Є коротке пояснення: це одновимірний оператор (бо $(Ax)(s) = Cs^2$, де стала C залежить від функції x), тому він компактний.

Розглянемо рівняння для власних значень: $(Ax)(s) = \lambda x(s)$, тобто

$$\int\limits_{-1}^{1} s^2 t x(t)\, dt = \lambda x(s),$$

звідки зрозуміло, що функція $x(s)$ має такий вигляд: $x(s) = Cs^2$. Цей вираз підставимо в рівняння з інтегралом:

$$s^2 \int\limits_{-1}^{1} t \cdot Ct^2\, dt = \lambda \cdot Cs^2.$$

Ліворуч інтеграл по симетричному відрізку від непарної функції (по змінній t) дорівнює 0, тому $\lambda = 0$ (а Cs^2 дорівнює нулю тільки в одній точці $s = 0$). Легко здогадатися, розглядаючи рівняння для невідомої функції x (при $\lambda = 0$)

$$s^2 \int\limits_{-1}^{1} t \cdot x(t)\, dt = 0,$$

що його розв'язками є всі парні функції з простору $L_2(-1,1)$. Парні функції утворюють нескінченновимірну множину, бо будь-яка скінченна лінійна комбінація парних степенів змінної t або косинусів кратних дуг є парною функцією. Висновок: $\sigma(A) = \{0\}$, число $\lambda = 0$ є власним значенням нескінченної кратності.

40. Самоспряжені компактні оператори. Теорема Гільберта про повноту

40.1. Нехай $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Довести, що $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \|A^n\| = \|A\|^n$, зокрема $r(A) = \|A\|$.

Доведемо це твердження для $n = 2$. А для більших чисел аналогічно або за індукцією. По-перше, як випливає з означення норми оператора, для добутку будь-яких двох операторів A і B виконується нерівність $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. Тому для довільного лінійного обмеженого оператора A виконується нерівність $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Залишається показати, що для самоспряжених операторів у цій нерівності буде знак рівності.

Як відомо з попередніх тем (див. означення норми оператора або №27.23), $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1,\, \|y\| \leq 1} |(Ax|y)|$ для $A \in \mathcal{B}(H)$. Тому

$$\|A^2\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(A^2 x|x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax|Ax)| =$$
$$= \sup_{\|x\| \leq 1} (\|Ax\| \cdot \|Ax\|) = \left(\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \right)^2 = \|A\|^2,$$

де ми спочатку використали самоспряженість оператора A, потім нерівність Коші-Буняковського, яка в цьому випадку перетворюється в рівність, бо $Ax = 1 \cdot Ax$, потім властивість супремуму добутку однакових множників, і, в кінці, означення норми оператора.

Як наслідок, одержуємо для самоспряженого оператора A таке: $r(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A\|^n} = \|A\|$.

40.4. Нехай A - самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі H, спектр якого складається з двох власних значень $\lambda = 0$ та $\lambda = 1$. Довести, що A - ортопроєктор.

Розглянемо рівняння $Ax = 0 \cdot x = 0$. Воно за умовою має нетривіальні розв'язки. Позначимо $G = \ker A$.

Розглянемо рівняння $Ax = 1 \cdot x = x$. Воно за умовою має нетривіальні розв'язки. Позначимо $K = \{x : \ Ax = x\}$.

Оператор тотожний (I) на підпросторі K і нульовий на підпросторі G. Оскільки $H = G \oplus K$ і $\forall h \in H \ h = g + k$, де $g \in G$, $k \in K$, то $Ah = Ag + Ak = Ak = k$. А це означає, що оператор A проєктує вектор h на підпростір K.

(Питання для перевірки розуміння: а де використали умову самоспряженості оператора?)

40.5. Довести, що оператор $A: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, де

$$\forall x \in L_2(0,1) \quad (Ax)(s) = \int\limits_0^1 st(1-st)x(t)\,dt,$$

є самоспряженим компактним оператором і знайти його спектр.

Запишемо дію оператора так:

$$(Ax)(s) = s\int\limits_0^1 tx(t)\,dt - s^2\int\limits_0^1 t^2x(t)\,dt \quad -$$

а це є різниця двох компактних операторів. Тому A компактний. Можна пояснювати інакше: оскільки $(Ax)(s) = C_1s + C_2s^2$, де C_1, C_2 - деякі числа, що залежать від функції $x(s)$, то оператор двовимірний, тому компактний.

Доведемо самоспряженість оператора: для всіх $x, y \in L_2(0,1)$

$$\begin{gathered}(Ax|y) = \int\limits_0^1 (Ax)(s)\overline{y(s)}\,ds = \text{ (різниця двох самоспряжених) } = \\ = \int\limits_0^1 \left(s\int\limits_0^1 tx(t)\,dt - s^2\int\limits_0^1 t^2x(t)\,dt\right)\overline{y(s)}\,ds = \\ \text{(змінюємо порядок інтегрування)} \\ = \int\limits_0^1 \left(t\int\limits_0^1 s\overline{y(s)}\,ds - t^2\int\limits_0^1 s^2\overline{y(s)}\,ds\right)x(t)\,dt = (x|(A^*y)),\end{gathered}$$

де $(A^*y)(t) = \int\limits_0^1 (ts - t^2s^2)y(s)\,ds$. Якщо тут поміняти ролі s і t, то бачимо, що $A = A^*$.

Із самоспряженості оператора випливає, що його спектр дійсний: $\sigma(A) \subset [\inf A, \sup A]$, де $\inf A = \inf\limits_{\|x\|=1} |(Ax|x)|$, $\sup A = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax|x)|$, і, крім цього, всі ненульові точки спектру - власні значення. Розглянемо рівняння $Ax = \lambda x$ у двох випадках: $\lambda \neq 0$ і $\lambda = 0$.

а) $\lambda \neq 0$,

$$s\int\limits_0^1 tx(t)\,dt - s^2\int\limits_0^1 t^2x(t)\,dt = \lambda x(s),$$

звідки $x(s) = C_1 s + C_2 s^2$. Цей вираз підставимо в рівняння:

$$s\int\limits_0^1 t(C_1 t + C_2 t^2)\,dt - s^2\int\limits_0^1 t^2(C_1 t + C_2 t^2)\,dt = \lambda C_1 s + \lambda C_2 s^2,$$
$$s(C_1\cdot\tfrac{1}{3} + C_2\cdot\tfrac{1}{4}) - s^2(C_1\cdot\tfrac{1}{4} + C_2\cdot\tfrac{1}{5}) = \lambda C_1 s + \lambda C_2 s^2.$$

Оскільки тут s - довільне число з $[0,1]$, а функції s і s^2 лінійно незалежні, то одержуємо систему для визначення констант C_1 і C_2:

$$\begin{cases}\lambda C_1 = \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{4}\\ \lambda C_2 = -\frac{C_1}{4} - \frac{C_2}{5},\end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases}C_1(\frac{1}{3} - \lambda) + \frac{C_2}{4} = 0,\\ \frac{C_1}{4} + C_2(\frac{1}{5} + \lambda) = 0.\end{cases}$$

Ця система має ненульові розв'язки тільки тоді, коли визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} + \lambda\end{vmatrix} = 0, \text{ тобто } \ 240\lambda^2 - 32\lambda - 1 = 0.$$

Корені цього рівняння такі:

$$\lambda_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{496}}{240} = \frac{4 \pm \sqrt{31}}{60} = \frac{1}{15} \pm \frac{\sqrt{31}}{60}.$$

Відповідні власні елементи знаходяться однозначно з точністю до констант, тобто відповідні власні підпростори одновимірні.

б) $\lambda = 0$. Очевидно, що це число також є власним значенням оператора A, бо рівняння

$$s\int\limits_0^1 tx(t)\,dt - s^2\int\limits_0^1 t^2 x(t)\,dt = 0$$

має безліч лінійно незалежних розв'язків:

$$\begin{cases}\int\limits_0^1 tx(t)\,dt = 0,\\ \int\limits_0^1 t^2 x(t) = 0.\end{cases}$$

Розв'язки цієї системи можна знайти, наприклад, у такому вигляді: $x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2$ або $x(t) = C_1 t^{10} + C_2 t^{100} + C_3 t^{1000}$.

Отже, $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$.

40.6. Нехай

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t), & 0 \le s \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\text{і} \quad \forall x \in L_2(0,1) \quad (Ax)(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds.$$

Довести, що $A = A^* \in \mathcal{B}_\infty(L_2(0,1))$ і знайти його власні значення та власні елементи.

Дію оператора A можна записати так:

$$\begin{aligned}(Ax)(t) &= \int\limits_0^t s(1-t)x(s)\,ds + \int\limits_t^1 t(1-s)x(s)\,ds = \\ &= (1-t)\int\limits_0^t sx(s)\,ds + t\int\limits_t^1 (1-s)x(s)\,ds.\end{aligned}$$

Доведення самоспряженості аналогічне до прикладу 40.5, але тут зміна порядку інтегрування тонша, бо межі змінні. Завдання: самостійно записати скалярний добуток $(Ax|y)$, нарисувати області інтегрування, змінити порядок інтегрування і переконатися, що оператор самоспряжений. Компактність оператора пояснюємо аналогічно до 40.5.

Розглянемо рівняння для визначення власних значень і власних елементів:

$$(1-t)\int\limits_0^t sx(s)\,ds + t\int\limits_t^1 (1-s)x(s)\,ds = \lambda x(t). \qquad (*)$$

Щоб розв'язати це рівняння, двічі диференціюємо по змінній t (тут потрібно згадати правило диференціювання інтегралів зі змінними межами):

$$-\int\limits_0^t sx(s)\,ds + (1-t)tx(t) + \int\limits_t^1 (1-s)x(s)\,ds - t(1-t)x(t) = \lambda x'(t),$$

$$-tx(t) - (1-t)x(t) = \lambda x''(t),$$
$$-x(t) = \lambda x''(t).$$

Крім цього, з нашого рівняння (∗) зрозуміло, що $x(0) = x(1) = 0$.

Одержали диференціальне рівняння другого порядку з крайовими умовами:

$$\begin{cases} \lambda x''(t) + x(t) = 0, \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цього лінійного однорідного рівняння такий:

$$x(t) = C_1 e^{i\frac{1}{\sqrt{\lambda}}t} + C_2 e^{-i\frac{1}{\sqrt{\lambda}}t}.$$

Врахуємо крайові умови:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}} + C_2 e^{\frac{-i}{\sqrt{\lambda}}} = 0. \end{cases}$$

Ця система має ненульові розв'язки тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}} & e^{\frac{-i}{\sqrt{\lambda}}} \end{vmatrix} = 0,$$

звідки $e^{\frac{-i}{\sqrt{\lambda}}} = e^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}}$ або $e^{\frac{2i}{\sqrt{\lambda}}} = 1$. Тому $\frac{2}{\sqrt{\lambda}} = 2\pi n$, $\lambda = \frac{1}{\pi^2 n^2}$, де n - довільне ціле число. При цьому $x_n(t) = \sin(n\pi t)$.

Безпосередньою підстановкою в рівняння легко перевірити, що ці числа і функції справді є власними значеннями і власними елементами.

36.2. Довести, що при $|\lambda| < 1$ рівняння

$$x(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt = y(s)$$

коректно розв'язне в $C[0,1]$, якщо

$$K(s,t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t(s+1), & s \le t, \\ \frac{2}{3}s(t+1), & s > t. \end{cases}$$

Знайдемо норму інтегрального оператора A, що діє так: $(Ax)(s) = \int\limits_0^1 K(s,t)x(t)\,dt$. Нехай $\|x\| = 1$. Тоді

$$\begin{gathered}\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{0\le s\le 1} |(Ax)(s)| = \max_{0\le s\le 1} \left| \int\limits_0^1 K(s,t)x(t)\,dt \right| \le \\ \le \max_{0\le s\le 1} \int\limits_0^1 |K(s,t)| \cdot |x(t)|\,dt \le \\ \le \max_{0\le s\le 1} \left[\int\limits_0^s \tfrac{2}{3}s(t+1)\,dt + \int\limits_s^1 \tfrac{2}{3}t(s+1)\,dt \right] = \\ = \max_{0\le s\le 1} \left[\tfrac{2}{3}s(\tfrac{s^2}{2}+s) + \tfrac{2}{3}(s+1)(\tfrac{1}{2}-\tfrac{s^2}{2}) \right] = \\ = \tfrac{1}{3}\max_{0\le s\le 1} [[s^3+2s^2+s+1-s^3-s^2] = \\ = \tfrac{1}{3}\max_{0\le s\le 1} [s^2+s+1] = \tfrac{1}{3}[1^2+1+1] = 1\end{gathered}$$

(максимум монотонно зростаючої функції на $[0,1]$ у правому кінці відрізка).

Із цього випливає, що для всіх чисел λ таких, що $|\lambda| < 1$, норма інтегрального оператора λA також менша від одиниці. Тому згідно з твердженнями про ряд Неймана і рівняння $u - \lambda A u = v$ це рівняння є коректно розв'язним.

36.4. Довести, що при $|\lambda| < 1$ рівняння

$$x(s) - \lambda \int\limits_0^1 K(s,t)x(t)\,dt = y(s)$$

коректно розв'язне в $L_2(0,1)$, якщо $K(s,t) = \sqrt{t}e^{\frac{1}{2}(1-st)}$.

Для обчислення норми цього інтегрального оператора оператора A, враховуючи норму в просторі $L_2(0,1)$, достатньо обчислити таке число:

$$\left(\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left(\sqrt{t}e^{\frac{1}{2}(1-st)} \right)^2 dsdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Просто двічі інтегруємо:

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\sqrt{t}e^{\frac{1}{2}(1-st)}\right)^2 ds\,dt = \int_0^1\int_0^1 te^{(1-st)}\,ds\,dt = -e\int_0^1\int_0^1 d(e^{-st})dt =$$
$$= -e\int_0^1 (e^{-t}-1)dt = -e(-e^{-t}-t)\big|_0^1 = -e(-\tfrac{1}{t}-1+1) = 1.$$

36.7. У просторі $C[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$ знайти розв'язок рівняння

$$x(s) - \lambda\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} K(s,t)x(t)\,dt = y(s),$$

якщо $K(s,t) = \operatorname{tg} t$, $y(s) \equiv 1$.

Маємо інтегральне рівняння

$$x(s) - \lambda\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} t \cdot x(t)\,dt = 1.$$

Оскільки цей інтеграл являє собою деяку константу (залежну від x), то $x(s) = C$. Щоб знайти точне значення C, підставляємо цей вираз в інтегральне рівняння:

$$C - \lambda C\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} t\,dt = 1.$$

Інтеграл від непарної функції $\operatorname{tg} t$, очевидно, дорівнює нулю. Тому $C = 1$. Розв'язком рівняння є функція $x(s) \equiv 1$ для довільних значень λ. Це легко перевірити, підставивши цю функцію в рівняння.

36.8. У просторі $C[0; \frac{\pi}{2}]$ знайти розв'язок рівняння

$$x(s) - \lambda \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} K(s,t)x(t)\,dt = y(s),$$

якщо $K(s,t) = \sin s \cos t$, $y(s) = \sin s$.

Маємо інтегральне рівняння

$$x(s) - \lambda \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin s \cos t \cdot x(t)\,dt = \sin s.$$

Із вигляду рівняння очевидно, що

$$x(s) = \lambda \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin s \cos t \cdot x(t)\,dt + \sin s = C_0 \sin s + \sin s = C \sin s.$$

Підставимо цей вираз у рівняння:

$$C \sin s - \lambda \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin s \cos t \cdot C \sin t\,dt = \sin s,$$

$$C \sin s - \lambda C \sin s \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,d(\sin t) = \sin s,$$

скорочуємо $\sin s$:

$$C - \lambda C \tfrac{1}{2} = 1,$$

$$C(1 - \tfrac{\lambda}{2}) = 1,$$

$$C = \tfrac{2}{2-\lambda}, \text{ якщо } \lambda \neq 2.$$

Тому $x(s) = \frac{2 \sin s}{2-\lambda}$, якщо $\lambda \neq 2$. Безпосередньою підстановкою в рівняння легко перевірити, що це правильний розв'язок. При $\lambda = 2$ рівняння не має розв'язків.

36.15. У просторі $C[0; 2\pi]$ знайти характеристичні числа і власні функції ядра рівняння

$$x(s) - \lambda \int_0^{2\pi} K(s,t)x(t)\,dt = 0,$$

якщо $K(s,t) = \sin(s+t)$.

Нагадаємо, що характеристичними числами ядра K називають такі значення $\lambda \neq 0$, для яких записане однорідне рівняння має ненульовий розв'язок $x(s)$. Відповідну функцію $x(s)$ називають власною функцією ядра. Очевидно, що λ є характеристичним числом ядра K тоді і тільки тоді, коли $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_p(A)$, де A - інтегральний оператор з ядром K: $(Ax)(s) = \int\limits_0^{2\pi} K(t,s)x(t)\,dt$.

Маємо інтегральне рівняння:

$$x(s) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin(s+t)x(t)\,dt = 0,$$

$$x(s) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} (\sin s \cos t + \cos s \sin t)x(t)\,dt = 0,$$

$$x(s) = \lambda \sin s \int\limits_0^{2\pi} \cos t x(t)\,dt + \lambda \cos s \int\limits_0^{2\pi} \sin t x(t)\,dt = C_1 \sin s + C_2 \cos s.$$

Цей вираз підставляємо в інтегральне рівняння:

$$C_1 \sin s + C_2 \cos s =$$
$$= \lambda \sin s \int\limits_0^{2\pi} \cos t(C_1 \sin t + C_2 \cos t)\,dt + \lambda \cos s \int\limits_0^{2\pi} \sin t(C_1 \sin t + C_2 \cos t)\,dt =$$
$$= \lambda \sin s C_2 \pi + \lambda \cos s C_1 \pi$$

(тут обчислено $\int\limits_0^{2\pi} \cos t \sin t\,dt = 0$ і $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = \pi$), звідки

$$(\lambda\pi C_2 - C_1)\sin s + (\lambda\pi C_1 - C_2)\cos s = 0.$$

Оскільки функції $\sin s$ і $\cos s$ лінійно незалежні на $[0, 2\pi]$, то виконуються такі дві рівності:

$$\begin{cases} \lambda\pi C_2 - C_1 = 0, \\ \lambda\pi C_1 - C_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси $C_2 = \lambda\pi C_1$, $C_1 = \lambda\pi C_2$, $C_2 = \lambda^2\pi^2 C_2$. Отже, $\lambda^2 = \frac{1}{\pi^2}$, $\lambda = \pm\frac{1}{\pi}$.

а) Нехай $\lambda = \frac{1}{\pi}$. Тоді $C_1 = C_2$ і $x(s) = C(\sin s + \cos s) = C\sqrt{2}\sin(s + \frac{\pi}{4})$ або коротше $x(s) = C\sin(s + \frac{\pi}{4})$, $C \neq 0$. Ще коротше: $x(s) = \sin(s + \frac{\pi}{4})$ з точністю до константи;

б) Нехай $\lambda = -\frac{1}{\pi}$. Тоді $C_2 = -C_1$ і $x(s) = C(\sin s - \cos s) = C\sqrt{2}\sin(s - \frac{\pi}{4})$ або коротше $x(s) = C\sin(s - \frac{\pi}{4})$, $C \neq 0$. Ще коротше: $x(s) = \sin(s - \frac{\pi}{4})$ з точністю до константи.

36.20. У просторі $C[-1;1]$ знайти розв'язок рівняння

$$x(s) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} K(s,t)x(t)\,dt = y(s),$$

якщо $K(s,t) = st$, $y(s) = \alpha s^2 + \beta s + \gamma$.

Маємо таке інтегральне рівняння:

$$x(s) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} stx(t)\,dt = \alpha s^2 + \beta s + \gamma.$$

Зрозуміло, що розв'язок $x(s)$ має такий вигляд: $as^2 + bs + c$, причому $a = \alpha$, $c = \gamma$, b певним способом пов'язане з β. Підставимо вираз $\alpha s^2 + bs + \gamma$ замість $x(s)$ у рівняння:

$$\alpha s^2 + bs + \gamma - \lambda s \int\limits_{-1}^{1} t(\alpha t^2 + bt + \gamma)\,dt = \alpha s^2 + \beta s + \gamma,$$

$$bs - \lambda s\alpha \underbrace{\int\limits_{-1}^{1} t^3\,dt}_{=0} - \lambda sb \underbrace{\int\limits_{-1}^{1} t^2\,dt}_{=2/3} - \lambda s\gamma \underbrace{\int\limits_{-1}^{1} t\,dt}_{=0} = \beta s,$$

$$bs - \lambda sb\frac{2}{3} = \beta s,$$

$$b(1 - \frac{2\lambda}{3}) = \beta,$$

$$b = \frac{\beta}{1 - \frac{2\lambda}{3}}, \text{ якщо } \lambda \neq \frac{3}{2}.$$

Отже, при $\lambda \neq \frac{3}{2}$ розв'язок існує при довільних значеннях коефіцієнтів $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$: $x(s) = \alpha s^2 + \frac{\beta}{1-\frac{2\lambda}{3}} s + \gamma$. При $\lambda = \frac{3}{2}$ розв'язок існує тільки тоді, коли $\beta = 0$. Тоді число b може бути довільне: $x(s) = \alpha s^2 + bs + \gamma$, b довільне.

36.23. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x(s) - \int\limits_0^s x(t)\,dt = 1.$$

Це є інтегральне рівняння Вольтерра другого роду. Із заданого рівняння очевидно, що $x(0) = 1$ і (якщо продиференціювати рівняння) $x'(s) - x(s) = 0$. Задане інтегральне рівняння рівносильне до такої задачі Коші:

$$\begin{cases} x'(s) = x(s), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цього однорідного рівняння такий: $x(s) = Ce^s$. Оскільки $x(0) = 1$, то $C = 1$. Тому розв'язком є функція $x(s) = e^s$. Це легко перевірити.

Зауваження. Інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$x(s) - \lambda \int\limits_a^x K(s,t)x(t)\,dt = y(s)$$

є коректно розв'язне в $C[a,b]$ для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ і довільної неперервної функції K від двох змінних.

36.25. У просторі $C[0;1]$ знайти характеристичні числа і власні функції ядра рівняння

$$x(s) - \lambda \int\limits_0^1 K(s,t)x(t)\,dt = 0,$$

якщо $K(s,t) = \begin{cases} s, & 0 \le s \le t \le 1, \\ t, & 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$.

Маємо таке інтегральне рівняння (проміжок $[0,1]$ розбиваємо на два: $[0,s]$ і $[s,1]$):

$$x(s) - \lambda \int\limits_0^s tx(t)\,dt - \lambda \int\limits_s^1 sx(t)\,dt = 0.$$

Знайдемо крайову задачу для диференціального рівняння, яка рівносильна до заданого інтегрального рівняння. Диференціюємо по змінній s:

$$x'(s) - \lambda sx(s) - \lambda \int\limits_s^1 x(t)\,dt + \lambda sx(s) = 0,$$

$$x''(s) + \lambda x(s) = 0.$$

Крім цього, із початкового рівняння і першого з цих рівнянь випливає, що $x(0) = 0$ і $x'(1) = 0$. Одержали таку крайову задачу:

$$\begin{cases} x''(s) + \lambda x(s) = 0, \\ x(0) = 0, \\ x'(1) = 0. \end{cases}$$

Нехай спочатку $\lambda \ne 0$. Шукаємо розв'язок $x(s)$ у вигляді $C_1 e^{\sqrt{-\lambda}s} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}s}$. Тоді

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ x'(1) = C_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2(-\sqrt{-\lambda})e^{-\sqrt{\lambda}} = 0, \end{cases}$$

або

$C_2 = -C_1 = -C, \quad C\sqrt{-\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0$, де $C \ne 0$.

Тоді

$$e^{2\sqrt{-\lambda}} + 1 = 0, \quad e^{2\sqrt{-\lambda}} = -1 = \cos(\pi + 2\pi k) + i\sin(\pi + 2\pi k),$$

$2\sqrt{-\lambda} = \pi(1+2k)i$, де i - уявна одиниця.

Звідси

$$-4\lambda = -\pi^2(1+2k)^2, \quad \lambda = \frac{(1+2k)^2}{4}\pi^2 = (\tfrac{\pi}{2} + \pi k)^2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При таких λ маємо $x(s) = C\left(e^{\frac{i\pi}{2}(1+2k)s} - e^{-\frac{i\pi}{2}(1+2k)s}\right) = 2iC\sin(\frac{\pi}{2}(1+2k)s)$ або коротше $x(s) = \sin(\frac{\pi}{2}(1+2k)s)$.

Тепер розглянемо випадок $\lambda = 0$. Тоді $x''(s) = 0$, звідки $x(s) = c_1 s + c_2$. Оскільки $x(0) = c_2 = 0$, то $c_2 = 0$, а оскільки $x'(1) = c_1 = 0$, то $c_1 = 0$. Тому $x(t) \equiv 0$, що нас не влаштовує. Число $\lambda = 0$ не є характеристичним числом цього ядра.

36.33. З'ясувати, чи існує в класі неперервних функцій розв'язок рівняння

$$\int\limits_0^s (t-s)x(t)\,dt = y(s),$$

якщо $y(s) = \cos s$.

Це є інтегральне рівняння Вольтерра першого роду. Диференціюємо по s:

$$\left(\int\limits_0^s tx(t)\,dt - s\int\limits_0^s x(t)\,dt\right)' = (\cos s)',$$

$$sx(s) - \int\limits_0^s x(t)\,dt - sx(s) = -\sin s,$$

$$-x(s) = -\cos s,$$

$$x(s) = \cos s.$$

Перевіримо, чи ця функція є розв'язком заданого інтегрального рівняння:

$$\int\limits_0^s (t-s)\cos t\,dt = \cos s,$$

$$\int\limits_0^s t\cos t\,dt - s\int\limits_0^s \cos t\,dt = \cos s,$$

$$\int\limits_0^s t\,d(\sin t) - s\cdot\sin t\Big|_0^s = \cos s,$$

$$t\sin t\Big|_0^s - \int\limits_0^s \sin t\,dt - s\sin s = \cos s,$$

$$s\sin s + \cos t\Big|_0^s - s\sin s = \cos s,$$

$$\cos s - 1 = \cos s, \qquad \textbf{що неможливо}.$$

Висновок: це рівняння не має неперервних розв'язків.

Зауваження. Цей приклад показує, що для інтегральних рівнянь першого роду немає такої розвиненої теорії, як для інтегральних рівнянь другого роду.

Додаток

Про інтегральні рівняння[1]

1. Побудувати резольвенту інтегрального рівняння

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_0^t K(t,s)\varphi(s)\,ds = f(t)$$

і знайти розв'язок при $K(t,s) = e^{-(t-s)}$, $\lambda = 1$, $f(t) = te^{t^2/2}$.

Знайдемо ітеровані ядра цього рівняння:

$$K_1(t,s) = K(t,s) = e^{-(t-s)},$$
$$K_2(t,s) = \int\limits_s^t K(t,\tau)K(\tau,s)\,d\tau = \int\limits_s^t e^{-(t-\tau)}e^{-(\tau-s)} = e^{-(t-s)}(t-s),$$
$$K_3(t,s) = \int\limits_s^t K(t,\tau)K_2(\tau,s)\,d\tau = \int\limits_s^t e^{-(t-\tau)}e^{-(\tau-s)}(\tau-s)\,d\tau = e^{-(t-s)}\tfrac{(t-s)^2}{2}.$$

Тому очевидно (або за індукцією), що

$$K_n(t,s) = e^{-(t-s)}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Можемо записати резольвенту інтегрального рівняння:

$$R(t,s,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k e^{-(t-s)}\frac{(t-s)^k}{k!} = e^{-(t-s)} \cdot e^{\lambda(t-s)} = e^{(t-s)(\lambda-1)},$$

а при $\lambda = 1$ розв'язок згідно з формулою $\varphi(t) = f(t) + \lambda \int\limits_0^t R(t,s,\lambda)f(s)\,ds$ буде такий:

$$\varphi(t) = te^{t^2/2} + \int\limits_0^t se^{s^2/2}\,ds = te^{t^2/2} + e^{s^2/2}\Big|_0^t = (t+1)e^{t^2/2} - 1.$$

[1] Тільки для тих, хто претендує на позитивну оцінку

2. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра першого роду

$$\int_0^t e^{t-s}\varphi(s)\,ds = \sin t.$$

Зведемо це рівняння до інтегрального рівняння другого роду. Для цього диференціюємо по t:

$$\varphi(t) + \int_0^t e^{t-s}\varphi(s)\,ds = \cos t.$$

Тут ядро $K(t,s) = e^{t-s}$, $\lambda = -1$, $f(t) = \cos t$. Так само як і в попередньому прикладі, знаходимо резольвенту:

$$R(t,s,\lambda) = e^{(\lambda+1)(t-s)}.$$

Тому згідно з формулою $\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_0^t R(t,s,\lambda)f(s)\,ds$ одержуємо

$$\varphi(t) = \cos t - \int_0^t \cos s\,ds = \cos t - \sin t.$$

Цю саму відповідь легко знайти і без резольвенти так: продиференціювати рівняння $\int_0^t e^{-s}\varphi(s)\,ds = e^{-t}\sin t$; вийде $e^{-t}\varphi(t) = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$; скоротити e^{-t} і маємо $\varphi(t) = -\sin t + \cos t$.

3. Про перетворення Фур'є та його застосування до розв'язування диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

Для будь-якої функції $f \in L_1(-\infty,\infty)$ (тобто абсолютно інтегровної на всій дійсній осі) визначають її перетворення Фур'є так:

$$g(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt \qquad (\text{інше позначення: } F(f)(\lambda)).$$

Це означення має зміст для будь-якої функції $f \in L_1(-\infty, \infty)$. Можна довести, що тоді функція f виражається через функцію g так:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda.$$

Цю формулу називають формулою обернення для перетворення Фур'є. Це вже не означення, а твердження. Для забезпечення цієї рівності на функцію f потрібно накласти, крім інтегровності, ще додаткові умови, наприклад, умову Діні.

Розглянемо приклад. Нехай $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$ Тоді

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx = \int\limits_{-a}^{a} e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} = \frac{2 \sin \lambda a}{\lambda}.$$

Перетворення Фур'є має багато застосувань. Розглянемо одне з них - для розв'язування диференціальних рівнянь.

Доведемо спочатку, що $F(f') = i\lambda F(f)$. Справді, за допомогою інтегрування частинами маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\lambda x}\, dx = f(x) e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\lambda x}\, dx = i\lambda F(f)(\lambda),$$

де граничні значення на $\pm\infty$ дорівнюють нулю за певних додаткових умов на функцію, а $|e^{-i\lambda x}| = 1$.

Аналогічно легко довести, що

$$F(f^{(k)}) = (i\lambda)^k F(f).$$

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$2x'(t) + x(t) = y(t),$$

де $y(t)$ - відома функція. Подіємо на це рівняння перетворенням Фур'є. Одержимо

$$2i\lambda F(x) + F(x) = F(y),$$

де $F(x)$ - перетворення Фур'є функції x, а $F(y)$ - відоме перетворення Фур'є функції y. Із останнього рівняння знаходимо

$$F(x)(\lambda) = \frac{F(y)(\lambda)}{1+2i\lambda}.$$

Знайшли перетворення Фур'є функції $x(t)$. Тепер за допомогою формули обернення можна знайти невідому функцію x:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(y)(\lambda)}{1+2i\lambda} e^{i\lambda x}\, d\lambda.$$

4. Про перетворення Лапласа

Нехай комплексна функція $\varphi(t)$ (де $t \in \mathbb{R}$) локально сумовна, рівна нулю при $t < 0$ і задовольняє умову $|\varphi(t)| < Me^{s_0 t}$ для всіх t ($M > 0$, $s_0 \geq 0$). Такі функції $\varphi(t)$ називають функціями-оригіналами. Число s_0 називають показником зростання функції. Перетворенням Лапласа функції $\varphi(t)$ називають функцію $\Phi(p)$ комплексної змінної $p = s + i\tau$, яку визначено так:

$$\Phi(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-pt} \varphi(t)\, dt. \quad (1)$$

Функція $\Phi(p)$ визначена у півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ і є аналітичною функцією. Той факт, що $\Phi(p)$ - перетворення Лапласа, записуємо так:

$$\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p).$$

Можна довести, що тоді φ виражається через Φ так:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt}\, \Phi(p)\, dp, \quad \gamma > s_0. \quad (2)$$

Це формула обернення перетворення Лапласа. Тут інтеграл береться по вертикальній прямій $\operatorname{Re} p = \gamma$ і інтеграл потрібно розуміти в сенсі головного значення, тобто як

$$\lim_{\omega \to \infty} \int\limits_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} e^{pt}\, \Phi(p)\, dp.$$

5. За допомогою перетворення Лапласа знайти резольвенту інтегрального рівняння

$$\varphi(t) - \int\limits_0^t \sin(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t).$$

Ядро у цьому прикладі залежить тільки від різниці $t-s$. Кажуть, що це різницеве ядро. З формул для повторних ядер і резольвенти зрозуміло, що вони також залежать тільки від $t-s$. Для розв'язування цього прикладу запровадимо такі позначення:

$$\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p), \quad f(t) \risingdotseq F(p), \quad K(t) \risingdotseq K(p).$$

Подiємо на задане інтегральне рівняння перетворенням Лапласа:

$$\Phi(p) - K(p)\Phi(p) = F(p),$$

звідки

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-K(p)}, \text{ якщо } \; K(p) \neq 1. \quad (3)$$

Із рівняння

$$\varphi(t) = f(t) + \int\limits_0^t R(t-s)f(s)\,ds$$

аналогічно знаходимо, що

$$\Phi(p) = F(p) + \widehat{R(p)}F(p).$$

звідси

$$\widehat{R(p)} = \frac{\Phi(p)-F(p)}{F(p)} = (3) = \frac{K(p)}{1-K(p)}.$$

Із (1) знаходимо $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1} = K(p)$, а тому $\widehat{R(p)} = \frac{1}{p^2}$. Тоді $R(t) = t$ і, нарешті, $R(t,s,1) = t-s$.