

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Механіко-математичний факультет**  
**Кафедра алгебри, топології та основ математики**

**Затверджено**

На засіданні кафедри алгебри,  
топології та основ математики  
механіко-математичного факультету  
Львівського національного універси-  
тету імені Івана Франка  
(протокол № \_\_ від \_\_\_\_\_ 2021 р.)

В.о. завідувача кафедри  
Зарічний М.М.

---

**Силабус з навчальної дисципліни**  
**“Додаткові розділи алгебри і теорії чисел”,**  
**що викладається в межах освітньо-наукової програми**  
**підготовки доктора філософії (PhD)**  
**з галузі знань 11 Математика та статистика**  
**третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти**  
**для здобувачів з спеціальності 111 – Математика**

<b>Назва дисципліни</b>	Додаткові розділи алгебри і теорії чисел
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Механіко-математичний факультет Кафедра алгебри, топології та основ математики
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	11 – Математика та статистика 111 – Математика
<b>Викладачі дисципліни</b>	Банакх Тарас Онуфрійович, професор кафедри алгебри, топології та основ математики; Гутік Олег Володимирович, доцент кафедри алгебри, топології та основ математики; Іщук Юрій Богданович, доцент кафедри алгебри, топології та основ математики; Романів Олег Миколайович, доцент кафедри алгебри, топології та основ математики.
<b>Контактна інформація викладачів</b>	<a href="mailto:taras.banakh@lnu.edu.ua">taras.banakh@lnu.edu.ua</a> ; <a href="mailto:oleg.gutik@lnu.edu.ua">oleg.gutik@lnu.edu.ua</a> ; <a href="mailto:yuriy.ishchuk@lnu.edu.ua">yuriy.ishchuk@lnu.edu.ua</a> ; <a href="mailto:oleh.romaniv@lnu.edu.ua">oleh.romaniv@lnu.edu.ua</a> ; <a href="http://www.mmf.lnu.edu.ua/algstaff/1445">http://www.mmf.lnu.edu.ua/algstaff/1445</a> ; Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 374-375. м. Львів, вул. Університетська, 1
<b>Консультації з питань навчання по дисципліні</b>	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю).
<b>Сторінка курсу</b>	<a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/academics/postgraduates/onp-np-111">https://new.mmf.lnu.edu.ua/academics/postgraduates/onp-np-111</a>
<b>Інформація про дисципліну</b>	Дисципліна вільного вибору аспіранта «Додаткові розділи алгебри і теорії чисел» є складовою циклу освітньо-наукової програми підготовки доктора філософії у галузі математики і статистики з спеціальності 111 «Математика».
<b>Коротка анотація дисципліни</b>	Дисципліна “Додаткові розділи алгебри і теорії чисел” викладається впродовж другого та третього семестрів в обсязі 3-х кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	Метою вивчення дисципліни “Додаткові розділи алгебри і теорії чисел” є забезпечення належної підготовки з сучасної алгебри, вивчення основних алгебраїчних структур; особливостей побудови алгоритмів та оцінка їх складності, оволодіння сучасними методами абстрактної алгебри і теорії чисел, теоретичними положеннями та основними застосуваннями комп’ютерної алгебри в різних задачах математики, механіки, фізики, хімії.
<b>Література для вивчення дисципліни</b>	1. Атья М., Макдональд И., Введение в коммутативную алгебру. - М.: Мир, 1972. 2. Биркгоф Г., Барти Т., Современная прикладная алгебра.- М.: Мир, 1975. 3. Борович З.И., Шафаревич И.Р., Теория чисел. – Москва: Наука, 1985. 4. Ван дер Варден Б.Л., Алгебра.- М.: Наука, 1979. 5. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В., Конечномерные алгебры.- Киев, Вища

	<p>школа, 1980.</p> <p>6. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши, Д., Идеали, многообразия и алгоритмы -- М. Мир, 2000. - 687 стр.</p> <p>7. Кострикин А.И., Введение в алгебру. – Москва: Наука, 1977.</p> <p>8. Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории. т.1. - М. Мир, 1977.</p> <p>9. Холл М., Теория групп. – Москва: ИЛ, 1962.</p> <p>10. Adams W.W., Loustanaou P., An introduction to Groebner Bases -AMS, Graduated Studies in Math. Vol. III, 1994.</p> <p>11. F. W. Anderson, K. R. Fuller, Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag New-York, 2nd ed., 1992.</p> <p>12. Eisenbud D. Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry - Graduate Texts in Math. 150, Springer-Verlag, New York, 1995</p> <p>13. Koblitz N., Algebraic aspects of cryptography, Springer-Verlag. -- 1998.</p> <p>14. Grillet P. A. Semigroups, An Introduction to the Structure Theory, Marcel Dekker, Inc., New York, 1995.</p> <p>15. Petrich M. Inverse semigroups.- A Wiley-Int. Publication. New York, 1984.</p> <p>16. Petrich M., Reilly, N. R. Completely regular semigroups. Wiley, Chichester. 1999.</p> <p>17. Lawson M. Inverse semigroups. The theory of partial symmetries. World Scientific, Singapore, 1998.</p> <p>18. Ganyushkin O., Mazorchuk V. Classical Finite Transformation Semigroups: An Introduction. Springer-Verlag, London, 2009.</p> <p>19. Nagy A. Special Classes of Semigroups. Springer NY, 2001.</p> <p>20. Lipscomb St. Symmetric Inverse Semigroups. Amer. Math. Soc. 1996</p> <p>21. Meldrum J. D. P. Wreath Products of Groups and Semigroups. Chapman and Hall/CRC. 1995.</p> <p>22. Wehrung, F. Refinement monoids, equidecomposability types, and Boolean inverse semigroups. Lect. Notes Math. 2188. Springer, 2017.</p> <p>23. Almeida J., Costa A., Kyriakoglou R. Profinite Semigroups and Symbolic Dynamics. Lect. Notes Math. 2274. Springer, 2020.</p>
<b>Обсяг курсу</b>	Загальний обсяг: 90 годин. Аудиторних занять: 64 год., з них 32 год. лекційних та 32 години практичних занять. Самостійної роботи: 26 год.
<b>Очікувані результати навчання</b>	У результаті вивчення даного курсу аспірант буде: <b>знати:</b> основні поняття, твердження, алгоритми та методи сучасної алгебри; основні алгебраїчні структури та їх застосування; об'єкти дослідження сучасної алгебри; розуміти сучасні напрямки досліджень прикладної алгебри. <b>вміти:</b> розв'язувати теоретичні та практичні задачі з алгебри і теорії чисел.
<b>Ключові слова</b>	Алгебраїчні структури: напівгрупа, група, кільце, поле, алгебра.
<b>Формат курсу</b>	Очний, дистанційний Проведення лекційних, практичних занять і консультацій.
<b>Теми</b>	Основні розділи: 1. теорія напівгруп і полігонів; 2. теорії груп; 3. теорії кілець; 4. теорії зображень; 5. теорія полів; 6. комутативна алгебра і алгебрична геометрія; 7. теорії чисел.
<b>Підсумковий контроль, форма</b>	4-й семестр – залік. 5-й семестр – іспит. Письмова з подальшим обговоренням

<b>Пререквізити</b>	Для вивчення даного курсу аспірантам потрібно знати алгебру за програмою дисциплін лінійна алгебра, алгебра і теорія чисел, які вивчались на першому (бакалаврському) і другому (магістерському) освітніх рівнях.
<b>Навчальні методи та техніки</b>	Презентації, лекції, дискусії, консультації.
<b>Необхідне обладнання</b>	Комп'ютер із необхідним програмним забезпеченням, доступ до Internet мережі.
<b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b>	<p><b>4-ий семестр.</b> Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• поточна успішність на практичних заняттях: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 50.</li> <li>• підготовка презентації та виступ на навчальному семінарі за вибраною темою: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 50.</li> </ul> <p>Підсумкова залікова оцінка: максимальна кількість балів 100.</p> <p><b>5-ий семестр.</b> Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• поточна успішність на практичних заняттях: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 50.</li> <li>• підготовка презентації та виступ на навчальному семінарі за вибраною темою: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 50.</li> </ul> <p>Підсумкова максимальна кількість балів 100.</p> <p><b>Академічна добросовісність:</b> Очікується, що роботи аспірантів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недобросовісності. Виявлення ознак академічної недобросовісності в написанні контрольних робіт, колоквиумів є підставою для їх незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p><b>Література.</b> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p><b>Політика виставлення балів.</b> Враховуються бали набрані при всіх видах поточного контролю, самостійній роботі та бали підсумкового іспиту. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність аспіранта під час занять; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін. Жодні форми порушення академічної добросовісності не толеруються.</p>
<b>Питання до заліку чи екзамену.</b>	<p>Напівгрупи та полігони: Основні поняття: напівгрупа, ідеал, конгруенція, фактор-напівгрупа, гомоморфізм, Класи напівгруп: регулярні, інверсні, зі скороченням. Напівгрупи перетворень і ендоморфізмів напівгруп, автоморфізми напівгруп. Симетрична напівгрупа та симетрична інверсна напівгрупа. Операції на напівгрупах. Класифікаційні теореми теорії регулярних та інверсних напівгруп. Класи скінченних напівгруп. Дія напівгрупи на множині.</p> <p>Групи: Основні поняття: група, підгрупа, гомоморфізм та ізоморфізм, нормальна підгрупа, фактор-група. Суміжні класи і теорема Лагранжа. Теорема про гомоморфізм. Дія групи на множині. Формула орбіт. Класи спряжених елементів. Центр <math>p</math>-групи. Теореми Силова. Прості групи, простота знакозмінних груп. Абелеві групи. Вільні абелеві групи. Підгрупи вільних абелевих груп. Основна теорема про скінченнопороджені абелеві групи. Вільні групи. Теорема Нільсена-Шрайера про підгрупи вільних груп.</p>

Задання груп твірними і співвідношеннями, приклади. Розв'язні і нільпотентні групи. Нільпотентність  $p$ -груп. Розклад скінченної нільпотентної групи у прямий добуток силовських підгруп.

Кільця: Основні поняття: кільце, підкільце, тіло, поле, алгебра, гомоморфізм та ізоморфізм, ідеал, фактор кільце; модуль, підмодуль, фактормодуль. Теорема про гомоморфізм. Прості кільця, простота кільця матриць над тілом. Прості модулі. Лема Шура. Кільця головних ідеалів, приклади. Однозначність розкладу елементів у добуток первинних. Будова скінченнопороджених модулів над кільцями головних ідеалів. Застосування: основна теорема про скінченнопороджені абелеві групи; теорема про нормальну форму Фробеніуса. Нетерові кільця та модулі. Теорема Гільберта про базу. Існування тіла часток нетерової (некомутативної) області. Артїнові кільця. Радикал. Напівпрості кільця. Теорема Веддерберна-Артїна про будову напівпростих артїнових кілець. Нільпотентність радикала артїнового кільця. Будова модулів над напівпустими артїновими кільцями.

Теорія полів: Первинні (прості) поля. Характеристика поля. Алгебричні і трансцендентні розширення полів. Скінченні розширення, їх алгебричність. Скінченність скінченнопородженого алгебричного розширення. Існування та єдиність розширення, породженого коренем незвідного многочлена. Поле розкладу многочлена, його існування та єдиність. Алгебричне замикання поля, його існування. Сепарабельні розширення. Теорема про примітивний елемент. Розширення Галуа. Група Галуа. Відповідність Галуа. Основна теорема теорії Галуа. Рівняння, розв'язні у радикалах. Критерій розв'язності рівняння у радикалах. Нерозв'язність у радикалах "загального" рівняння ступеня  $n > 4$ . Скінчення поля. Існування і єдиність поля з  $p^n$  елементами. Циклічність мультиплікативної групи скінченного поля. База трансцендентності і ступінь трансцендентності розширення полів.

Теорія зображень: Основні поняття: зображення алгебр та груп, звідні та незвідні, розкладні та нерозкладні зображення, зв'язок зображень з модулями. Групова алгебра групи. Теорема Машке. Характер зображення. Теореми ортогональності для матричних елементів і характерів незвідних зображень. Кількість незвідних зображень скінченної групи, зв'язок їх розмірностей з порядком групи. Характери абелевих груп.

Комутативна алгебра і алгебрична геометрія: Кільця часток комутативних кілець. Ідеали кільця часток. Первинні (прості) ідеали. Локальні кільця, локалізація кільця за первинним ідеалом. Спектр комутативного кільця. Цілі розширення кілець, їх властивості. Цілозамкнені області. Дедекіндові кільця. Однозначність розкладу ідеалів дедекіндового кільця у добуток первинних. Дробові ідеали дедекіндового кільця. Група ідеалів та група класів ідеалів. Системи алгебричних рівнянь у афінному просторі. Афінні алгебричні многовиди. Теорема Гільберта про нулі. Топологія Зариського. Регулярні відображення афінних алгебричних многовидів. Незвідні многовиди. Розклад многовида на незвідні компоненти. Розмірність афінного многовиду, її властивості. Поняття проєктивного многовиду. Теорема про нулі для проєктивних многовидів.

Теорія чисел: Кільця і поля лишків. Порівняння та діофантові рівняння першого ступеня, умови існування розв'язків. Первісні корені та індекси. Квадратичні лишки. Символ Лежандра. Квадратичний закон взаємності. Кільця цілих алгебричних чисел. Дедекіндовість кільця цілих чисел скінченного розширення поля раціональних чисел. Норма ідеала у кільці цілих алгебричних чисел, її мультиплікативність. Геометричне зображення алгебричних чисел. Лема Мінковського. Скінченність числа

	класів ідеалів. Група одиниць. Логарифмічний простір. Теорема Діріхле про будову групи одиниць. Аналітичні методи у теорії чисел. Дзета-функції Рімана та Дедекінда, їх властивості. Рівномірний розподіл ідеалів по класах. Поля поділу кола. L-ряди Діріхле. Теорема Діріхле про прості числа в арифметичній прогресії. Алгебричні і трансцендентні числа. Теорема Ліувілля про наближення алгебричних чисел. Приклади трансцендентних чисел. Трансцендентність чисел $e$ та $\pi$ .
<b>Опитування</b>	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.