ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

СКАСКІВ ОЛЕГ

Методичні вказівки до практичних занять
І семестр

31.01.2023

1) Бордуляк М.Т., Скасків О.Б., Сумик О.М., Чижиков І.Е. Теореми і задачі теорії ймовірностей, Львів: вид. І.Е. Чижиков, 2013
2) Скасків О.Б. Теорія ймовірностей, Львів: вид. І.Е. Чижиков, 2012

www.chyslo.com.ua
Замовлення, e-пошта: zakaz@chyslo.com.ua

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ ТА КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ.

1.1. Елементи комбінаторики

Позначатимемо множини великими буквами латинського алфавіту A, B, C, ..., їхні елементи — малими буквами $a, b, c, \ldots$. Об'єднання, переріз і різницю множин A і B позначатимемо відповідно $A \cup B$, $A \cap B$ та $A \setminus B$. Нехай, крім того, $|A|$ означає потужність множини A, при цьому $|A| = n$ для n-елементної множини A. Нагадаємо, що n-елементна множина називається впорядкованою, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність одне з натуральних чисел від 1 до n (номер числа) включно, при цьому різним елементам множини відповідають різні номери.

Означимо факторіал числа n рівностями $n! \overset{def}{=} 1 \cdot 2 \cdots n$ при $n \in \mathbb{N}$ і $0! \overset{def}{=} 1$. Відзначимо, що $n! = \Gamma(n+1)$ для $n \in \mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$, де

$\Gamma(x) := \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ – гамма-функція Ейлера.

Розв'язуючи задачі з комбінаторики, часто доводиться використовувати таке елементарне правило.

Правило добутку. Якщо об'єкт a_i можна вибрати m_i способами, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то вибір упорядкованної послідовності об'єктів $(a_1, \ldots, a_n)$ можна виконати $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ способами.

Приклад

В їдальні є 3 перші, 5 других і 2 третіх страви. Скількома способами можна скласти з них обід?

За правилом добутку обід можна скласти $30 = 3 \cdot 5 \cdot 2$ способами.

Наведемо деякі поняття, які використовуватимемо при розв'язуванні задач.
Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — деяка n-елементна множина, а $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Розміщенням з n елементів множини A по k елементів називається довільний впорядкований набір $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$, де $i_m \in \mathcal{N}$, $1 \leqslant m \leqslant k \leqslant n$ і серед i_m немає однакових.
Кількість розміщень з n елементів по k позначаємо A_n^k.

Твердження

$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ при $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$.

Доведення. Множину всіх впорядкованих наборів вигляду $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$, де $i_m \neq i_l$ при $m \neq l$, $i_m, i_l \in \mathcal{N}$, розіб'ємо на підмножини вигляду $(a_1, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$, $(a_2, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$, $\ldots (a_n, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$. Оскільки кількість елементів у кожній такій підмножині дорівнює A_{n-1}^{k-1}, то одержуємо рекурентне співвідношення $A_n^k = nA_{n-1}^{k-1}$. Враховуючи, що $A_m^1 = m$ для довільного натурального m, індукцією за k отримуємо потрібне твердження.

Для розміщення з n елементів по n елементів вживають термін перестановка з n елементів, а A_n^n ще позначають через $P_n := A_n^n$. За твердженням $P_n = n!$.
Сполукою (комбінацією) з n елементів множини A по k елементів називається довільна k-елементна підмножина A.
Кількість комбінацій з n елементів по k (кількість k-елементних підмножин множини з n-елементів) позначаємо C_n^k.

Твердження

Для будь-яких натуральних чисел k і n $(k \leqslant n)$ справджується
$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Доведення. Оскільки з кожної сполуки з n елементів по k перестановкою елементів можна утворити $k!$ різних розміщень з n елементів по k, то

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Приклад

Довести формулу бінома Ньютона $(C_n^0 \overset{def}{=} 1)$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Маємо $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ раз}} = \sum_{\substack{x_i \in \{a,b\} \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} x_1 x_2 \cdots x_n$. Знайдемо кількість тих мономів $x_1 x_2 \cdots x_n$, які дорівнюють $a^k b^{n-k}$. Рівність $x_1 \cdots x_n = a^k b^{n-k}$ можлива, коли k множників x_i дорівнюють a і $n-k$ — дорівнюють b. Вибрати k множників x_i, які дорівнюють a, можна C_n^k способами, при цьому решта множників обов'язково дорівнюють b. Тобто, в написаній сумі є C_n^k мономів вигляду $a^k b^{n-k}$, що й потрібно було довести.

Приклад

Студентові потрібно скласти три іспити протягом семи днів. Скількома способами це можна зробити, якщо одного дня не можна складати більше одного іспиту?

Кількість способів дорівнює кількості різних варіантів вибору впорядкованої трійки днів з 7 днів, тобто $A_7^3 = 210$.

Приклад

Скількома способами можна розташувати n різних книг на полиці так, щоб між книгами A і B було точно r книг?

Очевидно, що необхідною умовою існування принаймні одного такого способу є $0 \leqslant r \leqslant n-2$. Занумеруємо книги числами від 1 до n. Тоді розташування книг на полиці задається послідовністю $(i_1, \dots, i_n)$, де i_k — номер книги, яка займає k-те місце. Нехай m_A та m_B номери A і B, відповідно. Всього існує $(n-2)!$ різних послідовностей вигляду $(i_1, \dots, i_{k-1}, m_A, i_{k+1}, \dots, i_{k+r}, m_B, i_{k+r+2}, \dots, i_n)$ при фіксованих k і r. Перебираючи всі можливі k від 1 до $n-r-1$ та переставляючи місцями A та B, одержимо $2(n-r-1)(n-2)!$ розташувань, які задовольняють умову задачі.

Приклад

На яку найбільшу кількість частин можуть поділити площину n прямих?

Якщо деякі три прямі проходять через одну точку, то зсувом однієї прямої можна збільшити кількість частин, на які поділена площина. Подібно, якщо знайдеться пара паралельних прямих, то поворотом однієї з них можна також збільшити кількість частин, на які розділена площина. Отже, ніякі три прямі не повинні проходити через одну точку і будь-які дві прямі повинні перетинатися.

Будемо послідовно проводити прямі, дотримуючись цих вимог. Одна пряма розбиває площину на дві частини. Кожна наступна пряма збільшує кількість частин площини на кількість точок перетину з вже проведеними прямими плюс 1, тобто k-та пряма додає k частин. Отже, найбільша кількість частин площини, які утворяться після проведення n прямих, дорівнює $2 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2 + 1$.

Перестановкою з повторенням з n елементів називається будь-яке впорядкування n-елементної множини A, серед елементів якої є однакові. Якщо серед елементів A є n_i елементів i-го типу, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, при цьому $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, то кількість всіх перестановок з повторенням множини A позначається $P_n(n_1, \ldots, n_k)$.

Твердження

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!},$$

де $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Доведення. Для кожного номера від 1 до n треба зазначити тип елемента з цим номером. Номери для елементів першого типу можна вибрати $C_n^{n_1}$ способом. Для елементів другого типу залишається $n - n_1$ номерів, тобто існує $C_{n-n_1}^{n_2}$ способів їхнього розташування. Продовжуючи ці міркування, одержуємо, що для елементів $(k-1)$-го типу є $C_{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}^{n_{k-1}}$ способів розташування. Елементи k-го типу розміщуємо єдиним способом на місцях, що залишаються. Отже, за правилом добутку, оскільки $n_1 + \cdots + n_k = n$,

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdots C_{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}^{n_{k-1}} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)! n_2!} \cdots \frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-2})!}{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})! n_{k-1}!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Приклад

Скільки різних “слів” можна отримати, переставляючи букви в слові “математика”?

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200.$$

Твердження

Кількість способів, якими можна розкласти n різних предметів по k скриньках так, щоб до i-ої скрині потрапило n_i предметів, $i \in \{1,\ldots,k\}$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, дорівнює $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Доведення. Кожному предмету поставимо у відповідність натуральне число (номер) від 1 до k. Якщо предмет має номер i, то цей предмет потрапляє в i-ту скриньку. Зазначимо, що кожній такій нумерації однозначно відповідає впорядкування n предметів k типів. Різних таких нумерацій є $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Приклад

Скількома способами можна розмістити 7 різних кульок по 7 скриньках так, щоб у двох скриньках було по 2 кульки, а 2 скриньки залишились порожніми?

При зазначеному розташуванні отримуємо 3 групи скриньок залежно від кількості кульок, які містяться в цих скриньках: 2 скриньки містять по 2 кульки, 3 — по 1 кульці, 2 — жодної. Розбити скриньки на такі три групи можна $P_7(2,3,2)$ способами. Кожному такому розбиттю за твердженням відповідає $P_7(2,2,1,1,1,0,0)$ способів розміщення 7 кульок по цих скриньках. Отже, за правилом добутку, шукана кількість способів дорівнює

$$P_7(2,3,2)P_7(2,2,1,1,1,0,0) = \frac{7!}{2!3!2!}\frac{7!}{2!2!} = \frac{(7!)^2}{96}.$$

Сполукою з повторенням з n елементів по k елементів називається будь-який k-елементний набір вигляду $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, де кожен з елементів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ належить до одного з n типів. Кількість всіх сполук з повтореннями з n елементів по k позначається $\overline{C}_n^k$.

Твердження

Для будь-яких натуральних n і k справджується $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Доведення. Поставимо у відповідність кожній сполуці з повторенням впорядковану множину, складену з нулів і одиниць за таким правилом: пишемо стільки разів 1, скільки елементів першого типу входить у сполуку (можливо жодної), потім пишемо 0, після цього — стільки разів 1, скільки елементів другого типу входить у сполуку, потім знову 0 і т.д. Після групи одиниць, що відповідають n-му типу, нуль не пишемо. Між цими впорядкованими множинами, складеними з нулів і одиниць, з одного боку, і сполуками з повтореннями — з іншого, є взаємно однозначна відповідність. Але кожна така впорядкована множина складається з k одиниць та $n-1$ нуля. Тому кількість всіх сполук з повтореннями з n елементів по k дорівнює $\overline{C}_n^k = P_{n+k-1}(k, n-1) = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$.

Приклад

Скільки цілих невід'ємних розв'язків має рівняння $x_1 + \cdots + x_n = m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$?

Кожному розв'язку відповідає сполука з повтореннями з n елементів по m, де взято x_i елементів i-го сорту, $i \in \mathcal{N}$. Ця відповідність взаємнооднозначна, тому кількість розв'язків дорівнює C^m_{n+m-1}.

Нехай Ω — деяка скінченна множина, $A_i \subset \Omega$, $i \in \mathcal{N}$, $\overline{A}_i = \Omega \setminus A_i$.

Твердження (Формула включень і виключень)

Правильна формула

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| = |\Omega| - \sum_{i_1=1}^{n} |A_{i_1}| + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \ldots$$

$$+(-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Наслідок

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i_1=1}^{n} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \ldots$$

$$+(-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \ldots$$

$$+(-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Приклад

У відділі науково-дослідного інституту кожен із співробітників цього відділу знає хоча б одну іноземну мову. Шестеро з них знають англійську мову, 6 — німецьку, 7 — французьку, 4 знають англійську і німецьку, 3 — німецьку та французьку, 2 — французьку й англійську, 1 знає всі три мови. Скільки співробітників працюють у відділі? Скільки з них знають лише англійську мову?

Позначимо літерою E множину працівників, які знають англійську мову, літерою D — тих, що знають німецьку мову, літерою F — тих, що знають французьку мову. Тоді за умовою $|E| = |D| = 6$, $|F| = 7$, $|E \cap D| = 4$, $|D \cap F| = 3$, $|E \cap F| = 2$, $|E \cap D \cap F| = 1$. Звідси за формулою включень та виключень знаходимо

$$|E \cup F \cup D| = 6 + 6 + 7 - 4 - 3 - 2 + 1 = 11$$

— кількість працівників,

$$|E \cap \overline{F} \cap \overline{D}| = |E| - |F \cap E| - |E \cap D| + |F \cap D \cap E| = 6 - 2 - 4 + 1 = 1.$$

Тобто, з 11 працівників відділу лише англійську мову знає 1 працівник.

1.1. Букви азбуки Морзе — це послідовності " $\cdot$ " і — ". Скільки букв можна скласти не більше ніж з 10 послідовних символів?
1.2. Нехай A і B множини, $|A| = m$, $|B| = n$. Скільки існує різних:
а) відображень $f : A \to B$? б) ін'єктивних відображень з A в B?
1.3. На шкільному вечорі присутні 12 дівчат і 15 юнаків. Скількома способами можна вибрати з них 4 пари (юнак і дівчина) для танців?
1.4. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

1.5. Скількома способами серед чисел 1,2, ... , 30 можна вибрати три різних числа так, щоб їх сума була парною?
1.6. Скільки існує п'ятизначних натуральних чисел, які:
1) мають всі різні цифри;
2) кратні 25;
3) у десятковому записі яких нема нулів;
4) мають лише один нуль;
5) мають не більше двох нулів;
6) які можна утворити лише з двох цифр, "5"і "7";
7) які можна утворити лише з двох цифр, "0"і "7";
8) які можна утворити лише з двох цифр;

9) однаково читаються зліва направо і справа наліво (наприклад, 67876, 17071)?

1.7. Яку найменшу кількість словників доведеться видати, щоб можна було безпосередньо здійснювати переклади з будь-якої з шести мов: української, англійської, російської, німецької, французької та іспанської на будь-яку іншу з цих шести мов?
1.8. Скількома способами можуть сісти за круглий стіл п'ятеро жінок і п'ятеро чоловіків так, щоб жодні дві особи однієї статі не сиділи поруч?
1.9. На яку найбільшу кількість частин можуть поділити простір n площин?
1.10. На яке найбільше число частин можуть поділити площину n кіл?
1.11. Скільки діагоналей можна провести в опуклому n-кутнику?
1.12. В опуклому n-кутнику проведено всі діагоналі. Відомо, що жодні 3 з них не перетинаються в одній точці. На скільки частин поділиться многокутник?
1.13. Якщо повернути аркуш паперу на 180°, то цифри 0, 1 і 8 не зміняться, 6 і 9 переходять одна в одну, інші втрачають зміст. Скільки існує семизначних чисел, величина яких не зміниться при повороті паперу на 180°?
1.14. Скількома способами на шаховій дошці можна розставити дві тури

різного кольору так, щоб вони: 1) не били одна одну; 2) били одна одну?

1.15. Нехай $p_1, \ldots, p_n$ — різні прості числа. Скільки різних дільників має число $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$, де $\alpha_j \in \mathbb{N}$?

1.16. У прямокутній таблиці з m рядків та n стовпчиків треба записати числа $+1$ і -1 так, щоб добуток чисел у кожному рядку і кожному стовпчику дорівнював 1. Скількома способами це можна зробити?

1.17. Розглянемо прямокутну цілочисельну гратку на площині з лівою нижньою вершиною $(0,0)$ і правою верхньою — (m,n), $m, n \in \mathbb{N}$. Скільки різних найкоротших шляхів, що складаються з вертикальних і горизонтальних ланок гратки, сполучають точки $(0,0)$ і (m,n)?

1.18. Довести такі співвідношення:

1) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$, $1 \leqslant k < n$;

2) $1 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$;

3) $C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$;

4) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$;

5) $C_n^m C_k^0 + C_{n-1}^{m-1} C_{k+1}^1 + \cdots + C_{n-m}^0 C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m$.

1.19. Довести, що $a^p - a$ для довільного $a \in \mathbb{N}$ ділиться на p, якщо p — просте число (мала теорема Ферма).

1.20. Скільки підмножин має n-елементна множина?

1.21. Нехай $S_{n,p}$ — кількість сюр'єктивних відображень множини

$\{1,\ldots,n\}$ у множину $\{1,\ldots,p\}$, $n,p\in\mathbb{N}$, $p\leqslant n$. Довести формулу

$$S_{n,p} = p^n - C_p^1(p-1)^n + C_p^2(p-2)^n + \cdots + (-1)^{p-1}C_p^{p-1}.$$

1.22. На зборах повинні виступити 4 особи: A, B, C і D. Скількома способами їх можна записати у список ораторів, якщо B не може виступати раніше за A?

1.23. До міжнародної комісії входить n осіб. Матеріали комісії зберігають у сейфі. Доступ до сейфа можливий тоді і тільки тоді, коли збереться не менше, ніж m членів комісії. Скільки замків повинен мати сейф та скільки ключів до них треба виготовити і як розподілити їх серед членів комісії, щоб виконати цю умову?

1.24. Довести формулу для $n\in\mathbb{N}$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n = \sum_{\substack{r_1\geqslant 0,\ldots,r_k\geqslant 0\\ r_1+r_2+\cdots+r_k=n}} \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}a_1^{r_1}a_2^{r_2}\cdots a_k^{r_k}.$$

1.25. Скількома способами можна поділити колоду з 52 карт навпіл так, щоб: а) в кожній частині було по 2 тузи; б) в кожній частині було порівну червоних і чорних карт?

1.26. Скількома способами можна з колоди в 36 карт взяти 10 карт так, щоб серед них було точно 8 карт однієї масті?

1.27. Скількома способами можна вибрати 6 карт з 52, щоб серед них були карти всіх 4 мастей?

1.28. У кімнаті є n ламп. Скільки є способів освітлення кімнати, при якому ввімкнено k ламп? Скільки є всього способів освітлення кімнати?

1.29. Скількома способами n різних кульок можна розмістити по n різних комірках так, щоб тільки одна комірка залишилась порожньою?

1.30. Скільки слів з 5 літер можна утворити з літер a, b, c якщо відомо, що літера a трапляється в слові не більше двох разів, b — не більше одного разу, c — не більше трьох разів?

1.31. Запишіть усі сполуки з повтореннями з трьох елементів a, b, c по три.

1.32. Скільки натуральних розв'язків має рівняння $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$?

1.33. У ліфт 12-поверхового будинку на першому поверсі зайшло четверо осіб. Скількома способами вони можуть вийти з ліфту?

1.34. У кіоску продаються листівки 6 видів. Скількома способами (щодо видів) можна придбати а) 4 різні листівки; б) 4 довільні листівки?

1.35. Скільки різних "слів" можна утворити перестановкою літер у слові "паралелепіпед"?

1.36. Поїзд, у якому з початкової станції іде n пасажирів, робить k зупинок.
а) Скількома способами пасажири можуть вийти на цих зупинках?
б) Скількома способами вони можуть це зробити, якщо враховується лише кількість пасажирів, які вийшли на кожній зупинці?
1.37. Скількома способами можна розділити між 3 дітьми 10 яблук (не розрізаючи яблук), щоб кожна дитина отримала принаймні одне яблуко?
1.38. Скількома способами можна розмістити 6 папок у 3 шухлядах письмового столу (порядок папок у шухляді неістотний), якщо кожна шухляда вміщає всі папки і:

а) всі папки однакові,
б) всі папки різні,
в) всі папки однакові, але в кожній шухляді має бути хоча б одна папка,
г) всі папки різні, але в першій шухляді має бути 1 папка, в другій — 2 папки, в третій — 3 папки,
д)* всі папки різні, і в кожній шухляді має бути принаймні одна папка?

1.39. Скільки різних часткових похідних k-го порядку має аналітична функція $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$?
1.40. Протягом сесії студенти складають 4 іспити, з яких 2 — з математики. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб іспити з математики не стояли поруч?

1.41. Скількома способами можна групу з 15 осіб

а) поділити на 2 підгрупи з 10 і 5 осіб,

б) взагалі, поділити на 2 підгрупи?

1.42. Скільки комісій у складі 3 осіб можна утворити, вибираючи з 4 подружніх пар, якщо:
а) в комісію може входити будь-хто з них,
б) в комісію не можуть входити члени однієї сім'ї?

1.43. Скількома способами можна 10 білих і 6 чорних куль розташувати в ряд так, щоб жодні 2 чорні кулі не були поруч?

1.44. На співбесіді задають 10 запитань, з яких 3 — з математики. Скількома способами можна їх впорядкувати, щоб не було задано підряд:
а) 3 запитання з математики, б) 2 запитання з математики?

1.45. Скількома способами можна розмістити 20 різних книг у книжковій шафі з 5 полицями, якщо кожна полиця може вмістити всі книги і :

а) порядок розміщення книг на кожній полиці неістотний?

б)* порядок істотний?

1.46. Скількома способами можна одягнути 5 різних каблучок на пальці однієї руки, враховуючи великий палець?

1.47. Скільки кісток доміно можна утворити, використовуючи числа $0, 1, \ldots, r$?

1.48. Нехай A, B, C — скінченні множини. Довести, що:

1) $|A \cap B| + |A \cap C| - |B \cap C| \leqslant |A|$;

2) $\dfrac{|A \cap B|}{|B|} > \dfrac{|A \cap \overline{B}|}{|\overline{B}|} \Rightarrow \dfrac{|A \cap B|}{|A|} > \dfrac{|\overline{A} \cap B|}{|\overline{A}|}$,

де $A, B \subset \Omega$, $\overline{A} = \Omega \setminus A$, $\overline{B} = \Omega \setminus B$.

1.49. Довести, що такі дані несумісні: $|\Omega| = 1000$, $|A| = 525$, $|B| = 312$, $|C| = 470$, $|A \cap B| = 42$, $|A \cap C| = 147$, $|B \cap C| = 86$, $|A \cap B \cap C| = 25$.

1.50. У звіті наведено числові дані як такі, що насправді простежувались: $|\Omega| = 1000$, $|A| = 510$, $|B| = 490$, $|C| = 427$, $|A \cap B| = 189$, $|A \cap C| = 140$, $|B \cap C| = 85$. Довести, що в цих даних є помилка (Тут $A, B, C \subset \Omega$).

1.51. Довести таке: якщо $|\Omega| = N$, $|A| = Nx$, $|B| = 2Nx$, $|C| = 3Nx$, $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = Ny$, то числа x та y не можуть перевищувати $1/4$.

1.52. (Задача-жарт, Lewis Carrol). У жорстокому бою не менше 70% вояків втратили одне око, не менше 75% — одне вухо, не менше 80% — одну ногу і не менше 85% — одну руку. Яка мінімальна кількість вояків, які втратили одночасно око, вухо, ногу і руку?

1.53. Проводиться 100 триразових підкидань монети; після кожного підкидання фіксується результат — герб чи цифра. У 69 випадках зі 100 герби випали при першому підкиданні, в 49 — при другому, а в 53 — при третьому. У 33 випадках герби випали при першому і другому підкиданнях, а в 21 випадку — при другому і третьому. Довести, що є принаймні 5 випадків, коли герби випали при всіх трьох підкиданнях, і не може бути більше 15 випадків, коли при всіх трьох підкиданнях випала цифра, хоча жоден з таких випадків не є обов'язковим.

1.54. Розглядаються всі перестановки n чисел $1, 2, \dots n$. Знайти кількість тих перестановок, в яких принаймні одне число розташоване на своєму місці.

1.55. * Двоє викладачів одночасно опитують 12 студентів з різних предметів, приділяючи кожному студенту по 5 хв. Встановлюючи черги до викладачів, студенти склали списки. Скількома способами можуть бути складені ці списки, щоб жодному студенту не довелось відповідати одночасно з двох предметів?

1.56. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ — взаємно прості натуральні числа, а $N \in \mathbb{N}$. Знайти кількість натуральних чисел, які не перевищують N і не діляться на жодне з чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

1.57. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, де $p_1, \dots, p_k$ — прості числа, а $\varphi(n)$ — кількість натуральних чисел, що взаємно прості з n і не перевищують n

(функція Ейлера). Довести, що

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

До розділу 1.1

1.9. Нехай a_n шукане число. Використовуючи приклад 1.5, довести рекурентну формулу $a_{n+1} = a_n + \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

1.12. Якщо послідовно проводити діагоналі, то після проведення чергової діагоналі кількість частин збільшується на 1 плюс кількість точок перетину з проведеними діагоналями.

1.16. Показати, що розташування $+1$ і -1 задається довільним заповненням перших $m-1$ рядка та $n-1$ стовпчика.

1.18. 2) Записати біном Ньютона для $(1+(-1))^n$. 3) Використати рівність $C_n^k = C_n^{n-k}$, $k \leqslant n$; 4), 5) використати задачу 1.17.

1.19. Доведення можна провести індукцією за a.

1.21. Довести рекурентне співвідношення $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.

1.23. Для довільних $m-1$ членів комісії повинен існувати замок, який вони не можуть відкрити, але ключ від якого є в кожного з $n-m+1$ з інших членів комісії.

1.24. Див. приклад 1.2.

1.32. Звести до прикладу 1.8.

1.38. д) Розглянути події $A_k = \{k\text{-а шухляда непорожня}\}$. Тоді задана в задачі подія $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, кількість елементів якоє шукаємо за формулою включень і виключень.

1.45. Приєднати до 20 різних книг 4 однакові перегородки і розглянути перестановку усіх 24 елементів.
1.48. Використати рівності $|B| = |B \cap A| + |B \cap \overline{A}|$, $|\overline{B}| = |\overline{B} \cap A| + |\overline{B} \cap \overline{A}|$, $|A| = |B \cap A| + |\overline{B} \cap A|$, $|\overline{A}| = |\overline{A} \cap B| + |\overline{B} \cap \overline{A}|$.
1.51. Оцінити $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$ і $|A \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$.
1.53. Нехай A_i вказує подію, що герб випаде при i-му підкиданні, $i \in \{1, 2, 3\}$. Щоб довести, що $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \geqslant 5$, оцінити $|\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3|$, а щоб довести, що $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| \leqslant 15$, оцінити $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$. Використати $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \geqslant \max\{|A_1 \cup A_2|, |A_2 \cup A_3|\}$.
1.54. Знайти кількість перестановок, в яких $k \in \mathcal{N}$ стоїть на своєму місці.
1.55. Розглянути протилежну подію.
1.57. Використати задачу 1.56.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

До розділу 1

1.1. $\sum\limits_{i=1}^{10} 2^i = 2046$. 1.2. а) n^m; б) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, якщо $m \leqslant n$.
1.3. $C_{12}^4 \cdot A_{15}^4 = 16216200$. 1.4. $(n!)^2$. 1.5. $C_{15}^3 + C_{15}^2 \cdot 15 = 2030$.
1.6. 1) $9 \cdot A_9^4 = 27216$; 2) 3600; 3) $9^5 = 59049$; 4) $4 \cdot 9^4 = 26244$; 5) $9^5 + 4 \cdot 9^4 + C_4^2 \cdot 9^3 = 89667$; 6) $2^5 = 32$; 7) $2^4 = 16$; 8) $9 \cdot 2^4 + C_9^2 \cdot 2^5 = 1296$; 9) $9 \cdot 10^2 = 900$. 1.7. $A_6^2 = 30$. 1.8. $4! \cdot 5! = 2880$. 1.9. $\frac{n^3+5n+6}{6}$.
1.10. $n^2 - n + 2$. 1.11. $\frac{n(n-3)}{2}$. 1.12. $1 + C_n^4 + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$. 1.13. 300. 1.14. 1) $64 \cdot 49 = 3136$; 2) $64 \cdot 14 = 896$. 1.15. $\prod\limits_{j=1}^{n} (\alpha_j + 1)$.
1.16. $2^{(n-1)(m-1)}$. 1.17. $\frac{(n+m)!}{n!m!}$. 1.20. 2^n. 1.22. $\frac{4!}{2} = 12$. 1.23. C_n^{m-1} замків, $n - m + 1$ ключів до кожного замка, тобто всього $(n - m + 1) \cdot C_n^{m-1}$ ключів. 1.25. а) $C_4^2 \cdot C_{48}^{28}$; б) $\left(C_{26}^{13}\right)^2$. 1.26. $4 \cdot C_9^8 \cdot C_{27}^2 = 12636$. 1.27. $4 \cdot 13^3 \cdot C_{13}^3 + 6 \cdot 13^2 \cdot (C_{13}^2)^2 = 8682544$. 1.28. а) C_n^k; б) $2^n - 1$. 1.29. $C_n^2 \cdot n!$. 1.30. $P_5(2,1,2) + P_5(2,0,3) + P_5(1,1,3) = 60$. 1.31. aaa, aab, aac, abb, acc, abc, bbb, bbc, bcc, ccc. 1.32. $\overline{C}_n^{m-n} = C_{m-1}^{m-n}$, якщо $m \geqslant n$. 1.33. $\overline{A}_{11}^4 = 11^4 = 14641$.
1.34. а) $C_6^4 = 15$; б) $\overline{C}_6^4 = 126$. 1.35. $P_{13}(3,2,1,2,3,1,1) = 43243200$. 1.36. а) $\overline{A}_k^n = k^n$; б) $\overline{C}_k^n = C_{k+n-1}^n$. 1.37. $\overline{C}_3^7 = 36$. 1.38. а) $\overline{C}_3^6 = 28$; б) $\overline{A}_3^6 = 729$; в)

$\overline{C}_3^3 = 10$; г) $P_6(1,2,3) = 60$; д) $\overline{A}_3^6 - 3\cdot\overline{A}_2^6 + 3\cdot\overline{A}_1^6 = 540$. 1.39. $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.
1.40. $2\cdot A_3^2 = 12$. 1.41. а) $C_{15}^{10} = 3003$; б) $\sum\limits_{k=1}^{7} C_{15}^k = 2^{14}-1$. 1.42. а) $C_8^3 = 56$; б) $C_4^3\cdot 2^3 = 32$. 1.43. $C_{11}^6 = 462$. 1.44. а) $10! - 8!\cdot 3! = 3386880$; б) $A_8^3\cdot 7! = 1693440$. 1.45. а) 5^{20}; б) $\frac{24!}{4!} = 23!$. 1.46. $\frac{9!}{4!} = 15120$. 1.47. $\overline{C}_{r+1}^2 = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$. 1.49. Дані несумісні, бо $|A\cup B\cup C| = 1057 > 1000 = |\Omega|$. 1.50. Дані містять помилку, бо $|A\cup B\cup C| \geqslant 1013 > 1000 = |\Omega|$. 1.52. 10%.
1.54. $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k(n-k)! = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{n!}{k!}$. 1.55. $\sum\limits_{k=2}^{12}(-1)^k\cdot C_{12}^k\cdot A_{12}^k\cdot((12-k)!)^2 = (12!)^2\cdot\sum\limits_{k=2}^{12}\frac{(-1)^k}{k!}$. 1.56. $N - \sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{N}{a_i}\right] + \sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\left[\frac{N}{a_{i_1}a_{i_2}}\right] - \sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n}\left[\frac{N}{a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}}\right] + \cdots + (-1)^n\left[\frac{N}{a_1a_2\ldots a_n}\right]$, де $[x]$ — ціла частина x.

1.2. Стохастичний експеримент. Випадкові події. Простір елементарних подій. Класичне означення ймовірності

Теорія ймовірностей вивчає математичні моделі стохастичних експериментів. Експеримент називається стохастичним, якщо його можна повторити за тих самих умов довільну кількість разів, а результат точно передбачити неможливо.
Результат стохастичного експерименту називається випадковою подією. З кожним стохастичним експериментом пов'язується простір елементарних подій. Це будь-яка множина Ω взаємовиключних випадкових подій, які називаються елементарними, таких, що будь-яка випадкова подія є сукупністю елементарних подій.
Нехай $\nu_n(A)$ — кількість експериментів, у яких відбулась подія A після проведення n експериментів. Відношення $\nu_n(A)/n$ називається частотою появи події A за n випробувань. Простір елементарних подій називається дискретним, якщо Ω — скінченна або зліченна множина. Далі, в цьому розділі вважатимемо, що Ω — дискретний простір елементарних подій. Тоді випадкові події — це довільні підмножини Ω.

Подія Ω називається вірогідною (достовірною), а подія $\varnothing$ — неможливою; перша відбувається при кожному проведенні експерименту, друга — при жодному.

Для випадкових подій A і B, як для підмножин Ω, визначається сума подій $A \cup B$ — подія, яка полягає в тому, що відбувається принаймні одна з подій A або B,

добуток подій $A \cap B$ — подія, яка полягає в тому, що відбуваються A і B одночасно; різниця $A \setminus B$ — відбувається A і не відбувається B; протилежна до A подія $\overline{A}$, яка полягає в тому, що A не відбувається. Якщо $A \cap B = \varnothing$, то події A і B називаються несумісними.

Приклад

Підкидаємо гральний кубик. Нехай ω_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ означає, що випало i очок. Тоді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$ — простір елементарних подій.

Випадковою подією є, наприклад, випадання парної кількості очок — $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = A$. Випадання додатної кількості очок є вірогідною подією. Випадання 7 очок — неможлива подія. Яка подія протилежна до A?

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ і елементарні події ω_i, $i \in \mathcal{N}$ рівноможливі (однаково можливі), тобто ми не можемо надати перевагу появі будь-якої з подій ω_i. Якщо A — випадкова подія, яка складається з k елементарних подій, то ймовірністю A називається величина

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Зокрема, $\mathbb{P}(\omega_i) = \dfrac{1}{n}$, $i \in \mathcal{N}$. Елементарні події, що входять в A, називаються сприятливими. Сформульоване означення має назву класичного означення ймовірності.

Приклад

Підкинуто два гральні кубики. Вважаючи, що всі елементарні події рівноможливі, знайти ймовірність події $A = \{$сума очок, що випали, ділиться на 6$\}$.

Результат експерименту можна описати парою чисел (i, j), де i — кількість очок на першому кубику, j — на другому. Тому $\Omega = \big\{(i, j) : i, j \in \{1, 2, \ldots, 6\}\big\}$. Легко бачити, що $|\Omega| = 6^2 = 36$. Подія A ототожнюється з підмножиною $\{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (6, 6)\}$ множини Ω. Оскільки $|A| = 6$, то за класичним означенням ймовірності одержуємо $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = 1/6$.

Нехай $\omega = (i_1, \dots, i_k)$ — впорядкований набір з k елементів множини $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$. Ймовірнісну схему, в якій

$$\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \dots, i_k) : i_m \in \mathcal{N}, 1 \leqslant m \leqslant k\} \tag{1.1}$$

і всі елементарні події ω рівноможливі, називають схемою випадкового вибору з поверненням. Схемою випадкового вибору без повернення називають ймовірнісну схему, в якій

$$\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \dots, i_k) : i_m \in \mathcal{N}, 1 \leqslant m \leqslant k, \text{ серед } i_m \text{ немає однакових}\}. \tag{1.2}$$

Приклад

У скриньці лежить п'ять карточок, занумерованих числами 1, 2, 3, 4, 5. За схемою випадкового вибору з поверненням зі скриньки тричі виймають карточку. Яка ймовірність того, що точно в двох випадках з трьох виймуть карточки з непарними номерами?

Ймовірнісна схема визначається формулою (1.1) з $n = 5$, $k = 3$; елементарна подія $\omega = (i_1, i_2, i_3)$ відповідає номерам карточок, що витягнуті. Оскільки $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, то існує точно 5^3 різних елементарних подій $\omega = (i_1, i_2, i_3) \in \Omega$. Отже, $|\Omega| = 125$.

Далі, $B = \{$точно в двох випадках з трьох виймають карточки з непарними номерами$\} = \{\omega = (i_1, i_2, i_3) \in \Omega :$ лише одне з $i_1, i_2, i_3,$ парне$\} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, де $B_k = \{\omega = (i_1, i_2, i_3) \in \Omega :$ число i_k — парне, решта — непарні$\}$, $k \in \{1, 2, 3\}$, попарно не перетинаються. Для довільного $k \in \{1, 2, 3\}$ кількість різних $\omega \in B_k$ дорівнює $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$. Тому

$$|B| = |B_1 \cup B_2 \cup B_3| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = 54$$

і

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{54}{125} = 0,432.$$

Приклад

За схемою випадкового вибору з поверненням з множини цілих чисел $\{0, 1, 2, \ldots, 10^n - 1\}$ вибирають числа ξ і η. Нехай p_m — ймовірність того, що сума $\xi + \eta$ буде m-значним натуральним числом у десятковому записі. Знайти p_{n-k+1} і $q_k = \lim\limits_{n \to +\infty} p_{n-k+1}$, $k \in \mathcal{N}$.

Простір елементарних подій Ω складається з усіх пар (ξ, η) : $\Omega = \big\{(\xi, \eta) : \xi, \eta \in \{0, 1, \ldots, 10^n - 1\}\big\}$, звідки $|\Omega| = 10^{2n}$.

Для цілого числа $\xi+\eta$ бути m-значним натуральним числом у десятковому записі є рівносильним до виконання нерівностей $10^{m-1}\leqslant \xi+\eta\leqslant 10^m-1$. Нехай $A_m=\{\xi+\eta$ не більше ніж m-значне ціле число$\}$. Оскільки $A_m\supset A_{m-1}$, кількість сприятливих подій для $A_m\cap\overline{A}_{m-1}$ дорівнює різниці $|A_m|-|A_{m-1}|$, тому за формулою віднімання ймовірностей $p_m=\mathbb{P}(A_m\cap\overline{A}_{m-1})=\mathbb{P}(A_m\setminus A_{m-1})=\mathbb{P}(A_m)-\mathbb{P}(A_{m-1})$. З іншого боку, $(\xi,\eta)\in A_m$ тоді і тільки тоді, коли $0\leqslant\xi,\eta$ і $\xi+\eta\leqslant 10^m-1$, тобто $|A_m|$ дорівнює кількості точок цілочисельної гратки, які містяться в прямокутному трикутнику з вершинами в точках $(0,0)$, $(0,10^m-1)$, $(10^m-1,0)$. При $m\leqslant n$ таких точок $\dfrac{10^m(10^m+1)}{2}$. Звідси

$$p_{n-k+1}=\frac{|A_{n-k+1}|-|A_{n-k}|}{|\Omega|}=$$

$$=\frac{10^{n-k+1}(10^{n-k+1}+1)-10^{n-k}(10^{n-k}+1)}{2\cdot 10^{2n}}=$$

$$=\frac{99}{2\cdot 10^{2k}}+\frac{9}{2}10^{-n-k}\to\frac{99}{2\cdot 10^{2k}},\quad n\to+\infty,\ k\in\mathcal{N}.$$

Приклад (Задача про черевики)

З n пар черевиків однакового вигляду і розміру випадково вибирають $2r$ черевиків $(2r < n)$. Знайти ймовірність того, що серед вибраних черевиків: 1) немає комплектної пари; 2) є k комплектних пар $(k \leqslant r)$.

Елементарними подіями в цій задачі треба вважати всі можливі способи вибору $2r$ черевиків з $2n$ штук, тому кількість елементарних подій $|\Omega|$ дорівнює C_{2n}^{2r}.

1. Будь-який вибір некомплектних черевиків можна провести так: спочатку вибрати, наприклад, $2r$ правих черевиків (це можна зробити C_n^{2r} способами), після цього замінити деякі з них на ліві (це можна зробити 2^{2r} способами). Тому за правилом добутку $2r$ некомплектних черевиків можна вибрати $C_n^{2r} 2^{2r}$ способами. Отже, $\mathbb{P}(A) = C_n^{2r} 2^{2r} / C_{2n}^{2r}$.

2. Виберемо спочатку k комплектних пар черевиків (це можна зробити C_n^k способами). Тоді задача зведеться до вибору $2r - 2k$ некомплектних черевиків з $n - k$ пар. За пунктом 1., це можна зробити $C_{n-k}^{2r-2k} 2^{2r-2k}$ способами, тому

$$\mathbb{P}(C) = \frac{C_n^k C_{n-k}^{2r-2k} 2^{2r-2k}}{C_{2n}^{2r}}.$$

1.58. Монету підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події: A — принаймні один раз випаде герб, B — при другому підкиданні випаде герб. Знайти ймовірності подій A і B.

Розв'язок. $\Omega = \{\text{ГГ, ЦЦ, ГЦ, ЦГ}\}$, $A = \{\text{ГГ, ГЦ, ЦГ}\}$, $B = \{\text{ГГ, ЦГ}\}$.

За формулою класичних ймовірностей $\mathbb{P}(A) = \dfrac{3}{4}, \mathbb{P}(B) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

1.59. Монету підкидають доти, доки не випаде герб. Описати простір елементарних подій.

Відповідь. $\Omega = \{\text{Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ}, \ldots\}$.

1.60. Вказати події, протилежні до таких:

A — поява герба при трьох підкиданнях монети,

B — три влучання при трьох пострілах,

C — принаймні одне влучання при трьох пострілах,

D — випадання трьох різних граней при трьох підкиданнях грального кубика,

E — випадання тричі однієї і тієї ж грані при трьох підкиданнях грального кубика.

1.61. Подія A — принаймні один з трьох приладів бракований, подія B — усі прилади якісні. Що означають події $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

Відповідь. $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \varnothing$, $\overline{A}$ – принаймні один з приладів якісний, $\overline{B}$ –всі прилади браковані.

1.62. Нехай A, B, C — випадкові події. Записати події, які полягають в тому, що з A, B, C:
а) відбулась тільки подія A, б) відбулись події A і B, а C не відбулась,
в) відбулись всі 3 події, г) відбулась точно одна подія,
д) відбулась хоча б одна подія, е) відбулось не більше двох подій,
є) не відбулось жодної події.
1.63. Стержень довжиною ℓ навмання розламали на 2 частини. Описати: простір елементарних подій, подію A — стержень розламано навпіл, подію $\hat{A}$ — довжина меншої частини не перевищує $\ell/4$.
$\Omega = \{x : x \in [0; \ell]\}$, де x — це довжина першої частини стержня;

$$A = \left\{\frac{\ell}{2}\right\}; \quad B = \{x \in \Omega : x \leqslant \frac{\ell}{4} \text{ або } x \geqslant \frac{3\ell}{4}\}.$$

1.64. Монету підкидають доти, доки вона не впаде двічі поспіль однією стороною. Описати простір елементарних подій. Для кожної елементарної події, яка вимагає n підкидань, приймаємо ймовірність 2^{-n}. Обчислити ймовірності таких подій: 1) експеримент закінчиться до шостого підкидання; 2) буде зроблено парну кількість підкидань; 3) експеримент триватиме нескінченно довго.
1.65. Нехай експеримент полягає у вимірюванні двох величин, які набувають значення з відрізку $[0, 1]$. Описати простір елементарних подій.
Відповідь. $\Omega = \{(x, y) \colon 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \} = [0, 1]^2$.

1.66. Серед студентів, які зібралися на лекцію з теорії ймовірностей, навмання вибирають одного. Нехай подія A полягає в тому, що обрано юнака. Подія B — в тому, що обрана особа не курить, а подія C в тому, що обрана особа проживає в гуртожитку: 1) описати подію $A \cap B \cap \overline{C}$; 2) за якої умови $A \cap B \cap C = A$? 3) коли справджується $\overline{C} \subset B$? 4) коли справджується $\overline{A} = B$, і чи буде так, коли всі юнаки курять?

1.67. Робітник виготовив n деталей. Нехай подія A_i, $i \in \mathcal{N}$ полягає в тому, що i-та деталь має дефект. Записати події: 1) жодна з деталей не має дефектів; 2) принаймні одна деталь має дефект; 3) тільки одна деталь має дефект; 4) не більше ніж дві деталі мають дефект; 5) принаймні 2 деталі не мають дефектів; 6) точно дві деталі дефектні.

1.68. Підкинули 6 гральних кубиків. Знайти ймовірності подій:
а) на всіх кубиках випаде різне число очок, б) сума всіх очок дорівнює 7.
Розв'язок. а) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^6, |\Omega| = 6^6$; шукана подія $A = \{\}$

1.69. В урні міститься a білих і b чорних куль ($a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$). З цієї урни без повернення вибирають 2 кулі. Знайти ймовірність того, що:
а) витягнуті кулі однакового кольору, б) витягнуті кулі різного кольору.
Розв'язати цю задачу, якщо вибір здійснюється з поверненням.

1.70. Код складається з 5 цифр. Знайти ймовірність того, що в ньому: а) всі цифри різні, б) цифри можуть повторюватись, але кожна не більше ніж двічі, в) цифри можуть повторюватись, але немає нуля,
г) цифри можуть повторюватись, і є принаймні 2 нулі.

1.71. В колоді 36 карт. Після того, як з колоди вийняли навмання, а потім повернули 1 карту, колоду перемішали і знову вийняли 1 карту. Яка ймовірність того, що обидві карти, які виймались, однакової масті?

1.72. З колоди в 36 карт вийняли навмання 10 карт. Знайти ймовірність того, що серед них: а) точно 1 туз; б) точно 3 тузи; в) хоча б 1 туз; д) немає масті "піка".

1.73. У ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі зайшли 3 особи. Кожен з них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірності подій:
A — всі пасажири вийдуть на 4-му поверсі,
B — всі пасажири вийдуть на одному й тому ж поверсі,
C — всі пасажири вийдуть на різних поверхах,
D — на 2-му і 3-му поверхах ліфт не зупинятиметься.

1.74. У лотереї є n білетів, серед яких m виграшних. Обчислити ймовірність виграшу для того, хто придбав k білетів.

Розв'язок. Обчислимо ймовірність того, що серед k випадково вибраних білетів не буде виграшних. Загальна кількість способів вибору з n білетів k білетів дорівнює C_n^k, а загальна кількість способів вибору з $n-m$ невиграшних білетів k білетів дорівнює C_{n-m}^k. Тому, ймовірність того, що серед k білетів не буде виграшних $p = \dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$, а шукана ймовірність є

ймовірність протилежної події, тому, вона дорівнює $1-p$.
Зазначимо, що вказана відповідь стосується випадку $k \le n-m$. Якщо ж $k > n-m$, то вибрати не виграшних k білетів серед $n-m$ невиграшних білетів неможливо. Тобто, отримаємо, що $p=0$, шукана ймовірність виграшу $1-p=1$.

1.75. На іспиті може бути запропоновано N питань. Студент знає відповіді на n питань. Екзаменатор задає студентові k питань, а для того, щоб скласти іспит, необхідно відповісти не менш як на r питань $(r < k < n < N)$. Яка ймовірність того, що студент складе іспит?

Розв'язок. Загальна кількість способів, якими викладач може з N питань вибрати для студента k питань дорівнює C_N^k. Якщо студент знає відповідь на m $(r \le m \le k)$ питань, то за правилом добутку загальна кількість таких варіантів дорівнює добутку кількості варііантів, коли студент знає питання C_n^m на кількість варіантів питань, відповіді на які студент не знає C_{N-n}^{k-m}. Тоді загальна кількість варіантів, при яких студент здасть іспит дорівнює $\sum\limits_{m=r}^{k} C_n^m \cdot C_{N-n}^{k-m}$. Тоді швукана ймовірність $p = \dfrac{\sum\limits_{m=r}^{k} C_n^m \cdot C_{N-n}^{k-m}}{C_N^k}$.

1.76. Для зменшення загальної кількості ігор $2n$ команд розбивають на 2 підгрупи по n команд у кожній. Яка ймовірність того, що 2 найсильніші команди виявляться в одній підгрупі? В різних підгрупах?

1.77. В ряд з $2n$ місць довільним чином сідають n студентів і n студенток. Знайти ймовірність того, що:
а) жодні 2 студентки не сидітимуть поруч;
б) всі студентки сидітимуть поруч.
1.78. З урни, в якій містяться кулі з номерами $1, 2, \ldots, n$, виймають послідовно k куль. Знайти ймовірність того, що номери вийнятих куль утворять зростаючу послідовність, якщо вибір здійснюється:
а) з поверненням;
б) без повернення.
1.79. Колода з 36 карт добре перемішана (тобто будь-які можливі розташування карт мають однакову ймовірність). Знайти ймовірності подій: $A = \{$чотири тузи розташовані поруч$\}$, $B = \{$місця розташування тузів утворюють арифметичну прогресію з кроком $7\}$.
1.80. З множини всіх послідовностей довжини n, що складаються з цифр 0, 1, 2, випадково вибирають одну. Знайти ймовірності подій:
$A = \{$послідовність починається з $0\}$, $B = \{$послідовність містить точно $m + 2$ нулі, причому 2 з них розташовані на кінцях послідовності$\}$,
$C = \{$послідовність містить точно m одиниць$\}$, $D = \{$у послідовності точно m_0 нулів, m_1 одиниць і m_2 двійок$\}$, $m_0 + m_1 + m_2 = n$.
1.81. Яка ймовірність того, що чотиризначний номер випадково обраного автомобіля: 1) має всі цифри різні? 2) має лише дві однакові цифри? 3) має дві пари однакових цифр? 4) має всі однакові цифри?

1.82. З множини $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ випадково вибирають число a. Знайти ймовірність p_n того, що a при діленні на натуральне число r дає остачу q. Знайти $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

1.83. За схемою випадкового вибору з поверненням з множини $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ вибирають числа ξ і η. Знайти ймовірність q_n того, що ξ і η взаємно прості. Знайти $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n$.

1.84. За схемою випадкового вибору з поверненням з множини $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ вибирають числа ξ і η. Нехай p_n — ймовірність події $\xi^2 + \eta^2 \leqslant n^2$. Обчислити $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

1.85. За схемою випадкового вибору з поверненням з множини $\{0, 1, 2, \ldots, 10^n - 1\}$ вибирають числа ξ і η. Позначимо через p_m ймовірність того, що добуток $\xi\eta$ буде m-значним натуральним числом у десятковому записі. Знайти $q_k = \lim\limits_{n \to +\infty} p_{2n-k}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1.86. Із сукупності всіх підмножин множини $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ за схемою вибору з поверненням вибирають множини A_1 і A_2. Знайти ймовірність того, що $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

1.87. Із сукупності всіх підмножин множини $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ за схемою вибору з повернененням вибирають підмножини A_1, A_2, $\ldots$, A_r. Знайти ймовірність того, що множини $A_1, A_2, \ldots, A_r$ попарно не перетинаються.

1.88. (Статистика Максвелла-Больцмана). Кожна з n різних частинок з однаковою ймовірністю потрапляє в одну з N комірок:

1) яка ймовірність того, що в першій, другій і т. д. N-й комірці буде відповідно $n_1, n_2, \ldots, n_N$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_N = n$, частинок?
2) знайти ймовірність p_k того, що фіксована комірка містить точно k частинок; для якого k ймовірність p_k є максимальною?
3) довести, що $p_k \to e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, якщо $n \sim \lambda N$ при $N \to \infty$, $\lambda > 0$;
4) яка ймовірність того, що в кожній комірці є принаймні одна частинка $(n \geqslant N)$?
5) яка ймовірність того, що зайнято точно r комірок?

1.89. (Статистика Бозе-Ейнштейна). Кожна з n однакових частинок потрапляє в одну з N комірок. Усі розташування, що відрізняються кількістю частинок хоча б в одній комірці, вважаємо рівноможливими:

1) яка ймовірність того, що в першій, другій і т. д. N-й комірці буде відповідно $n_1, n_2, \ldots, n_N$, , $n_1 + n_2 + \cdots + n_N = n$, частинок?
2) довести, що ймовірність того, що у фіксованій комірці буде k частинок, дорівнює $q_k = \dfrac{C_{N+n-k-2}^{n-k}}{C_{N+n-1}^{n}}$;
3) довести, що $q_k \to \lambda^k(1+\lambda)^{-k-1}$ при $n \sim \lambda N$ $(N \to +\infty)$, $\lambda > 0$;
4) яка ймовірність того, що точно m комірок будуть порожніми?

1.90. (Статистика Фермі-Дірака). Кожна з n однакових частинок потрапляє в одну з N комірок $(n < N)$. Рівноможливими вважають всі розміщення, які задовольняють заборону Паулі: в кожній комірці може бути не більше однієї частинки. Яка ймовірність того, що у задані $m(< n)$ комірок потрапить по частинці?

1.91. (Розповсюдження чуток). У місті живе $n + 1$ особа. Одна з них дізналась про деяку новину і передала її послідовно k іншим випадково вибраним особам. Одна з цих осіб знов передає новину k особам, і так повторюється r разів. Знайти ймовірність того, що: 1) новина не дійде знов до того, хто перший про неї дізнався; 2) ніхто не почує цю новину більше одного разу.

1.92. (Ланцюг листів). Одна з $n + 1$ осіб — "пращур" — пише 2 листи випадковим людям, які утворюють "перше покоління". Кожна людина з "першого покоління" пише листа ще двом випадковим людям, в результаті чого утворюється "друге покоління". Знайти ймовірність того, що "пращур" не входить до жодного з 1, 2, ..., r поколінь.

1.93. З колоди в 36 карт навмання виймають 7 карт. Знайти ймовірність того, що серед них будуть король і дама однієї масті.

1.94. Після зносу двох карт у грі в преферанс (грається 32 картами, по 8 кожної масті) у трьох гравців залишається на руках по 10 карт, при цьому в основного гравця — 4 козирні. У припущенні, що знесено некозирні карти, обчислити ймовірності того, що розподіл козирів у інших гравців:

а) 4:0; б) 3:1; в) 2:2.

Відповідь. а) $\frac{2\cdot C_4^4\cdot C_{16}^6}{C_{20}^{10}}=\frac{28}{323}$; б) $\frac{2\cdot C_4^3\cdot C_{16}^7}{C_{20}^{10}}=\frac{160}{323}$; в) $\frac{C_4^2\cdot C_{16}^8}{C_{20}^{10}}=\frac{135}{323}$.

1.95. Кожна з n паличок ламається на дві частини — довгу й коротку. Потім $2n$ отриманих уламків об'єднують у n пар, кожна з яких утворює нову "паличку". Знайти ймовірність того, що: 1) уламки об'єднані в початковому порядку; 2) всі довгі частини з'єднані з короткими.

Вказівки до розділу 1.2.

1.83. Розглянути такі події: $A_k=\{\xi|k\}$, $B_k=\{\eta|k\}$, $C_n=\{\xi$ і η взаємно прості$\}$. Тоді $\overline{C}_n=\bigcup\limits_{2\leqslant p\leqslant n}(A_p\cap B_p)$, де об'єднання береться по всіх простих числах p, які не перевищують n. Використати задачу 1.56 і формулу включень і виключень.

1.84. Довести, що кількість точок (ξ,η) цілочисельної гратки, яка міститься в крузі $\{\xi^2+\eta^2\leqslant n^2\}$, дорівнює $\pi n^2+O(n)$, $n\to+\infty$.

1.85. Див. приклад 1.13.

1.86. Множині $A_i\subset\mathcal{N}$ взаємно однозначно відповідає складений з нулів і одиниць рядок $x^{A_i}=(x_1^{A_i},\ldots,x_n^{A_i})$, де $x_j^{A_i}=\begin{cases}1, & j\in A_i,\\ 0, & j\notin A_i.\end{cases}$. Тоді $\{A_1\cap A_2=\varnothing\}=\{x_i^{A_1}+x_i^{A_2}\leqslant 1,\forall i\in\mathcal{N}\}$.

1.87. Див. вказівку до задачі 1.86.

1.88. 4) Нехай A_i, $i\in\{1,2,\ldots,N\}$ — способи розміщення, за яких i-та

комірка залишається порожньою. Тоді шукане $p = \mathbb{P}(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N})$.
5) Використати результат пункту 4).
1.89. 2) Решту $n-k$ частинок розкинути по $N-1$ комірці. Використати результат пункту 1).
1.93. Застосувати формулу включень-виключень стосовно пар дама-король кожноє масті.
1.94. На руках у двох гравців 20 карт, з яких 4 козирні.

Відповіді до розділу 1.2.

1.58. $\Omega = \{$ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ$\}$, $A = \{$ГГ, ГЦ, ЦГ$\}$, $B = \{$ГГ, ЦГ$\}$; $\mathbb{P}(A) = 0,75$; $\mathbb{P}(B) = 0,5$. 1.59. $\Omega = \{$Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, ...$\}$. 1.60. $\overline{A}$ — герб при трьох підкиданнях монети жодного разу не випав, $\overline{B}$ — при трьох пострілах є хоча б 1 промах, $\overline{C}$ — жодного влучання при трьох пострілах, $\overline{D}$ — одна й та сама грань випала хоча б двічі при трьох підкиданнях грального кубика, $\overline{E}$ — при трьох підкиданнях грального кубика випало принаймні 2 різні грані. 1.61. $A \cup B = \Omega$; $A \cap B = \varnothing$; $\overline{A} = B$; $\overline{B} = A$. 1.62. а) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$; б) $A \cap B \cap \overline{C}$; в) $A \cap B \cap C$; г) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$; д) $A \cup B \cup C$; е) $\overline{A \cap B \cap C}$; є) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. 1.63. $\Omega = \{x : x \in [0; l]\}$, де x — це довжина першої частини стержня; $A = \{\frac{l}{2}\}$; $B = \{x \in \Omega : x \leqslant \frac{l}{4} \vee x \geqslant \frac{3l}{4}\}$.
1.64. $\Omega = \{$ГГ, ЦЦ, ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦЦ, ГЦГГ, ...$\}$, 1) $\frac{15}{16}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0. 1.65. $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. 1.66. 1) обрана особа — це юнак, який не курить і не живе в гуртожитку; 2) коли всі юнаки не курять і живуть в гуртожитку;

3) всі, хто курять, живуть в гуртожитку; 4) коли всі дівчата не курять, а всі хлопці курять. Ні, оскільки дівчата за цієї умови теж можуть курити.

1.67. 1) $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i$, 2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, 3) $C = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \cap \overline{A}_n) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \dots \cap \overline{A}_n) \cup \dots \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n)$, 4) $D = A \cup C \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \dots \cap \overline{A}_n) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap \dots \cap \overline{A}_n) \cup \dots \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \cap \overline{A}_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)$, 5) $(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \dots \cup \overline{A}_n) \cap (A_1 \cup \overline{A}_2 \cup \dots \cup \overline{A}_n) \cap (\overline{A}_1 \cup A_2 \cup \overline{A}_3 \cup \dots \cup \overline{A}_n) \cap \dots \cap (\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \dots \cup \overline{A}_{n-1} \cup A_n)$, 5) $D \backslash (A \cup C)$.

1.68. а) $\frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324}$; б) $\frac{6}{6^6} = \frac{1}{7776}$. 1.69. а) $\frac{C_a^2 + C_b^2}{C_{a+b}^2}$; б) $\frac{ab}{C_{a+b}^2}$; у випадку вибору з поверненням: а) $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$; б) $\frac{2ab}{(a+b)^2}$. 1.70. а) $\frac{A_{10}^5}{10^5} = 0,3024$; б) $\frac{A_{10}^5 + P_{10}(1,3,6) \cdot P_5(2,1,1,1) + P_{10}(2,1,7) \cdot P_5(2,2,1)}{10^5} = 0,9144$; в) $0,9^5 = 0,59049$; г) $1 - \frac{9^5 + 5 \cdot 9^4}{10^5} = 0,08146$. 1.71. $0,25$. 1.72. а) $\frac{4 \cdot C_{32}^9}{C_{36}^{10}} = \frac{5200}{11781}$; б) $\frac{C_4^3 \cdot C_{32}^7}{C_{36}^{10}} = \frac{208}{3927}$; в) $1 - \frac{C_{32}^{10}}{C_{36}^{10}} = \frac{8791}{11781}$; г) $\frac{C_{27}^{10}}{C_{36}^{10}} = \frac{28405}{855848}$. 1.73. $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$; $\mathbb{P}(B) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$; $\mathbb{P}(C) = \frac{A_6^3}{6^3} = \frac{5}{9}$; $\mathbb{P}(D) = \frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$. 1.74. $1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$. 1.75. $\frac{\sum_{m=r}^{k} C_n^m \cdot C_{N-n}^{k-m}}{C_N^k}$. 1.76. $\frac{2 \cdot C_{2n-2}^{n-2}}{C_{2n}^n} = \frac{n-1}{2n-1}$ і $\frac{C_2^1 \cdot C_{2n-2}^{n-1}}{C_{2n}^n} = \frac{n}{2n-1}$. 1.77. а) $\frac{(n+1)!n!}{(2n)!}$; б) $\frac{(n+1)!n!}{(2n)!}$. 1.78. а) $\frac{C_n^k}{n^k}$; б) $\frac{C_n^k}{A_n^k} = \frac{1}{k!}$. 1.79. $\mathbb{P}(A) = \frac{33! \cdot 4!}{36!} = \frac{1}{1785}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{15 \cdot 4! \cdot 32!}{36!} = \frac{1}{3927}$. 1.80. $\mathbb{P}(A) = \frac{3^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}$; $\mathbb{P}(B) = \frac{C_{n-2}^m \cdot 2^{n-m-2}}{3^n}$ $(0 \leqslant m \leqslant n-2)$; $\mathbb{P}(C) = \frac{C_n^m \cdot 2^{n-m}}{3^n}$

$(0 \leqslant m \leqslant n)$; $\mathbb{P}(D) = \frac{P_n(m_0,m_1,m_2)}{3^n} = \frac{n!}{m_0!m_1!m_2!3^n}$. 1.81. 1) $\frac{A_{10}^4}{10^4} = 0,504$; 2) $\frac{C_4^2 \cdot C_{10}^1 \cdot A_9^2}{10^4} = 0,432$; 3) $\frac{C_4^2 \cdot C_{10}^2}{10^4} = 0,027$; 4) $\frac{C_{10}^1}{10^4} = 0,001$. 1.82. $p_N = \frac{\left[\frac{N-q}{r}\right]+1}{N}$, якщо $q = \overline{1,N}$ і $p_N = \frac{\left[\frac{N}{r}\right]}{N}$, якщо $q = 0$; $\lim\limits_{N\to+\infty} p_N = \frac{1}{r}$. 1.83.

$q_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \sum\limits_{p_1<p_2<\dots<p_k} \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{p_1p_2\dots p_k}\right]^2$, де сумування здійснюється по всіх простих числах p_k, $p_k \leqslant n$; $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \prod\limits_p \left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}$, де добуток беремо по всіх простих p. 1.84. $\frac{\pi}{4}$. 1.85.

$q_k = 9 \cdot 10^{-k-1} + (9k-1)\cdot 10^{-k-1}\ln 10$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. 1.86. $\left(\frac{3}{4}\right)^n$. 1.87. $\left(\frac{r+1}{2^r}\right)^n$.

1.88. 1) $\frac{P_n(n_1,n_2,\dots,n_N)}{N^n} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_N!}\cdot\frac{1}{N^n}$; 2) $p_k = \frac{C_n^k\cdot(N-1)^{n-k}}{N^n}$, p_k буде максимальною, якщо $k \in \left[\frac{n-N+1}{N}, \frac{n+1}{N}\right] \cap \mathbb{N}$; 4) $1 - \sum\limits_{i=1}^{N-1}(-1)^{i-1}C_N^i \cdot \left(\frac{N-i}{N}\right)^n$; 5) $\frac{C_N^r\left(r^n - \sum\limits_{i=1}^{r-1}(-1)^{i-1}C_r^i\cdot(r-i)^n\right)}{N^n}$. 1.89. 1) $\frac{1}{C_{N+n-1}^n} = \frac{n!(N-1)!}{(N+n-1)!}$; 4) $\frac{C_N^m\cdot C_{n-1}^{n-N+m}}{C_{N+n-1}^n}$. 1.90. $\frac{C_{N-m}^{n-m}}{C_N^n}$.

1.91. 1) $\frac{A_n^k\cdot(A_{n-1}^k)^{r-1}}{(A_n^k)^r} = \left(1-\frac{k}{n}\right)^{r-1}$;

2) $\frac{A_n^k\cdot A_{n-k}^k\cdot A_{n-2k}^k\cdots A_{n-(r-1)k}^k}{(A_n^k)^r} = \frac{A_n^{rk}}{(A_n^k)^r}$, якщо $rk \leqslant n$.

1.92. $\frac{C_n^2\cdot(C_{n-1}^2)^2\cdot(C_{n-1}^2)^4\ldots(C_{n-1}^2)^{2^{r-1}}}{C_n^2\cdot(C_n^2)^2\cdot(C_n^2)^4\ldots(C_n^2)^{2^{r-1}}} = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{2^r-2}$. 1.93. $(4\cdot C_{34}^5 - C_4^2\cdot C_{32}^3 + C_4^3\cdot C_{30}^1)/C_{36}^7 \approx 0,1298$. 1.94. а) $\frac{2\cdot C_4^4\cdot C_{16}^6}{C_{20}^{10}} = \frac{28}{323}$; б) $\frac{2\cdot C_4^3\cdot C_{16}^7}{C_{20}^{10}} = \frac{160}{323}$; в) $\frac{C_4^2\cdot C_{16}^8}{C_{20}^{10}} = \frac{135}{323}$. 1.95. 1) $\frac{2^n n!}{(2n)!}$; 2) $\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$.

2. ГЕОМЕТРИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

Розглянемо такий клас експериментів: з деякої множини Ω n-вимірного евклідового простору навмання вибирається точка. Вважаємо, що n-вимірна лебегова міра $\mu(\Omega)$ додатна. Тоді для довільної множини $A \subset \Omega$, для якої визначена величина $\mu(A)$, ймовірність $\mathbb{P}(A)$ того, що точку буде вибрано з A, визначається рівністю

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \tag{2.1}$$

Якщо стохастичний експеримент полягає у виборі навмання точки з деякої множини з евклідового простору, то казатимемо, що випадкова точка рівномірно розподілена в (на) цій множині.

Приклад

(Задача про зустріч) Микола і Петро домовились зустрітись на зупинці автобуса між 9 і 10 годинами. Той, хто приходить першим, чекає 15 хвилин на іншого, а потім йде геть. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, вважаючи, що моменти приходу Миколи і Петра рівномірно розподілені в квадраті $[9, 10] \times [9, 10]$.

Нехай Микола приходить на зупинку о 9 год u хв, а Петро о 9 год v хв. За простір елементарних подій виберемо $\Omega = \{(u, v) : 0 \leqslant u \leqslant 60, 0 \leqslant v \leqslant 60\}$. Тоді подія $A = \{$ зустріч Миколи і Петра відбудеться $\}$ відповідає множині $A = \{(u, v) : |u - v| \leqslant 15, 0 \leqslant u \leqslant 60, 0 \leqslant v \leqslant 60\} \subset \Omega$, зображеній на рис. 1. Оскільки $\mu(\Omega) = 60^2$, $\mu(A) = 60^2 - 45^2 = \frac{7}{16}60^2$, то за формулою (2.1) знаходимо $\mathbb{P}(A) = 7/16$.

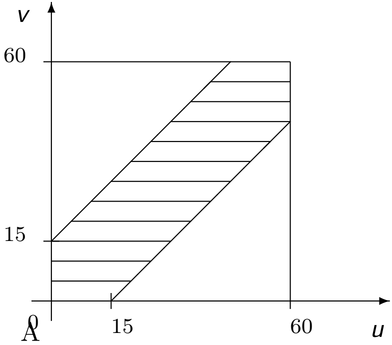

Рис. 1

Приклад

Відрізок довжини ℓ розділили на 3 частини, вибираючи точки поділу навмання. Знайти ймовірність того, що з утворених відрізків можна скласти трикутник.

Простір елементарних подій складається з точок (x_1, x_2) квадрата $[0, \ell] \times [0, \ell]$, де x_1, x_2 — координати точок поділу. Позначимо $x' = \min\{x_1, x_2\}$, $x'' = \max\{x_1, x_2\}$. Умову утворення трикутника з відрізків довжини $x', x'' - x', \ell - x''$ можна записати так:

$$\begin{cases} x' + (x'' - x') > \ell - x'', \\ x' + (\ell - x'') > x'' - x', \\ (x'' - x') + (\ell - x'') > x', \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' > l/2, \\ x'' - x' < \ell/2, \\ x' < \ell/2. \end{cases}$$

При $x' = x_1$, $x'' = x_2$ $(x_2 \geqslant x_1)$ область
$\{(x_1, x_2) : x_2 > \ell/2, x_2 - x_1 < \ell/2, x_1 < \ell/2\}$ є трикутником з площею $\ell^2/8$ (див. рис. 2), а при $x' = x_2$, $x'' = x_1$ $(x_2 \leqslant x_1)$ отримуємо симетричний до нього трикутник. Отже, за формулою (2.1) шукана ймовірність дорівнює $1/4$.

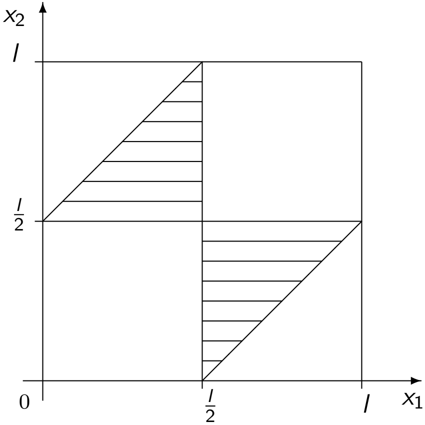

Рис. 2

2.1. [2.1] (Задача Бюфона). На площині проведено нескінченна кількість паралельних прямих, кожні дві сусідні з яких розташовані одна від одної на відстані $2a$. На площину навмання кидається голка завдовжки $2l$ ($l \leqslant a$). Нехтуючи товщиною голки, знайти ймовірність того, що голка перетне яку-небудь пряму.
Розв'язок див. текст лекцій.
2.2. [2.2] В круг вписано квадрат. У круг навмання кидають точку. Знайти ймовірність того, що вона виявиться всередині квадрата.
2.3. [2.3] На нескінченну шахову дошку зі стороною квадрата a випадково кидають монету з діаметром $d < a$. Знайти ймовірність того, що: а) монета не перетне жодної зі сторін квадратів; б) перетне не більше однієї сторони.
2.4. [2.4] Два судна повинні підійти до одного причалу. Поява суден — незалежні події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна — 1 год, а другого — 2 год.

2.5. [2.5] На відрізку довжиною ℓ навмання взято 2 точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує $\ell/3$?
Розв'язок. Нехай x, y –координати цих точок на відрізку $[0, \ell]$. Тоді за простір елементарних подій можна взяти квадрат $\Omega = [0, \ell] \times [0, \ell]$, а шуканій події в такому випадку відповідатиме множина $A = \{(x, y) \colon |x - y| \leq \ell/3\}$.
Залишається як і взадачі про зустріч підрахувати ймовірність
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\ell^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2}{\ell^2} = \frac{5}{9}$.
2.6. [2.6] На відрізку AB навмання вибрано точки P і Q. Яка ймовірність того, що $|AP| < |AQ|$? $|AP| \leqslant |PQ|$?
2.7. [2.7] На колі навмання взято три точки A, B, C. Знайти ймовірність того, що трикутник ABC гострокутний.
2.8. [2.8] Яка ймовірність того, що з трьох навмання вибраних відрізків, довжини яких не перевищують a, можна побудувати трикутник?

2.9. [2.9] На площині проведено паралельні прямі, відстані між якими дорівнюють почережно 1,5 см та 8 см. На площину навмання кидають круг радіуса 2,5 см. Яка ймовірність того, що цей круг не перетне жодної з прямих?
2.10. [2.10] У квадраті з вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ навмання вибирають точку з координатами (ξ,η). Нехай $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Довести, що $\mathbb{P}\{\xi < x, \eta < y\} = xy = \mathbb{P}\{\xi < x\}\mathbb{P}\{\eta < y\}$. При $z \in (0,1)$, знайти: 1) $\mathbb{P}\{|\xi - \eta| < z\}$; 2) $\mathbb{P}\{\xi\eta < z\}$, 3) $\mathbb{P}\{\min\{\xi,\eta\} < z\}$; 4) $\mathbb{P}\{\max\{\xi,\eta\} < z\}$; 5) $\mathbb{P}\{\xi + \eta < 2z\}$.
2.11. [2.11] Випадкова точка A рівномірно розподілена на відрізку $[0,1]$ і ділить цей відрізок на дві частини. Нехай η_1 — довжина більшої частини, а η_2 — довжина меншої. Знайти $\mathbb{P}\{\eta_1 \leqslant x\}$, $\mathbb{P}\{\eta_2 \leqslant x\}$ для довільного x.

2.12. [2.12] Випадкова точка A має рівномірний розподіл у прямокутнику зі сторонами 1 і 2. Знайти ймовірності таких подій: 1) відстань від A до найближчої сторони прямокутника не перевищує x; 2) відстань від A до будь-якої сторони прямокутника не перевищує x; 3) відстань від A до будь-якої діагоналі прямокутника не перевищує x.
2.13. [2.13] Випадкова точка X рівномірно розподілена у правильному трикутнику з вершинами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, a\sqrt{3})$. Знайти ймовірність того, що квадрат з центром X і сторонами довжини b, паралельними до осей координат, міститься в цьому трикутнику.
2.14. [2.14] Випадкова точка A рівномірно розподілена в правильному n-кутнику. Знайти ймовірність P_n того, що A розташована ближче до межі многокутника, ніж до його діагоналей. Знайти такі числа C і a, що $P_n = Cn^a(1 + o(1))$, $n \to +\infty$.

2.15. [2.15] Знайти ймовірність того, що корені квадратного рівняння $x^2 + 2ax + b = 0$ дійсні (подія A), якщо значення коефіцієнтів у прямокутнику $|a| \leqslant n$, $|b| \leqslant n$ рівноможливі. Яка ймовірність того, що ці корені додатні (подія B)?
Розв'язок. Зрозуміло, що $\Omega = [-n, n]^2$, площа $|\Omega| = 4n^2$.
$A = \{(a, b) \colon a^2 - b \geq 0\}$. Шукана ймовірність $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} =$
$\frac{4n^2 - \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} (n - a^2) da}{4n^2} = \frac{4n^2 - 2n\sqrt{n} + 2(\sqrt{n})^3/3}{4n^2} = \ldots$
2.16. [2.16] Випадкова точка (ξ_1, ξ_2) рівномірно розподілена в одиничному квадраті $K = \{(u, v) : 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1\}$. Позначимо через η кількість дійсних коренів полінома $f_\xi(x) = \frac{1}{3}x^3 - \xi_1^2 x + \xi_2$. Знайти ймовірності $\mathbb{P}\{\eta = k\}$, $k \in \{1, 3\}$.
2.17. [2.17] На паркет, складений з правильних k-кутників зі стороною a, випадково кинули монету радіуса r. Знайти ймовірність того, що монета не зачепить межу жодного з k-кутників паркету для: 1) $k = 3$; 2) $k = 4$; 3) $k = 6$.

2.18. [2.18](Парадокс Бертрана) У крузі радіуса R випадково проводиться хорда. Позначимо через ξ її довжину. Знайти ймовірність $Q_x = \mathbb{P}\{\xi > x\}$, якщо: 1) середина хорди рівномірно розподілена в крузі; 2) напрям хорди задано, а її середина рівномірно розподілена на діаметрі, перпендикулярному до цього напряму; 3) один кінець хорди закріплений, а інший рівномірно розподілений на колі.

2.19. [2.19] На інтервалі часу $[0, T]$ у випадковий момент часу u з'являється сигнал тривалості Δ. Приймач вмикається у випадковий момент $v \in [0, T]$ на час t. Припускаючи, що точка (u, v) рівномірно розподілена в квадраті $[0, T] \times [0, T]$, знайти ймовірність виявлення сигналу.

2.20. [2.20] Однорідний прямий круговий циліндр випадково кинули на горизонтальну площину. Знайти ймовірність того, що циліндр впаде на бічну поверхню, якщо його висота h, а радіус основи r. При яких h і r ймовірності впасти на основу і бічну поверхню однакові?

2.21. [2.21] Відрізок завдовжки ℓ розділили на три частини, вибираючи навмання точки поділу. Знайти ймовірність того, що довжина кожної з частин не перевищує заданої величини a $(\ell/3 \leqslant a \leqslant \ell)$.

Вказівки До розділу 2

2.1. Розглянути величини: x — відстань від середини голки до найближчої з прямих, φ — кут між напрямом голки і прямими. Записати необхідні і достатні умови перетину голкою однієї з прямих у термінах x і φ.
2.7. Використати приклад 2.2.
2.8. За простір елементарних подій взяти куб в $\mathbb{R}^3$.
2.16. Розглянути значення в екстремальних точках.
2.20. Розглянути положення центра ваги циліндра в момент дотику поверхні.

Відповіді До розділу 2

2.1. $\frac{2l}{\pi a}$. 2.2. $\frac{2}{\pi}$. 2.3. а) $\frac{(a-d)^2}{a^2}$; б) $1-\frac{d^2}{a^2}$. 2.4. $1-\frac{23^2+22^2}{2\cdot 24^2}$. 2.5. $\frac{5}{9}$. 2.6. $0,5$ і $0,25$. 2.7. $\frac{1}{4}$. 2.8. $\frac{1}{2}$. 2.9. $\frac{6}{19}$. 2.10. 1) $2z-z^2$; 2) $z-z\ln z$; 3) $2z-z^2$; 4) z^2; 5) $2z^2$, якщо $z\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ і $-1+4z-2z^2$, якщо $z\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. 2.11. $\mathbb{P}\{\eta_1\leqslant x\}=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2x-1, & \text{якщо } \frac{1}{2}<x\leqslant 1,\\ 1, & \text{якщо } x>1;\end{cases}$

$$\mathbb{P}\{\eta_2\leqslant x\}=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\leqslant 0,\\ 2x, & \text{якщо } 0<x\leqslant\frac{1}{2},\\ 1, & \text{якщо } x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

2.12. 1) $\begin{cases}0, & \text{якщо } x\leqslant 0,\\ 3x-2x^2, & \text{якщо } 0<x\leqslant\frac{1}{2},\\ 1, & \text{якщо } x>\frac{1}{2};\end{cases}$

2) $\begin{cases}0, & \text{якщо } x<1,\\ x-1, & \text{якщо } 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 1, & \text{якщо } x>2;\end{cases}$

3) $\begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 2,5x^2, & \text{якщо } 0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ 1 - 2\left(1 - \frac{\sqrt{5}x}{2}\right)^2, & \text{якщо } \frac{1}{\sqrt{5}} < x \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ 1, & \text{якщо } x > \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases}$

2.13. $\left(1 - \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{a}\right)^2$, якщо $0 \leqslant b \leqslant 2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})a$. 2.14. $P_n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$; $C = \frac{\pi^2}{2}$, $a = -2$.

2.15. 1) $\begin{cases} 1 - \frac{1}{3\sqrt{n}}, & \text{якщо } n \geqslant 1, \\ \frac{n+3}{6}, & \text{якщо } 0 \leqslant n < 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{6\sqrt{n}}, & \text{якщо } n \geqslant 1, \\ \frac{n}{12}, & \text{якщо } 0 \leqslant n < 1. \end{cases}$ 2.16. $\mathbb{P}\{\eta = 1\} = \frac{5}{6}$; $\mathbb{P}\{\eta = 3\} = \frac{1}{6}$. 2.17. 1) $\begin{cases} \left(1 - \frac{2\sqrt{3}r}{a}\right)^2, & \text{якщо } r < \frac{a}{2\sqrt{3}}, \\ 0, & \text{якщо } r \geqslant \frac{a}{2\sqrt{3}}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \left(1 - \frac{2r}{a}\right)^2, & \text{якщо } r < \frac{a}{2}, \\ 0, & \text{якщо } r \geqslant \frac{a}{2}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \left(1 - \frac{2r}{a\sqrt{3}}\right)^2, & \text{якщо } r < \frac{a\sqrt{3}}{2}, \\ 0, & \text{якщо } r \geqslant \frac{a\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

2.18. 1) $1 - \frac{x^2}{4R^2}$, якщо $0 \leqslant x \leqslant 2R$; 2) $\sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}}$, якщо

$0 \leqslant x \leqslant 2R$; 3) $1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x}{2R}$, якщо $0 \leqslant x \leqslant 2R$.

2.19. $1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta}{T}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2$, якщо $0 \leqslant \Delta \leqslant T$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

2.20. $\frac{h}{\sqrt{4r^2+h^2}}$; при $h = \frac{2}{\sqrt{3}}r$.

2.21. $\begin{cases} \left(1 - \frac{3a}{l}\right)^2, & \text{якщо } \frac{l}{3} \leqslant a \leqslant \frac{l}{2}, \\ 1 - 3\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2, & \text{якщо } \frac{l}{2} < a \leqslant l. \end{cases}$

АКСІОМАТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Ми розглядали такі моделі, в яких множина елементарних виходів (результатів) експерименту скінченна, а також, без достатнього на те обґрунтування, — геометричні ймовірності. Якщо в першому випадку будь-яка сукупність результатів експерименту трактувалась як подія, то у випадку геометричних ймовірностей ми були вимушені вважати подіями лише вимірні за Лебегом множини.
В основу всього подальшого викладу покладено поняття ймовірнісного простору $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, де Ω — простір елементарних подій,
$\mathcal{A}$ — σ-алгебра підмножин з Ω, $\mathbb{P}$ — ймовірність (ймовірнісна зліченно-адитивна міра).
Нехай простір елементарних подій (елементарних результатів експерименту) Ω є довільною множиною, 2^{Ω} — множина всіх підмножин множини Ω, а $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ — деяка система підмножин множини Ω. Для $A \subset \Omega$ позначатимемо $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Означення

Сім'я $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ називається алгеброю, якщо: 1) $\Omega \in \mathcal{A}$; 2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$; 3) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$.

Легко бачити, що якщо виконується умова 3) з цього означення, то умова 2) виконується тоді і лише тоді, коли виконується умова $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$. Справді, досить пригадати, що $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ та $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Означення

Клас множин $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ називається σ-алгеброю, якщо у попередньому означенні замість умови 2) виконується умова: якщо $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ — довільна послідовність множин з $\mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Приклад

Довести, що не існує σ-алгебри, яка складається з нескінченної кількості підмножин зліченної сукупності елементів.

Розв'язування.

Нехай Ω — основна множина, а $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, яка утворена зліченною кількістю підмножин множини Ω з множиною Ω включно. Для $\omega \in \Omega$ нехай $A(\omega)$ перетин всіх елементів σ-алгебри $\mathcal{A}$, які містять ω. За означенням множин $A(\omega)$, якщо $\{\omega_1, \omega_2\} \subset \Omega$ і $\omega_1 \neq \omega_2$, то або $A(\omega_1) = A(\omega_2)$, або $A(\omega_1) \cap A(\omega_2) = \varnothing$. Нехай $(A_n)_{n=1}^{N}$ всі попарно різні множини з сім'ї $\{A(\omega) : \omega \in \Omega\}$. Якщо $N < +\infty$, то $\mathcal{A}$ — множина скінченна. Якщо ж $N = +\infty$, то потужність $\mathcal{A}$ не менша за потужність множини всіх підмножин множини натуральних чисел. В обидвох випадках отримуємо суперечність з твердженням, що σ-алгебра містить зліченну і нескінченну кількість елементів.

Означення

Найменша σ-алгебра $\sigma(K)$, яка містить сім'ю K множин з Ω називається σ-алгеброю, породженою сім'єю K (мінімальною σ-алгеброю).

п.з. Алгебри і σ-алгебри.

3.1. [3.1] Нехай $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{4, 6\}$.
Описати:

a) σ-алгебру, породжену множиною A;
b) σ-алгебру, породжену множинами A та B;
c) всі σ-алгебри, які містять множину A.

Скільки елементів містить кожна σ-алгебра?

Розв'язування.

a) В шукану σ-алгебру, за означенням, повинні входити
$\Omega, \varnothing, A, \overline{A}$. Зрозуміло, що
$\sigma(A) = \left\{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\right\} = \{\Omega, \varnothing, \{2, 3, 4\}, \{0, 1, 5, 6\}\}$,
$|\sigma(A)| = 2^2 = 4$.

Інакше! $\sigma(A)$ — це множина всеможливих підмножин множини $\{A, \overline{A}\}$, $\sigma(A) = \{\varnothing, \{2, 3, 4\}, \{0, 1, 5, 6\}, \Omega\}$, $|\sigma(A)| = 2^2 = 4$

b) Позначимо $e_1 = \{0, 1, 5\} = \Omega\backslash(A \cup B)$, $e_2 = \{2, 3\} = A\backslash B$,
$e_3 = \{4\} = A \cap B$, $e_4 = \{6\} = B\backslash A$. $\sigma(A, B)$ — це множина всеможливих підмножин множини $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$,
$|\sigma(A, B)| = 2^4 = 16$.

Інакше!

В шукану σ-алгебру, за означенням, провинні входити $\Omega, \varnothing, A, \overline{A}, B, \overline{B}, A \cup B, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, A \cup \overline{B}, \overline{A \cup \overline{B}} = \overline{A} \cap B, B \cup \overline{A}, \overline{\overline{A} \cup B} = A \cap \overline{B}, \ \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B, \ A \setminus B, \ B \setminus A.$

Зрозуміло, що $\sigma(A) = \left\{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}, B, \overline{B}, A \cup B, \overline{A} \cap \overline{B}, A \cup \overline{B}, \overline{A} \cap B, B \cup \overline{A}, A \cap \overline{B}, \ldots\right\} = \ldots$

Зауважимо лише, що $\overline{A} \cap \overline{B} = \{0, 1, 5\}$.

в) довільну σ-алгебру, яка містить множину A отримуємо, якщо замість множини $\{A, \overline{A}\}$ розглядатимемо усілякі її подрібнення, які утворюються заміною одного з елементів A, $\overline{A}$ сукупністю його неперетинних підмножин. Наприклад, $\Omega' = \{\{2, 3\}, \{4\}, \{0, 1, 5, 6\}\}$, σ-алгеброю буде $\mathcal{A}' = 2^{\Omega'}$. Кожна така σ-алгебра буде мати 2^k елементів, де $k = \overline{2, 7}$.

3.2. [3.2] $\Omega = [0;3]$, $A = [0;2]$, $B = [2;3]$. Описати:

а) σ-алгебру, породжену множиною A;

б) σ-алгебру, породжену множинами A та B;

в) σ-алгебру, породжену множиною $C = A \cap B$.

Скільки елементів містить кожна σ-алгебра?

а) $\sigma(A) = \{\varnothing, [0;2], (2;3], [0;3]\}$, $|\sigma(A)| = 2^2 = 4$;

б) позначимо $e_1 = [0;2) = \Omega \backslash B$, $e_2 = \{2\} = A \cap B$, $e_3 = (2;3] = \Omega \backslash A$. $\sigma(A, B)$ — це множина всеможливих підмножин множини $\{e_1, e_2, e_3\}$, $|\sigma(A, B)| = 2^3 = 8$;

в) $\sigma(C) = \{\varnothing, \{2\}, [0;2) \cup (2;3], [0;3]\}$, $|\sigma(C)| = 2^2 = 4$.

3.3. [3.3] Нехай A і B — довільні підмножини Ω. Описати σ-алгебру, породжену множинами A та B. Скільки елементів вона може містити?
3.4. [3.4] Нехай $\Omega = [0;1)$ і $\mathcal{A}$ система підмножин із Ω, кожна з яких утворена об'єднанням скінченної кількості інтервалів вигляду $[a;b)$. Довести, що $\mathcal{A}$ — алгебра. Чому $\mathcal{A}$ не σ-алгебра?

Розв'язування.
У випадку, якщо би $\mathcal{A}$ була σ-алгеброю, то
$(0,1) = \bigcup\limits_{n=3}^{+\infty}[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}) \in \mathcal{A}$. Але, тоді $(0,1) = \bigcup\limits_{n=1}^{N}[a_n, b_n),\ N < +\infty$.
Нехай $a = \min\{a_n : 1 \le n \le N\},\ b = \max\{b_n : 1 \le n \le N\}$. Тоді
$(0,1) = \bigcup\limits_{n=1}^{N}[a_n, b_n) = [a, b) \neq (0,1)$. Суперечність, тобто,
$(0,1) \notin \mathcal{A}$.

3.5. [3.5] Довести, що клас всіх вимірних за Жорданом на $\Omega = [0;1) \times (0;1]$ множин: 1) утворює алгебру; 2) не утворює σ-алгебру.

3.6. [3.6] Перевірити, чи класи 2^X (сім'я всіх підмножин множини X) і $\{\varnothing, X\}$ є σ-алгебрами.

3.7. [3.7] Множина $A \subset \mathbb{R}^2$ називається симетричною, якщо $(x_1, x_2) \in A \Rightarrow (-x_1, -x_2) \in A$. Порожня множина симетрична. Довести, що клас всіх симетричних підмножин з $\mathbb{R}^2$ — σ-алгебра.

3.8. [3.8] Довести, що для кожного класу множин K існує мінімальна σ-алгебра $\sigma(K)$, що містить цей клас.

Означення

Клас множин M називається монотонним класом, якщо об'єднання кожної монотонно зростаючої послідовності множин з M, а також перетин кожної монотонно спадної послідовності множин з M належить до M, тобто: 1) для кожної послідовності множин $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ такої, що $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$,

$$A_n \in M \ \ (n \geqslant 1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in M;$$

2) для кожної послідовності множин $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ такої, що $A_n \supset A_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$,

$$A_n \in M \ \ (n \geqslant 1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in M.$$

3.9. [3.9] Перевірити, чи
$\lim\limits_{n\to+\infty}[0,n)=[0,+\infty)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}[n,+\infty)=\varnothing$.

Розв'язок. $[0,n)\subset[0,n+1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}[0,n)=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}[0,n)=[0,+\infty)$.
Інша рівність встановлюється подібно.

3.10. [3.10] Для того, щоб алгебра була σ-алгеброю необхідно і достатньо, щоб вона була монотонним класом. Довести.

Розв'язок. Нехай алгебра $\mathcal{M}$ — сім'я підмножин Ω. Якщо вона є σ-алгеброю, а $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ така, що $A_n\subset A_{n+1}$ $(n\geqslant 1)$, то за означенням σ-алгебри $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n=\bigcup\limits_{N=1}^{+\infty}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{N}A_n\right)\in\mathcal{M}$, позаяк
$\bigcup\limits_{n=1}^{N}A_n\in\mathcal{M}$.

Далі, якщо $B_n\supset B_{n+1}$ $(n\geqslant 1)$, то $A_n=\overline{B}_n$, $A_n\subset A_{n+1}$ $(n\geqslant 1)$, звідки
$\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}B_n=\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\overline{B}_n}=\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n}\in\mathcal{M}$.

Отже, $\mathcal{M}$ – монотонний клас.

Навпаки, нехай $\mathcal{M}$ – монотонний клас. Тоді, $\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N+1} A_n$ і за означенням монотонного класу маємо
$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup\limits_{N=1}^{+\infty} \left(\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n \right) \in \mathcal{M}.$

3.11. [3.11] Нехай $M(K)$ — найменший монотонний клас, який містить сім'ю множин K. Довести, що мінімальна σ-алгебра, яка містить сім'ю множин K, збігається з $M(K)$, тобто $\sigma(K) = M(K)$.

3.12. [3.12] Нехай $\Omega = (-\infty, +\infty)$ і
$M = \{[m, n] : m, n \in \mathbb{Z}, m < n\} \cup \{(-\infty, n] : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{[n, +\infty) : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-\infty, +\infty)\}$. Чи M — монотонний клас?

Означення

Нехай $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ — деяка алгебра підмножин Ω, а $\mathbb{P} \colon \mathcal{A} \to [0, 1]$ — невід'ємна функція множин $\mathbb{P}(A)$, яка визначена на $\mathcal{A}$. $\mathbb{P}$ називається скінченно-адитивною ймовірнісною мірою, якщо:
1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$; 2) $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

3.13. [3.13] Довести, що у випадку, коли для функції множини $\mathbb{P}(A)$ виконується умова 2) з означення 3.5, то

$$A_i \in \mathcal{A}\,(1 \leqslant i \leqslant n),\ A_i \cap A_j = \varnothing\,(i \neq j) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

3.14. [3.14] Нехай $\mathbb{P}(A)$ — скінченно-адитивна ймовірнісна міра. Довести, що: 1) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$; 2) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$; 3) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ (монотонність міри); 4) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$; 5) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

3.15. [3.15] Нехай $\mathbb{P}$ — скінченно-адитивна ймовірнісна міра. Довести, що: $A_n \in \mathcal{A}\,(n \geqslant 1)$,

$$A_i \cap A_j = \varnothing\,(i \neq j),\ \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

3.16. [3.16] Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{(A \cup B)}$, $\overline{A} \cap (A \cup B)$.

$\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cap B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B)$.

$\mathbb{P}(\overline{(A \cup B)}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)$.

$\overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \varnothing \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap B = B \setminus (A \cap B)$, тому, $\mathbb{P}(\overline{A} \cap (A \cup B)) = \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

3.17. [3.17] Нехай $\mathbb{P}_n$ — ймовірність того, що відбулось n подій з подій A, B, C. Виразити $\mathbb{P}_n$ $(n = 0, 1, 2, 3)$ через $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap C)$, $\mathbb{P}(B \cap C)$ та $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

3.18. [3.18] Довести, що для будь-яких двох подій A і B виконується співвідношення

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant 1/4.$$

Нехай $\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$. Оскільки $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, то $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) \leq \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))$, бо $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cup B) \leq 0$. Якщо пригадати, що максимальне значення виразу $x(1-x) = \dfrac{1}{4}$ при $x = \dfrac{1}{2}$, то отримаємо потрібну нерівність. Бо у випадку $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ потрібно лише скористатися нерівністю $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \leq 0$.

Протилежну оцінку можна одержати, якщо позначити $x = \mathbb{P}(A \cap B)$, $a = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$, $b = \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$. Тоді $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = x - (a + x)(b + x) \geqslant -ab \geqslant -\frac{1}{4}$ подібними міркуваннями.

3.19. [3.19] Довести, що для будь-яких двох подій A і B виконується співвідношення

$$\mathbb{P}^2(A \cap B) + \mathbb{P}^2(\overline{A} \cap B) + \mathbb{P}^2(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}^2(\overline{A} \cap \overline{B}) \geqslant 1/4,$$

причому рівність досягається тоді і лише тоді, коли $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$.

3.20. [3.20] Нехай $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. $\mathcal{A}$ — алгебра всіх вимірних за Жорданом підмножин Ω і $\mathbb{P}$ — "міра Жордана" на $\mathcal{A}$. Довести, що $\mathbb{P}$ — скінченно-адитивна ймовірнісна міра на $\mathcal{A}$.

Означення

Нехай $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ — деяка алгебра підмножин Ω.
Скінченно-адитивна ймовірнісна міра $\mathbb{P}\,(A)$, задана на $\mathcal{A}$, називається ймовірністю (зліченно-адитивною ймовірнісною мірою), якщо для будь-якої послідовності $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ такої, що $A_n \in \mathcal{A}\,(n \geqslant 1)$ і $A_n \cap A_k = \varnothing\,(n \neq k)$,

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\,(A_n).$$

3.21. [3.21] Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, $p_i \geqslant 0$ $(i \geqslant 1)$, $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$ та $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\omega_n \in A} p_n$, $A \in \mathcal{A}$. Довести, що $\mathbb{P}(A)$ — ймовірність.

3.22. [3.22] Нехай $\mathbb{P}(A)$ — скінченно-адитивна ймовірнісна міра на алгебрі $\mathcal{A}$. Наступні твердження рівносильні: 1) $\mathbb{P}(A)$ — ймовірність; 2) якщо $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ — монотонно зростаюча послідовність множин і $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$, то $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$; 3) якщо $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ — монотонно спадна послідовність множин і $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$, то $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

3.23. [3.23] Навести приклад алгебри і скінченно-адитивної ймовірнісної міри на ній, яка не є зліченно-адитивною мірою.

3.24. [3.24] Нехай $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ — множина раціональних точок з $[0, 1]$, $\mathcal{A}$ — алгебра множин, кожна з яких є скінченним об'єднанням множин вигляду $A = \mathbb{Q} \cap \langle a, b\rangle$, де $\langle a, b\rangle$ позначає будь-який з інтервалів (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ і для кожної такої множини означимо $\mathbb{P}(A) = b - a$. На алгебрі $\mathcal{A}$ функцію множини $\mathbb{P}$ визначаємо природним способом. Перевірити, що $\mathbb{P}$ — скінченно-адитивна ймовірнісна міра, але не ймовірність.

Розв'язок. Нехай $q \in \mathbb{Q}$. Тоді за означенням $\mathbb{P}(\{q\}) = \mathbb{P}([q, q]) = q - q = 0$. Далі $\Omega = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ і отримуємо суперечність $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum\limits_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{P}(\{q\}) = 0$.

3.25. [3.25] Нехай $\Omega = (-\infty, +\infty)$, $\mathcal{A}$ — клас всіх інтервалів вигляду $[a, b)$ і скінченних об'єднань таких інтервалів (зокрема, вважаються допустимими значення $a = -\infty$ і $b = +\infty$), а $F(x)$ — неспадна неперервна зліва функція така, що $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Визначимо на $\mathcal{A}$ функцію множини $\mathbb{P}(A)$. Якщо $A \in \mathcal{A}$, то A можна подати у вигляді $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$, де інтервали попарно не перетинаються.

Означимо $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i))$. Довести, що $\mathbb{P}(A)$ — ймовірність на $\mathcal{A}$.

Вказівки До розділу 3

3.4. $\mathcal{A}$ не σ-алгеброю, бо для $A_n = [0; \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, а $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\} \notin \mathcal{A}$.
3.5. Використати ідею задачі 3.4.
3.7. Те, що A — симетрична $\Rightarrow \overline{A}$ — симетрична, довести від супротивного.
3.8. Позначити через $\sigma(K)$ перетин всіх σ-алгебр, що містять клас K. Такі σ-алгебри існують, прикладом є множина всіх підмножин множини Ω. Показати, що $\sigma(K)$ буде мінімальною σ-алгеброю, яка містить клас K.
3.10. $\mathcal{A}$ — σ-алгебра $\Rightarrow \mathcal{A}$ — монотонний клас, очевидно. $\mathcal{A}$ — монотонний клас, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. $B_n \subset B_{n+1}$.
3.11. Оскільки $\sigma(K)$ — монотонний клас, то $M(K) \subset \sigma(K)$. Для доведення оберненого включення достатньо довести, що $M(K)$ — алгебра. Доведемо, що $A \in M(K) \Rightarrow \overline{A} \in M(K)$.
Нехай $M^* = \{B : B \in M(K), \overline{B} \in M(K)\} \subset M(K)$. Якщо $B_n \in M^*$, $B_n \subset B_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, то $B_n \in M(K)$, $\overline{B}_n \in M(K)$, $\overline{B}_n \supset \overline{B}_{n+1}$. Оскільки $M(K)$ — монотонний клас, то $\lim B_n = \bigcup_n B_n \in M(K)$,

$\overline{\lim B_n} = \lim \overline{B}_n = \bigcap_n \overline{B}_n \in M(K)$, тобто M^* — монотонний клас. Позаяк $M(K)$ — найменший монотонний клас, що містить K, то $M(K) \subset M^*$. Отже, $M^* = M(K)$.

3.13. Застосувати індукцію за n.

3.14. 1) $\overline{A} \cup A = \Omega$ і $\overline{A} \cap A = \varnothing$. 2) $\varnothing \cup \Omega = \Omega$ і $\varnothing \cap \Omega = \varnothing$. 3) і 4) $B = A \cup B \backslash A$ і $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$. 5) $A \cup B = (A \backslash (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash (A \cap B))$ і використати пункт 4).

3.15. Для довільного $n \in \mathbb{N}$, враховуючи означення 3.5 і задачу 3.13, $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$. Далі спрямувати $n \to +\infty$.

3.18. Щоб довести $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leqslant 1/4$, досить показати, що $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))$, де A — це та з подій A, B, ймовірність якої більша. $\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) \leqslant \frac{1}{4}$, якщо знайти максимальне значення виразу. Протилежну оцінку можна одержати, якщо позначити $x = \mathbb{P}(A \cap B)$, $a = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$, $b = \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$. Тоді $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = x - (a + x)(b + x) \geqslant -ab \geqslant -\frac{1}{4}$ подібними міркуваннями.

3.19. Позначивши $\mathbb{P}(A \cap B) = x + \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = y + \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = z + \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = w + \frac{1}{4}$ і використовуючи, що $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1$, оцінити $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(w + \frac{1}{4}\right)^2$ знизу.

3.20. Перевірити виконання аксіом скінченно адитивної ймовірнісної міри.

3.21. Перевірити виконання аксіом ймовірності.

3.22. 1. (A_n) — монотонно зростаюча $\Leftrightarrow$ $(\overline{A}_n)$ — монотонно спадна.
2. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right)}$, $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right)$.
3. (B_n), $B_n \cap B_k = \varnothing$ $(n \neq k) \Rightarrow A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ — монотонно зростаюча послідовність. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k).$$

4. A_n — монотонна зростаюча $\Rightarrow B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, $\ldots B_n \cap B_k = \varnothing$ $(n \neq k)$.
$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
3.23. Див. задачу 3.24.

3.24. Одноточкові множини $\{r\}$ належать до алгебри $\mathcal{A}$, причому $\mathbb{P}(\{r\}) = 0$. Але

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) \neq \sum_{r \in \Omega} \mathbb{P}(\{r\}) = 0.$$

3.25. Перевірити неперервність $\mathbb{P}$ (див. задачу 3.22).

Відповіді До розділу 3

3.1. а) $\sigma(A)$ — це множина всеможливих підмножин множини $\{A, \Omega\backslash A\}$, $\sigma(A) = \{\varnothing, \{2,3,4\}, \{0,1,5,6\}, \Omega\}$, $|\sigma(A)| = 2^2 = 4$; б) позначимо $e_1 = \{0,1,5\} = \Omega\backslash(A \cup B)$, $e_2 = \{2,3\} = A\backslash B$, $e_3 = \{4\} = A \cap B$, $e_4 = \{6\} = B\backslash A$. $\sigma(A, B)$ — це множина всеможливих підмножин множини $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $|\sigma(A, B)| = 2^4 = 16$; в) довільну σ-алгебру, яка містить множину A отримуємо, якщо замість множини $\{A, \Omega\backslash A\}$ розглядатимемо усілякі її подрібнення, які утворюються заміною одного з елементів A, $\Omega\backslash A$ сукупністю його неперетинних підмножин. Наприклад, $\Omega' = \{\{2,3\}, \{4\}, \{0,1,5,6\}\}$, σ-алгеброю буде $\mathcal{A}' = 2^{\Omega'}$. Кожна така σ-алгебра буде мати 2^k елементів, де

$k=\overline{2,7}$. 3.2. а) $\sigma(A)=\{\varnothing,[0;2],(2;3],[0;3]\}$, $|\sigma(A)|=2^2=4$; б) позначимо $e_1=[0;2)=\Omega\backslash B$, $e_2=\{2\}=A\cap B$, $e_3=(2;3]=\Omega\backslash A$. $\sigma(A,B)$ — це множина всеможливих підмножин множини $\{e_1,e_2,e_3\}$, $|\sigma(A,B)|=2^3=8$; в) $\sigma(C)=\{\varnothing,\{2\},[0;2)\cup(2;3],[0;3]\}$, $|\sigma(C)|=2^2=4$. 3.3. Позначимо $e_1=A\backslash B$, $e_2=A\cap B$, $e_3=B\backslash A$, $e_4=\Omega\backslash(A\cup B)$. $\sigma(A,B)$ — це множина всеможливих підмножин множини $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$. Якщо $A\cap B=\varnothing$ і $\Omega\backslash(A\cup B)=\varnothing$, то $|\sigma(A,B)|=2^2=4$; якщо лише одна з множин $A\cap B$ або $\Omega\backslash(A\cup B)$ є непорожньою, то $|\sigma(A,B)|=2^3=8$; якщо $A\cap B\neq\varnothing$ і $\Omega\backslash(A\cup B)\neq\varnothing$, то $|\sigma(A,B)|=2^4=16$. 3.12. Ні, бо $\bigcap_{n=1}^{+\infty}[n,+\infty)=\varnothing\notin M$. 3.16. $\mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B})=1-\mathbb{P}(A\cap B)$; $\mathbb{P}(\overline{A\cup B})=1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\cap B)$; $\mathbb{P}(\overline{A}\cap(A\cup B))=\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$. 3.17. $\mathbb{P}_0=1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$;
$\mathbb{P}_1=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-2\left(\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)\right)+3\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$;
$\mathbb{P}_2=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-3\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$;
$\mathbb{P}_3=\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$.

4. УМОВНІ ЙМОВІРНОСТІ. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ПОДІЙ

4.1. Умовні ймовірності. Незалежність.

Нехай $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір. Кожна подія $B \in \mathcal{S}$ породжує підпростір з мірою $(B, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big|_B)$, де $\mathcal{A} = \{B \cap A : A \in \mathcal{S}\}$ — звуження σ-алгебри $\mathcal{S}$ на B, $\mathbb{P}\big|_B$ — звуження міри $\mathbb{P}$ на B. Якщо відкинути тривіальний випадок $\mathbb{P}(B) = 0$, то, пронормувавши $\mathbb{P}\big|_B$, отримаємо умовний ймовірнісний простір $(B, \mathcal{A}, \mathbb{P}_B)$, де $\mathbb{P}_B(C) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(B)}$ для $C \in \mathcal{A}$. Доозначимо тепер $\mathbb{P}_B$ на всьому $\mathcal{S}$, прийнявши $\mathbb{P}_B(A) = 0$ при $A \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{A}$. В результаті приходимо до поняття умовної ймовірності події A за умови, що подія B відбулась

$$\mathbb{P}(A|B) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)}, \quad A, B \in \mathcal{S},\ \mathbb{P}(B) > 0. \tag{4.1}$$

Рівність (4.1) можна переписати у вигляді

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B). \tag{4.2}$$

Узагальненням (4.2) є формула

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\times \\ \times \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}), \quad (4.3)$$

де $A_i \in \mathcal{S}$, $i \in \mathcal{N}$.
Події A і B називаються незалежними, якщо $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A)$. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються незалежними в сукупності, якщо для довільного набору індексів $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})\ldots\mathbb{P}(A_{i_k})$. Якщо попередня рівність виконується при $k = 2$, то події $A_1, \ldots, A_n$ називаються попарно незалежними.

Приклад

З ящика, що містить 3 білих і 2 чорні кулі, за схемою випадкового вибору без повернення послідовно виймають кулі. Знайти ймовірність p_k того, що чорна куля вперше з'явиться при k-му випробуванні.

Нехай C_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, подія, яка полягає в тому, що в i-му випробуванні з'явилась чорна куля, $B_k = \{$чорна куля вперше з'явилась при k-му випробуванні$\}$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тоді $B_1 = C_1$, $B_2 = \overline{C}_1 \cap C_2$, $B_3 = \overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap C_3$, $B_4 = \overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3 \cap C_4$. За формулою (4.3)

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(C_1), \quad \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(\overline{C}_1)\mathbb{P}(C_2|\overline{C}_1),$$

$$\mathbb{P}(B_3) = \mathbb{P}(\overline{C}_1)\mathbb{P}(\overline{C}_2|\overline{C}_1)\mathbb{P}(C_3|\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2),$$

$$\mathbb{P}(B_4) = \mathbb{P}(\overline{C}_1)\mathbb{P}(\overline{C}_2|\overline{C}_1)\mathbb{P}(\overline{C}_3|\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2)\mathbb{P}(C_4|\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3).$$

За класичним означенням ймовірності

$$\mathbb{P}(C_1) = \frac{2}{5},\ \mathbb{P}(\overline{C}_1) = \frac{3}{5},\ \mathbb{P}(\overline{C}_{i+1}|\overline{C}_1 \cap \dots \cap \overline{C}_i) = \frac{3-i}{5-i},$$

$$\mathbb{P}(C_{i+1}|\overline{C}_1 \cap \dots \cap \overline{C}_i) = \frac{2}{5-i}.$$

У результаті $p_1 = \mathbb{P}(B_1) = 0,4$, $p_2 = \mathbb{P}(B_2) = 0,3$, $p_3 = \mathbb{P}(B_3) = 0,2$, $p_4 = \mathbb{P}(B_4) = 0,1$.

Приклад

Ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань подія A настане принаймні один раз, дорівнює 0,59. Знайти ймовірність настання події A при одному випробуванні, якщо вона однакова під час всіх випробувань.

Нехай $A_i = \{$подія A настала при i-му випробуванні$\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, тоді треба знайти $p = \mathbb{P}(A_i)$. За умовою $\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = 1 - 0,59 = 0,41$. Оскільки події A_i незалежні, то (див. задачу 4.19) події $\overline{A}_i$ також незалежні, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тому

$$\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = \mathbb{P}(\overline{A}_1)\mathbb{P}(\overline{A}_2)\mathbb{P}(\overline{A}_3)\mathbb{P}(\overline{A}_4) = (1 - p)^4,$$

звідки $p = 1 - \sqrt[4]{0,41}$.

4.2. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Сукупність попарно несумісних подій $H_1, \ldots, H_n$ називається повною групою подій, якщо $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$ і $\mathbb{P}(H_i) > 0$ при

$1 \leqslant i \leqslant n$. Якщо $\{H_i\}_{i=1}^n$ — повна група подій, то для довільної події A є правильною формула повної ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i) \tag{4.4}$$

і формула Байєса

$$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}, \quad \mathbb{P}(A) > 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{4.5}$$

Формулу (4.5) можна тлумачити так. Нехай H_i, $i \in \mathcal{N}$, деякі гіпотези, ймовірності яких відомі, та які дають змогу обчислити умовні ймовірності $\mathbb{P}(A|H_i)$. Після проведення експерименту, що полягає у появі або не появі події A, можна оцінити ймовірності гіпотез за формулою (4.5), знайшовши $\mathbb{P}(H_k|A)$. Ці ймовірності називаються апостеріорними ймовірностями гіпотез, тоді як початкові ймовірності $\mathbb{P}(H_i)$ називаються апріорними.

Приклад

У скриньку, що містить 8 стандартних виробів, додають 2 вироби зі складу; відомо, що частка бракованих виробів на складі дорівнює 5%. Знайти ймовірність того, що навмання взятий з поповненої скриньки виріб не буде бракованим.

Означимо події A, H_0, H_1, H_2: $A = \{$виріб, взятий з поповненої скриньки, стандартний$\}$, $H_k = \{$з двох виробів, доданих у скриньку, k бракованих$\}$, $k \in \{0, 1, 2\}$.
Зрозуміло, що $H_0 \cup H_1 \cup H_2 = \Omega$ і $H_k \cap H_l = \varnothing$ $(k \neq l)$, тобто ці події утворюють повну групу подій. Скористаємось формулою повної ймовірності (4.4)

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(A|H_0) + \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2).$$

Якщо відбулась подія H_k, то в ящику з 10 виробів k бракованих, отже, $\mathbb{P}(A \mid H_k) = \frac{10-k}{10}$, $k \in \{0, 1, 2\}$.
При виборі малої кількості виробів з великої партії схеми вибору з поверненням і без повернення мають близькі ймовірності результатів. Тому вважаємо, що кожен з доданих

виробів незалежно один від одного може бути бракованим з ймовірністю 0,05. Отже, $\mathbb{P}(H_0) = 0,95^2$, $\mathbb{P}(H_1) = 2 \cdot 0,95 \cdot 0,05$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,05^2$. Остаточно,

$$\mathbb{P}(A) = 0,95^2 \cdot 1 + 2 \cdot 0,95 \cdot 0,05 \cdot 0,9 + 0,05^2 \cdot 0,8 = 0,99.$$

Приклад

Зі скриньки, в якій було 7 білих і 5 червоних куль, випадково загубили 2 кулі. Після цього зі скриньки навмання вийняли одну кулю, яка виявилась червоною. Знайти ймовірність того, що загублено 2 білі кулі.

Розглянемо гіпотези H_i — серед загублених куль i білих, $i \in \{0, 1, 2\}$ та подію A — після втрат куль зі скриньки вийняли червону кулю. $\{H_0, H_1, H_2\}$ — повна група подій, тому можемо за формулою Байєса знайти шукану апостеріорну ймовірність

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)}{\mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(A|H_0) + \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)} = \frac{21}{55},$$

де за класичним означенням ймовірності

$$\mathbb{P}(H_0) = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{20}{132}, \ \mathbb{P}(H_1) = \frac{C_5^1 C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{70}{132}, \ \mathbb{P}(H_2) = \frac{C_7^2}{C_{12}^2} = \frac{42}{132},$$

$\mathbb{P}(A|H_0) = \frac{3}{10}$ — ймовірність того, що у скриньці залишилось 7 білих і 3 червоні кулі,
$\mathbb{P}(A|H_1) = \frac{4}{10}$ — ймовірність того, що у скриньці залишилось 6 білих і 4 червоні кулі,
$\mathbb{P}(A|H_2) = \frac{5}{10}$ — ймовірність того, що у скриньці залишилось 5 білих і 5 червоних куль.

Приклад

У скриньці розташована куля, про яку відомо, що вона чорна або біла. В урну поклали білу кулю, а потім після ретельного перемішування вийняли кулю, яка виявилась білою. Яка ймовірність того, що після цього виймуть з урни білу кулю? (Льюис Кэррол. История с узелками. М., Мир, 1973)

На перший погляд здається, що нічого і не відбулось, відповідь

— 1/2. Але насправді перший раз біла куля була вийнята випадково, тому задача потребує глибшого ймовірнісного аналізу, який приводить до іншої відповіді.
Експеримент складається з двох частин — перше виймання кулі і друге виймання кулі. Події: A — перша вийнята куля виявилась білою, B — друга вийнята куля виявилась білою. Нехай $\mathbb{P}(H_i)$ — апріорні ймовірності гіпотез H_1 — в урні була біла куля, H_2 — в урні була чорна куля. За результатом першої частини експерименту ми можемо переоцінити ці ймовірності — отримаємо апостеріорні ймовірності $\mathbb{P}(H_i|A)$, які відіграють роль апріорних для другої частини експерименту. Тому, застосувавши формули Байєса до першої частини і формулу повної ймовірності до другої, маємо

$$\mathbb{P}(H_i) = \frac{1}{2}, \quad i \in \{1, 2\},$$

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(H_i|A)\mathbb{P}(B|(H_i|A)) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3}.$$

4.1. [4.1] З множини чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ за схемою випадкового вибору без повернення вибирається 3 числа. Знайти умовну ймовірність того, що третє число потрапить в інтервал, утворений першими двома, якщо відомо, що перше менше за друге.

4.2. [4.2] Зі 100 карточок з числами 00, 01, ..., 98, 99 випадково вибирається одна. Нехай η_1 і η_2 — відповідно сума й добуток цифр на вибраній карточці. Знайти $\mathbb{P}\{\eta_1 = i|\eta_2 = 0\}$, $i \in \{0, 1, \dots, 18\}$.

Розв'язок. Нехай подія
$B = \{\eta_2 = 0\} = \{00, 01, \dots, 09, 10, 20, \dots, 90\}$, $|B| = 19$,
$A_i = \{\eta_1 = i\}$. Тоді за формулою умовної ймовірності
$\mathbb{P}\{\eta_1 = i|\eta_2 = 0\} = \dfrac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Але, $|A_i \cap B| = 2$ для $1 \leq i \leq 9$, $|A_i \cap B| = 0$ для $10 \leq i \leq 18$, $|A_0 \cap B| = 1$. Залишається тричі виконати ділення, пригадуючи, що за класичними

ймовірностями $\mathbb{P}(A_i \cap B) = \dfrac{|A_i \cap B|}{100}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{|B|}{100}$.

4.3. [4.3] З сукупності сімей, які мають по двоє дітей, вибрано одну. Всі елементарні події рівноможливі. Яка ймовірність того, що в сім'ї 2 хлопчики, якщо відомо, що в ній: а) є один хлопчик; б) старша дитина — хлопчик?
Розв'язок. а) Нехай подія B – у вибраній сім'ї є один хлопчик, а подія A – в сім'ї є два хлопчики. Потрібно відшукати умовну ймовірність $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Нехай N – кількість різних варіантів двох дітей у такій сім'ї. Тоді, кількість варіантів сприятливих для події B дорівнює $|B| = 3$, бо є лише такі можливості: два хлопчики, старша – дівчинка, молодша – дівчинка. Кількість варіантів сприятливих для події $A \cap B$ дорівнює $|A \cap B| = 1$. Звідси, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/N$, $\mathbb{P}(B) = 3/N$.
Тому, $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{1}{3}$.

4.4. [4.4] Підкидають 3 гральні кубики. Яка ймовірність того, що принаймні один раз випаде "шістка", якщо на всіх кубиках випала різна кількість очок?

Розв'язок. Нехай подія B – на всіх кубиках випала парна кількість очок, а подія A – випала одна шістка. Розглянемо умовний ймовірнісний простір

$\Omega = B, \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{|A \cap B|}{|B|}$. Зрозуміло, що

$|B| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120,\ |A \cap B| = 3 \cdot (5 \cdot 4) = 60.$

4.5. [4.5] Нехай $\mathbb{P}(A|B) = 0,7,\ \mathbb{P}(A|\overline{B}) = 0,3,\ \mathbb{P}(B|A) = 0,6.$ Знайти $\mathbb{P}(A)$.

4.6. [4.6] Відомо, що при підкиданні 10 гральних кубиків випала принаймні одна "одиниця". Знайти ймовірність того, що випало дві або більше "одиниць".

4.7. [4.7] Гравці A і B по черзі стріляють в ціль. Виграє той, хто влучить перший. Ймовірність влучання в ціль для гравця A — p_1, для B — p_2. Першим стріляє A. Обчислити ймовірність виграшу для кожного гравця.

Розв'язок. Нехай A і B – події, що означають влучання відповідного гравця. Тоді, для гравця A сприятливими є такі

ланцюжки подій $A, \overline{A} \cdot \overline{B} A, \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} A$, а ймовірність виграшу для першого гравця це сума ймовірностей
$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A} \cdot \overline{B} A) + \mathbb{P}(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} A) + \ldots = p_1 (1 + \overline{p_1} \cdot \overline{p_2} + (\overline{p_1} \cdot \overline{p_2})^2 + \ldots) =$
$\dfrac{p_1}{1 - \overline{p_1} \cdot \overline{p_2}} = \dfrac{p_1}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)} = \dfrac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$.
Для другого гравця ймовірність виграшу обчислюється подібно.

4.8. [4.8] В електричне коло ввімкнені послідовно опори R_1, R_2, R_3, R_4, які можуть вийти з ладу незалежно один від одного з ймовірностями p_j $(j \in \{1, 2, 3, 4\})$ відповідно. Визначити ймовірність подій: A — коло вийшло з ладу; B — вийшли з ладу всі опори.

Розв'язок. Нехай R_j – подія, що означає вихід з ладу j-го опору. Оскільки $B = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4$, то з незалежності відповідних подій отримуємо $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(R_1) \cdot \mathbb{P}(R_2) \cdot \mathbb{P}(R_3) \cdot \mathbb{P}(R_4) = p_1 p_2 p_3 p_4$.
Зазначимо, що $\overline{A}$ – подія: електричне коло справне. Тоді
$\overline{A} = \overline{R}_1 \overline{R}_2 \overline{R}_3 \overline{R}_4$,
$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{R}_1) \mathbb{P}(\overline{R}_2) \mathbb{P}(\overline{R}_3) \mathbb{P}(\overline{R}_4) = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4)$,
$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = \ldots$

4.9. [4.9] Три мисливці одночасно вистрілили в оленя, який був убитий однією кулею. Знайти ймовірність того, що оленя вбив перший мисливець, якщо ймовірності влучання для мисливців дорівнюють p_1, p_2 та p_3 відповідно.

Розв'язок. Нехай H_j – подія, що означає влучання j-го мисливця: тоді $p_j = \mathbb{P}(H_j)$; A – подія: оленя вбито однією кулею. Потрібно знайти ймовірність $\mathbb{P}(H_1|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \bigcap H_1)}{\mathbb{P}(A)}$. Але, $A = (H_1 H_2 \overline{H}_3) \bigcup (H_1 \overline{H}_2 H_3) \bigcup (\overline{H}_1 H_2 H_3)$, тому,
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_1 \overline{H}_2 \overline{H}_3) + \mathbb{P}(\overline{H}_1 H_2 \overline{H}_3) + \mathbb{P}(\overline{H}_1 \overline{H}_2 H_3) =$
$p_1(1 - p_2)(1 - p_3) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3) + (1 - p_1)(1 - p_2)p_3;$
подібно, $A \bigcap H_1 = H_1 \overline{H}_2 \overline{H}_3$, $\mathbb{P}(A \bigcap H_1) = p_1(1 - p_2)(1 - p_3)$.

4.10. [4.10] Зроблено три постріли в мішень. Ймовірність влучання при першому пострілі — 0,4, при другому — 0,5, при третьому — 0,7. Відомо, що є принаймні два влучання. Яка ймовірність того, що при другому пострілі було влучання?

Розв'язок. Задача цілком подібна до опопередньої!

4.11. [4.11] За схемою випадкового вибору з поверненням з множини $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ вибираються дві підмножини A_1 і A_2. Знайти умовну ймовірність $\mathbb{P}\{|A_1| = l_1, |A_2| = l_2 | A_1 \cap A_2 = \varnothing\}$.

4.12. [4.12] Серед 25 екзаменаційних білетів 5 “хороших”. Два студенти по черзі беруть по одному білету. Знайти ймовірність того, що: 1) перший студент взяв “хороший” білет; 2) другий студент взяв “хороший” білет; 3) обидва студенти взяли “хороші” білети.

4.13. [4.13] З урни, що містить 3 білі кулі, 5 чорних і 2 червоні, два гравці по черзі виймають по одній кулі без повернення. Виграє той, хто перший вийме білу кулю. Якщо з'явиться червона куля, то оголошується нічия. Нехай $A_1 = \{$виграє гравець, що почав гру$\}$, $A_2 = \{$виграє другий гравець$\}$, $C = \{$гра закінчилась внічию$\}$. Знайти $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_2)$, $\mathbb{P}(C)$.

Розв'язок. Нехай події W, R, B – події, які означають, що витягнуто білу W, червону R і чорну B кулю, відповідно. Тоді, $A_1 = W \bigcup BBW \bigcup BBBBW$, $A_2 = BW \bigcup BBBW \bigcup BBBBBW$, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(BBW) + \mathbb{P}(BBBBW) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10}\frac{4}{9}\frac{3}{8} + \frac{5}{10}\frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{3}{6} = \frac{3}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{84} = \frac{126+35+5}{420} = \frac{166}{420} = \frac{83}{210}$,

$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(BW) + \mathbb{P}(BBBW) + \mathbb{P}(BBBBBW) =$
$\frac{5}{10}\frac{3}{9} + \frac{5}{10}\frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{3}{7} + \frac{5}{10}\frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}\frac{3}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{28} + \frac{1}{420} = \frac{70+15+1}{420} = \frac{86}{420} = \frac{43}{210}$.

4.14. [4.14] З урни, що містить N_1 білих, N_2 чорних та N_3 червоних куль, послідовно без повернення виймають кулі доти, доки не з'явиться червона куля. Знайти ймовірності таких подій: 1) вийняли n_1 білих і n_2 чорних куль; 2) не з'явилось жодної білої кулі; 3) витягнуто точно k куль.

4.15. [4.15] З урни, яка містить a білих і b чорних куль, два гравці по черзі виймають кулі. Виграє той, хто раніше витягне білу кулю. Знайти ймовірність виграшу першого гравця у випадках, коли кулі виймаються: 1) за схемою випадкового вибору з поверненням; 2) за схемою випадкового вибору без повернення.

4.16. [4.16] Підкинуто два гральні кубики. Приймемо $A_l = \{$кількість очок, що випала на першому кубику, ділиться на $l\}$, $B_l = \{$кількість очок, що випала на другому кубику, ділиться на $l\}$, $C_l = \{$сума очок, що випали на першому і другому кубику, ділиться на $l\}$. Використовуючи класичне означення ймовірності, з'ясувати, чи є незалежними такі пари подій: 1) A_l, B_k для довільних l, k; 2) A_2 і C_2; 3) A_4 і C_4.

4.17. [4.17] Гральний кубик підкидають два рази. Нехай X_1 та X_2 — кількість очок, що випали у цих випробуваннях.
Розглянемо події:
$A_1 = \{X_1$ ділиться на 2, X_2 ділиться на $3\}$,
$A_2 = \{X_1$ ділиться на 3, X_2 ділиться на $2\}$, $A_3 = \{X_1$ ділиться на $X_2\}$, $A_4 = \{X_2$ ділиться на $X_1\}$, $A_5 = \{X_1 + X_2$ ділиться на $2\}$, $A_6 = \{X_1 + X_2$ ділиться на $3\}$. Знайти всі пари $\{A_i, A_j\}$ і трійки $\{A_i, A_j, A_k\}$ взаємно незалежних подій.

Розв'язок. $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \dfrac{3 \cdot 2}{6^2} = \dfrac{1}{6}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{36}$; A_1, A_2 – незалежні. $\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_4) = \dfrac{4+2+3+2+2+1}{6^2} = \dfrac{7}{18}$,

$\mathbb{P}(A_3 \cap A_4) = \dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6} \neq \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(A_4)$;

$\mathbb{P}(A_5) = \dfrac{18}{6^2} = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_6) = \dfrac{12}{6^2} = \dfrac{1}{3}$,

$\mathbb{P}(A_5 \cap A_6) = \dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6} = \mathbb{P}(A_5)\mathbb{P}(A_6)\ldots$

4.18. [4.18] Події A і B незалежні. Чи є незалежними події:

1) A і $\overline{B}$; 2) $\overline{A}$ і $\overline{B}$?

Розв'язок. 1) Потрібно перевірити рівність $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$. Маємо $A \cap \overline{B} = A \setminus (A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$.

4.19. [4.19] Випадкова точка $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ рівномірно розподілена у квадраті $[0,1] \times [0,1]$. Нехай $A_1 = \{\xi_1 \leqslant \frac{1}{2}\}$, $A_2 = \{\xi_2 \leqslant \frac{1}{2}\}$, $A_3 = \{(\xi_1 - \frac{1}{2})(\xi_2 - \frac{1}{2}) < 0\}$. Довести, що довільні дві події серед A_1, A_2, A_3 незалежні, проте всі три події A_1, A_2, A_3 залежні. Чи є залежними події $A_1 \cap A_2$ і A_3?

4.20. [4.20] Довести, що для довільного натурального $n \geqslant 4$ існує сім'я $\{A_1, \ldots, A_n\}$ подій з такими властивостями: 1) події $A_1, \ldots, A_n$ не є незалежними в сукупності; 2) при видаленні з $A_1, \ldots, A_n$ довільної події сукупність, яка залишається, складається з незалежних подій, тобто, для довільного набору індексів $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1} \le n$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{s=1}^{n-1} A_{i_s}\right) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})\cdots\mathbb{P}(A_{i_{n-1}}).$$

4.21. [4.21] Спрощена система контролю виробів складається з двох незалежних перевірок. У результаті k-ої перевірки $(k \in \{1, 2\})$ виріб, який задовольняє стандарт, забраковується з ймовірністю β_k, а бракований виріб приймається з ймовірністю α_k. Виріб приймається, якщо він пройшов обидві перевірки. Знайти ймовірності подій: 1) бракований виріб буде прийнято; 2) виріб, який задовольняє стандарт, буде відкинуто.

4.22. [4.22] По цілі проводиться n незалежних пострілів. Ймовірність влучання при i-му пострілі дорівнює p_i, $i \in \mathcal{N}$. Знайти ймовірність того, що при n пострілах буде принаймні два влучання.

Розв'язок. Нехай $P_n(k)$ ймовірність того, що при n пострілах буде точно влучань $k \leq n$. Тоді шукана ймовірність дорівнює $1 - P_n(0) - P_n(1)$. Але, $P_n(0) = (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_n)$, $P_n(1) = p_1(1 - p_2) \cdots (1 - p_n) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3) \cdots (1 - p_n) + (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_{n-1})p_n$.

4.23. [4.23] Електричний ланцюг складено з елементів A_k, $k \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ за такою схемою.

Якщо довільний елемент ланцюга виходить з ладу, то ланцюг у місці його з'єднання розривається. Ймовірність виходу з ладу елемента A_k за даний фіксований проміжок часу дорівнює p_k, $k \in \{1, \ldots, 5\}$. Вважається, що елементи виходять або не виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що за даний фіксований проміжок часу по ланцюгу проходитиме струм.

4.24. [4.24] У першій скриньці є 1 біла й 9 чорних кульок, а в другій — 1 чорна і 5 білих кульок. З кожної скриньки за схемою випадкового вибору без повернення вийняли по одній кулі, а кулі, що залишилися, висипали в третю скриньку. Знайти ймовірність того, що куля, яку вийняли з третьої скриньки, біла.

Розв'язок. Нехай A_j – подія: вийнята куля з j-тої скриньки – біла. Тоді, $H_1 = A_1 \bigcap A_2, H_2 = \overline{A}_1 \bigcap A_2, H_3 = A_1 \bigcap \overline{A}_2, H_4 = \overline{A}_1 \bigcap \overline{A}_2$ – повна група подій і за формулою повної ймовірності маємо $\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A_3|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A_3|H_2) + \mathbb{P}(H_3)\mathbb{P}(A_3|H_3) + \mathbb{P}(H_4)\mathbb{P}(A_3|H_4) = \frac{1}{10}\frac{5}{6}\frac{4}{14} + \frac{9}{10}\frac{5}{6}\frac{5}{14} + \frac{1}{10}\frac{1}{6}\frac{5}{14} + \frac{9}{10}\frac{1}{6}\frac{6}{14} = \ldots.$

4.25. [4.25] У першій скриньці є 1 біла та 4 червоних кульки, в другій — 1 біла та 7 червоних кульок. У першу скриньку додають дві кульки, випадково вибрані з другої. Знайти ймовірність того, що куля, яку беруть з поповненої першої скриньки, біла. Нехай з поповненої першої скриньки за схемою випадкового вибору з поверненням виймають k куль. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть білими.

4.26. [4.26] Зі скриньки, що містить 2 білих і 3 чорних кульки, навмання виймають дві кульки і додають в скриньку одну білу кульку. Знайти ймовірність того, що після цього навмання вибрана зі скриньки кулька виявиться білою. Нехай зі скриньки за схемою випадкового вибору з поверненням виймають k кульок. Знайти ймовірність того, що всі вони білі. Знайти ймовірність цієї ж події для схеми вибору без повернення.

4.27. [4.27] Зі скриньки, що містить M білих і $N - M$ чорних куль, загублено r куль. Порівняти ймовірності того, що буде витягнуто білу кулю: 1) до втрати кульок; 2) після втрати $r = 1$; 3) після втрати $r > 1$.

4.28. [4.28] Припустимо, що ймовірність влучання в ціль при одному пострілі дорівнює p, а ймовірність знищення цілі при k влучаннях — $1-q^k$. Яка ймовірність того, що ціль знищено після n пострілів?

Розв'язок. Нехай H_k – подія: k – влучань; A – подія: ціль знищено. Маємо $\mathbb{P}(H_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \mathbb{P}(A|H_k) = 1-q^k$. За формулою повної ймовірності
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(A|H_0) + \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \ldots + \mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k) + \ldots + P(H_n)\mathbb{P}(A|H_n) = C_n^0 p^0 (1-p)^n (1-q)^0 + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} (1-q)^1 + \ldots + C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (1-q)^k + \ldots + C_n^n p^n (1-p)^0 (1-q^n) = .$

ІНАКШЕ! Розглянемо ймовірність події $\overline{A}$ – ціль не знищено. Тоді $\mathbb{P}(\overline{A}|H_k) = 1 - \mathbb{P}(A|H_k) = q^k$. За формулою повної ймовірності
$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(\overline{A}|H_0) + \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(\overline{A}|H_1) + \ldots + \mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(\overline{A}|H_k) + \ldots + P(H_n)\mathbb{P}(\overline{A}|H_n) = C_n^0 p^0 (1-p)^n q^0 + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} q^1 + \ldots + C_n^k p^k (1-p)^{n-k} q^k + \ldots + C_n^n p^n (1-p)^0 q^n = \Big(pq + (1-p)\Big)^n.$

4.29. [4.29] Відрізок $[0, a]$ випадковою точкою ділиться на дві частини, з яких випадково вибирається одна. Позначимо через η довжину обраної частини. Знайти $\mathbb{P}\{\eta \leqslant x\}$, $0 \leqslant x \leqslant a$, вважаючи, що ймовірності вибору будь-якої з частин однакові.

4.30. [4.30] При переливанні крові треба враховувати групи крові донора та хворого. Людині, яка має четверту групу крові можна перелити кров будь-якої групи; людині з другою або третьою групою крові можна перелити кров або тієї ж групи або першої; людині з першою групою крові можна перелити лише кров першої групи. Серед населення 33,7% мають першу, 37,5% – другу, 20,9% – третю та 7,9% – четверту групу крові. Знайти: 1) ймовірність того, що випадково вибраному хворому можна перелити кров випадково вибраного донора;
2) ймовірність того, що переливання можна виконати, якщо є 2 донори; 3 донори.

4.31. [4.31] Під час випробувань виявлено, що ймовірність безвідмовної роботи реле за відсутності негативних впливів дорівнює 0,99, за перегріву — 0,95, за вібрації — 0,9, за вібрації і перегріву — 0,8. Знайти ймовірність P_1 відмови цього реле, якщо ймовірність перегріву дорівнює 0,2, а ймовірність вібрації 0,3, припускаючи, що перегрів і вібрація — незалежні події.

4.32. [4.32] Маємо 5 скриньок. У першій, другій і третій є по 2 білих і 3 чорних кулі, в четвертій і п'ятій — по 1 білій і 1 чорній кулі. Випадково вибирають скриньку і з неї виймають кулю. Яка умовна ймовірність того, що вибрано четверту або п'яту скриньку, якщо витягли білу кулю?

4.33. [4.33] В N урнах є $k_1, k_2, \dots, k_N$ куль, з яких $m_1, m_2, \dots, m_N$ білих відповідно. Навмання вибирають урну, а з неї — кулю.
а) Яка ймовірність того, що вийнята куля — біла?
б) Вийнята куля виявилась білою. Яка ймовірність того, що вона була вийнята з першої урни?

4.34. [4.34] В урні міститься n куль. Усі припущення щодо кількості білих куль серед них рівноможливі. Навмання з урни беруть одну кулю.
а) Яка ймовірність того, що вийнята куля — біла?
б) Вийнята куля виявилась білою. Обчислити ймовірності всіх припущень про склад куль в урні. Яке з них має найбільшу ймовірність?

Розв'язок. Нехай H_j – подія: в урні j білих куль; A – подія: вийнята куля – біла. За умовою $\mathbb{P}(H_j) = \dfrac{1}{n+1}$. $\mathbb{P}(A|H_j) = \dfrac{j}{n}$. А

за формулою повної ймовірності
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(A|H_0) + \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2) + \ldots +$
$\mathbb{P}(H_n)\mathbb{P}(A|H_n) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} + \ldots + \dfrac{n}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1}{2}.$
За формулою Баєса $\mathbb{P}(H_j|A) = \dfrac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)}{\mathbb{P}(A)} = 2\dfrac{j}{n(n+1)}.$

4.35. [4.35] З урни, яка містила m ($m \geqslant 3$) білих та n чорних куль, загублено одну. Після цього з цієї урни взяли навмання 2 кулі, які виявились білими. Обчислити ймовірність того, що загублена куля — біла.

4.36. [4.36] Відомо, що 5% чоловіків і 0,25% жінок — дальтоніки. Випадково відібрана особа виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це — чоловік?

4.37. [4.37] У будівельному загоні 70% першокурсників і 30% студентів другого курсу. Серед першокурсників 10% дівчат, а серед студентів другого курсу — 5% дівчат. Усі дівчата по черзі чергують на кухні. Знайти ймовірність того, що у випадково вибраний день на кухні чергує першокурсниця.

4.38. [4.38] Через канал зв'язку передається одна з послідовностей букв AAAA, BBBB, CCCC з ймовірностями p_1, p_2, p_3, $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$. Кожна буква, що передається, приймається правильно з ймовірністю α та з ймовірностями $(1-\alpha)/2$ і $(1-\alpha)/2$ приймається за кожну з інших двох букв. Знайти ймовірність того, що передано $AAAA$, якщо прийнято $ABCA$.

Розв'язок. Нехай $H_1 = AAAA, H_2 = BBBB, H_3 = CCCC$, $D = ABCA, \mathbb{P}(H_j) = p_j$;

$\mathbb{P}(D|H_1) = \alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2, \mathbb{P}(D|H_2) = \alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3, \mathbb{P}(D|H_3) = \alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3.$

Тоді за формулою Баєса

$$\mathbb{P}(H_1|D) = \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(D|H_1)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(D|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(D|H_2) + \mathbb{P}(H_3)\mathbb{P}(D|H_3)} =$$

$$= \frac{2p_1\alpha}{2p_1\alpha + (1-\alpha)(p_2+p_3)}.$$

4.39. [4.39] Стрілець A влучає в мішень з ймовірністю $p_1 = 0,6$, стрілець B — з ймовірністю $p_2 = 0,5$, стрілець C з ймовірністю $p_3 = 0,4$. Стрільці роблять залп по мішені. Відомо, що є два влучання. Що більш ймовірно: влучив C в мішень чи ні?

4.40. [4.40] Під час рентгенівського обстеження ймовірність виявити захворювання на туберкульоз у хворого туберкульозом дорівнює $1-\beta$. Ймовірність прийняти здорову людину за хвору дорівнює α. Нехай частка хворих на туберкульоз дорівнює γ. Знайти умовну ймовірність того, що людина здорова, якщо її визнали хворою. Обчислити ту ж умовну ймовірність для таких числових значень: $1-\beta=0,9$, $\alpha=0,01$, $\gamma=0,001$.
4.41. [4.41] Відділ технічного контролю (ВТК) проводить сортування пристроїв, які випускає завод. Кожен пристрій незалежно від решти має дефект з ймовірністю p. При перевірці у ВТК наявність дефектів виявляється з ймовірністю α; крім того, з ймовірністю β якісний пристрій поводить себе як дефектний. Всі пристрої, в яких при перевірці виявлено відхилення від стандарту, бракуються. Знайти ймовірність q_0 того, що незабракований пристрій має дефекти, і ймовірність q_1 того, що забракований пристрій має дефекти. За яких умов $q_0 > q_1$?
4.42. [4.42] Зі скриньки, що містить 3 білих і 2 чорних кулі, за схемою вибору без повернення відібрали 2 кулі. Куля, взята

навмання з цих двох, виявилась білою. Яка ймовірність того, що друга куля також біла?

4.43. [4.43] У скриньці є 3 чорні і 2 білі кульки. Перший гравець за схемою випадкового вибору без повернення виймає 3 кулі. Назад він повертає чорну кулю, якщо серед витягнутих куль було більше чорних; в іншому випадку повертається біла куля. Другий гравець після цього виймає одну кулю і за її кольором повинен відгадати кількість білих куль серед тих, які вийняв перший гравець. Знайти умовну ймовірність того, що в першого гравця було: 1) 0 білих; 2) 1 біла; 3) 2 білі кулі, — якщо другий гравець витягнув білу кулю.

4.44. [4.44] З урни, яка містить n куль (всі можливі припущення про число білих куль серед них рівноможливі), навмання вийняли одну, яка виявилась білою. Після цього знову виймають кулю. Яка ймовірність того, що вона теж біла?

Вказівки до розділу 4

4.11. Використати означення умовної ймовірності та задачу 1.86.

4.13. Ланцюгом з літер R, B, W позначатимемо появу червоної, чорної, білої куль у випробуванні на кроці, що відповідають місцю в ланцюжку. Використати рівності:
$A_1 = W \cup BBW \cup BBBBW$, $A_2 = BW \cup BBBW \cup BBBBBW$,
$C = R \cup BR \cup BBR \cup BBBR \cup BBBBR \cup BBBBBR$.
4.20. Узагальнити приклад із задачі 4.19 на $n-1$ вимір.
4.23. Нехай $B_i = \{A_i$ не вийде з ладу$\}$. Тоді $\mathbb{P}(B_i) = 1 - p_i$,
$C = B_5 \cap (B_3 \cup (B_4 \cap (B_1 \cup B_2)))$.
4.28. Розглянути протилежні події.
4.29. Нехай ξ — координата точки поділу. Тоді ξ — рівномірно розподілена на $[0, a]$, а $\mathbb{P}\{\eta = \xi\} = \mathbb{P}\{\eta = a - \xi\} = 1/2$.
4.30. Введемо події $C = \{$переливання крові можливе$\}$,
$A_i = \{$донор має i-ту групу крові$\}$, $B_i = \{$хворий має i-ту групу крові$\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Знайти $\mathbb{P}(A_i)$, $\mathbb{P}(B_i)$, $\mathbb{P}(C|B_i)$ у припущенні, що групи крові хворого та донора незалежні і розподілені відповідно до наведеної статистики.
4.31. Нехай C означає вібрацію, B — перегрів. Знайти ймовірності $\overline{C}\overline{B}$, $C\overline{B}$, $\overline{C}B$, CB.
4.37. Прийняти $H_i = \{$черговий навчається на i-му курсі$\}$,

$i \in \{1,2\}$, $A = \{$чергує дівчина$\}$. Знайти $\mathbb{P}(H_1|A)$.

4.44. Експеримент складається з двох частин - щодо першої див. результати задачі 4.34, щодо другої - див. приклад 4.5.

Розв'язки до розділу 4

4.1. $\frac{1}{3}$. 4.2. $\mathbb{P}\{\eta_1 = i|\eta_2 = 0\} = \begin{cases} \frac{1}{19}, & \text{якщо } i = 0, \\ \frac{2}{19}, & \text{якщо } i \in \{1,2,\ldots,9\}, \\ 0, & \text{якщо } i \in \{10,11,\ldots,18\}. \end{cases}$

4.3. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$. 4.4. $0,5$. 4.5. $\frac{21}{46}$. 4.6. $1 - \frac{10 \cdot 5^9}{6^{10}-5^{10}} \approx 0,6148$. 4.7. Ймовірність виграшу гравця A дорівнює $\frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$, гравця B — $\frac{(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$. 4.8. $\mathbb{P}(A) = 1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)$, $\mathbb{P}(B) = p_1p_2p_3p_4$. 4.9. $\frac{p_1(1-p_2)(1-p_3)}{p_1(1-p_2)(1-p_3)+p_2(1-p_1)(1-p_3)+p_3(1-p_1)(1-p_2)}$. 4.10. $\frac{0{,}41}{0{,}55} \approx 0,75$. 4.11. $\frac{N!}{l_1!l_2!(N-l_1-l_2)!} \cdot \frac{1}{3^N}$, якщо $l_1 + l_2 \leqslant N$. 4.12. 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{1}{30}$. 4.13. $\mathbb{P}(A_1) = \frac{83}{210}$; $\mathbb{P}(A_2) = \frac{43}{210}$; $\mathbb{P}(C) = \frac{2}{5}$. 4.14. 1) $C_{n_1+n_2}^{n_1} A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n_2} \cdot \frac{N_3}{A_{N_1+N_2+N_3}^{n_1+n_2+1}}$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{N_2} A_{N_2}^k \cdot \frac{N_3}{A_{N_1+N_2+N_3}^{k+1}}$; 3) $A_{N_1+N_2}^{k-1} \cdot \frac{N_3}{A_{N_1+N_2+N_3}^{k}}$.

4.15. 1) $\frac{a+b}{a+2b}$; 2) $\frac{a}{a+b} \sum\limits_{k=0}^{[b/2]} \frac{A_b^{2k}}{A_{a+b-1}^{2k}}$. 4.16. 1) незалежні при довільних

l і k; 2) незалежні; 3) залежні. 4.17. Незалежні пари $\{A_i, A_j\}$, для яких $i, j \in \{1, 2, 5, 6\}$, і трійки $\{A_1, A_5, A_6\}$, $\{A_2, A_5, A_6\}$. 4.18. 1) і 2) так. 4.19. Так. 4.21. 1)$\alpha_1\alpha_2$; 2) $1-(1-\beta_1)(1-\beta_2)$. 4.22. $1-\prod\limits_{j=1}^{n}(1-p_j)\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p_i}{1-p_i}\right)$. 4.23. $q_5(q_3+p_3q_4(q_2+q_1p_2))$, де $q_k = 1-p_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 5\}$. 4.24. $\frac{38}{105}$. 4.25. $\frac{5}{28}$; $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{7}\right)^k+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{7}\right)^k$.
4.26. $\frac{11}{20}$; $0,1\left(\frac{1}{4}\right)^k+0,6\left(\frac{1}{2}\right)^k+0,3\left(\frac{3}{4}\right)^k$, якщо $k \in \mathbb{N}$;
$0,1\cdot\frac{A_1^k}{A_4^k}+0,6\cdot\frac{A_2^k}{A_4^k}+0,3\cdot\frac{A_3^k}{A_4^k}$, якщо $k \in \{1, 2, 3\}$, де $A_m^k = 0$ при $k > m$. 4.27. В усіх трьох випадках $\frac{M}{N}$ $(r < N)$. 4.28. $1-(1-p(1-q))^n$. 4.29. $\frac{x}{a}$. 4.30. 1) $0,573683$; 2) $\approx 0,77768$; $\approx 0,87327$. 4.31. $0,0486$. 4.32. $\frac{5}{11}$. 4.33. а) $\frac{1}{N}\cdot\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{m_i}{k_i}$; б) $\frac{m_1}{k_1}\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{m_i}{k_i}\right)^{-1}$. 4.34. а) $\frac{1}{2}$; б) $\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{2i}{n(n+1)}$, де
$H_i = \{$в урні з n куль було i білих$\}$, $i = \overline{0, n}$,
$A = \{$вийнята куля виявилася білою$\}$; найімовірніше в урні були всі білі кулі. 4.35. $\frac{m-2}{m+n-2}$. 4.36. $\frac{20}{21}$. 4.37. $\frac{14}{17}$. 4.38.

$\frac{2p_1\alpha}{2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)}$. 4.39. Більш ймовірно, що C влучив. 4.40. $\frac{\alpha(1-\gamma)}{(1-\beta)\gamma+\alpha(1-\gamma)}$; $\approx 0,9174$. 4.41. $q_0 = \frac{(1-\alpha)p}{1-\alpha p-\beta(1-p)}$; $q_1 = \frac{\alpha p}{\alpha p+\beta(1-p)}$; $q_0 > q_1 \Leftrightarrow \beta > \alpha$. 4.42. $\frac{1}{2}$. 4.43. 1) $\frac{2}{11}$; 2) $\frac{6}{11}$; 3) $\frac{3}{11}$. 4.44. $\frac{2}{3}$.

5. ПОСЛІДОВНОСТІ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАНЬ: СХЕМА БЕРНУЛЛІ, ПОЛІНОМНА СХЕМА, ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

п.з. 5.1. Схема Бернуллі та поліномна схема

Нехай проводиться серія з $n \in \mathbb{N}$ незалежних випробувань, результатом кожного з яких є одна з подій A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Простір елементарних подій у цьому випадку

$$\Omega_n = \{(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}) : i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}, k \in \mathcal{N}\}.$$

Нехай $\mathbb{P}(A_j) = p_j^{(k)}$ — ймовірність того, що на k-му кроці настане подія A_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Зрозуміло, що $p_1^{(k)} + p_2^{(k)} + \cdots + p_m^{(k)} = 1$ для довільного $k \in \mathcal{N}$. Якщо $p_j^{(k)} = p_j$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, не залежить від k, то випробування називаються однорідними. В цьому випадку побудовану модель називають поліномною схемою. Оскільки випробування незалежні, то для $A = (A_{i_1}, \ldots, A_{i_n})$ маємо $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n}) = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n}$, $i_k \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in \mathcal{N}$.

Ймовірність того, що наслідком проведення n випробувань за поліномною схемою буде поява події A_1 — k_1 разів, події A_2 — k_2 разів, і т. д., події A_m — k_m разів дорівнює
$(k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n)$

$$P_n(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!} p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}. \tag{5.1}$$

Частковий випадок поліномної схеми з $m = 2$ називають схемою Бернуллі. Якщо $\mathbb{P}(A_1) = p$, то $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\overline{A}_1) = 1 - p$ і ймовірність того, що подія A_1 настане точно k разів, дорівнює

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{5.2}$$

Приклад

Проводиться n незалежних випробувань, які полягають в одночасному підкиданні k монет. Обчислити ймовірності подій: $A = \{$принаймні один раз всі k монет випадуть гербами$\}$, $B = \{$точно m разів всі k монет випадуть гербами$\}$.

Появу k гербів в одному випробуванні назвемо успіхом, ймовірність успіху $p = 2^{-k}$. Якщо означити $C_l = \{l$-те випробування завершилось успіхом$\}$, то $\overline{A} = \overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \cdots \cap \overline{C}_n$, звідки

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{C}_1)\mathbb{P}(\overline{C}_2)\cdots\mathbb{P}(\overline{C}_n) = (1-p)^n.$$

Отже, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - (1 - 2^{-k})^n$. Ймовірність події B обчислюється за формулою (5.2)
$\mathbb{P}(B) = P_n(m) = C_n^m 2^{-km}(1 - 2^{-k})^{n-m}$.

Приклад

У скриньці є 3 кулі: чорна, червона і біла. Зі скриньки за схемою випадкового вибору з поверненням виймають 5 куль. Визначити ймовірність того, що чорну і білу кулі витягнуто принаймні по 2 рази кожну.

Нехай p_1, p_2, p_3 — ймовірності витягнути за одну спробу чорну, червону, білу кулю відповідно. Очевидно, $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$. Чорна і біла кулі будуть витягнуті принаймні двічі тоді, коли настане одна з подій: $B_1 = \{$3 рази витягли білу кулю, 2 рази — чорну$\}$, $B_2 = \{$3 рази витягли чорну кулю, 2 рази — білу$\}$, $B_3 = \{$ 2 рази витягли білу кулю, 2 рази — чорну, 1 раз — червону$\}$. Ймовірність подій B_j, $j \in \{1, 2, 3\}$ обчислюємо за формулою (5.1). Тоді шукана ймовірність

$$p = \mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(B_3) =$$

$$= \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{50}{3^5}.$$

Приклад

При кожному випробуванні ймовірність появи деякої події дорівнює p. З якою ймовірністю ця подія настане парну кількість разів при n випробуваннях?

Позначимо через p_k ймовірність того, що після k випробувань подія відбудеться парну кількість разів. Про результати $k-1$ випробування можна зробити дві гіпотези: при $k-1$ випробуванні подія відбулась парну або непарну кількість разів. Ймовірності цих гіпотез дорівнюють відповідно p_{k-1} і $1-p_{k-1}$. Тоді за формулою повної ймовірності $p_k = p_{k-1}(1-p)+(1-p_{k-1})p = p + p_{k-1}(1-2p)$. Це можна переписати у вигляді $p_k - \frac{1}{2} = (p_{k-1} - \frac{1}{2})(1-2p)$, $k \in \mathcal{N}$. З останньої формули знаходимо $p_n - \frac{1}{2} = (1-2p)^n(p_0 - \frac{1}{2})$. Оскільки $p_0 = 1$, то $p_n = \frac{1}{2}(1+(1-2p)^n)$.

Твердження

Якщо у схемі Бернуллі ймовірність появи події A при одному випробуванні дорівнює p, то найбільш ймовірна кількість k_0 появ події A за n випробувань, тобто $\max\{P_n(k) : k \in \{0, 1, \ldots, n\}\} = P_n(k_0)$, задовольняє нерівність

$$np - q \leqslant k_0 \leqslant np + p, \quad q = 1 - p.$$

Доведення. При $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ маємо

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}.$$

Отже, умова $P_n(k+1)/P_n(k) > 1$ рівносильна до нерівності $(n-k)p > q(k+1)$, або $np - q > k$. Якщо $np - q \notin \mathbb{Z}$, то існує єдине $k_0 \in (np - q, np + p) \cap \mathbb{Z}$ і $P_n(k_0) > P_n(k_0 - 1) > \cdots > P_n(0)$ і $P_n(k_0) > P_n(k_0 + 1) > \cdots > P_n(n)$. Отже, число k_0 має потрібну властивість. Якщо $k_1 = np - q$ — ціле число, то $P_n(k_1) = P_n(k_1 + 1)$ і $P_n(k) < P_n(k_1)$ при $k < k_1$ або $k > k_1 + 1$. У цьому випадку є два значення числа появи події A: $np - q$ і

$np + p$, з найбільшою ймовірністю.

Ймовірність появи події при n випробуваннях іноді може бути обчислена за допомогою рекурентних формул вигляду $p_k = a_k p_{k-1} + b_k p_{k-2}$, де a_k і b_k — сталі, що обчислюються, p_k — ймовірність деякої події після k випробувань.

п.з. 5.2. Граничні теореми

При великій серії незалежних випробувань формула (5.2) незручна для обчислень. У таких випадках застосовуються так звані граничні теореми.
Розглянемо послідовність серій випробувань Бернуллі: n-та серія складається з n послідовних незалежних випробувань, при кожному з яких ймовірність успіху дорівнює p_n. Нехай μ_n — кількість успіхів в n-й серії, $P_n(k) = \mathbb{P}\{\mu_n = k\}$.

Нагадаємо, що за теоремою Пуассона, якщо існує $C > 0$ таке, що у кожній серії з n незалежних випробувань Бернуллі для ймовірності успіху p_n виконується $\lambda_n := np_n \leqslant C$, то

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{P_n(k)}{\frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n}} = 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, для великих n і малих значень p_n для наближенного обчислення $P_n(k)$ можна використовувати формулу

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n}, \quad \lambda_n = np_n. \tag{5.3}$$

Абсолютна похибка наближення не перевищує np_n^2 ([1], с.123, теор. 8).

Приклад

За одну годину на комутатор диспетчерського відділення швидкої допомоги надходить у середньому 60 викликів. Знайти ймовірність того, що за 30 с, протягом яких диспетчера не буде, не надійде жодного виклику.

Нехай всього є n абонентів. Успіхом з ймовірністю p (відповідно невдачею з ймовірністю $1-p$) вважатимемо здійснення (нездійснення) дзвінка абонентом на комутатор за 30 с. Тоді np — середнє число викликів за 30 с, відповідно $120np = 60$ — середнє число викликів за 1 год. Отже, маємо n випробувань, $\lambda = np = 1/2$. За наближеною формулою (5.3) $\mathbb{P}_n(0) \approx e^{-1/2}$.

Наведемо ще два приклади застосування теорем Муавра-Лапласа.
Введемо функції

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Перша з них є щільністю стандартного нормально розподілу, а інша з нормальним розподілом пов'язана рівністю $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$. За теоремами Муавра-Лапласа для обчислення $P_n(k)$ при великих n і k, $p = \text{const}$ можна використовувати формули наближення

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)}{\sqrt{npq}}, \quad \mathbb{P}\left\{a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \approx \Phi_0(b) - \Phi_0(a). \quad (5.4)$$

Формули (5.4) дають добрі наближення при великих значеннях npq ($npq > 20$).
Значення функцій $\varphi(x)$ і $\Phi_0(x)$ можна знайти з таблиць у будь-якому збірнику задач з теорії ймовірностей або у математичному пакеті для комп'ютера. Зазначимо деякі елементарні властивості функцій $\varphi(x)$ і $\Phi_0(x)$: $\varphi(x)$ гладка парна додатна функція, що спадає при $x > 0$, $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi(\infty) = 0$; $\Phi_0'(x) = \varphi(x)$, отже, $\Phi_0(x)$ — зростаюча непарна функція, $\Phi_0(0) = 0$, $\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{2}$.

Приклад

Деяке підприємство випускає 99,2% стандарних виробів. Яка ймовірність того, що серед 5000 навмання вибраних виробів цього підприємства кількість нестандартних менша за 60?

Вибір окремих виробів можна розглядати як послідовні незалежні випробування. Ймовірність вибору нестандартного виробу дорівнює $p = 0,008$, кількість випробувань $n = 5000$, $q = 0,992$. Якщо через μ позначити кількість нестандартних виробів серед 5000 вибраних, то за інтегральною теоремою Муавра-Лапласа у формі наближеної рівності (5.4) маємо

$$\mathbb{P}\{0 \leqslant \mu < 60\} \approx$$
$$\approx \Phi\left(\frac{60 - 5000 \cdot 0,008}{\sqrt{5000 \cdot 0,008 \cdot 0,992}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 5000 \cdot 0,008}{\sqrt{5000 \cdot 0,008 \cdot 0,992}}\right) \approx$$
$$\approx \Phi\left(\frac{20}{6,3}\right) - \Phi\left(-\frac{40}{6,3}\right) \approx 0,9992.$$

Приклад

Скільки разів треба підкинути гральний кубик, щоб з ймовірністю $\beta = 0,997$ частота появи 1 відрізнялась від ймовірності появи 1 при одному випробуванні не більше, ніж на $0,01$?

Нехай μ — кількість появ 1 при n підкиданнях. Треба знайти таке n, щоб $\mathbb{P}\{|\frac{\mu}{n} - p| \leqslant 0,01\} = 0,997$, де $p = \frac{1}{6}$ — ймовірність появи 1 при одному підкиданні. Тоді $\sqrt{pq} = \frac{\sqrt{5}}{6}$,

$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\frac{\mu}{n} - p\Big| \leqslant 0,01\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{|\mu - np|}{\sqrt{npq}} \leqslant 0,01\sqrt{\frac{n}{pq}}\Big\} =$$

$$= \Phi\Big(0,01\sqrt{\frac{n}{pq}}\Big) - \Phi\Big(-0,01\sqrt{\frac{n}{pq}}\Big) = 2\Phi(0,06\sqrt{n/5}).$$

З умови $2\Phi(0,06\sqrt{n/5}) = 0,997$ знаходимо n

$$n = 5\Big(\frac{\Phi^{-1}(0,4985)}{0,06}\Big)^2 \approx 5\Big(\frac{297}{6}\Big)^2 \approx 12251.$$

5.1. [5.1] При передачі повідомлення ймовірність спотворення одного знака дорівнює $1/10$. Яка ймовірність того, що повідомлення з 10 знаків: 1) не буде спотворено; 2) містить 3 спотворення; 3) містить не більше трьох спотворень.

Розв'язок. Ймовірність (У) спотворення одного знаку $p = 0,1$. Тоді в рамках схеми Бернуллі $n = 10$. 1) Не буде спотвореного жодного знаку ($k = 0$) $\mathbb{P}_n(0) = C_n^0 p^0 (1-p)^n = (0,9)^{10}$. 2) Містить точно два спотворення ($k = 3$) $\mathbb{P}_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^2 (0,1)^3 (0,9)^7$. 3) Не більше трьох спотворень $P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3)$.

5.2. [5.2] Знайти ймовірність того, що у $2n$ випробуваннях схеми Бернуллі з ймовірністю успіху p і невдачі $q = 1 - p$ з'явиться $m + n$ успіхів і всі випробування з парними номерами завершаться успішно.

5.3. [5.3] Проводяться чотири незалежні досліди, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю 0,3. Подія B відбувається з ймовірністю, що дорівнює 1, якщо подія A відбулася не менше двох разів; не відбувається, якщо подія A не відбулась, і відбувається з ймовірністю 0,6, якщо подія A відбулась один раз. Визначити ймовірність події B.
Розв'язок. Нехай $P_n(k)$ ймовірності в схемі Бернуллі для події A, $A_k = A$ – відбулась k разів. Тоді, за формулою повної ймовірності
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_2 \cup A_3 \cup A_4)\mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) + \mathbb{P}(B|A_0)\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1) = 1 \cdot (1 - P_4(0) - P_4(1)) + 0 + 0,6 \cdot P_4(1).$
5.4. [5.4] Два баскетболісти роблять по 3 кидки м'ячем у корзину. Ймовірності влучання м'яча при кожному кидку дорівнюють відповідно 0,6 і 0,7. Знайти ймовірності того, що: 1) в обидвох буде однакова кількість влучань; 2) у першого баскетболіста влучань буде більше.

5.5. [5.5] У деякому регіоні 20% населення — брюнети, 30% — шатени, 40% — блондини і 10% — руді. Вибирається навмання група з 6 осіб. Знайти ймовірності подій:
A — у групі не менше 4-х блондинів,
B — у групі хоча б 1 рудий,
C — у групі однакова кількість блондинів і шатенів.
Розв'язок. Нехай p_1, p_2, p_3, p_4 –ймовірності подій A_1, A_2, A_3, A_4 за одну спробу вибрати брюнета, шатена, блондина і рудого, відповідно. Тоді, $p_1 = 0,2, p_2 = 0,3, p_3 = 0,4, p_4 = 0,1$.
Використовуючи поліномну схему, маємо
$\mathbb{P}(A) = \frac{6!}{4!1!1!} p_3^4 p_1 p_2 + \frac{6!}{4!1!1!} p_3^4 p_1 p_4 + \frac{6!}{4!1!1!} p_3^4 p_2 p_2 + \frac{6!}{5!1} p_3^5 p_1 + \frac{6!}{5!1!} p_3^5 p_2 + \frac{6!}{5!1} p_3^5 p_4 + p_3^6 = \dots$
$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}),\ \mathbb{P}(\overline{B}) =$
Для того, що обчислити останню ймовірність зауважимо, що
$\overline{B} = A_1A_1A_1A_1A_1A_1 + A_2A_2A_2A_2A_2A_2 + A_3A_3A_3A_3A_3A_3 + A_1A_1A_1A_1A_1A_2 + A_2A_2A_2A_2A_2A_3 + A_3A_3A_3A_3A_3A_1 + A_1A_1A_1A_1A_1A_3 + A_2A_2A_2A_2A_2A_1 + A_3A_3A_3A_3A_3A_2 + \dots$

і далі знову скористатися поліномною схемою.

$\mathbb{P}(\overline{B}) = p_1^6 + p_2^6 + p_3^6 + \frac{6!}{5!1!}(p_1^5 p_2 + p_1^5 p_3 + p_2^5 p_1 + p_2^5 p_3 + p_3^5 p_2 + p_3^5 p_1) + \frac{6!}{4!1!1!}(p_1^4 p_2 p_3 + p_2^4 p_1 p_3 + p_1 p_2 p_3^4) + \frac{6!}{4!2!}(p_1^4 p_2^2 + p_1^4 p_3^2 + p_2^4 p_1^2 + p_2^4 p_3^2 + p_3^4 p_2^2 + p_3^4 p_1^2) + \ldots$

5.6. [5.6] У круг вписано квадрат. Знайти ймовірність того, що з 10 точок, кинутих навмання в круг, 4 потраплять в квадрат, 3 — в деякий фіксований сегмент і по 1 — в решта 3 сегменти.

5.7. [5.7] Ймовірність перегорання першої, другої і третьої ламп дорівнюють відповідно $0,1; 0,2$ і $0,3$. Ймовірності виходу з ладу приладу при перегоранні однієї, двох і трьох ламп дорівнюють відповідно $0,25; 0,6$ і $0,9$. Визначити ймовірність виходу приладу з ладу.

Розв'язок. Нехай B_j – подія: перегорання j-ої лампи; за умовою $\mathbb{P}(B_1) = 0,1; \mathbb{P}(B_2) = 0,2; \mathbb{P}(B_3) = 0,3$. A – подія: вихід з ладу приладу; H_j – подія: перегорання j ламп; за умовою $\mathbb{P}(A|H_1) = 0,25; \mathbb{P}(A|H_2) = 0,6; \mathbb{P}(A|H_3) = 0,9$. Зауважимо, що $H_1 = B_1\overline{B}_2\overline{B}_3 + B_2\overline{B}_1\overline{B}_3 + B_3\overline{B}_1\overline{B}_2$, $\mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(\overline{B}_2)\mathbb{P}(\overline{B}_3)+$ $+\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(\overline{B}_1)\mathbb{P}(\overline{B}_3) + \mathbb{P}(B_3)\mathbb{P}(\overline{B}_1)\mathbb{P}(\overline{B}_2) = ... = 0,398$,

$H_2 = B_1B_2\overline{B}_3 + B_1\overline{B}_2B_3 + \overline{B}_1B_2B_3$,

$\mathbb{P}(H_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(\overline{B}_3)+\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(\overline{B}_2)\mathbb{P}(B_3)+\mathbb{P}(\overline{B}_1)\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(B_3) =$, $= ... = 0,092$,

$H_3 = B_1B_2B_3$, $\mathbb{P}(H_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(B_3) = ... = 0,006$. Тоді за формулою повної ймовірності

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2) + \mathbb{P}(H_3)\mathbb{P}(A|H_3) =$ $= 0,398\cdot 0,25+0,092\cdot 0,6+0,006\cdot 0,9 = 0,0995+0,0552+0,0054 =$ $= 0,1601$.

5.8. [5.8] З множини $S = \{1, 2, \dots, N\}$ випадково вибирають підмножини A_1 і A_2 так, що кожен елемент з S незалежно від інших елементів з ймовірністю p включається у підмножину A_i, $i \in \{1, 2\}$, і з ймовірністю $1 - p$ не включається. Знайти ймовірність того, що $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

5.9. [5.9] З множини $S = \{1, 2, \dots, N\}$ незалежно вибирають r підмножин $A_1, A_2, \dots, A_r$. Механізм вибору такий: довільний елемент множини S незалежно від інших елементів з ймовірністю p_i включається до множини A_i і з ймовірністю $q_i = 1 - p_i$ не включається, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Знайти ймовірність того, що вибрані множини попарно не перетинаються.

5.10. [5.10] За схемою задачі 5.8 випадково і незалежно вибирають r підмножин $A_1, A_2, \dots, A_r$, $r \geqslant 2$. Знайти: 1) $\mathbb{P}\{|A_1 \cap \dots \cap A_r| = k\}$; 2) $\mathbb{P}\{|A_1 \cup \dots \cup A_r| = k\}$.

5.11. [5.11] Настя і Потап, шахісти однакового рівня, грають матч, в якому нічиї не зараховуються. Що ймовірніше для Насті: виграти 1 партію з 2-х, чи 2 з 4-х, ..., чи n з $2n$?
Розв'язок. Зауважимо, що ймовірнсть виграти k партій з $2k$ дорівнює $p_k = C_{2k}^k(0,5)^{2k}$. Тоді, $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} = \dfrac{k+1/2}{k+1} < 1.$
5.12. [5.12] В одному матчі на першість світу з шахів нічиї не враховували, і гра йшла доти, доки один з учасників матчу не набирав 6 очок (виграш — 1 очко, програш або нічия — 0 очок). Вважаючи учасників матчу однаковими за силою, а результати окремих ігор незалежними, знайти ймовірність того, що за таких правил у момент закінчення матчу той, хто програв, набирає k очок, $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.
5.13. [5.13] (Задача С. Банаха). Один математик носить з собою 2 коробки сірників. Щоразу, коли йому потрібен сірник, він навмання вибирає одну з коробок. Знайти ймовірність того, що математик вперше візьме порожню коробку, тоді, к в іншій залишиться точно r сірників, $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$, n — вихідна кількість сірників у кожній коробці.

5.14. [5.14] Ймовірність відмови кожного приладу при одному випробуванні дорівнює $p = 0,2$. Скільки таких приладів треба випробувати, щоб з ймовірністю не меншою за $0,9$ отримати не менше 2-х відмов?

Розв'язок. Нехай k – кількість відмов, n – кількість випробувань. За умовою $k \geq 2$, а також ймовірність $p_2 := \sum_{k=2}^{n} P_n(k) = 1 - P_n(0) - P_n(1) \geq 0,9$. Отже, $P_n(0) + P_n(1) \leq 0,1 \iff (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} \leq 0,1 \iff 0,8^{n-1}(0,8 + 0,2n) \leq 0,1$. При $n = 17: \ 0,8^{n-1}(0,8+0,2n) \asymp 0,1182 > 0,1$, а при $n = 18: \ 0,8^{n-1}(0,8+0,2n) \asymp 0,0991 < 0,1$. Крім цього елементарно перевіряємо, що $0,8^{n-1}(0,8+0,2n)$ строго спадає, бо $\dfrac{0,8^n(0,8+(n+1)0,2)}{0,8^{n-1}(0,8+0,2n)} = 0,8 + \dfrac{0,16}{0,8+0,2n} < 1$. Отже, для того, щоб з ймовірністю не меншою за $0,9$ отримати не менше 2-х відмов, потрібно провести не менш, ніж $n = 18$ випробувань приладів.

5.15. [5.15] За один цикл автомат виготовляє 10 деталей. За яку кількість циклів ймовірність виготовлення хоча б однієї бракованої деталі буде не меншою за $0,8$, якщо ймовірність того, що довільна деталь бракована дорівнює $0,01$?

5.16. [5.16] Зі скриньки, в якій 20 білих і 2 чорні кулі за схемою випадкового вибору з поверненням n раз виймають кулі. Визначити найменшу кількість випробувань, за якого ймовірність витягнути хоча б одну чорну кулю більша за $0,5$.

Розв'язок. Ймовірність витягнути чорну кулю $p = \frac{2}{20} = 0,1$. Як і упопередній задачі маємо ймовірність

$p_1 := \sum_{k=1}^{n} P_n(k) = 1 - P_n(0) = 1 - (1-p)^n > 0,5 \iff 0,9^n < 0,5$;

$0,9^6 \asymp 0,5314$, $0,9^n \leq 0,9^7 \asymp 0,4783 < 0,5$ $(n \geq 7)$.

5.17. [5.17] Для одного баскетболіста ймовірність закинути м'яч у корзину при одному закидуванні дорівнює $0,4$. Зроблено 10 закидувань. Знайти найбільш ймовірну кількість влучань і відповідну ймовірність.

5.18. [5.18] Знайти кількість n незалежних випробувань, які треба зробити для того, щоб найбільш ймовірна кількість появ події дорівнювала 20, якщо ймовірність настання цієї події при одному випробуванні дорівнює $p = 0,8$.

Розв'язок. Найбільш ймовірна кількість $k_0(n)$ появ події A за n випробувань, тобто $\max\{P_n(k) : k \in \{0, 1, \ldots, n\}\} = P_n(k_0)$, задовольняє нерівність

$$np - q \leqslant k_0 \leqslant np + p, \quad q = 1 - p.$$

Якщо $k_1 = np - q$ — ціле число, то уцьому випадку є два значення числа появи події A: $np - q$ і $np + p$, з найбільшою ймовірністю.

Отже, за умовою повинно виконуватися $k_0(n) = 20$. Зауважимо, що $n \in \left[\dfrac{k_0 - p}{p}, \dfrac{k_0 + q}{p}\right] = [24, 25.25]$. Звідси, $n \in \{24, 25\}$.

5.19. [5.19] Ймовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює $0,95$. Скільки деталей повинно бути в партії, щоб найбільш ймовірна кількість нестандартних деталей у ній дорівнювала 55?

5.20. [5.20] Через канал зв'язку передають повідомлення, що складається з нулів і одиниць. Через перешкоди ймовірність правильної передачі знака дорівнює $0,55$. Для підвищення ймовірності передачі кожен знак повідомлення повторюють n разів. Вважають, що послідовності з n знаків, які приймають, відповідає знак, що становить у ній більшість. Знайти ймовірність правильної передачі при $n = 5$.

Розв'язок. Шукана ймовірність

$\sum\limits_{k=3}^{5} P_5(k) = \sum\limits_{k=3}^{5} C_5^k \cdot 0,55^k \cdot 0,45^{5-k} \approx 0,593127.$

5.21. [5.21] Знайти ймовірність того, що серед 10 однозначних випадкових чисел точно 4 парних і 3 непарних, кратних 3.

Розв'язок. Ймовірність того, що одне з десяти одноцифрових чисел парне $p_1 = 0,5$, а непарних кратних 3 дорівнює $p_2 = 0,2$; будь-яке інше $p_3 = 0,3$. Тоді за поліномною схемою, шукана ймовірність

$$P_{10}(4,3,3) = \frac{10!}{4!3!3!} p_1^4 p_2^3 p_3^3 = 0,0567.$$

5.22. [5.22] Робітник виробляє з ймовірністю $0,9$ придатний виріб, з ймовірністю $0,09$ — виріб з усувним браком, $0,01$ — виріб з неусувним браком. Вироблено 3 вироби. Знайти ймовірність того, що серед них хоча б один придатний і хоча б один з усувним браком.
5.23. [5.23] В електропоїзд, що складається з 6 вагонів, сідає 12 осіб. Вибір вагону кожною людиною рівноможливий. Визначити ймовірність того, що: 1) у кожен вагон зайшло по дві особи; 2) в один вагон ніхто не зайшов, в другий — зайшла одна особа, у два вагони — по двоє осіб, у два вагони, що залишились відповідно 3 і 4 особи.
5.24. [5.24] На відрізок AB довжини a навмання одна за одною кинуто 5 точок. Ймовірність потрапляння точки на довільну частину відрізка пропорційна довжині цієї частини. Знайти ймовірність того, що: 1) дві точки знаходитимуться від точки A на відстані меншій за b, а три — на відстані, більшій за b $(b < a)$; 2) дві точки знаходитимуться від точки A на відстані меншій за c, а одна — на відстані $c < r < b$, а дві — на відстані більшій за b.

5.25. [5.25] Відрізок $[0, 10]$ точками 1, 2, 3, 4, 7 розділено на 4 відрізки довжини 1 і 2 відрізки довжини 3. Нехай A_1, ..., A_8 — незалежні випадкові точки відрізка $[0, 10]$. Яка ймовірність того, що серед цих точок, у два яких-небудь відрізки довжини 1 потрапить по 2 точки, а в кожен з відрізків, що залишились — по 1 точці?

5.26. [5.26] Повідомлення, які передають через канал зв'язку, складаються з трьох знаків A, B, C. Кожен знак приймається правильно з ймовірністю 0,6 і помилково приймається за довільний з двох інших знаків з ймовірністю 0,2. Для підвищення ймовірності правильного прийому кожен знак передається 5 разів. За переданий знак приймається той, який найчастіше трапляється у прийнятій п'ятірці знаків. Якщо таких є два, то серед них з однаковою ймовірністю вибирають один. Знайти ймовірність правильного прийому знака за такого способу передачі.

5.27. [5.27] Визначити ймовірність того, що при n підкиданнях монети герб випаде непарну кількість разів.

5.28. [5.28] Два однакових за силою партнери грають у шахи доти, доки один з них не виграє на 2 партії більше, ніж інший. Яка ймовірність того, що буде зіграно точно $2n$ результативні партії?

5.29. [5.29] Двоє гравців грають доти, доки один не виграє всі гроші в іншого. Визначити ймовірність того, що буде зіграно точно n партій, якщо всі ставки однакові, кожен гравець має 3 ставки, а ймовірність виграшу в будь-якій партії однакова і дорівнює $\frac{1}{2}$ для кожного гравця.

5.30. [5.30] Для кожного абонента ймовірність подзвонити на комутатор протягом однієї години дорівнює $p = 0,01$. Комутатор обслуговує $n = 300$ абонентів. Знайти ймовірність того, що протягом однієї години подзвонять: 1) 4 абоненти; 2) не більше 4 абонентів.

Розв'язок. 1) В рамках схеми Бернуллі ($\lambda = np = 3$) за теоремою Пуассона маємо

$$P_{300}(4) = C_{300}^4 p^4 (1-p)^{96} \approx \frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda} = \frac{3^4}{4!} e^{-3} = \tfrac{9}{8} e^{-3}.$$

2) $\sum\limits_{k=0}^{4} P_{300}(k) = \sum\limits_{k=0}^{4} C_{300}^{k} p^{k}(1-p)^{300-k} \approx \sum\limits_{k=0}^{4} \frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda} \approx \ldots.$

Наближене значення цих ймовірностей можна знайти з таблиць значень виразу $\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}$ у збірнику задач.

5.31. [5.31] Книга в 500 сторінок містить 500 помилок. Знайти ймовірність того, що на випадково вибраній сторінці виявиться не менше трьох помилок.

5.32. [5.32] Відомо, що при набиранні книги є стала ймовірність $p = 0,0001$ того, що будь-яку букву буде набрано неправильно. Після набору гранки читає коректор, який виявляє кожну помилку з ймовірністю $q = 0,9$. Після коректора їх читає автор, який виявляє кожну помилку, що залишилась, з ймовірністю $r = 0,5$. Знайти ймовірність того, що в книзі з 100000 друкованих знаків залишиться після цього не більше 5 помилок.

Розв'язок. Ймовірність того, що після набору і вичитки коректором і автором залишиться одна помилка дорівнює $p_1 = p(1-q) \cdot 0,5 = 5 \cdot 10^{-6}, n = 10^{5}, k \leq 5, \lambda = np_1 = 0,5.$ Тоді, шукана ймовірність

$$\sum_{k=0}^{5} P_n(k) = \sum_{k=0}^{5} C_{10^5}^k p_1^k (1-p_1)^{10^5-k} \approx \sum_{k=0}^{5} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \approx \dots.$$

Для знаходження цієї ймовірності можна скористатися локальною теоремою Муавра-Лапласа

$(b_n = np_1(1-p_1) = 0,5(1-5\cdot 10^{-6}))$

$$\sum_{k=0}^{5} P_n(k) \approx \sum_{k=0}^{5} \varphi(x_{n,k}) \approx \dots,\ x_{n,k} = \frac{k-\lambda_n}{\sqrt{b_n}}.$$

5.33. [5.33] Деяка машина складається з 10000 деталей. Кожна деталь незалежно від інших може відмовити з ймовірністю p_i, причому для $n_1 = 1000$ деталей $p_1 = 0,0003$, для $n_2 = 2000$ деталей $p_2 = 0,0002$ і для $n_3 = 7000$ деталей $p_3 = 0,001$. Машина не працює, якщо в ній відмовили 2 деталі. Знайти ймовірність того, що машина не працюватиме.

5.34. [5.34] Ймовірність виходу з ладу за час t одного конденсатора дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що за цей час зі 100 працюючих конденсаторів вийдуть з ладу:

а) рівно 20 конденсаторів;

б) від 14 до 26 конденсаторів.

5.35. [5.35] У деякому місті в середньому за 1 год надходить 1 виклик швидкої допомоги. Знайти ймовірність того, що з 16 до 17 год надійде:
а) 3 виклики;
б) жодного виклику.
5.36. [5.36] У спостереженнях Резерфорда і Гейгера радіоактивна речовина за 7,5 с випромінювала в середньому 7,5 α-частинок. Знайти ймовірність того, що за 1 с ця речовина випромінює хоча б одну α-частинку.
5.37. [5.37] Є деяка кількість тіста V, з якого випікаються булочки з родзинками. У тісто засипається n родзинок, після чого маса ретельно перемішується і розрізається на рівні частини. Нехай витрата тіста на одну булочку становить v. Знайти ймовірність того, що в окремо взятій булочці виявиться хоча б одна родзинка.
5.38. [5.38] Скільки родзинок в середньому повинні містити булки, щоб ймовірність знайти в булці хоча б одну родзинку була не меншою за 0,99?
5.39. [5.39] Середня щільність хвороботворних мікробів в 1м^3

повітря становить 100. Береться на пробу 2 дм^3 повітря. Знайти ймовірність того, що в ньому буде виявлено хоча б 1 мікроб.

5.40. [5.40] Довести, що для поліномного розподілу $P_n(k_1, \ldots, k_m, k_{m+1}) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_{m+1}!} p_1^{k_1} \cdots p_{m+1}^{k_{m+1}}$, де $p_1 + \cdots + p_{m+1} = 1$, $k_1 + \cdots + k_{m+1} = n$, для довільних фіксованих $k_1, \ldots, k_m$

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(k_1, \ldots, k_{m+1}) = \frac{\lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_m^{k_m}}{k_1! \cdots k_m!} e^{-(\lambda_1 + \cdots \lambda_m)},$$

якщо $np_i \to \lambda_i \in (0, +\infty)$ при $n \to \infty$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

5.41. [5.41] У скриньці є однакова кількість білих і чорних куль. В одному з експериментів при 10000 витягуваннях з поверненням було витягнуто 5011 білих і 4989 чорних куль; 1) яка ймовірність такого результату експерименту? 2) якщо повторити цей експеримент, то яка ймовірність того, що дістанемо більше за модулем відхилення кількості витягнутих білих куль від найбільш ймовірної кількості?

5.42. [5.42] Монету підкидають $2N$ разів (N — досить велике число). Знайти ймовірність того, що: 1) герб випаде точно N разів; 2) герб випаде на $2m$ разів більше, ніж цифра.

5.43. [5.43] Візуальне спостереження штучного супутника Землі можливе в заданому пункті з ймовірністю $p = 0,2$ щоразу, коли він пролітає над цим пунктом. Скільки разів повинен пролетіти супутник над пунктом спостереження, щоб з ймовірністю, не меншою від 0,997, його можна було спостерігати не менше, ніж 5 разів?

5.44. [5.44] Ймовірність успіху у кожному випробуванні дорівнює $0,9$. Скільки треба зробити випробувань, щоб з ймовірністю $0,98$ можна було очікувати не менше за 150 успіхів?

Розв'язок. Отже, кількість успіхів $k \geq 150$, $p = 0,9$. Потрібно відшукати кількість випробувань n. $np = n \cdot 0,9$, $npq = n \cdot 0,09$. Використовуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа $0,98 \leq \mathbb{P}\{k \geq 150\} = \mathbb{P}\{\frac{150-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}}\} \approx \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{150-np}{\sqrt{npq}}\right) \Leftarrow \Phi\left(\frac{150-np}{\sqrt{npq}}\right) \leq 0,02 \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{np-150}{\sqrt{npq}}\right) \leq 0,02 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{np-150}{\sqrt{npq}}\right) \geq 0,98$. З таблиць $\frac{np-150}{\sqrt{npq}} > 2,05 \Leftrightarrow 3n - 2,05\sqrt{n} - 500 > 0$. Залишається оцінити корені цієї нерівності.

$D \approx 6004,2$, $\sqrt{D} \approx 77,58$, $\sqrt{n} > \frac{2,05+77,58}{6} \approx 13,27 \Leftarrow n > 176,1$.

Можна тепер спробувати перевірити значення $n = 176$. Зауважимо, що $\sqrt{n} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$. Перепишемо нашу нерівність у вигляді $3\sqrt{n} - \frac{500}{\sqrt{n}} > 2,05$, $3\sqrt{n} - \frac{500}{\sqrt{n}} = \sqrt{11}(12 - \frac{125}{11}) = \sqrt{11}\frac{7}{11} = \sqrt{\frac{49}{11}} = \sqrt{4,4\ldots} > \sqrt{2,05^2} = \sqrt{4,2025}$.

5.45. [5.45] Відділ технічного контролю перевіряє 475 виробів. Ймовірність того, що виріб бракований, дорівнює 0,05. Знайти межі, між якими з ймовірністю 0,95 міститься кількість бракованих виробів серед перевірених.

5.46. [5.46] У селищі 2500 мешканців. Кожен з них приблизно 6 разів на місяць їздить на поїзді до міста, обираючи дні для подорожей випадково і незалежно від інших мешканців. Яку найменшу ємність повинен мати поїзд, щоб він переповнювався в середньому не частіше одного разу на 100 днів (поїзд ходить 1 раз на добу)?

Розв'язок. Потрібно визначити k – шукана найменша ємність поїзда, щоб ймовірність переповнення була не більшою за $0,01$. Застосуємо схему Бернуллі, успіхом в якій вважатимемо поїздку одного пасажира в даному рейсі поїзда; за умовою

задачі ймовірність успіху дорівнює $p = \dfrac{6}{30} = 0,2$. Ймовірність того, що в одному рейсі буде менше за k пасажирів оцінюємо за інтегральною теоремою Муавра-Лапласа $\mathbb{P}\{\mu < k\} = \mathbb{P}\{\frac{\mu-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\} \approx \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{k-500}{20}\right) =\approx$. А ймовірність переповнення тоді
$\mathbb{P}\{\mu \geq k\} = 1 - \mathbb{P}\{\mu < k\} \leq 0,001$, звідки отримуємо. що потрібний висновок отримаємо якщо $\Phi\left(\frac{k-500}{20}\right) > 0,99$. З таблиць знаходимо, що $\frac{k-500}{20} > 2,32 \Longrightarrow k > 546,4$. Тобто,
$k = 547$.

5.47. [5.47] Театр, який вміщує 1000 осіб, має два різні входи. Біля кожного з входів є свій гардероб. Скільки місць повинно бути в кожному з гардеробів для того, щоб в середньому в 99 випадках зі 100 всі глядачі могли роздягнутися в гардеробі біля того входу, через який вони зайшли? Розглянути 2 випадки: 1) глядачі приходять парами; 2) глядачі приходять поодинці. Припустити, що входи глядачі обирають з однаковими ймовірностями.

Вказівки до розділу 5

5.9. [5.9] Множини $A_1, A_2, \ldots, A_r$ попарно не перетинаються, якщо кожний елемент $x \in S$ або не належить жодній з r множин, або належить тільки одній.
5.10.[5.10] 2. Звести задачу до п. 1.
5.13.[5.13] Занумеруємо коробки числами 1 і 2. Нехай ξ_k — кількість витягань першої коробки сірників при сукупній кількості витягань обидвох коробок k. Тоді ймовірність того, що математик, коли вперше витягне порожню коробку — це буде перша коробка, а в другій буде точно r сірників (це необхідно станеться на $2n-r$-му витяганні) дорівнює $\mathbb{P}\{\xi_{2n-r} = n, \xi_{2n-r+1} = n+1\}$.
5.14.[5.14] Оцінити ймовірність протилежної події.
5.26.[5.26] Обчислити ймовірності того, що знак, який передається, з'явився 5, 4, 3 і 2 рази відповідно.
5.27.[5.27] Рекурентна формула, яка дозволяє обчислити шукану ймовірність: $p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}(1 - p_{k-1}) = \frac{1}{2}$, $p = p_n = \frac{1}{2}$.
5.28.[5.28] Використовуючи рекурентну формулу, знайти q_{2k} —

ймовірність того, що зіграно $2k$ результативних партій і результат нічийний.

5.29.[5.29] Використовуючи рекурентні співвідношення, знайти ймовірності q_k того, що після k партій гра не закінчилась, $k \in \mathbb{N}$.

5.38.[5.38] Нехай у нас є велика кількість булок $N \in \mathbb{N}$ і $\lambda N \in \mathbb{N}$ родзинок, що рівномірно розміщені по булках. Знайти для яких λ правильно $1 - e^{-\lambda} \geqslant 0,99$.

5.40.[5.40] Використати ідею доведення теореми Пуасона для поліноміального розподілу.

5.41.[5.41] Застосувати локальну теорему Муавра-Лапласа.

5.43.[5.43] Шукане число n знаходимо з нерівності $\Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geqslant 0,997$.

5.45.[5.45] Застосувати інтегральну теорему Муавра-Лапласа і розв'язати відповідне рівняння.

5.46.[5.46] Використати інтегральну теорему Муавра-Лапласа з $n = 2500$, $p = 6/30$.

5.47.[5.47] 1. Нехай у гардеробах по x місць; позначимо через μ

кількість пар, які обрали гардероб першого входу, тоді $500 - \mu$ — кількість пар, які обрали інший гардероб. Використовуючи теорему Муавра-Лапласа, підібрати x так, щоб $\mathbb{P}\{2\mu \leqslant x, 1000 - 2\mu \leqslant x\} \approx 0,99$.

Відповіді до розділу п.з. 5

5.1. [5.1] 1) $P_{10}(0) = 0,9^{10} \approx 0,348678$; 2) $P_{10}(3) = C_{10}^3 \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^7 \approx 0,057396$; 3) $\sum\limits_{k=0}^{3} P_{10}(k) = \sum\limits_{k=0}^{3} C_{10}^k \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{10-k} \approx 0,987205$.

5.2. [5.2] $P_n(n) \cdot P_n(m) = C_n^m \cdot p^{n+m} \cdot q^{n-m}$.

5.3. [5.3] $1 - 0,7^4 - 4 \cdot 0,3 \cdot 0,7^3 \approx 0,59526$.

5.4. [5.4] 1) $\sum\limits_{k=0}^{3} P_3^{(1)}(k) \cdot P_3^{(2)}(k) \approx 0,32076$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{3} P_3^{(1)}(k) \cdot P_3^{(2)}(0) + \sum\limits_{k=2}^{3} P_3^{(1)}(k) \cdot P_3^{(2)}(1) + P_3^{(1)}(3) \cdot P_3^{(2)}(2) \approx 0,243$.

5.5. [5.5] $\mathbb{P}(A) = 0,1792$, $\mathbb{P}(B) = 0,468559$, $\mathbb{P}(C) = 0,181089$.

5.6. [5.6] $\frac{10!}{4!3!} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \cdot \left(\frac{\pi-2}{4\pi}\right)^6$.

5.7 [5.7]. $\approx 0,1601$.

5.8. [5.8] $(1-p^2)^N$.

5.9. [5.9] $\left(q_1q_2\dots q_r\left(1+\sum\limits_{k=1}^{r}\frac{p_k}{q_k}\right)\right)^N$.

5.10. [5.10] 1) $C_N^k p^{rk}(1-p^r)^{N-k}$; 2) $C_N^k\left(1-(1-p)^r\right)^k(1-p)^{r(N-k)}$.

5.11. [5.11] Найімовірніше виграти 1 партію з 2-х.

5.12. [5.12] $C_{5+k}^k\cdot 2^{-5-k}$, $k\in\{0,1,\dots,5\}$.

5.13. [5.13] $C_{2n-r}^n\cdot 2^{-2n+r-1}$.

5.14. [5.14] $n\geqslant 18$.

5.15. [5.15] $n\geqslant\left[\frac{\log_{0{,}99}0{,}2}{10}\right]+1=17$.

5.16. [5.16] 8.

5.17. [5.17] 4 і $\approx 0,251$.

5.18. [5.18] $n=24$ або $n=25$.

5.19. [5.19] n — натуральне число, для якого виконується умова $1099\leqslant n\leqslant 1119$.

5.20. [5.20] $\sum\limits_{k=3}^{5}P_5(k)=\sum\limits_{k=3}^{5}C_5^k\cdot 0,55^k\cdot 0,45^{5-k}\approx 0,593127$.

5.21. [5.21] $P_{10}(4,3,3)=\frac{10!}{4!3!3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^3\approx 0,0567$.

5.22. [5.22] $P_3(1,1,1)+P_3(2,1,0)+P_3(1,2,0)\approx 0,24543$.

5.23. [5.23] 1) $\frac{12!}{2^6 \cdot 6^{12}} \approx 0,003438$; 2) $\frac{6!}{2} \cdot \frac{12!}{2!2!3!4! \cdot 6^{12}} \approx 0,1375$.

5.24. [5.24] 1) $\frac{5!}{2!3!} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{a-b}{a}\right)^3$; 2) $\frac{5!}{2!2!} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot \frac{b-c}{a} \cdot \left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.

5.25. [5.25] $C_4^2 \cdot \frac{8!}{2!2!} \cdot 0,3^2 \cdot 0,1^6 \approx 0,0054432$.

5.26. [5.26] $\approx 0,76896$. 5.27. [5.27] $p = \frac{1}{2}$. 5.28. [5.28] $\frac{1}{2^n}$.

5.29. [5.29] $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-3}{2}}$, n є обов'язково непарним.

5.30. [5.30] 1) $\approx 0,168031$; 2) $\approx 0,815263$.

5.31. [5.31] $\approx \sum\limits_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k!} e^{-1} \approx 0,080301$.

5.32. [5.32] $\approx 1 - \sum\limits_{k=11}^{+\infty} \frac{5^k}{k!} e^{-5} \approx 0,986305$.

5.33. [5.33] $\approx 0,9192$.

5.34. [5.34] а) $\approx 0,0997$; б) $\approx 0,8664$.

5.35. [5.35] а) $\approx 0,0613$; б) $\approx 0,3679$.

5.36. [5.36] $1 - e^{-1} \approx 0,6321$.

5.37. [5.37] $\approx 1 - e^{-\frac{vn}{V}}$.

5.38. [5.38] $\geqslant 5$.

5.39. [5.39] $\approx 0,1813$.

5.41. [5.40] 1) $\approx 0,007788$; 2) $\approx 0,82588$.

5.42. [5.41] 1) $P_{2N}(N) \approx \frac{0,5641}{\sqrt{N}}$; 2) $P_{2N}(N+m) \approx \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \varphi\left(\sqrt{\frac{2}{N}} m\right)$.

5.43. [5.42] $\geqslant 72$.

5.44. [5.44] 176.

5.45. [5.45] $15 \leqslant k \leqslant 33$.

5.46. [5.46] 547.

5.47. [5.47] 1) 558; 2) 541.

6. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

6.1. Функція розподілу, інтеграли від випадкових величин

Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Випадковою величиною називаємо функцію $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, вимірну щодо σ-алгебри $\mathcal{A}$, тобто таку функцію, що для кожного $x \in \mathbb{R}$ виконується $\{\omega : \ \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$.

Означення

Функцією розподілу випадкової величини $\xi(\omega)$ називаємо функцію $F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}, \quad x \in (-\infty, +\infty]$.

Якщо множина значень ξ не більш ніж зліченна, то таку випадкову величину називатимемо дискретною. Це означає, що для кожного її значення x_k виконується $\{\omega \ : \ \xi(\omega) = x_k\} \in \mathcal{A}$, і тому визначена ймовірність $\mathbb{P}\{\omega \ : \ \xi(\omega) = x_k\} = p_k$. Набір чисел $\mathbb{P}\{\omega \ : \ \xi(\omega) = x_k\} = p_k \ \ (k = 1, 2, \dots)$ називається розподілом випадкової величини ξ.

Зрозуміло, що $p_k \geqslant 0$, $\sum_k p_k = 1$. Функція розподілу дискретної випадкової величини дорівнюватиме
$F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\omega \ : \ \xi(\omega) < x\} = \sum_{x_k < x} p_k$. Розподіл $\mathbb{P}\{\xi = c\} = 1$, називається виродженим.
Скажемо, що для випадкової величини $\xi(\omega)$ існує щільність розподілу ймовірностей $f_\xi(x)$, якщо для кожної борелевої множини $\hat{A}$ на прямій $\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \in B\} = \int_B f_\xi(x)dx$, де $f_\xi(x)$ — невід'ємна інтегровна на $\mathbb{R}$ функція. У цьому випадку $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1$, а випадкову величину називають абсолютно неперервною випадковою величиною.
Зрозуміло, що для функції розподілу випадкової величини ξ
$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$.
З теореми Радона-Никодима випливає, що щільність функції розподілу визначається однозначно з точністю до її значень на множині лебегової міри нуль, при цьому майже скрізь за мірою Лебега правильна рівність $f_\xi(x) = \frac{d}{dx}F(x)$.

Отже, ми ознайомились з двома типами розподілів — дискретним та абсолютно неперервним. Проте існують розподіли, які не належать до жодного зі згаданих видів функцій розподілу, а також не можуть бути подані у вигляді суми дискретного та абсолютно неперервного розподілів. Неперервні розподіли (тобто такі, що функція розподілу неперервна) з описаними властивостями називають сингулярними розподілами. Такий розподіл можна охарактеризувати тим, що функція розподілу $F(x)$ неперервна, але множина точок зростання $F(x)$ є множиною міри нуль. Отже, $F(x)$ — неперервна, $\frac{d}{dx}F(x) = 0$ майже скрізь та $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$. Сингулярні розподіли утворюють непорожню множину. Прикладом сингулярного розподілу є канторова драбина, все зростання якої зосереджено на відрізку $[0; 1]$. За теоремою Лебега кожну функцію розподілу $F(x)$ можна подати єдиним способом у такому вигляді $F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x)$, де $a_1, a_2, a_3 \geqslant 0$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, а $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ — відповідно дискретна, абсолютно неперервна і сингулярна функції розподілу.

6.1. [6.1] Випадкова величина ξ набуває значення $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$ з ймовірностями, що дорівнюють відповідно $p_1 = 0,1; p_2 = 0,2; p_3 = 0,3; p_4 = 0,4$. Записати вираз і побудувати графік функції розподілу величини ξ.

Розв'язок. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 0,1 & 0 < x \leqslant 1, \\ 0,3, & 1 < x \leqslant 2, \\ 0,6, & 2 < x \leqslant 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

6.2. [6.2] Знайти $\mathbb{P}\{\xi = 4\}$, $\mathbb{P}\{1 \leqslant \xi \leqslant 3\}$, $\mathbb{P}\{1 < \xi < 3\}$, якщо функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2, \\ 0,3, & 2 < x \leqslant 3, \\ 0,5, & 3 < x \leqslant 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$ Записати таблицю розподілу ξ.

Розв'язок. $\mathbb{P}\{\xi = 4\} = F(4+0) - F(4) = 1 - 0,5 = 0,5$; $\mathbb{P}\{1 < \xi < 3\} = F(3) - F(1+0) = 0,3$;$\mathbb{P}\{1 \leqslant \xi \leqslant 3\} = F(3+0) - F(1)$.

6.3. [6.3] З колоди в 36 карт навмання виймають 7. Нехай ξ – число карт масті "пік" серед них. Знайти розподіл ξ.

Розв'язок. $\mathbb{P}\{\xi = k\} = \dfrac{C_9^k \cdot C_{27}^{7-k}}{C_{36}^7}$, $k = \overline{0,7}$

6.4. [6.4] Два баскетболісти почергово кидають м'яч у корзину до тих пір, поки один з них не влучить. Знайти розподіл випадкового числа кидків, які здійснює кожен з баскетболістів, якщо ймовірність влучання для першого дорівнює 0,4, а для другого 0,6.

6.5. [6.5] Нехай ξ_n — кількість успіхів при n випробуваннях Бернуллі, $\eta = \begin{cases} 1, & \xi_n \text{ — парне число,} \\ 0, & \xi_n \text{ — непарне число.} \end{cases}$ Знайти розподіл η.

Розв'язок.

$\mathbb{P}\{\eta = 1\} = \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} \cdot p^{2k} \cdot q^{n-2k}$; $\mathbb{P}\{\eta = 0\} = 1 - \mathbb{P}\{\eta = 1\}$.

6.6. [6.6] З 5-ти ключів — один підходить до замка. Вказати закон розподілу випадкової величини ξ, яка дорівнює числу спроб при відкриванні замка, якщо ключ, який не підійшов, надалі не використовують.
6.7. [6.7] З партії, яка складається зі 100 виробів, серед яких є 10 бракованих, вибрано випадковим чином 5 виробів для перевірки їх якості. Скласти таблицю розподілу випадкової величини ξ бракованих виробів, які містяться у вибірці.
6.8. [6.8] Скласти таблицю розподілу ξ – кількості сторінок з друкарськими помилками, якщо рукопис містить $n = 100$ сторінок, а ймовірність того, що на сторінці виявиться друкарська помилка, дорівнює $p = 0,02$.
Розв'язок. $\mathbb{P}\{\xi = k\} = C_{100}^{k}(0,02)^{k}(0,98)^{n-k}$, $0 \le k \le 100$.
6.9. [6.9] У скриньці знаходиться 10 білих і 5 чорних куль. Навмання вибирають 4 кулі. Випадкова величина ξ – кількість білих куль серед вибраних. Знайти розподіл ξ.

6.10. [6.10] Проводять послідовні незалежні випробування, при кожному з яких ймовірність успіху дорівнює p. Нехай ξ — кількість випробувань, проведених до першого успіху. Знайти розподіл ξ, $\mathbb{P}\{\xi < 2\}$.
Розв'язок. Це геометричний розподіл $\mathbb{P}\{\xi = k\} = (1-p)^k p$, $k \geq 0$; $\mathbb{P}\{\xi < 2\} = \mathbb{P}\{\xi = 0\} + \mathbb{P}\{\xi = 1\} = p + (1-p)p = p(2-p)$.
6.11. [6.11] Стрілець на змаганнях має 4 набої і стріляє в ціль до першого влучання. Ймовірність влучання при одному пострілі дорівнює 0,7. Описати простір елементарних подій Ω. Нехай $\xi(\omega)$ — кількість промахів. Знайти розподіл випадкової величини ξ. Обчислити $\mathbb{P}\{\xi \leqslant 3\}$, $\mathbb{P}\{2 < \xi \leqslant 4\}$. Записати вираз для функції розподілу та побудувати її графік.
6.12. [6.12] Є n заготовок для певної деталі. Ймовірність виготовлення стандартної деталі із заготовки дорівнює p. Знайти закон розподілу кількості ξ заготовок, які залишаються після виготовлення першої стандартної деталі. Записати вираз для функції розподілу.

6.13. [6.13] Розподіл випадкової величини ξ визначається формулами $\mathbb{P}\{\xi = k\} = C/(k(k+1))$, $k \in \mathbb{N}$. Знайти: 1) сталу C; 2) $\mathbb{P}\{\xi \leqslant 3\}$; 3) $\mathbb{P}\{n_1 \leqslant \xi \leqslant n_2\}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
Розв'язок. За означенням розподілу
$1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{\xi = k\} = C \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = C$. Далі зрозуміло.
6.14. [6.14] Розподіл випадкової величини ξ визначається формулами $\mathbb{P}\{\xi = k\} = C/(k(k+1)(k+2))$, $k \in \mathbb{N}$. Знайти: 1) сталу C; 2) $\mathbb{P}\{\xi \leqslant 3\}$; 3) $\mathbb{P}\{n_1 \leqslant \xi \leqslant n_2\}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
Розв'язок. Слід зауважити, що
$\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\Big) - \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}\Big)$. Далі зрозуміло.
6.15. [6.15] Нехай $F(x)$ — функція розподілу дискретної випадкової величини ξ з множиною значень$\{x_n : n \geqslant 1\}$. Довести, що $F(x_n + 0) - F(x_n) = \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) = x_n\}$.
6.16. [6.16] Двічі підкидають симетричну монету. Знайти функцію розподілу випадкової величини, що дорівнює кількості випадань герба.

6.17. [6.17] Нехай $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ. Довести, що

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\} = F(x+0);\ \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) > x\} = 1 - F(x+0);$$
$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \geqslant x\} = 1 - F(x);\ \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) = x\} = F(x+0) - F(x);$$
$$\mathbb{P}\{\omega : a \leqslant \xi(\omega) < b\} = F(b) - F(a)$$
$$\mathbb{P}\{\omega : a < \xi(\omega) < b\} = F(b) - F(a+0);$$
$$\mathbb{P}\{\omega : a \leqslant \xi(\omega) \leqslant b\} = F(b+0) - F(a);$$
$$\mathbb{P}\{\omega : a < \xi(\omega) \leqslant b\} = F(b+0) - F(a+0).$$

6.18. [6.18] На відрізку $[a; b]$ з числової прямої випадково вибирають точку, при цьому вважається, що всі положення точки рівноможливі. Нехай значення випадкової величини ξ дорівнює координаті вибраної точки. Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини (рівномірний на відрізку розподіл).

6.19. [6.19] Двоє ділових партнерів домовились про зустріч на часовому інтервалі $[0; T]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини, що дорівнює часу очікування першого з партнерів приходу іншого.
6.20. [6.20] Знайти функцію розподілу випадкової величини $\chi_{\mathrm{A}}(\omega)$, де A — подія.
Розв'язок. Індикатор події $\chi_{\mathrm{A}}(\omega)$ набуває двох значень $0; 1$.
Тому, $F_\chi(x) = \mathbb{P}\{\omega\colon \chi_A(\omega) < x\} = 0,\ x \le 0,$
$F_\chi(x) = \mathbb{P}\{\omega\colon \chi_A(\omega) < x\} = 1,\ x > 1,$
$F_\chi(x) = \mathbb{P}\{\omega\colon \chi_A(\omega) < x\} = 1 - \mathbb{P}(A),\ 0 < x \le 1.$
6.21. [6.21] Нехай функція розподілу випадкової величини ξ дорівнює $F(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини: 1) $\eta = \xi^2$; 2) $\eta = \sqrt{|\xi|}$; 3) $\eta = \ln|\xi|$; 4) $\eta = \xi^+$; 5) $\eta = e^\xi$; 6) $\eta = g(\xi)$, g — строго монотонна на множині значень ξ функція.
Розв'язок. 1) $F_\eta(x) = 0, x \le 0$; для $x > 0$ маємо
$F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\eta < x\} = \mathbb{P}\{\xi^2 < x\} = \mathbb{P}\{-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\} =$
$F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x} + 0).$

3) $F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\ln|\xi| < x\} = \mathbb{P}\{0 < |\xi| < e^x\} =$

$$= \mathbb{P}\Big(\{-e^x < \xi < 0\} \cup \{0 < \xi < e^x\}\Big) =$$

$$= F(0) - F(-e^x + 0) + F(e^x) - F(+0).$$

4) $\eta^+ = \sup\{\xi, 0\}$, тому, $F_\eta(x) = 0, x \le 0$; для $x > 0$ маємо $F_{\xi^+}(x) = \mathbb{P}\{\sup\{\xi, 0\} < x\} = \mathbb{P}\{\xi < 0, 0 < x\} + \mathbb{P}\{0 \le \xi < x\} =$ $= F(0) + F(x) - F(0) = F(x).$

6.22. [6.22] Нехай ξ — рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \ln\big(1/\xi\big)$.

Розв'язок. Зауважимо, що $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & x \in (0,1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$ Тоді,

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\omega\colon \ln(1/\xi) < x\} = \mathbb{P}\Big\{\omega\colon \xi(\omega) > e^{-x}\Big\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) > e^{-x}\} = 1 - F_\xi(e^{-x} + 0) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 1. \end{cases}$$

6.23. [6.23] Нехай ξ — випадкова величина з неперервною функцією розподілу $F(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = F(\xi)$.
Розв'язок. За означенням $F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\omega\colon F(\xi(\omega)) < x\} = \mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) < F^{-1}(x)\} = F\Big(F^{-1}(x)\Big) = x$ для $x \in (0,1)$. Власне, η має рівномірний розподіл на проміжку $[0,1]$.
6.24. [6.24] Функція розподілу випадкової величини має вигляд $F(x) = a + b \arcsin x$ при $x \in [-1;1]$, $F(x) = 0$ при $x < -1$ та $F(x) = 1$ при $x > 1$. Які значення можуть набувати сталі a, b, якщо F неперервна?
6.25. [6.25] У p-вимірній кулі одиничного радіуса $(p > 1)$ випадково вибирають точку. Знайти функцію розподілу випадкової величини, що дорівнює відстані від вибраної точки до початку координат.

6.26. [6.26] Які з поданих функцій є функціями розподілу:

1) $F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg} x$; 2) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{[x]}{2}, & 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases}$

3) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{x}{1+x}, & x > 0; \end{cases}$ 4) $F(x) = e^{-e^{x}}$;

5) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - \frac{1-e^{-x}}{x}, & x > 0. \end{cases}$

6.27. [6.27] Щільність розподілу випадкової величини ξ задана формулами: $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \\ \frac{C}{x^4}, & x > 1. \end{cases}$. Знайти: 1) сталу C; 2) щільність розподілу $\eta = 1/\xi$, 3) $\mathbb{P}\{0,1 < \eta < 0,3\}$.

Розв'язок. Сталу знайдемо з умови

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = C\int\limits_{1}^{+\infty} x^{-4}dx = C/3 \Longrightarrow C = 3.$$

Для $0 < x < 1$

$F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\omega\colon 1/\xi < x\} = \mathbb{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < 0\} \cup \{\omega\colon \xi(\omega) > 1/x\}) =$
$\mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) < 0\} + \mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) > 1/x\} = F_\xi(0) + 1 - F_\xi(1/x + 0)$,

звідки для $0 < x < 1$

$f_\eta(x) = F_\eta'(x) = F_\xi'(1/x)x^{-2} = 3x^2$, а для $x \notin [0, 1]$: $f_\eta(x) = 0$.

Тому, $\mathbb{P}\{0,1 < \eta < 0,3\} = \int\limits_{0,1}^{0,3} 3x^2dx = (0,3)^3 - (0,1)^3 = 0,026$.

6.28. [6.28] Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює $f_\xi(x) = ae^{-\lambda|x|}$ $(\lambda > 0)$. Обчислити: 1) коефіцієнт a; 2) функцію розподіл ξ.

Розв'язок. Сталу знайдемо з умови $1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx =$

$$a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|x|}dx = 2a\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = 2a/\lambda \Longrightarrow a = \lambda/2.$$

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\lambda|t|}dt = (2 - e^{-x\lambda})/2.$$

6.29. [6.29] Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром α: $\mathbb{P}\{\xi < x\} = 1 - e^{-\alpha x}$ $(x \geqslant 0)$. Знайти щільності розподілу випадкових величин: 1) $\eta_1 = \sqrt{\xi}$; 2) $\eta_2 = \xi^2$;
3) $\eta_3 = \frac{1}{\alpha} \ln \xi$.

Розв'язок. 1) Зауважимо, що для $x \leq 0$: $F_\xi(x) = 0$, бо $F_\xi(+0) = \lim\limits_{x \to +0} F_\xi(x) = \lim\limits_{x \to +0} (1 - e^{-\alpha x}) = 0$. Тоді, для $x \leq 0$: $F_{\eta_1}(x) = 0$, а для $x > 0$: $F_{\eta_1}(x) = \mathbb{P}\{\xi < x^2\} = 1 - e^{-\alpha x^2}$. Звідси, для $x > 0$: $f_{\eta_1}(x) = F'_{\eta_1}(x) = (1 - e^{-\alpha x^2})' = 2\alpha x e^{-\alpha x^2}$.

3) Для $x > 0$:
$f_{\eta_3}(x) = F'_{\eta_3}(x) = (\mathbb{P}\{\xi < e^{\alpha x}\})' = (1 - e^{-\alpha e^{\alpha x}})' = \alpha^2 e^{\alpha x} e^{-\alpha e^{\alpha x}}$.

6.30. [6.30] Нехай $g(x)$ — борелева функція на прямій, ξ і $\eta = g(\xi)$ — випадкові величини. Довести рівності:

1) $F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \in g^{-1}((-\infty; x))\}$;
2) якщо $g(x)$ неспадна, то $F_\eta(x) = F_\xi(g^{-1}(x))$;

3) якщо $g(x)$ зростаюча функція і диференційовна, то $p_\eta(x) = p_\xi(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$, якщо ж $g(x)$ спадна, то $p_\eta(x) = p_\xi(g^{-1}(x))\,|(g^{-1})'(x)|$;

4) якщо $g(x) = bx + a$, то $F_\eta(x) = F_\xi\left(\frac{x-a}{b}\right)$, якщо $b > 0$ і $F_\eta(x) = 1 - F_\xi\left(\frac{x-a}{b} + 0\right)$, якщо $b < 0$, $p_\eta(x) = \frac{1}{|b|}p_\xi\left(\frac{x-a}{b}\right)$.

6.31. [6.31] Довести, що функція $p(x) = 1/(b-a)$ у випадку $x \in [a; b]$ і $p(x) = 0$ у інших випадках — щільність рівномірного розподілу на $[a; b]$.

6.32. [6.32] Нехай η — рівномірно розподілена на $[0,1]$ випадкова величина, а F — задана неперервна функція розподілу. Довести, що випадкова величина $\xi = F^{-1}(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x : F(x) \leqslant \eta\}$ має функцію розподілу $F(x)$.

6.33. [6.33] Щільність випадкової величини ξ задана рівністю $f(x) = a\cos^2 x$ при $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ та $f(x) = 0$ у інших випадках. Обчислити сталу a і ймовірність того, що випадкова величина буде більша за $\pi/4$. Знайти функцію розподілу випадкової величини ξ^2.

Розв'язок. Маємо

$$1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cos^2 x dx = \frac{a}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx = a\pi/2 \Longrightarrow a = 2/\pi.$$

$$\mathbb{P}\{\xi > \pi/4\} = 1 - F_\xi(\pi/4+0) = 1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}(1+\cos 2x)dx =$$

$$= 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}.$$

6.34. [6.34] Знайти функцію розподілу випадкової величини, якщо її щільність:

1) $p(x) = a/(1+x^2)$;
2) $p(x) = ax^2$, $x \in [0;2]$, $p(x) = 0$, $x \notin [0;2]$;
3) $p(x) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\{-x^2/2\sigma^2\}$, $x > 0$ $(\sigma > 0)$ — щільність розподілу Релея;

4) $p(x) = 4h^3/\sqrt{\pi}x^2 \exp\{-h^2x^2\}$, $x > 0$ — щільність розподілу Максвелла вектора швидкості молекули газу;

5) $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{\sigma}|x-m|\sqrt{2}}$ $(\sigma > 0)$ — щільність розподілу Лапласа;

6) $p(x) = a\frac{x_0^a}{x^{a+1}}$, $x > x_0$, $a > 0$, — щільність розподілу Парето;

7) $p(x) = \frac{n}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{n-1} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^n}$, $x > a$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, — щільність розподілу Вейбулла.

6.35. [6.35] Випадкова величина може набувати відмінні від нуля значення лише на відрізку $[-1; 1]$. Щільність розподілу є лінійною на зазначеному відрізку. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу випадкової величини.

6.36. [6.36] Двічі підкидають монету. Побудувати відповідний ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ та σ-алгебру $\sigma(\xi)$, породжену випадковою величиною ξ – числом випадань герба. Чи A та $\sigma(\xi)$ збігаються?

6.37. [6.37] Підкидають гральний кубик. Побудувати ймовірнісний простір так, щоб стосовно нього функція $\xi(\omega)$ – число очок, що випали на верхній грані – не була випадковою величиною.

6.38. [6.38] У квадрат $\Omega = [0;1] \times [0;1]$ навмання кидають точку $M(x,y)$. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу випадкових величин: $\xi_1 = x + y$, $\xi_2 = x - y$, $\xi_3 = xy$, $\xi_4 = x/y$, $\xi_5 = \frac{y-1}{x}$, $\xi_6 = x^2 y$, $\xi_7 = \max\{x,y\}$, $\xi_8 = \min\{x,y\}$ та побудувати їх графіки.

6.39. [6.39] Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 1/3$. Обчислити ймовірності: а) $\mathbb{P}\{\xi > 3\}$; б) $\mathbb{P}\{\xi > 6 | \xi > 3\}$; в) $\mathbb{P}\{\xi > t + 3 | \xi > t\}$.

Розв'язок. Щільність показникового розподілу $f(x) = \lambda e^{-x\lambda}$, $x > 0$, а функція розподілу $F(x) = 1 - e^{-x\lambda}$, $x > 0$, $F(x) = 0$, $x \leq 0$. $\mathbb{P}\{\xi > t + 3 | \xi > t\} = \dfrac{\mathbb{P}(\{\xi > t+3\} \cap \{\xi > t\})}{\mathbb{P}\{\xi > t\}} =$

$$\frac{\mathbb{P}\{\xi > t+3\}}{\mathbb{P}\{\xi > t\}} = \frac{1 - F(t+3)}{1 - F(t)} = \frac{e^{-(t+3)\lambda}}{e^{-t\lambda}} = e^{-3\lambda} = 1/e,\ t > 0.$$

6.40. [6.40] Випадкова величина ξ має функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^2, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань випадкова величина ξ три рази набуде значення з проміжку $(0,25;\ 0,75)$.

Розв'язок. Нехай $A = \{\omega : \xi(\omega) \in (0,25;\ 0,75)\}$,
$p = \mathbb{P}(A) = F(0,75) - F(0,25+0) = (0,75)^2 - (0,25)^2 = 0,5.$ Тоді за схемою Бернуллі шукана ймовірність дорівнює
$P_4(3) = C_4^3 p^3 (1-p) = 4 \cdot 0,5^4 = 0,25.$

6.2. Інтеграл від випадкової величини

Вимірну функцію називаємо простою, якщо її множина значень скінченна. Індикатором події $A \in \mathcal{A}$ називаємо просту функцію $\chi_A(\omega) = 1$, якщо $\omega \in A$, і $\chi_A(\omega) = 0$ у протилежному випадку. Очевидно, що будь-яку просту функцію $\xi(\omega)$ можна подати у вигляді

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{A_k}(\omega),$$

де x_k — значення, які набуває $\xi(\omega)$, а $A_k = \{\omega : \xi(\omega) = x_k\}$ — попарно неперетинні множини такі, що $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$. Інтегралом від простої випадкової величини $\xi(\omega)$ називаємо число

$$\int_\Omega \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(A_k).$$

У випадку, коли $\xi(\omega) \geqslant 0$, існує послідовність $\xi_n(\omega) \geqslant 0$ вимірних простих функцій така, що $\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$ при $n \to +\infty$ для кожного ω.

Інтегралом від невід'ємної випадкової величини $\xi(\omega)$ називається число $\int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \xi_n(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$. Ця границя не залежить від вибору монотонної послідовності простих випадкових величин збіжної до $\xi(\omega)$.

Якщо тепер $\xi(\omega)$ — довільна випадкова величина, то $\xi = \xi^+ - \xi^-$, де $\xi^\pm(\omega) = \max\{0, \pm\xi(\omega)\} \geqslant 0$, тому можна визначити інтеграл від $\xi(\omega)$ за допомогою рівності

$$\int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega \xi^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega) - \int_\Omega \xi^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega),$$

а також для довільної події A

$$\int_A \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \xi(\omega)\chi_A(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

Приклад

Нехай $\xi(\omega) \geqslant 0$, а $\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$ і $\eta_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$ — дві послідовності невід'ємних простих випадкових величин. Довести, що

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \xi_n(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \eta_n(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

Розв'язування. Нехай a_n — стала така, що $\mathbb{P}\{\omega : \xi_n(\omega) \leqslant a_n\} = 1$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$, враховуючи, що $\{\omega : \xi_n - \eta_m > \varepsilon\} \subset \{\omega : \xi - \eta_m > \varepsilon\}$, маємо

$$\xi_n - \eta_m \leqslant (\xi_n - \eta_m)\,\chi_{\{\omega:\xi_n-\eta_m\geqslant\varepsilon\}} + \varepsilon \leqslant (\xi_n - \eta_m)\,\chi_{\{\omega:\xi-\eta_m\geqslant\varepsilon\}} + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant a_n\chi_{\{\omega:\xi-\eta_m\geqslant\varepsilon\}} + \varepsilon,$$

звідки $\int_\Omega \xi_n\mathbb{P}(d\omega) - \int_\Omega \eta_m\mathbb{P}(d\omega) \leqslant a_n\mathbb{P}\{\omega : \xi - \eta_m \geqslant \varepsilon\} + \varepsilon$. Враховуючи, що $\eta_m(\omega) \uparrow \xi(\omega)$, отримуємо $\mathbb{P}\{\omega : \xi - \eta_m \geqslant \varepsilon\} \to 0$ $(m \to +\infty)$. Завершує справу послідовний граничний перехід спочатку при $m \to +\infty$, потім при $n \to +\infty$ та $\varepsilon \to +0$; отримуємо $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega \xi_n(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega \eta_n(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$. Переставляючи місцями ξ_n і η_n, одержуємо протилежну нерівність.

6.41. [6.41] Нехай $\int_\Omega \xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$ існує і скінченний, а A_n послідовність подій така, що $\mathbb{P}(A_n) \to 0$ $(n \to +\infty)$. Довести, що

$$\int_{A_n} \xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \to 0\,(n \to +\infty).$$

6.42. [6.42] Нехай A_n — послідовність подій така, що $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$. Довести, що $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{A_n} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$.

6.43. [6.43] Нехай $\int_{\Omega} \xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$ існує і скінченний, A_n — послідовність подій така, що $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \varnothing$. Довести, що

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = 0.$$

6.44. [6.44] Нехай $\Omega = [0;1]$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом множин з $[0;1]$, P — міра Лебега. Визначимо при n непарному $f_n(\omega) = \chi_{[0;1/3]}(\omega)$ та при n парному $f_n(\omega) = \chi_{(1/3;1]}(\omega)$. Обчислити:

$$\int_{\Omega} \varliminf_{n\to+\infty} f_n(\omega)\,P(d\omega),\ \int_{\Omega} \varlimsup_{n\to+\infty} f_n(\omega)\,P(d\omega),$$

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \int_{\Omega} f_n(\omega)\,P(d\omega),\ \varliminf_{n\to+\infty} \int_{\Omega} f_n(\omega)\,P(d\omega).$$

6.45. [6.45] Нехай $\int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = 0$ і $\xi(\omega) \geqslant 0$, то $\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) = 0\} = 1$. Довести.

6.46. [6.46] Нехай для кожної події A справджується $\int_A \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = 0$. Довести, що $\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) = 0\} = 1$.

6.47. [6.47] Нехай B — подія така, що $\mathbb{P}(B) = 0$. Довести, що $\int\limits_{A\setminus B} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$.

6.48. [6.48] Довести, що інтеграл $\int_A \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ існує тоді і тільки тоді, коли існує $\int_A |\xi(\omega)|\mathbb{P}(d\omega)$. Тут A — подія, $\xi(\omega)$ — випадкова величина.

6.49. [6.49] Нехай $X = (-\infty; +\infty)$ і A_0 — сім'я всіх півінтервалів $[a; b)$, $a, b \in X$, і скінченних об'єднань таких півінтервалів, та ν — адитивна міра, визначена формулою $\nu([a; b)) = F(b) - F(a)$, де F — деяка функція розподілу. Довести, що ν — зліченно-адитивна ймовірнісна міра на A_0.

6.50. [6.50] Враховуючи попередню задачу, довести, що визначена там міра допускає єдине продовження на мінімальну σ-алгебру, породжену A_0, а отже, на σ-алгебру борельових множин на прямій.

Назвемо описане продовження міри ν мірою Лебега-Стільтьєса асоційованою з функцією розподілу F; вживаємо позначення ν_F. Інтеграл від борельової функції $g(x)$ за цією мірою називатимемо інтегралом Лебега-Стільтьєса і позначатимемо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \nu_F(dx).$$

6.51. [6.51] Нехай $F(x)$ — функція розподілу дискретної випадкової величини з множиною значень $\{x_n : n \geqslant 1\}$, а $g(x)$ — вимірна на дійсній прямій функція. Довести, що

$$\int_\Omega g(\xi(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x) = \sum_n g(x_n)(F(x_n+0) - F(x_n)).$$

Вказівки до розділу 6

6.15.[6.15] Для довільного $n \in \mathbb{N}$, використовуючи задачу 3.22, пункт 3),
$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) = x_n\} = \mathbb{P}\{\bigcap_{\varepsilon>0} \{\omega : x_n \leqslant \xi(\omega) < x_n + \varepsilon\}\} = \lim_{\varepsilon \to +0} \mathbb{P}\{\omega : x_n \leqslant \xi(\omega) < x_n + \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \to +0} (F(x_n + \varepsilon) - F(x_n)) = F(x_n + 0) - F(x_n)$.

6.17.[6.17] 1) Нехай $x_n \downarrow x$ $(n \to \infty)$. Тоді
$\{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{\omega : \xi(\omega) < x_n\} \in \mathcal{A}$ і
$\{\omega : \xi(\omega) < x_{n+1}\} \subset \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}$. Далі використати властивість неперервності ймовірності (див. наприклад задачу 3.22); 2) і 3) подати через протилежну подію; 4)
$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) = x\} = \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\} - \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}$; 5)-8) подати через різницю подій.

6.30.[6.30] 3) Якщо g — зростаюча

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\omega : g(\xi) < x\} = \mathbb{P}\Big\{\omega : \xi(\omega) \in g^{-1}\Big((-\infty, x)\Big)\Big\} =$$

$$\mathbb{P}\Big\{\omega : \xi(\omega) < g^{-1}(x)\Big\} = F_\xi(g^{-1}(x)),$$

$$p_\eta(x) = \frac{d}{dx}F_\xi(g^{-1}(x)) = p_\xi(g^{-1}(x))\frac{d}{dx}g^{-1}(x).$$

6.31.[6.31] Для рівномірного розподілу

$$F(x) = \mathbb{P}\{\omega : \omega < x, \omega \in [a,b]\} = \frac{x-a}{b-a}, \; a \leqslant x \leqslant b.$$

6.32.[6.32] Для зростаючої F маємо

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}\Big\{\omega : F^{-1}(\eta) < x\Big\} = \mathbb{P}\{\omega : \eta < F(x)\Big\} = F_\eta(F(x)).$$

6.33.[6.33] 1. Використати рівність $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(x)\,dx = 1 \Rightarrow a = 2/\pi$;
2. $\mathbb{P}\{\omega : \xi > \frac{\pi}{4}\} = 1 - F(\pi/4)$;
3. $F_{\xi^2}(x) = \mathbb{P}\{\omega : \xi^2 < x\} = \mathbb{P}\{\omega : -\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\} =$
$F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x})$, $x > 0$;
$p_{\xi^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}p_\xi(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}p_\xi(-\sqrt{x}) = \frac{2}{\pi\sqrt{x}}\cos^2(\sqrt{x})$, $0 < x < \frac{\pi^2}{4}$.
6.35.[6.35] $p(x) = ax + b$, $F(x) = 0$ $(x \leqslant -1)$ і $F(x) = 1$ $(x > 1) \Rightarrow$ $p(x) = 0$ $(x \notin [-1,1])$. Далі використати рівність $\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 1$.
6.36.[6.36] Оскільки $\{\xi = 1\} = \{$ГЦ, ЦГ$\}$, то $\sigma(\xi)$ містить 2^3 елементів, в той час як $\mathcal{A}$ (в даному випадку це σ-алгебра всіх

підмножин) містить 2^4 елементів.
6.37.[6.37] За $\mathcal{A}$ можна взяти будь-яку σ-алгебру, відмінну від σ-алгебри всіх підмножин Ω.
6.41.[6.41] Нехай спочатку $\xi(\omega) \geqslant 0$, а $(\xi_m(\omega))$ неспадна послідовність простих невід'ємних випадкових величин така, що $\xi_m(\omega) \uparrow \xi(\omega)$ $(m \to \infty)$, $\omega \in \Omega$. Тоді $\int_\Omega \xi(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \xi_m(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$, тобто $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall m > m_0)$ $0 \leqslant \int_\Omega \xi(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) - \int_\Omega \xi_m(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) < \varepsilon$. Нехай a_m вибрано так, що $\mathbb{P}\{\omega : \xi_m(\omega) \leqslant a_m\} = 1$. Тоді для довільних $m > m_0$ і $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \int_{A_n} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{A_n} (\xi(\omega) - \xi_m(\omega))\mathbb{P}(d\omega) + \int_{A_n} \xi_m(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega (\xi(\omega) - \xi_m(\omega))\mathbb{P}(d\omega) + \int_{A_n} a_m\mathbb{P}(d\omega) \leqslant \varepsilon + a_m\mathbb{P}(A_n).$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \leqslant \varepsilon.$$

Потрібне твердження випливає з довільності ε. Загалом

чинимо стандартно, $\xi = \xi^+ - \xi^-$ і т. д.
6.42.[6.42] Вважаючи, що інтеграл $\int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ існує і $\xi(\omega) \geqslant 0$ визначимо $f_n(\omega) = \xi(\omega)\chi_{A_n}(\omega)$; $f_n(\omega) \leqslant f_{n+1}(\omega)$ $(n \geqslant 1)$;

$$\int_{A_n} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega f_n(\omega)\mathbb{P}(d\omega), \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) = \xi(\omega).$$

Скористатись теоремою про інтегрування монотонної послідовності $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{A_n} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$.
Загалом чинимо стандартно, $\xi = \xi^+ - \xi^-$ і т. д.
6.43.[6.43] Застосувати задачу 6.42, прийнявши $B_n = \overline{A}_n$. Тоді $\int_{A_n} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) - \int_{B_n} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$.
6.44.[6.44] Використати, що $\underline{\lim}_{k\to+\infty} f_k(\omega) = 0$, $\overline{\lim}_{k\to+\infty} f_k(\omega) = 1$.
6.45.[6.45] $A_n = \{\omega : \xi(\omega) > \frac{1}{n}\} \Rightarrow$

$$0 = \int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \geqslant \int_{A_n} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \geqslant \frac{1}{n}\mathbb{P}(A_n)$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_n) = 0$. Проте
$A = \{\omega : \xi(\omega) > 0\} \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) = 0$.

6.46.[6.46] Використати задачу 6.45, довівши спочатку, що $\int_\Omega \xi^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega \xi^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = 0$, де $\xi(\omega) = \xi^+(\omega) - \xi^-(\omega)$.
6.47.[6.47] $\mathbb{P}(B) = 0 \Rightarrow \int_{B\cap A} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = 0$.
6.48.[6.48] Використати, що $\xi = \xi^+ - \xi^-$, а $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$.
6.49.[6.49] Перевірити виконання аксіом ймовірності.
6.50.[6.50] Див. теорему Каратеодорі з курсу функціонального аналізу.
6.51.[6.51] Використати задачу 6.15.

Відповіді до розділу 6

6.1.[6.1] $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 0,1, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,3, & \text{якщо } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,6, & \text{якщо } 2 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$ 6.2.[6.2]
$\mathbb{P}\{\xi = 4\} = 0,5$; $\mathbb{P}\{1 \leqslant \xi \leqslant 3\} = 0,5$; $\mathbb{P}\{1 < \xi < 3\} = 0,3$; розподіл ξ: $\mathbb{P}\{\xi = 2\} = 0,3$, $\mathbb{P}\{\xi = 3\} = 0,2$, $\mathbb{P}\{\xi = 4\} = 0,5$.
6.3.[6.3] $\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{C_9^k \cdot C_{27}^{7-k}}{C_{36}^7}$, $k = \overline{0,7}$.
6.4.[6.4] Якщо ξ_i — це число кидків, які здійснює i-ий гравець,

то $\mathbb{P}\{\xi_1 = k\} = 0,6^{k-1} \cdot 0,4^{k-1} \cdot 0,76$,
$\mathbb{P}\{\xi_2 = k\} = 0,6^k \cdot 0,4^{k-1} \cdot 0,76,\ k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\{\xi_2 = 0\} = 0,4$.

6.5.[6.5] $\mathbb{P}\{\eta = 1\} = \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} \cdot p^{2k} \cdot q^{n-2k}$; $\mathbb{P}\{\eta = 0\} = 1 - \mathbb{P}\{\eta = 1\}$.

6.6.[6.6] $\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{5},\ k = \overline{1,5}$.

6.7.[6.7] $\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{C_{10}^k \cdot C_{90}^{5-k}}{C_{100}^5},\ k = \overline{0,5}$.

6.8.[6.8] $\mathbb{P}\{\xi = k\} \approx \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2},\ k = \overline{0,100}$.

6.9.[6.9] $\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{C_{10}^k \cdot C_5^{4-k}}{C_{15}^4},\ k = \overline{0,4}$.

6.10.[6.10] 1) $\mathbb{P}\{\xi = k\} = (1-p)^k \cdot p,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 2)
$\mathbb{P}\{\xi < 2\} = p(2-p)$.

6.11.[6.11] 1) $\Omega = \{\text{У}, \text{НУ}, \text{ННУ}, \text{НННУ}, \text{НННН}\}$, де У — успіх, Н — невдача; 2) $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0,7$; $\mathbb{P}\{\xi = 1\} = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$; $\mathbb{P}\{\xi = 2\} = 0,3^2 \cdot 0,7 = 0,063$; $\mathbb{P}\{\xi = 3\} = 0,3^3 \cdot 0,7 = 0,0189$; $\mathbb{P}\{\xi = 4\} = 0,3^4 = 0,0081$; 3) $\mathbb{P}\{\xi \leqslant 3\} = 0,9919$,

$\mathbb{P}\{2 < \xi \leqslant 4\} = 0,027$; 4) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 0,7, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,91, & \text{якщо } 1 < x \leqslant 2, \\ 0,973, & \text{якщо } 2 < x \leqslant 3, \\ 0,9919, & \text{якщо } 3 < x \leqslant 4, \\ 1, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$

6.12.[6.12] 1) $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = (1-p)^{n-1}$; $\mathbb{P}\{\xi = k\} = (1-p)^{n-1-k} \cdot p$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$; 2) $F_\xi(x) = 0$, якщо $x \leqslant 0$;
$F_\xi(x) = (1-p)^{n-k}$, якщо $k-1 < x \leqslant k$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$;
$F_\xi(x) = 1$, якщо $x > n-1$.

6.13.[6.13] 1) $C = 1$; 2) $0,75$; 3) $\frac{n_2+1-n_1}{n_1(n_2+1)}$, якщо $n_1 \leqslant n_2$.

6.14.[6.14] 1) $C = 4$; 2) $0,9$; 3) $2 \cdot \left(\frac{1}{n_1(n_1+1)} - \frac{1}{(n_2+1)(n_2+2)}\right)$, якщо $n_1 \leqslant n_2$.

6.16.[6.16] $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 0,25, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,75, & \text{якщо } 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

6.18.[6.18] $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{якщо } a < x \leqslant b, \\ 1, & \text{якщо } x > b. \end{cases}$

6.19.[6.19] $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{T}\right)^2, & \text{якщо } 0 < x \leqslant T, \\ 1, & \text{якщо } x > T. \end{cases}$

6.20.[6.20] $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ \mathbb{P}(\overline{A}), & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

6.21.[6.21] 1) $F_{\xi^2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}+0), & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$

2) $F_{\sqrt{|\xi|}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ F(x^2) - F(-x^2+0), & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$ 3) $F_{\ln|\xi|}(x) = F(e^x) - F(-e^x+0)$; 4) $F_{\xi^+}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ F(x), & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$

5) $F_{e^\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ F(\ln x), & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$ 6) $F_{g(\xi)}(x) = F(g^{-1}(x))$,

якщо g — зростаюча і $F_{g(\xi)}(x) = 1 - F(g^{-1}(x) + 0)$, якщо g — спадна.

6.22.[6.22] $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{якщо } x \geqslant 0. \end{cases}$

6.23.[6.23] $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ x, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

6.24.[6.24] $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{\pi}$.

6.25.[6.25] $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} \cdot x^p, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

6.26.[6.26] 3) і 5) є функціями розподілу; 1), 2) і 4) не є функціями розподілу.

6.27.[6.27] 1) $C = 3$; 2) $p_\eta(x) = 3x^2$, якщо $0 < x < 1$; 3) $0,026$.

6.28.[6.28] 1) $a = \frac{\lambda}{2}$; 2) $F_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x}, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

6.29.[6.29] 1) $p_{\eta_1}(x) = 2\alpha x e^{-\alpha x^2}$, якщо $x > 0$; 2)

$p_{\eta_2}(x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} e^{-\alpha\sqrt{x}}$, якщо $x > 0$; 3) $p_{\eta_3}(x) = \alpha^2 e^{\alpha x} e^{-\alpha e^{\alpha x}}$, якщо $x \in \mathbb{R}$.

6.33.[6.33] 1) $a = \frac{2}{\pi}$; 2) $\mathbb{P}\{\xi > \frac{\pi}{4}\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}$;

$$3) F_{\xi^2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{x} + \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2}\right), & \text{якщо } 0 < x \leqslant \frac{\pi^2}{4}, \\ 1, & \text{якщо } x > \frac{\pi^2}{4}. \end{cases}$$

6.34.[6.34] 1) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$; 2)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ \frac{x^3}{8}, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$$ 3) $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, якщо $x \geqslant 0$; 4) $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ -\frac{2h}{\sqrt{\pi}} x e^{-h^2x^2} + 2\Phi_0(\sqrt{2}hx), & \text{якщо } x > 0, \end{cases}$$ де

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$; 5)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x-m)}, & \text{якщо } x \leqslant m, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(x-m)}, & \text{якщо } x > m; \end{cases}$$ 6)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant x_0, \\ 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^a, & \text{якщо } x > x_0; \end{cases}$$ 7) $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^n}$, $x > a$.

6.35.[6.35] $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ \frac{ax^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}, & \text{якщо } -1 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$

$p_\xi(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{2}, & \text{якщо } x \in [-1;1], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [-1;1], \end{cases}$ де $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

6.38.[6.38] $F_{\xi_1}(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ \frac{t^2}{2}, & 0 < t \leqslant 1, \\ 1 - \frac{(2-t)^2}{2}, & 1 < t \leqslant 2, \\ 1, & t > 2, \end{cases}$

$p_{\xi_1}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0;2], \\ t, & t \in (0;1], \\ 2 - t, & t \in (1;2]; \end{cases}$ $F_{\xi_2}(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant -1, \\ \frac{(1+t)^2}{2}, & -1 < t \leqslant 0, \\ 1 - \frac{(1-t)^2}{2}, & 0 < t \leqslant 1, \\ 1, & t > 1, \end{cases}$

$$p_{\xi_2}(t)=\begin{cases} 0, & t\notin[-1;1],\\ 1+t, & t\in(-1;0],\\ 1-t, & t\in(0;1]; \end{cases}\quad F_{\xi_3}(t)=\begin{cases} 0, & t\leqslant 0,\\ t-t\ln t, & 0<t\leqslant 1,\\ 1, & t>1, \end{cases}$$

$$p_{\xi_3}(t)=\begin{cases} 0, & t\notin(0;1),\\ -\ln t, & t\in(0;1); \end{cases}$$

$$F_{\xi_4}(t)=\begin{cases} 0, & t\leqslant 0,\\ \frac{t}{2}, & 0<t\leqslant 1,\\ 1-\frac{1}{2t}, & t>1, \end{cases}\quad p_{\xi_4}(t)=\begin{cases} 0, & t<0,\\ \frac{1}{2}, & 0<t\leqslant 1,\\ \frac{1}{2t^2}, & t>1; \end{cases}$$

$$F_{\xi_5}(t)=\begin{cases} -\frac{1}{2t}, & t\leqslant -1,\\ 1+\frac{t}{2}, & -1<t\leqslant 0,\\ 1, & t>0, \end{cases}\quad p_{\xi_5}(t)=\begin{cases} \frac{1}{2t^2}, & t\leqslant -1,\\ \frac{1}{2}, & -1<t<0,\\ 0, & t>0; \end{cases}$$

$$F_{\xi_6}(t)=\begin{cases} 0, & t\leqslant 0,\\ 2\sqrt{t}-t, & 0<t\leqslant 1,\\ 1, & t>1, \end{cases}\quad p_{\xi_6}(t)=\begin{cases} 0, & t\notin(0;1),\\ \frac{1}{\sqrt{t}}-1, & t\in(0;1); \end{cases}$$

$$F_{\xi_7}(t)=\begin{cases} 0, & t\leqslant 0,\\ t^2, & 0<t\leqslant 1,\\ 1, & t>1, \end{cases}\quad p_{\xi_7}(t)=\begin{cases} 0, & t\notin[0;1],\\ 2t, & t\in[0;1); \end{cases}$$

$$F_{\xi_8}(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 2t-t^2, & 0<t\leqslant 1,\\ 1, & t>1,\end{cases}\quad p_{\xi_8}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[0;1],\\ 2-2t, & t\in(0;1].\end{cases}$$

6.39.[6.39] У випадках а) і б) $\frac{1}{e}$; в)

$$\mathbb{P}\{\xi>t+3|\xi>t\}=\begin{cases}\frac{1}{e}, & \text{якщо } t\geqslant 0,\\ e^{-\frac{t}{3}-1}, & \text{якщо } -3<t\leqslant 0,\\ 1, & \text{якщо } t<-3.\end{cases}$$

6.40.[6.40] $0,25$.

6.44.[6.44] $\int\limits_{\Omega}\varliminf\limits_{n\to+\infty} f_n(\omega)P\,(d\omega)=0$, $\int\limits_{\Omega}\varlimsup\limits_{n\to+\infty} f_n(\omega)P\,(d\omega)=1$,

$\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{\Omega} f_n(\omega)P\,(d\omega)=\frac{2}{3}$, $\varliminf\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{\Omega} f_n(\omega)P\,(d\omega)=\frac{1}{3}$.

7. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Розподіл ймовірностей випадкової величини може бути досить складним для опису, тому доцільним є використання деяких інтегральних характеристик, які зберігають ті чи інші риси розподілу.
Нехай $(\Omega, S, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір. Математичним сподіванням випадкової величини ξ називається число

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF_{\xi}(x),$$

якщо інтеграл Лебега-Стільтьєса, що стоїть у правій частині цієї рівності, за мірою, асоційованою з функцією розподілу $F_{\xi}(x)$, існує.
Зауваження 7.1. Нагадаємо, що інтеграл Лебега від функції $g(x)$ за деякою мірою ν існує тоді і лише тоді, коли існує інтеграл Лебега від функції $|g(x)|$ за мірою ν.
Зауваження 7.2. У термінах інтеграла за ймовірнісною мірою

математичне сподівання може бути записане у вигляді

$$\mathbf{M}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

Якщо ξ — абсолютно неперервна випадкова величина, то $F_{\xi}(x)$ — абсолютно неперервна на $\mathbb{R}$, а, отже, має щільність $p_{\xi}(x)$, то рівність (??) може бути переписана у вигляді

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi}(x)\, dx. \tag{7.1}$$

Якщо ξ — дискретна випадкова величина $\xi(\omega) \in \bigcup_k \{x_k\}$, $x_k \in \mathbb{R}$, то (див. задачі 6.46, 6.47)

$$\mathbf{M}\xi = \sum_k x_k \mathbb{P}\{\xi = x_k\}. \tag{7.2}$$

Загалом, якщо $\eta = g(\xi)$, де g — вимірна функція, то

$$\mathbf{M}\eta = \mathbf{M}g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dF_{\xi}(x), \tag{7.3}$$

у випадку, коли інтеграл Лебега-Стільтьєса у правій частині існує.
З означення математичного сподівання випливає його лінійність. Отже, якщо ξ, η — деякі випадкові величини, для яких існують $\mathbf{M}\xi$, $\mathbf{M}\eta$, то $(\forall a, b \in \mathbb{R}) : \mathbf{M}(a\xi + b\eta) = a\mathbf{M}\xi + b\mathbf{M}\eta$.
Величина $\mathbf{M}\xi^k$ називається моментом k-го порядку, випадкової величини ξ, $\mathbf{M}|\xi|^k$ — абсолютним моментом k-го порядку, $\mathbf{M}(\xi - c)^k$ називається моментом k-го порядку щодо точки $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{M}|\xi - c|^k$ — абсолютним моментом k-го порядку щодо точки $c \in \mathbb{R}$, моменти щодо математичного сподівання називаються центральними моментами.
Другий центральний момент називається дисперсією і позначається $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2$; квадратний корінь з дисперсії називається середнім квадратичним відхиленням. Для обчислення дисперсії іноді зручно використовувати формулу $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2$.
Медіаною розподілу випадкової величини ξ називається довільне число μ, що задовольняє нерівності $F_\xi(\mu) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F_\xi(\mu + 0)$. Медіана, взагалі кажучи, визначається

неоднозначно, проте завжди існує. Якщо випадкова величина ξ неперервна і має неперервну щільність розподілу $p_\xi(x)$, то **модою** називається довільна точка глобального максимуму $p_\xi(x)$. Для дискретної випадкової величини, яка зосереджена в точках x_k, а відповідні ймовірності дорівнюють $p_k > 0$, модою називається довільна точка x_ν, для якої $p_\nu \geqslant p_k$ при $k \neq \nu$.

Приклад

Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-\pi, \pi]$. Знайти: 1) $\mathbf{M} \sin \xi$, $\mathbf{D} \sin \xi$; 2) $\mathbf{M} \sin^k \xi$ при $k \in \mathbb{N}$ і асимптотику $\mathbf{M} \sin^k \xi$ при $k \to +\infty$.

Маємо $p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}$, $x \in [-\pi, \pi]$, і $p_\xi(x) = 0$, $x \notin [-\pi, \pi]$. За формулою (7.3)

$$\mathbf{M} \sin \xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0.$$

Зрозуміло, що для довільного непарного k також $\mathbf{M} \sin^k \xi = 0$. Нехай тепер $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Інтегруючи частинами і використовуючи основну тригонометричну тотожність, одержуємо

$$\mathbf{M}\sin^{2n}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2n}x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\sin^{2n-1}x\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2n-1)\sin^{2n-2}x\cos^2 x\,dx =$$

$$= \frac{2n-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2n-2}x\,dx - \frac{2n-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2n}x\,dx.$$

Звідси

$$\mathbf{M}\sin^{2n}\xi = \frac{2n-1}{2n}\mathbf{M}\sin^{2n-2}\xi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

де $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$, $(2n)!! = 2\cdot 4\cdots(2n)$.

За формулою Стірлінга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ $(n\to+\infty)$ знаходимо асимптотику для $\mathbf{M}\sin^{2n}\xi$:

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \sim \frac{(2n/e)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{4^n(n/e)^{2n}2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}},\quad n\to+\infty.$$

Нарешті, $\mathbf{D}\sin\xi = \mathbf{M}\sin^2\xi - (\mathbf{M}\sin\xi)^2 = \frac{1}{2}$.

Один з прийомів, який допомагає спростити обчислення математичного сподівання випадкових величин — це введення сум індикаторів [Розд. 6, с. 178]. Часто виявляється, що можна зазначити такі події $A_1, \ldots, A_n$, що розглядувана випадкова величина ξ зображається у вигляді $\xi = \chi_{A_1} + \cdots + \chi_{A_n}$. Тоді

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\chi_{A_k} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Приклад

Зі скриньки, що містить M білих і $N - M$ чорних куль, за схемою випадкового вибору без повернення виймають вибірку з n куль. Нехай ξ — кількість білих куль у вибірці. Знайти $\mathbf{M}\xi$ і $\mathbf{D}\xi$.

Випадкова величина ξ має гіпергеометричний розподіл $\mathbb{P}\{\xi = k\} = \dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$. Для обчислення $\mathbf{M}\xi$ використаємо послідовно (7.2), рівності $C_m^p = \frac{m}{p} C_{m-1}^{p-1}$ $(1 \leqslant p \leqslant m)$ і те, що

$$\sum_{k=1}^{n} C_{\mu-1}^{k-1} C_{(N-1)-(\mu-1)}^{(n-1)-(k-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} C_{\mu-1}^{j} C_{(N-1)-(\mu-1)}^{n-1-j}$$

— це коефіцієнт при x^{n-1} у добутку $(1+x)^{\mu-1}(1+x)^{(N-1)-(\mu-1)} = (1+x)^{N-1}$, тобто він дорівнює C_{N-1}^{n-1}.

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{k=1}^{n} \frac{k C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = M \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{M-1}^{k-1} C_{(N-1)-(M-1)}^{(n-1)-(k-1)}}{C_{N-1}^{n-1} \frac{N}{n}} = M \frac{n}{N}.$$

Проте обчислити таким способом $\mathbf{D}\xi$ не так просто. Занумеруємо кулі у вибірці в порядку витягання. Нехай подія $A_i = \{i\text{-та куля біла }\}$, η_i — індикатор події A_i, тобто $\eta_i = 1$, якщо A_i відбулась, і $\eta_i = 0$ у протилежному випадку. Тоді $\xi = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n$. За класичним означенням ймовірності $\mathbb{P}\{\eta_i = 1\} = \mathbb{P}(A_i) = \frac{M}{N}$, $\mathbb{P}\{\eta_i\eta_j = 1\} = \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}$ $(i \neq j)$. Знову знаходимо $\mathbf{M}\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\eta_i = n\frac{M}{N}$.

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = \mathbf{M}(\eta_1 + \cdots + \eta_n)^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\eta_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{M}(\eta_i \eta_j) - n^2 \frac{M^2}{N^2}. \tag{7.4}$$

Отже, треба обчислити $\mathbf{M}\eta_i^2$ і $\mathbf{M}(\eta_i\eta_j)$ $(i \neq j)$, $i, j \in \mathcal{N}$.

$$\mathbf{M}\eta_i^2 = \mathbf{M}\eta_i = \frac{M}{N}, \quad \mathbf{M}(\eta_i\eta_j) = \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{M-1}{N-1}\frac{M}{N}.$$

Підставляючи ці значення в (7.4), отримуємо

$$\mathbf{D}\xi = n\frac{M}{N} + 2C_n^2 \frac{M-1}{N-1}\frac{M}{N} - n^2\frac{M^2}{N^2} =$$

$$= n\frac{M}{N}\left(1 + (n-1)\frac{M-1}{N-1} - n\frac{M}{N}\right) = n\frac{M}{N}\frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)}.$$

7.1. [7.1] Знайти математичне сподівання і дисперсію для таких розподілів:

1) $\mathbb{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k \in \{0, \dots, n\}$, $q = 1 - p$ (біномний розподіл);

2) $\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda > 0$ (розподіл Пуассона);

3) $\mathbb{P}\{\xi = k\} = pq^{k-1}$, $q = 1 - p$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (гіпергеометричний розподіл);

4) $\mathbb{P}\{\xi = k\} = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (від'ємний геометричний розподіл);

5) $\mathbb{P}\{\xi = a\} = 1$, $a \in \mathbb{R}$ (вироджений розподіл);

6) $f(x) = \frac{1}{b-a}$, якщо $x \in [a, b]$, $p(x) = 0$, якщо $x \notin [a, b]$ (рівномірний розподіл);

7) $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, якщо $x \geqslant 0$, $p(x) = 0$, якщо $x < 0$, $\lambda > 0$ (показниковий розподіл);

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ (нормальний розподіл $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$).

7.2. [7.2] Випадкова величина ξ набуває лише цілі невід'ємні значення. Довести, що $\mathbf{M}\xi = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{\xi \geqslant m\}$.

Розв'язок. Маємо

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}\{\xi = k\} = \sum_{k=1}^{+\infty} \cdot \mathbb{P}\{\xi = k\} \sum_{m=1}^{k} 1 =$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=m}^{+\infty} \mathbb{P}\{\xi = k\} = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{\xi \geqslant m\}.$$

7.3. [7.3] Розподіл дискретної випадкової величини ξ задається формулою $\mathbb{P}\{\xi = i\} = \frac{1}{5}$, $i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Обчислити математичне сподівання величин $\eta_1 = -\xi$, $\eta_2 = |\xi|$.

Розв'язок. За означенням

$\mathbf{M}\eta_1 = \sum x_k p_k = \frac{1}{5}(-2 - 1 + 0 + 1 + 2) = 0,$

$\mathbf{M}\eta_2 = \mathbf{M}|\xi| = 2 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{5}.$

7.4. [7.4] У послідовності незалежних випробувань ймовірність появи події A при одному випробуванні дорівнює p. Нехай ξ — кількість випробувань до r-ї появи події A. Знайти $\mathbb{P}\{\xi = n + r - 1\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Нехай $\eta = \xi - r + 1$ (від'ємний геометричний розподіл). Знайти $\mathbf{M}\eta$.

7.5. [7.5] Щільність розподілу випадкової величини ξ задається формулою $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 3x^{-4}, & x \geqslant 1. \end{cases}$ Знайти математичні сподівання та дисперсії випадкових величин ξ і $\eta = 1/\xi$, $\mathbb{P}\{-3 < \xi \leqslant \sqrt{0.7}\}$.

Розв'язок.

$$\mathbb{P}\{-3 < \xi \leqslant \sqrt{0.7}\} = F_\xi(\sqrt{0.7}+0) - F_\xi(-3) = \int\limits_{-3}^{\sqrt{0.7}} f_\xi(t)dt = 0.$$

$$\mathbf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \int\limits_{1}^{+\infty} 3x^{-3}dx = 3/2,$$

$$\mathbf{M}\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int\limits_{1}^{+\infty} 3x^{-2}dx = 3,$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = 3 - (3/2)^2 = 0.75.$$

7.6. [7.6] Випадкова величина ξ має функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 < x \leqslant 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Знайти $\mathbf{M}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

Розв'язок. Маємо

$f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \in (0, 5)$, $f(x) = 0$, $x \notin [0, 5]$.

$\mathbf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \lambda \int\limits_{0}^{5} xe^{-\lambda x}dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{5} + \int\limits_{0}^{5} e^{-\lambda x}dx =$

$= -5e^{-5\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{5} = -5e^{-5\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-5\lambda} + \frac{1}{\lambda}$.

7.7. [7.7] Три стрільці, ймовірності влучань для яких дорівнюють p_1, p_2 і p_3 відповідно, зробили по одному пострілу по тій самій мішені. Знайти розподіл випадкової величини ξ – загального числа влучань та $\mathbf{M}\xi$.

Розв'язок. Маємо
$\mathbb{P}\{\xi = 0\} = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$,
$\mathbb{P}\{\xi = 1\} = p_1(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)p_2(1-p_3)+(1-p_1)(1-p_2)p_3 = p_1+p_2+p_3-2p_1p_2-2p_1p_3-2p_2p_3+3p_1p_2p_3$,
$\mathbb{P}\{\xi = 2\} = p_1p_2(1-p_3)+(1-p_1)p_2p_3+p_1(1-p_2)p_3 = p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3-3p_1p_2p_3$, $\mathbb{P}\{\xi = 3\} = p_1p_2p_3$.
$\mathbf{M}\xi = 0\mathbb{P}\{\xi = 0\}+1\mathbb{P}\{\xi = 1\}+2\mathbb{P}\{\xi = 0\}+3\mathbb{P}\{\xi = 3\} =$
$= (p_1+p_2+p_3-2p_1p_2-2p_1p_3-2p_2p_3+3p_1p_2p_3)+2(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3-3p_1p_2p_3)+3p_1p_2p_3 = p_1+p_2+p_3$.

Інший спосіб. Нехай χ_i – індикатор успіху i-го стрільця. Тоді
$\mathbf{M}\chi_i = 0\cdot(1-p_i)+1p_i = p_i$,
$\xi = \chi_1+\chi_2+\chi_3 \Longrightarrow \mathbf{M}\xi = \mathbf{M}\chi_1+\mathbf{M}\chi_2+\mathbf{M}\chi_3 = p_1+p_2+p_3$.

7.8. [7.8] Два стрільці, A і B, ймовірності влучання для яких дорівнюють $2/3$ і $3/4$ відповідно, стріляють по черзі в мішень, причому починає A. Кожен має право на 5 пострілів, а гра припиняється після першого влучання. Нехай ξ – число проведених пострілів. Знайти розподіл ξ та $\mathbf{M}\xi$.

7.9. [7.9] Урна містить N куль, позначених номерами від 1 до N. Послідовно з поверненням виймають n куль. Нехай ξ – найбільший номер, який було одержано при цьому. Знайти розподіл ξ і $\mathbf{M}\xi$.

7.10. [7.10] Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[0,\pi]$. Знайти: 1) $\mathbf{M}\sin\xi$, $\mathbf{M}\cos\xi$, $\mathbf{D}\sin\xi$, $\mathbf{D}\cos\xi$;
2) $\mathbf{M}\sin^k\xi$, $\mathbf{M}\cos^k\xi$ при $k\in\mathbb{N}$ та головний член їх асимптотики при $k\to+\infty$.

Розв'язок. 1) Маємо

$\mathbf{M}\sin\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x dx$, бо $f(x)=\frac{1}{\pi}, x\in(0,\pi)$.

$\mathbf{M}\sin\xi = -\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}$.

$$\mathbf{M}\sin^2\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin^2 x f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{D}\sin\xi = \mathbf{M}\sin^2\xi - (\mathbf{M}\sin\xi)^2 = \frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}.$$

7.11. [7.11] Випадкова величина ξ має показниковий розподіл $\mathbb{P}\{\xi > x\} = e^{-x}$ при $x \geqslant 0$. Знайти $\mathbf{M}(\xi(1-e^{-\alpha\xi}))$.
7.12. [7.12] Випадкова точка A має рівномірний розподіл у крузі радіуса R. Знайти математичне сподівання і дисперсію відстані ξ від точки A до центра круга.
Розв'язок. Маємо
$F_\xi(x) = \dfrac{x^2}{R^2}$, $0 \le x \le R$, $f_\xi(x) = \frac{2x}{R^2}$, $0 \le x \le R$, $f_\xi(x) = 0$, $x \notin [0, R]$.

$$\mathbf{M}\xi = \int_0^R x f_\xi(x)dx = \int_0^R \frac{2x^2}{R^2}dx = \frac{2R}{3},$$

$$\mathbf{M}\xi^2 = \int_0^R x^2 f_\xi(x)dx = \int_0^R \frac{2x^3}{R^2}dx = \frac{R^2}{2},$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{4R^2}{9} = \frac{R^2}{18}.$$

7.13. [7.13] Функція розподілу неперервної випадкової величини ξ має вигляд $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ a + b\arcsin x, & -1 < x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$ (закон арксинуса). Визначити сталі a і b. Знайти $\mathbf{M}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

7.14. [7.14] Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[1/e, e]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \ln\xi$, а також $\mathbf{M}\eta$, $\mathbb{P}\{\eta > 0\}$. А якщо б ξ мала рівномірний розподіл на відрізку $[0, e]$?

7.15. [7.15] Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = |\xi|$, $\mathbf{M}\eta$, якщо випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку: а) $[-1, 1]$; б) $[-1, 5]$.

7.16. [7.16] Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[1; 4]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \sqrt{\xi}$, $\mathbf{M}\eta$, $\mathbb{P}\{\eta > 1,5\}$.

7.17. [7.17] Нехай ξ — випадкова величина з рівномірним розподілом на відрізку $[0, 1]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \frac{1}{\xi}$, $\mathbf{M}\eta$.

7.18. [7.18] Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \cos\xi$, $\mathbf{M}\eta$.

7.19. [7.19] Нехай ξ — рівномірно розподілена на $[0,1]$ випадкова величина. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\xi)$, $\lambda > 0$, $\mathbf{M}\eta$.

7.20. [7.20] Випадкова величина ξ має розподіл Коші. Обчислити а) $\mathbb{P}\{\xi^2+\xi>0\}$; б) $\mathbf{M}(\mathrm{arctg}\,\xi)^2$; в) $\mathbf{M}(\min\{|\xi|,1\})$.

Розв'язок. Маємо

$$\mathbb{P}\{\xi^2+\xi>0\} = \int\limits_{\{\xi^2+\xi>0\}} \mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\{x^2+x>0\}} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\infty}^{-1} + \int\limits_{0}^{+\infty}\Big)\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\Big(arctgx\Big|_{-\infty}^{-1} + arctgx\Big|_{0}^{+\infty}\Big) = \frac{3}{4}.$$

$$\mathbf{M}(\mathrm{arctg}\,\xi)^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(arctgx)^2dx}{1+x^2} = \frac{1}{3\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d(arctgx)^3 = \frac{\pi^3 2}{2^3 3\pi} = \frac{\pi^2}{12}.$$

7.21. [7.21] Знайти $\mathbf{M}|\xi|$, якщо ξ має нормальний розподіл $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Розв'язок. Маємо

$$\mathbf{M}|\xi| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2/2} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2} d(x^2/2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

7.22. [7.22] Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 2$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \mathrm{e}^{\xi}$, $\mathbf{M}\eta$.

7.23. [7.23] Випадкова величина має показниковий розподіл з параметром λ. Знайти розподіл випадкової величини $\eta = [\xi]$ і $\mathbf{M}\eta$.

7.24. [7.24] Нехай $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ. Знайти розподіл η та $\mathbf{M}\eta$, якщо
$\eta = \operatorname{sign} \xi = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ -1, & \xi < 0, \\ 0, & \xi = 0 \end{cases}$. Розглянути в загальному випадку та у випадку, коли ξ має розподіл $\mathcal{N}(4, 4)$.

Розв'язок. Власне η – дискретна випадкова величина. Маємо
$\mathbb{P}\{\eta = -1\} = \mathbb{P}\{\xi < 0\} = F_\xi(0), \mathbb{P}\{\eta = 0\} = \mathbb{P}\{\xi = 0\} = F_\xi(+0) - F_\xi(0), \mathbb{P}\{\eta = 1\} = \mathbb{P}\{\xi > 0\} = 1 - F_\xi(+0)$.
Для конкретного нормального розподілу залишається в отримані формули для ймовірностей підставити його функцію розподілу. Зауважимо лише, що у цьому випадку
$\mathbb{P}\{\eta = 0\} = \mathbb{P}\{\xi = 0\} = F_\xi(+0) - F_\xi(0) = 0$, бо нормальний розподіл є неперервним розподілом.

7.25. [7.25] Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0,5 \cdot \cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти медіану, моду, математичне сподівання та дисперсію ξ.

7.26. [7.26] Нехай ξ — випадкова величина. Довести, що $\mathbf{M}(\xi - a)^2$ набуває найменшого значення при $a = \mathbf{M}\xi$, а $\mathbf{M}|\xi - a|$ — при $a = \mu$, де μ — медіана розподілу ξ.

7.27. [7.27] Випадкова величина ξ розподілена рівномірно на деякому відрізку, причому $\mathbf{M}\xi = 4$, $\mathbf{D}\xi = 3$. Знайти щільність розподілу ξ.

7.28. [7.28] Дискретні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots$ незалежні й однаково розподілені за законом, що задається таблицею

x_i	-1	0	1
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Нехай $s_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Знайти $\mathbf{M}s_n$, $\mathbf{D}s_n$.

7.29. [7.29] З 30 чисел $(1, 2, \ldots, 29, 30)$ за схемою випадкового вибору без повернення відбирається 10 чисел. Знайти математичне сподівання суми вибраних чисел.
7.30. [7.30] У групі навчається 25 студентів. Припускаючи, що дні народження студентів незалежні і рівномірно розподілені по 12 місяцях року, знайти математичне сподівання числа μ_r тих місяців, на які припадає r днів народження.
7.31. [7.31] Довести таке: якщо $\mathbf{M}|\xi| < +\infty$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbb{P}\{|\xi| \geqslant x\} = 0$.
7.32. [7.32] Випадкова величина ξ має функцію розподілу $F_\xi(x)$. Довести таке: якщо $\mathbf{M}|\xi| < +\infty$, то

$$\mathbf{M}\xi = \int_0^{+\infty} (1 - F_\xi(x))\, dx - \int_{-\infty}^{0} F_\xi(x)\, dx.$$

7.33. [7.33] Невід'ємна випадкова величина ξ має функцію розподілу $F_\xi(x)$. Довести, що $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\mathbf{M}\xi^\alpha = |\alpha| \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(1 - F_\xi(x))\, dx.$$

7.34. [7.34] Нехай η_n — кількість переходів від успіху до неуспіху або навпаки за n випробувань схеми Бернуллі, в якій ймовірність успіху в окремому випробуванні дорівнює p. Знайти $\mathbf{M}\eta_n$ і $\mathbf{D}\eta_n$.
7.35. [7.35] Виразити центральний момент μ_k через моменти порядку $\leqslant k$.
7.36. [7.36] Виразити момент k-го порядку через центральні моменти і математичне сподівання.
7.37. [7.37] Довести таке: якщо $\mathbf{M}|\xi|^\alpha < +\infty$, $\alpha \geqslant 1$, то $\mathbf{M}|\xi - a|^\alpha < +\infty$ для довільного $a \in \mathbb{R}$.
7.38. [7.38] Якщо F — функція розподілу випадкової величини з математичним сподіванням 0 і середнім квадратичним відхиленням σ, то $F(x) \leqslant \sigma^2/(\sigma^2 + x^2)$ $(x < 0)$, $F(x) \geqslant x^2/(\sigma^2 + x^2)$ $(x > 0)$. Довести.

Вказівки до розділу 7

7.2. Довести рівність $\mathbf{M}\xi = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}\{\xi = k\} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{m=k}^{+\infty} \mathbb{P}\{\xi = m\} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{\xi \geqslant k\}$.

7.6. За властивостями інтеграла Лебега-Стільтьєса

$$\mathbf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x) = \int\limits_{0}^{5} x\,dF(x) + 5 \cdot (F(5+0) - F(5)).$$

7.10. а) Див. приклад 7.1.

7.26. Розглянути моменти, записавши їх у вигляді

$$\mathbf{M}(\xi - a)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2\,dF_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left((x - \mathbf{M}\xi) + (\mathbf{M}\xi - a)\right)^2\,dF_\xi(x)$$

і $$\mathbf{M}|\xi - a| = \begin{cases} \mathbf{M}|\xi - \mu| + 2\int\limits_{\mu}^{a} (a - x)\,dF_\xi(x), & \text{якщо } a \geqslant \mu, \\ \mathbf{M}|\xi - \mu| + 2\int\limits_{a}^{\mu} (x - a)\,dF_\xi(x), & \text{якщо } a < \mu. \end{cases}.$$

7.30. Використати метод сум індикаторів, тобто $\mu_r = \sum\limits_{i=1}^{12} \theta_i$, де $\theta_i = 1$, якщо на i-ий місяць припадає рівно r днів народження і $\theta_i = 0$ в іншому випадку.

7.31. Якщо $F(x) = \mathbb{P}\{|\xi| < x\}$, то $\mathbf{M}|\xi| = \int\limits_0^{+\infty} x\,dF(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \int\limits_k^{k+1} x\,dF(x) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}\{k \leqslant |\xi| < k+1\} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{|\xi| \geqslant k\}$.

7.32. З існування $\mathbf{M}|\xi|$ вивести, що $F_\xi(x)x \to 0$ $(x \to -\infty)$, $(1 - F_\xi(x))x \to 0$ $(x \to +\infty)$. Застосувати формулу Ньютона-Лейбніца.

7.33. Застосувати результат задачі 7.32 для $\eta = \xi^\alpha$.

7.37. Довести, що $(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(|a|^n + |b|^n)$.

7.38. При $x < 0$ маємо

$$-x = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)\,dF(y) \leqslant \int_x^{+\infty} (y - x)\,dF(y).$$

Піднести останню нерівність до квадрата.

Відповіді до розділу 7

7.1. 1) $\mathbf{M}\xi = np$, $\mathbf{D}\xi = npq$; 2) $\mathbf{M}\xi = \mathbf{D}\xi = \lambda$; 3) $\mathbf{M}\xi = \frac{q}{p}$, $\mathbf{D}\xi = \frac{q}{p^2}$; 4) $\mathbf{M}\xi = \frac{rq}{p}$, $\mathbf{D}\xi = \frac{rq}{p^2}$; 5) $\mathbf{M}\xi = a$, $\mathbf{D}\xi = 0$; 6) $\mathbf{M}\xi = \frac{a+b}{2}$, $\mathbf{D}\xi = \frac{(a-b)^2}{12}$; 7) $\mathbf{M}\xi = \frac{1}{\lambda}$, $\mathbf{D}\xi = \frac{1}{\lambda^2}$; 8) $\mathbf{M}\xi = a$, $\mathbf{D}\xi = \sigma^2$. 7.3. $\mathbf{M}\eta_1 = 0$, $\mathbf{M}\eta_2 = \frac{6}{5}$. 7.4. $\mathbb{P}\{\xi = n + r - 1\} = C_{n+r-1}^{r-1} p^r q^n$, $\mathbf{M}\eta = \frac{rq}{p}$.
7.5. $\mathbf{M}\xi = \frac{3}{2}$, $\mathbf{M}\eta = \frac{3}{4}$, $\mathbf{D}\xi = \frac{3}{4}$, $\mathbf{D}\eta = \frac{3}{80}$, $\mathbb{P}\{-3 < \xi \leqslant \sqrt{0,7}\} = 0$.
7.6. $\mathbf{M}\xi = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-5\lambda})$, $\mathbf{D}\xi = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} - e^{-5\lambda}\left(10 + \frac{2}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{\lambda^2} e^{-10\lambda}$.
7.7. Розподіл ξ: $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$, $\mathbb{P}\{\xi = 1\} = p_1 + p_2 + p_3 - 2(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) + 3p_1 p_2 p_3$, $\mathbb{P}\{\xi = 2\} = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 3p_1 p_2 p_3$, $\mathbb{P}\{\xi = 3\} = p_1 p_2 p_3$; $\mathbf{M}\xi = p_1 + p_2 + p_3$. 7.8. Розподіл ξ: $\mathbb{P}\{\xi = 2k + 1\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{12^k}$, якщо $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathbb{P}\{\xi = 2k\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12^{k-1}}$, якщо $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbb{P}\{\xi = 10\} = \frac{1}{3 \cdot 12^4}$; $\mathbf{M}\xi = \frac{22621}{15552} \approx 1,45454$.

7.9. $\mathbb{P}\{\xi=k\}=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^i\cdot\left(\frac{k}{N}\right)^{n-i}=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$, $k=\overline{1,N}$;
$\mathbf{M}\xi=\left(N^{n+1}-\sum\limits_{k=1}^{N}(k-1)^n\right)/N^n$.
7.10. а) $\mathbf{M}\sin\xi=\frac{2}{\pi}$, $\mathbf{M}\cos\xi=0$, $\mathbf{D}\sin\xi=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}$, $\mathbf{D}\cos\xi=\frac{1}{2}$; б) $\mathbf{M}\sin^{2k+1}\xi=\frac{2^{2k}\cdot(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot\frac{2}{\pi}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$, $k\to\infty$,
$\mathbf{M}\cos^{2k}\xi=\mathbf{M}\sin^{2k}\xi=\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$, $k\to\infty$, $\mathbf{M}\cos^{2k+1}\xi=0$.
7.11. $1-\frac{1}{(1+\alpha)^2}$ при $\alpha>-1$; не існує при $\alpha\leqslant-1$. 7.12. $\mathbf{M}\xi=\frac{2R}{3}$, $\mathbf{D}\xi=\frac{R^2}{18}$. 7.13. $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{\pi}$, $\mathbf{M}\xi=0$, $\mathbf{D}\xi=\frac{1}{2}$. 7.14. 1) $p_\eta(x)=\frac{e^x}{e-e^{-1}}$, якщо $x\in(-1;1)$, $\mathbf{M}\eta=\frac{2}{e^2-1}$, $\mathbb{P}\{\eta>0\}=\frac{e}{e+1}$; 2) $p_\eta(x)=e^{x-1}$, якщо $x\in(-\infty;1)$, $\mathbf{M}\eta=0$, $\mathbb{P}\{\eta>0\}=1-e^{-1}$.
7.15. 1) $p_\eta(x)=1$, якщо $x\in(0;1)$, $\mathbf{M}\eta=\frac{1}{2}$; 2)
$p_\eta(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in(0;1),\\ \frac{1}{6}, & x\in(1;5),\\ 0, & x\notin[0;5],\end{cases}$ $\mathbf{M}\eta=\frac{13}{6}$. 7.16. $p_\eta(x)=\frac{2}{3}x$, якщо $x\in(1;2)$, $\mathbf{M}\eta=\frac{14}{9}$, $\mathbb{P}\{\eta>1,5\}=\frac{7}{12}$. 7.17. $p_\eta(x)=\frac{1}{x^2}$, якщо $x>1$; $\mathbf{M}\eta$ не існує.

7.18. $p_\eta(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, якщо $x \in (0;1)$; $\mathbf{M}\eta = \frac{2}{\pi}$. 7.19.
$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0; \end{cases}$ $\mathbf{M}\eta = \frac{1}{\lambda}$. 7.20. а)
$\mathbb{P}\{\xi^2 + \xi > 0\} = 0,75$; б) $\mathbf{M}(\operatorname{arctg}\xi)^2 = \frac{\pi^2}{12}$; в)
$\mathbf{M}\left(\min\{|\xi|, 1\}\right) = \frac{\ln 2}{\pi}$. 7.21. $\mathbf{M}|\xi| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma$. 7.22. $p_\eta(x) = \frac{2}{x^3}$, якщо
$x > 1$; $\mathbf{M}\eta = 2$. 7.23. $\mathbb{P}\{\eta = k\} = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$,
$\mathbf{M}\eta = \frac{1}{e^\lambda - 1}$. 7.24. 1) $\mathbb{P}\{\eta = 1\} = 1 - F(+0)$,
$\mathbb{P}\{\eta = 0\} = F(+0) - F(0)$, $\mathbb{P}\{\eta = -1\} = F(0)$;
$\mathbf{M}\eta = 1 - F(+0) - F(0)$; 2) $\mathbb{P}\{\eta = 1\} = 0,5 + \Phi_0(2) \approx 0,97725$,
$\mathbb{P}\{\eta = -1\} = 0,5 - \Phi_0(2) \approx 0,02275$; $\mathbf{M}\eta = 2\Phi_0(2) \approx 0,9545$.
7.25. Медіана, мода і $\mathbf{M}\xi = 0$, $\mathbf{D}\xi = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

7.27. $p_\xi(x) = \frac{1}{6}$, якщо $x \in [1,7]$, $p_\xi(x) = 0$, якщо $x \notin [1,7]$; 7.28. $\mathbf{M}s_n = 0$, $\mathbf{D}s_n = \frac{n}{2}$. 7.29. 155. 7.30. $\mathbf{M}\mu_r = 12 \cdot C_{25}^r \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^r \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{25-r}$, $r \in \{0, 1, \ldots, 25\}$. 7.34. $\mathbf{M}\eta_n = 2(n-1)pq$, $\mathbf{D}\eta_n = 4pq(1-3pq)n - 2pq(3-10pq)$, де $q = 1-p$. 7.35. $\mu_k = \sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i \cdot \mathbf{M}\xi^i \cdot (\mathbf{M}\xi)^{k-i}$. 7.36. $\mathbf{M}\xi^k = \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i \cdot \mu_i \cdot (\mathbf{M}\xi)^{k-i}$, де $\mu_i = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^i$.