О. Б. Скасків

Теорія ймовірностей: випадкові процеси

Методичні вказівки до практичних занять
31.01.2023

Зміст

1.1. Аксіоматичне означення ймовірнісного простору 5
1.3. Властивості ймовірності 6
1.6. Формула множення ймовірностей 7
1.7. Повна група гіпотез та формули повної ймовірності і Баєса 7
1.8. Незалежні події 8

Розділ 2. Випадкові величини і функції розподілу 9

2.1. Випадкові величини і випадкові вектори, незалежність випадкових величин 9
1.10. Функції розподілу випадкових величин та їхні властивості 12
1.12. Інтеграли, що зустрічаються в теорії ймовірностей . . 13
1.13. Дискретні випадкові величини 14
1.14. Неперервні випадкові величини: абсолютно неперервні та сингулярні 15
1.15. Рівномірний розподіл 17
1.16. Розподіл Коші 17
1.17. Схема Бернуллі 18
1.18. Граничні теореми у схемі Бернуллі 20
1.19. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання і дисперсія 22
2.13. Властивості математичного сподівання 22
2.14. Властивості дисперсії 24
2.15. Приклади обчислення дисперсії деяких розподілів . . 25
2.16. Нерівність Чебишова і Закон великих чисел (ЗВЧ) . 27
2.17. Незалежні випадкові величини 30
2.18. Випадкові вектори з незалежними компонентами . . 31
2.19. Збіжність майже напевно і збіжність за ймовірністю 32
2.20. Лема Бореля-Кантеллі 33
2.21. Посилений закон великих чисел (ПЗВЧ) 34

2.22. Згортка розподілів випадкових величин 35
2.23. Гамма-розподіл 36
2.24. Розподіл χ^2 37
2.25. Згортка дискретних розподілів 37

Розділ 3. Характеристичні функції і центральна гранична теорема 38
3.1. Означення характеристичної функції 38
3.2. Характеристичні властивості характеристичних функцій 39
3.3. Властивості характеристичних функцій (продовження) 40
3.4. Центральна гранична теорема 43
3.4. Центральна гранична теорема для схеми Бернуллі . . 44
3.5. Приклади застосування характеристичних функцій: теореми додавання розподілів 45
3.6. Твірна функція 45
3.8. Сума випадкової кількості випадкових величин 47

Розділ 4. Умовні розподіли 49
4.1. Означення умовного математичного сподівання 49
4.2. Властивості умовних математичних сподівань 51
4.3. Умовні розподіли: властивості 53

Розділ 5. Випадкові процеси 56
5.1. Означення випадкового процесу. Ймовірнісні характеристики процесу. 56
5.2. Середньо-квадратична неперервність, диференційовність і інтегровність випадкових процесів. 68

Розділ 5. Випадкові процеси 68
5.2. Середньо-квадратична неперервність, диференційовність і інтегровність випадкових процесів. 68
5.3. Основні класи випадкових процесів. 113

Розділ 5. Випадкові процеси 113
5.3. Основні класи випадкових процесів. 113
5.3. Основні класи випадкових процесів. 113

5.2.1. Гаусові процеси. 114
5.3. Процес Вінера 117
5.2. Процес Пуассона 121
5.4. Процеси Маркова з дискретним часом 122
5.5. Однорідний процес (ланцюг) Маркова з дискретним часом 123
5.6. Ланцюги Маркова : фінальні ймовірності, ергодичність, стаціонарний розподіл 127
5.7. Ланцюги Маркова з неперервним часом 135
Список літератури 141

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

У цьому розділі нагадаємо деякі основні поняття з курсів теорії ймовірностей і випадкових процесів та теорії міри і інтеграла.

1.1. Аксіоматичне означення ймовірнісного простору

Нехай Ω — деякий фіксований простір, точки якого ми розглядатимемо як елементарні події у даному експерименті, а сам простір, відповідно, як сукупність всіх результатів експерименту, які тільки можна собі уявити.
Через 2^Ω позначатимемо множину, яка утворена всіма підмножинами Ω.

Означення (**алгебри підмножин**). Сім'я $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ називається *алгеброю*, якщо для її елементів виконуються такі аксіоми: 1. $\Omega \in \mathcal{A}$; 2. $(\forall A)\colon A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$; 3. $(\forall A, B)\colon A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A + B \in \mathcal{A}$.

Означення (**σ-алгебри підмножин**). Сім'я $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ називається *σ-алгеброю,* якщо виконуються такі умови: 1. $\Omega \in \mathcal{A}$; 2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$; 3. $(\forall (A_j)) : A_j \in \mathcal{A}\ (j \geq 1) \Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Означення (**скінченно-адитивної ймовірнісної міри**). Нехай $\mathcal{A}_0$ — алгебра. Відображення $\mathbb{P}_0\colon \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ називається *скінченно-адитивною ймовірнісною мірою на* $\mathcal{A}_0$, якщо виконуються такі умови: 1. $(\forall A \in \mathcal{A}_0) : \mathbb{P}_0(A) \geq 0$; 2. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall (A_j)_{j=1}^n, A_j \in \mathcal{A}_0,\ A_j \cap A_k = \varnothing\ (j \neq k))\colon\ \mathbb{P}_0(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}_0(A_j)$; 3. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Означення (зліченно-адитивної міри). Нехай $\mathcal{A}_0$ — алгебра. Відображення $\mathbb{P}_0\colon \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ називається *зліченно-адитивною мірою на* $\mathcal{A}_0$, якщо виконуються такі умови: 1. $(\forall A \in \mathcal{A}_0) : \mathbb{P}_0(A) \geq 0$;
2. $(\forall (A_j), A_j \in \mathcal{A}_0,\ A_j \cap A_k = \varnothing\ (j \neq k))\colon$

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow \mathbb{P}_0(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j) = \textstyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}_0(A_j).$$

Означення. Нехай $\mathcal{A}_0$ — алгебра. Відображення $\mathbb{P}\colon \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ називається *зліченно-адитивною ймовірнісною мірою* на алгебрі $\mathcal{A}_0$, якщо:
1. $\mathbb{P}$ — зліченно-адитивна міра на $\mathcal{A}_0$; 2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Зліченно-адитивну ймовірнісну міру $\mathbb{P}$, визначену на σ-алгебрі називатимемо *ймовірністю.*

Нехай Ω — простір елементарних подій, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра підмножин Ω, $\mathbb{P}$ — ймовірність, визначена на $\mathcal{A}$. Пару $(\Omega, \mathcal{A})$ називатимемо *ймовірнісною моделлю* експерименту.

Трійка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ називається *ймовірнісним простором.*

1.3. Властивості ймовірності

1. Якщо $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. 2. Нехай $A, B \in \mathcal{A}$ такі, що $B \subset A$. Тоді $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$. 3. (*монотонність ймовірності*). $B \subset A \Rightarrow \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$. 4. (*напівадитивність ймовірності (узагальнена монотонність)*).
$(\forall (A_j),\ A_j \in \mathcal{A}\ (j \in \mathbb{N}))\colon$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

5. (*теорема додавання*). $(\forall N \in \mathbb{N})(\forall\ (A_j)_{j=1}^N,\ A_j \in \mathcal{A}\ (1 \leq j \leq N))\colon$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(A_j) - \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq N} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2}) + \ldots +$$
$$+(-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq N} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_k}) + \ldots +$$
$$+(-1)^{N-1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n).$$

Теорема 1.1 (теорема неперервності ймовірності)**.** *Нехай $\mathbb{P}$ — скінченно-адитивна ймовірнісна міра на $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра. Наступні три твердження еквівалентні:*
1. *$\mathbb{P}$ — σ-адитивна міра, тобто, ймовірність.*
2. $\big(\forall (A_n),\ A_n \in \mathcal{A},\ A_n \subset A_{n+1}\ (n \geq 1)\big)\colon\ \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n).$

3. $\big(\forall (B_n),\ B_n \in \mathcal{A}, B_n \supset B_{n+1}\ (n \geq 1)\big):\ \mathbb{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

1.6. Формула множення ймовірностей

Твердження 1.1. *Нехай* $(A_j)_{j=1}^n$, $A_j \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. *Тоді*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \ldots$$
$$\ldots \times \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \text{ — \textit{формула множення.}}$$

1.7. Повна група гіпотез та формули повної ймовірності і Баєса

Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Нехай $(H_j)_{j=1}^N$ $(N \leq +\infty)$ — скінченний або зліченний набір подій. Система (H_j) називається *повною групою подій* (*повною групою гіпотез*), якщо виконуються такі умови:

1) $\{H_j\}_{j=1}^N$ — попарно несумісні події, тобто $(\forall j \neq k):\ H_j \cap H_k = \varnothing$;

2) $\bigcup\limits_{j=1}^N H_j = \Omega$;   3) $\mathbb{P}(H_j) > 0\ (j \geq 1)$.

Для довільної події $A \in \mathcal{A}$, скориставшись означенням повної групи подій, можемо записати

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_{j=1}^N H_j) = \bigcup_{j=1}^N (A \cap H_j).$$

Звідси, оскільки, $(\forall j \neq k):\ (A \cup H_j) \cap (A \cup H_k) = \varnothing$, за зліченною адитивністю ймовірності, скориставшись формулою для ймовірності добутку подій, отримуємо *формулу повної ймовірності*

$$\mathbb{P}(A) = \sum\nolimits_{j=1}^N \mathbb{P}(A \cap H_j) = \sum\nolimits_{j=1}^N \mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j).$$

Припустимо тепер, що після проведення експерименту виявилось, що відбулася подія A. Тоді, спочатку застосовуючи формулу для умовної ймовірності, а потім формулу повної ймовірності, отримаємо

$$\mathbb{P}(H_j|A) = \frac{\mathbb{P}(H_j \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)} \quad \text{— } \textit{формула Баєса.}$$

Остання формула є правильною для довільної повної групи подій і довільної події A з $\mathbb{P}(A) > 0$.

Вправа. (щасливі білети). На іспит викладач підготував n екзаменаційних білетів, серед яких є $m \leq n$ — "щасливих". 1) Двоє студентів один за одним навмання вибирають білети. У кого з них більше шансів вийняти "щасливий" білет? 2) Обчислити ймовірність вийняти "щасливий" білет для: а) третього студента; б) k-того ($k \leq m$) студента.

1.8. Незалежні події, незалежність σ-алгебр та експериментів

Означення (незалежних подій). Події $A, B \in \mathcal{A}$ називають *незалежними*, якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Твердження 1.2. *Нехай $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B) > 0$.*

$$A \text{ } \textit{і} \text{ } B \text{ — } \textit{незалежні} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Вправа. Довести це твердження самостійно.

Кажуть, що $(A_j)_{j=1}^{N}$ ($N \leq +\infty$) — послідовність *попарно незалежних подій,* якщо A_j і A_k — незалежні ($\forall j \neq k$).

Означення (незалежності в сукупності). Події $(A_j)_{j=1}^{N}, N \leq +\infty$ — *незалежні в сукупності,* якщо $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall 1 \leq i_1 < i_2 \leq \ldots i_n \leq N)$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Надалі, під незалежністю скрізь розуміємо незалежність в сукупності.

Очевидно, що якщо події (A_n) незалежні в сукупності, то вони — незалежні попарно. Як показує приклад С.Н. Бернштейна, зворотна імплікація — неправильна.

Приклад (С. Н. Бернштейна). Підкидають правильну трикутну піраміду (тетраедр), кожна з граней якої розфарбована відповідно у один із кольорів: синій, жовтий, зелений, а основа — у всі три кольори. Скажемо, що при підкиданні піраміди випав певний колір, якщо вона впала на грань, у розфарбуванні якої використано цей колір. Подію, що означає випадання певного кольору позначаємо першою літерою з назви кольору. Тоді, події $\text{ж}, \text{с}, \text{з}$ незалежні попарно, але не є незалежні в сукупності.

Вправа. Для кожного $n \in \mathbb{N},\ n \geq 5$, побудувати приклад послідовності подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, що

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{n-1}}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_{n-1}})$$

для кожного набору індексів $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1} \leq n$, але

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n).$$

Нехай є набір ймовірнісних просторів: $(\Omega, \mathcal{A}_j, \mathbb{P})$, де $\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}$ — σ-алгебри.

Означення (незалежності σ-алгебр). Скажемо, що $(\mathcal{A}_j)$ — послідовність *незалежних σ-алгебр*, якщо $(\forall (A_j),\ A_j \in \mathcal{A}_j):\ (A_j)$ — послідовність незалежних в сукупності подій.

Оскільки з кожним експериментом ми пов'язуємо, взагалі кажучи, свій ймовірнісний простір, зокрема, свою σ-алгебру, то поняття незалежності σ-алгебр природно породжує поняття *незалежності послідовності експериментів.*

Скажемо, що послідовність експериментів є послідовністю *незалежних експериментів*, якщо незалежні їхні σ-алгебри.

1.9. Випадкові величини і випадкові вектори, незалежність випадкових величин

Функція $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ називається *борелевою*, якщо прообраз будь-якої борелевої множини на $\mathbb{R}^n$ є борелевою множиною в $\mathbb{R}^m$, тобто,

$$(\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) : f^{-1}(B) \stackrel{def}{=} \{\omega : f(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір. Функцію $g : \Omega \to \mathbb{R}$ називатимемо *вимірною* (відносно пари σ-алгебр $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{A})$), якщо для кожної борелевої множини її прообраз є подією (елементом з $\mathcal{A}$), тобто

$$(\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) : g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Означення (випадкової величини). Кожну вимірну функцію відносно пари σ-алгебр $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{A})$ називають *випадковою величиною.*

Власне, ξ — *випадкова величина,* якщо для будь-якої борелевої множини $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ її прообраз

$$\xi^{-1}(B) \overset{def}{=} \{\omega \in \Omega \colon \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A},$$

тобто, є подією.

Приклад. 1. Нехай $A \subset \Omega,\ A \notin \mathcal{A}$. Тоді, характеристична функція (індикатор) множини A, $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A, \\ 0 & \omega \notin A, \end{cases}$ — не вимірна відносно пари σ-алгебр $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{A})$, а, отже, не випадкова величина.
2. Нехай $\mathcal{A}_\infty = 2^\Omega$. Тоді кожна функція $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ — випадкова величина.

Скрізь надалі будемо використовувати такі загальні властивості операції "взяття прообразу".

Твердження 1.3 (взяття прообразу зберігає теоретико-множинні операції)**.** *Нехай $\xi \colon \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ — деяке відображення з простору $\mathcal{B}_1$ у простір $\mathcal{B}_2$. Тоді $(\forall (B_\alpha)_{\alpha \in I},\ B_\alpha \subset \mathcal{B}_2)$:*
1) $\xi^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} \xi^{-1}(B_\alpha)$, 2) $\xi^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \xi^{-1}(B_\alpha)$,
3) $\xi^{-1}(B_{\alpha_1} \setminus B_{\alpha_2}) = \xi^{-1}(B_{\alpha_1}) \setminus \xi^{-1}(B_{\alpha_2})$ $(\alpha_j \in I)$, 4) $\xi^{-1}(\mathcal{B}_2) = \mathcal{B}_1$,
5) $\xi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Вправа. Довести це твердження.

Розглянемо $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір і функцію $\xi = \xi(\omega) \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Наступне твердження дає простий критерій випадкової величини.

Твердження 1.4 (критерій випадкової величини)**.** *Функція* $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *є випадковою величиною тоді і тільки тоді, коли*

$$(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ \xi^{-1}((-\infty, x)) \stackrel{def}{=} \{\omega \in \Omega\colon \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}.$$

Означення (випадкового вектора). Функцію $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ називатимемо *випадковим вектором,* якщо всі ξ_j $(1 \le j \le n)$ — випадкові величини.

Надалі *випадкові величини і випадкові вектори позначатимемо* літерами грецького алфавіту $\xi, \eta, \zeta, \ldots$.

Через

$$\mathcal{A}_\xi = \xi^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{\xi^{-1}(B)\colon B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

позначимо σ-алгебру, породжену випадковою величиною ξ.

Вправа. Переконатись, що $\mathcal{A}_\xi$ справді — σ-алгебра.

Означення (незалежних випадкових величин). Випадкові величини ξ_1, ξ_2 називаються *незалежними,* якщо σ-алгебри $\mathcal{A}_{\xi_1}, \mathcal{A}_{\xi_2}$, породжені цими випадковими величинами, є незалежними.

Послідовність випадкових величин (ξ_j) є *послідовністю незалежних випадкових величин,* якщо $(\mathcal{A}_{\xi_j})$ — послідовність незалежних σ-алгебр.

Означення. Вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ називається *вектором з незалежними компонентами,* якщо $(\xi_j)_{j=1}^n$ — послідовність незалежних випадкових величин.

Вправи.

1. Нехай $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — борелева функція, а $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ — випадковий вектор. Тоді безпосередньо з означень випливає, що $\eta \stackrel{def}{=} g(\xi)$ — випадкова величина. Довести.

2. Нехай $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — борелева функція, а $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ — випадковий вектор. Чи вірно, що тоді $\eta \stackrel{def}{=} g(\xi)$ — випадковий вектор?

3. Нехай (η_j) — послідовність випадкових величин. Довести, що функція $\eta\colon \Omega \to \mathbb{R}$, визначена однією з наступних рівностей:
(a) $\eta(\omega) = \sum_{j=1}^n \eta_j(\omega)$, (b) $\eta(\omega) = \prod_{j=1}^n \eta_j(\omega)$, (c) $\eta(\omega) = \lim\limits_{j\to+\infty} \eta_j(\omega)$,

(d) $\eta(\omega) = \sum_{j=1}^{+\infty} \eta_j(\omega)$, (e) $\eta(\omega) = \varlimsup\limits_{j\to+\infty} \eta_j(\omega)$, (f) $\eta(\omega) = \varliminf\limits_{j\to+\infty} \eta_j(\omega)$, (g) $\eta(\omega) = \sup\{\eta_j(\omega) \colon j \in \mathbb{N}\}$, (h) $\eta(\omega) = \inf\{\eta_j(\omega) \colon j \in \mathbb{N}\}$, — є випадковою величиною.

4. Якщо $(\mathcal{A}_j)_{j=1}^n$ — послідовність незалежних σ-алгебр і $(\forall j,\ 1 \le j \le n)$: $\widetilde{\mathcal{A}}_j \subset \mathcal{A}_j$, $\widetilde{\mathcal{A}}_j$ — σ-алгебри, то $(\widetilde{\mathcal{A}}_j)_{j=1}^n$ — послідовність незалежних σ-алгебр.

5. Для випадкової величини ξ позначимо $\xi^+ = \sup\{0, \xi\}$, $\xi^- = \sup\{0, -\xi\}$, Якщо (ξ_j) — послідовність незалежних випадкових величин, то $(\xi_j^{\pm})$ — також послідовність незалежних випадкових величин для будь-якого фіксованого вибору послідовності плюсів і мінусів у верхньому індексі. Довести.

1.10. Функції розподілу випадкових величин та їхні властивості

Оскільки, множина $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$ є борелевою, то можна означити поняття *функції розподілу випадкової величини.*

Означення (функції розподілу випадкової величини). *Функцією розподілу* випадкової величини ξ називається функція $F_\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$, визначена для кожного $x \in \mathbb{R}$ формулою

$$F_\xi(x) \overset{def}{=} \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}.$$

Теорема 1.2. *Нехай ξ — випадкова величина. Функція розподілу $F_\xi(x)$ має такі властивості:* **1**. $F_\xi(+\infty) = 1$; **2**. $F(-\infty) = 0$; **3**. $F_\xi(x)$ *— неспадна;* **4**. $F_\xi(x)$ *— неперервна зліва.*

Властивості 1. — 4. з теореми 1.2 ще називають *характеристичними властивостями* функцій розподілу, позаяк вони виділяють з класу всіх дійсних функцій, заданих на всій числовій прямій, функції, кожна з яких є функцією розподілу для деякої випадкової величини. Власне, справджується така обернена теорема.

Теорема 1.3 (обернена до теореми про характеристичні властивості)**.** *Нехай $F(x)$ — функція з $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, яка володіє властивостями 1. — 4. з теореми 1.2. Тоді існує ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ і існує ξ — випадкова величина на ньому така, що $F_\xi(x) \equiv F(x)$.*

З довільною функцією F, що задовольняє умови оберненої теореми про характеристичні властивості, природно пов'язана ймовірнісна міра Лебега-Стілт'єса ν_F, породжена функцією F. Нагадаємо, що міра Лебега-Стілт'єса ν_F на σ-алгебрі борелевих множин на прямій ν_F запроваджується за такою схемою.

i). Міра півінтервалу $\nu_F([a,b)) \stackrel{def}{=} F(b) - F(a)$.
ii). На $\mathcal{A}_0$ — алгебрі, породженій скінченними об'єднаннями півінтервалів вводиться природно $\nu_F\big(\bigsqcup_{k=1}^n [a_k, b_k)\big) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^n \nu_F([a_k, b_k))$.
iii). Далі, перевіряється, що ν_F — зліченно-адитивна ймовірнісна міра на $\mathcal{A}_0$.
iv). І, нарешті, тепер вже можна скористатись теоремою Каратеодорі-Лебега, яку ми сформулюємо у такому вигляді.

Теорема 1.4 (Каратеодорі-Лебега про продовження міри)**.** *Якщо Q — ймовірнісна зліченно-адитивна міра на алгебрі $\mathcal{A}_0$, то існує єдина $\mathbb{P}$ — ймовірнісна зліченно-адитивна міра на $\sigma(A_0)$ ($\sigma(A_0)$ — мінімальна σ-алгебра, породжена алгеброю A_0) така, що*
$$(\forall A \subset \mathcal{A}_0): \ \mathbb{P}(A) = Q(A).$$

Тоді, за теоремою Каратеодорі-Лебега про продовження міри, існує єдине продовження $\widetilde{\nu}_F$ міри ν_F на мінімальну σ-алгебру, породжену σ-алгеброю $\mathcal{A}_0$, тобто існує єдине продовження ν_F на σ-алгебру борелевих множин $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ на прямій таке, що
$$(\forall A \in \mathcal{A}_0): \ \widetilde{\nu}_F(A) = \nu_F(A).$$
Скрізь нижче у позначенні $\widetilde{\nu}_F$ хвильку пропускатимемо. Отже, за побудовою $\mathbb{P} = \nu_F$ ймовірність, визначена на σ-алгебрі борелевих множин на прямій.
Вправа. Довести зліченну адитивність ν_F на $\mathcal{A}_0$, використавши теорему про неперервність зліченно-адитивної ймовірнісної міри.

Вважають, що *випадкову величину описано,* якщо задано її функцію розподілу.

1.12. Інтеграли, що зустрічаються в теорії ймовірностей

Якщо $\xi(\omega)$ — випадкова величина на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, а $g(x)$ — борелева функція на дійсній прямій, то

$$\int_\Omega g(\xi(\omega))\mathbb{P}(d\omega)$$

— абстрактний інтеграл Лебега за ймовірнісною мірою $\mathbb{P}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\nu_F(dx)$$

— інтеграл Лебега-Стілт'єса, тобто, абстрактний інтеграл Лебега за ймовірнісною мірою Лебега-Стілт'єса ν_F, породженою функцією розподілу F. За формулою заміни змінної інтегрування

$$\int_\Omega g(\xi(\omega))\mathbb{P}(d(\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x).$$

1. Якщо $F(x)$ — неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$ за винятком послідовності точок (c_n), то

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)F'(x)dx + \sum\limits_n g(c_n)(F(c_n+0) - F(c_n)).$

2. $F(x)$ — кусково-стала функція, для якої (c_n) — послідовність точок стрибка. Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x) = \sum_n g(c_n)(F(c_n+0) - F(c_n)).$$

Нехай $A \in \mathcal{A}$ і χ_A — її характеристична функція. Тоді

$$\int_A g(\xi(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \stackrel{def}{=} \int_\Omega g(\xi(\omega))\chi_A(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

1.13. Дискретні випадкові величини

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — фіксований ймовірнісний простір.

Означення (дискретної випадкової величини). Випадкову величину $\xi(\omega)$ називатимемо *дискретною*, якщо її множина значень не більш, ніж зліченна.

Твердження 1.5 (критерій дискретної випадкової величини)**.** *Функція $\xi = \xi(\omega)\colon \Omega \to X$ з не більш, ніж зліченною множиною значень $X = \{x_n\colon 1 \le n < N\}$ $(N \le +\infty)$ є дискретною випадковою величиною тоді і тільки тоді, коли* $(\forall n,\ 1 \le n < N)\colon\ \{\omega : \xi(\omega) = x_n\} \in \mathcal{A}$.

Нехай ξ — дискретна випадкова величина, а $\{x_n : n \geq 1\}$ — множина її значень. Позначимо $p_k = \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) = x_k\}$. Тоді, враховуючи попарну несумісність подій $(\{\omega : \xi(\omega) = x_n\})$ та зліченну адитивність ймовірності, отримаємо

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \colon \; F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{x_k < x} \{\omega : \xi(\omega) = x_k\} \Big) = \sum\nolimits_{x_k < x} p_k.$$

Вправа. Довести, що випадкова величина ξ є дискретною випадковою величиною тоді і тільки тоді, коли існує скінченна або зліченна послідовність (x_n) така, що її функція розподілу має вигляд

$$F_\xi(x) = \sum\nolimits_{x_k < x} p_k, \quad \text{при цьому } p_k = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) = x_k\}), \; \sum\nolimits_{k \geq 1} p_k = 1.$$

Зауважимо, що $F_\xi(x+0) - F_\xi(x) = \begin{cases} p_k, \text{ якщо } x = x_k, \\ 0, \; x \notin \{x_k\}. \end{cases}$

У випадку, коли (x_k) — монотонно зростаюча послідовність, то $F_\xi(x)$ — функція стрибків (кусково стала), тобто

$$F_\xi(x) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} p_k, \quad \text{для} \;\; x \in [x_n, x_{n+1}).$$

Відзначимо також, що для дискретної випадкової величини, якщо $A \in \mathcal{A}$, то за означенням інтеграла

$$\int_A g(\xi(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \sum\nolimits_{x_n \in \xi(A)} g(x_n) \cdot p_n.$$

1.14. Неперервні випадкові величини: абсолютно неперервні та сингулярні

Означення. Випадкова величина ξ називається *абсолютно неперервною, або випадковою величиною зі щільністю,* якщо існує така невід'ємна вимірна (за Лебегом) функція $f_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, що

$$(\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \colon \; \mathbb{P}\{\omega \colon \xi(\omega) \in B\} = \int_B f_\xi(t) dt.$$

Функцію $f_\xi(x)$ називатимемо *щільністю або густиною розподілу.* Також у цьому контексті вживатимемо термін *абсолютно неперервний розподіл.*

Безпосередньо з означення випливають такі *властивості щільності* розподілу:

1. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$ (досить вибрати в означенні $B = (-\infty, x)$), звідки, зокрема, маємо, що
2. $F_\xi^{'}(x) = f_\xi(x)$ м.с. (майже скрізь за мірою Лебега),
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt = 1$.

Теорема 1.5 (Лебега)**.** *Довільну функцію розподілу F однозначно можна зобразити у вигляді*

$$F(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{3} a_j F_j(x),$$

де сталі $a_1, a_2, a_3 \geq 0$ такі, що $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, а F_1 — дискретний розподіл, F_2 — абсолютно неперервний розподіл, F_3 — сингулярна функція розподілу (тобто, неперервна функція розподілу без щільності).

Вправи. 1. Нехай ξ випадкова величина, а $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ вимірна за Лебегом функція така, що

$$(\forall x \in \mathbb{R})\colon\;\; F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)dt.$$

Довести, що випадкова величина ξ має щільність і $h(t) = f_\xi(t)$ м.с.

2. Нехай ξ — абсолютно неперервна випадкова величина. Чи $(\forall x \in \mathbb{R})\colon\;\; \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) = x\} = 0$?

3. Нехай $\mathcal{K}\colon [0,1] \to [0,1]$ — канторова "драбина". Визначимо $F(x) = 0$ для $x < 0$, $F(x) = \mathcal{K}(x)$ для $x \in [0,1]$, $F(x) = 1$ для $x > 1$. Довести, що розподіл F — сингулярний.

4. Для абсолютно неперервного розподілу F_ξ і борелевої функції g

$$\int_\Omega g(\xi(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x)dx.$$

Вказівка. Для доведення цієї рівності досить переконатись, що $dF_\xi(x) = f_\xi(x)dx$, тобто, що $\int_B dF_\xi(x) = \int_B f_\xi(x)dx$ для кожної борелевої множини B.

1.15. Рівномірний розподіл

На відрізку $[a, b]$ на прямій навмання вибирають точку. Вважаючи вибір будь-якої точки на відрізку однаково можливим, розглядаємо ймовірнісний простір $([a, b], \mathcal{A}, \mathbb{P})$, де $\mathcal{A}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин відрізка, а за формулою геометричних ймовірностей $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{meas}_1 A}{b-a}$.

Розглянемо випадкову величину $\xi(\omega) = \omega$, $\omega \in [a, b]$. Тоді її функція розподілу

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} \frac{\text{meas}_1(\varnothing)}{b-a} = 0, & \text{якщо } x \le a \\ \frac{\text{meas}_1([a,x))}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}, & \text{якщо } a < x \le b \\ \frac{\text{meas}_1([a,b])}{b-a} = 1, & \text{якщо } x > b. \end{cases}$$

Даний розподіл називається *рівномірним розподілом* на відрізку $[a, b]$. Очевидно, що рівномірний розподіл має щільність

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{якщо } a < x < b \\ 0, & \text{якщо } x > b. \end{cases}$$

1.16. Розподіл Коші

В точці на площині з координатами (a, b), $b > 0$, розташоване джерело радіоактивних частинок, з якого у напрямку осі Ox (горизонтальна мішень) вилітають α-частинки, які рухаються прямолінійно. Нехай $\xi(\omega)$ — означає випадкову абсцису точки мішені, у яку потрапляє α-частинка. Припустимо, що випадкові значення кутів $\varphi = \varphi(\omega)$, які утворюють напрямки руху α-частинок з напрямком "вниз" на вертикальній прямій, що проходить через точку (a, b), — випадкова величина з рівномірним розподілом на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді,

$$(\forall u \in \mathbb{R}): \ F_\xi(u) = F_\varphi\Big(\operatorname{arctg} \frac{u-a}{b}\Big),$$

а щільність розподілу випадкової величини ξ

$$(\forall u \in \mathbb{R}): f_\xi(u) = F'_\xi(u) = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{1}{b^2 + (u-a)^2}.$$

Розподіл з даною щільністю називається *розподілом Коші* $\mathcal{K}(a, b)$; $\mathcal{K}(0, 1)$ — стандартний розподіл Коші.

1.17. Схема Бернуллі

Здійснюється послідовність з $n \in \mathbb{N}$ послідовних незалежних експериментів (випробувань), у кожному з яких може появитися подія A з ймовірністю $\mathbb{P}(A) = p = p(n)$, та не появитися з ймовірністю $\mathbb{P}(\overline{A}) = q = 1 - p$. При цьому появу події A стандартно вважають *успіхом* (позначення — У), а появу $\overline{A}$ вважають *неуспіхом* (позначення — Н).

З кожним з випробувань пов'язуємо свою σ-алгебру $\mathcal{A}_{j,n}$. За означенням незалежності експериментів $(\mathcal{A}_{j,n})_{j=1}^{n}$ — послідовність незалежних σ-алгебр.

Це *класична схема Бернуллі.*

Нехай m_n — кількість У в $n \in \mathbb{N}$ послідовних випробуваннях. Введемо у розгляд випадкові величини $\xi_{j,n}$ — індикатори появи події $A \in \mathcal{A}_{j,n}$, тобто, в j-тому випробуванні у серії з n випробувань.

Оскільки $\mathcal{A}_{\xi_{j,n}} \subset \mathcal{A}_{j,n}$, то $(\xi_{j,n})_{j=1}^{n}$ — послідовність незалежних випадкових величин для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$. Крім цього зауважимо, що оскільки

$$m_n = \sum\nolimits_{j=1}^{n} \xi_{j,n},$$

то m_n — дискретна випадкова величина з множиною значень $\{0, 1, \ldots, n\}$.

1. **Біномний розподіл.** Знайдемо розподіл випадкової величини m_n. Для цього потрібно відшукати ймовірності

$$\mathbb{P}_n(k) \stackrel{def}{=} \mathbb{P}\{\omega \colon m_n(\omega) = k\} \quad (k \in \{0, 1, \ldots, n\}).$$

З незалежності послідовних випробувань випливає, що ймовірність появи точно k У в n послідовних випробуваннях не залежить від того, у яких з послідовних випробувань У появиться. Опишемо цей факт точніше. Через $A_{j,n}$ позначимо подію A, як елемент σ-алгебри $\mathcal{A}_{j,n}$. А через U, V позначимо доповняльні множини індексів, тобто $U \cup V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $U \cap V = \varnothing$, $|U| = k$. Тоді, з незалежності випробувань випливає, що для будь-яких таких множин індексів

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in U} A_{j,n} \bigcap_{i\in V} \overline{A}_{i,n}\Big) = p^k q^{n-k}.$$

Залишилось пригадати, що число різних k-елементних піджмножин $U \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ дорівнює біномному коефіцієнту C_n^k. Отже,

$$\mathbb{P}_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k \in \{0, 1, \dots, n\}).$$

Зауважимо, що

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n} \mathbb{P}_n(k) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Власне, тому розподіл випадкової величини m_n і називається *біномним розподілом.*

2. **Геометричний розподіл.** Нехай ξ — кількість неуспіхів (Н) до першої появи успіхів (У). Отримуємо добуток послідовних результатів експерименту, який символічно записуємо у вигляді $\underbrace{\text{Н...Н}}_{k}\text{У}$.

З незалежності випробувань, як і вище отримуємо,

$$\mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = k\} = \mathbb{P}\{\underbrace{\text{Н...Н}}_{k}\text{У}\} = q^k p \quad (k \in \mathbb{Z}_+).$$

Це так званий *геометричний розподіл.*

Вправа. Знайти k_0 таке, що $\max\{\mathbb{P}_n(k)\colon 0 \le k \le n\} = \mathbb{P}_n(k_0)$. Вказівка. Розглянути частку $\frac{\mathbb{P}_n(k)}{\mathbb{P}_n(k+1)}$ і подивитися, для яких k послідовність $\mathbb{P}_n(k)$ спадає і для яких k зростає. Довести, що значення $[(n+1)p]$ має найбільшу ймовірність.

Сформулюємо тепер таке твердження, яке містить характеристичну властивість геометричного розподілу.

Твердження 1.6 (відсутність післядії)**.** *Для випадкової величини ξ з геометричним розподілом* $(\forall n \ge 0,\ m \ge 0)$:

$$\mathbb{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = n+m\} | \{\omega\colon \xi(\omega) \ge n\}) = \mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = m\}.$$

Якщо для випадкової величини, що набуває лише цілочисельні невід'ємні значення позначити $p_k = \mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = k\}$, то в загальному властивість відсутності післядії з останнього твердження можна описати за допомогою рівності

$$p_m = \frac{p_{n+m}}{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} p_k} \quad (n, m \ge 0) \text{ — \textit{властивість відсутності післядії.}}$$

Нескладно тепер переконатись, що єдиний розподіл, який визначає ця рівність, — геометричний.

Твердження 1.7. *Якщо розподіл* $\mathbb{P}\{\xi = k\} = p_k$ $(k \geq 0)$ *цілочисельної невід'ємної випадкової величини задовольняє умову відсутності післядії, то розподіл геометричний.*

1.18. Граничні теореми у схемі Бернуллі

Теорема 1.6 (Пуассона)**.** *В рамках схеми Бернуллі, якщо послідовність* (a_n), $a_n = np$, $p = p(n)$, *— обмежена, то для кожного* $k \geq 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{P_n(k)}{\frac{a_n^k}{k!} e^{-a_n}} = 1,$$

де $P_n(k) = \mathbb{P}\{\omega \colon m_n(\omega) = k\}$ *— ймовірність того, що при* n *випробуваннях кількість успіхів* m_n *дорівнює* k.

З теореми Пуассона нескладно отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1.1. *Якщо* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, *то* $(\forall k \geq 0)$:

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

В наслідку фігурує розподіл Пуассона. Власне, скажемо, що цілочисельна невід'ємна випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$ $(\xi \in \mathbb{P}oiss(\lambda))$, якщо

$$\mathbb{P}\{\omega \colon \xi(\omega) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k \geq 0).$$

В рамках наслідку з теореми Пуассона Ю.В. Прохоров довів, що при $n \to +\infty$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |P_n(k) - \frac{a^k}{k!} e^{-a}| \leq \frac{2a}{n} \min\{2, a\}.$$

Теорема 1.7 (локальна Лапласа)**.** *Якщо в рамках схеми Бернуллі* $b_n = npq \to +\infty$, *то для кожної фіксованої сталої* $c \in (0, +\infty)$ *при* $(n \to +\infty)$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}_+$ *таких, що* $|x_{n,k}| \leq c$, *де* $x_{n_k} = \frac{k - a_n}{\sqrt{b_n}}$, $a_n = np$,

$$P_n(k) = (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{2\pi b_n}} e^{-\frac{1}{2} x_{n,k}^2}.$$

Вправа. Довести, що еквівалетність в останньому співвідношення рівномірна за всіма k такими, що $|x_{n,k}| \le c$, для кожної фіксованої сталої $c < +\infty$, тобто

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{\left|P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi b_n}} e^{-\frac{1}{2}x_{n,k}^2}\right| : k \in \mathbb{Z}_+,\ |x_{n,k}| \le c\right\} = 0.$$

Наступну теорему отримаємо пізніше у вигляді наслідку з центральної граничної теореми.

Теорема 1.8 (інтегральна Муавра-Лапласа)**.** *Нехай у рамках схеми Бернуллі m_n — кількість успіхів в n незалежних випробуваннях і $b_n = npq \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. Тоді*

$$(\forall a, b,\ a < b):\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big\{\omega:\ a \le \frac{m_n - a_n}{\sqrt{b_n}} < b\Big\} = \Phi(b) - \Phi(a),$$

де $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$

Відзначимо, що оскільки

$$x_{n,k+1} - x_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{b_n}} \ \text{ і } \ \mathbb{P}\Big\{\omega:\ a \le \frac{m_n - a_n}{\sqrt{b_n}} < b\Big\} = \sum_{a \le x_{n,k} < b} P_n(k),$$

то за допомогою твердження з щойно сформульованої вправи, вибираючи $c = \max\{|a|, |b|\}$, неважко за означенням інтеграла Рімана отримати доведення цієї теореми.

У інтегральній теоремі Муавра-Лапласа $\Phi(x)$ — *стандартний нормальний* (або *гаусів*) розподіл.

Скажемо, що випадкова величина $\xi \in \mathcal{N}(0,1)$, тобто має *стандартний нормальний* розподіл (або є *гаусовою*), якщо $F_\xi(x) \equiv \Phi(x)$.

Скажемо, що випадкова величина η має *нормальний розподіл з параметрами* $a \ne 0,\ \sigma^2 > 0$ $(\eta \in \mathcal{N}(a, \sigma^2))$, якщо випадкова величина $\xi = \frac{\eta - a}{\sigma}$ має гаусів розподіл.

Вправи. Переконатись, що: 1. $\Phi(x)$, справді, функція розподілу.
2. Якщо $\eta \in \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, то, відповідно, її функція розподілу і щільність

$$F_\eta(x) = \Phi\Big(\frac{x-a}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\, dt, \quad f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

3. Якщо $\xi \in \mathcal{N}(0,1)$, то $-\xi \in \mathcal{N}(0,1)$. Довести. Випадкові величини такі, що $F_\xi = F_{-\xi}$ називаються *симетричними.* Отже, гаусові випадкові величинни є симетричними.

1.19. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання і дисперсія

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір, $\xi(\omega)$ — випадкова величина.
Математичним сподіванням випадкової величини $\xi(\omega)$ називають
$$M\xi \stackrel{def}{=} \int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega),$$
дисперсією випадкової величини $\xi(\omega)$ називають
$$D\xi \stackrel{def}{=} M(\xi - M\xi)^2,$$
стандартом або *середньоквадратичним відхиленням* називають
$$\sigma \stackrel{def}{=} \sqrt{D\xi}.$$

Зауважимо, що з властивостей інтеграла випливає, що якщо ξ — невід'ємна випадкова величина, то її математичне сподівання завжди існує, при цьому $M\xi \in [0, +\infty]$. Зокрема, якщо у довільної випадкової величини існує скінченне математичне сподівання, то у неї існує дисперсія $D\xi \in [0, +\infty]$, позаяк $(\xi - M\xi)^2$ — невід'ємна випадкова величина.

Якщо розподіл ξ має щільність f_ξ, то
$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx, \quad D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx.$$
У випадку, коли ξ — дискретна випадкова величина з розподілом $p_n = \mathbb{P}\{\omega \colon \xi(\omega) = x_n\}$, то
$$M\xi = \sum\nolimits_n x_n p_n, \quad D\xi = \sum\nolimits_n (x_n - M\xi)^2 p_n.$$

2.13. Властивості математичного сподівання

Наступні три властивості математичного сподівання, насправді, є властивостями відповідного інтеграла

1. Якщо випадкова величина ξ є майже напевно (м.н.) стала, тобто, $\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) = a\} = 1$, то $M\xi = a$.

Нехай $B = \{\omega : \xi(\omega) \neq a\}$. Тоді $\mathbb{P}(B) = 0$ і, отже,

$$M\xi = \int_{\Omega\setminus B} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) + \int_B \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = a \cdot \mathbb{P}(\overline{B}) = a.$$

Означення. Скрізь надалі, якщо ймовірність події A дорівнює 1, то ми кажемо, що подія A *відбувається майже напевно* (м.н.).

2. (**адитивність**). Нехай $(\xi_n)_{n=1}^N, N < +\infty$ — послідовність випадкових величин. Тоді

$$M\Big(\sum\nolimits_{n=1}^N \xi_n\Big) = \sum\nolimits_{n=1}^N M\xi_n.$$

3. (**лінійність**). Нехай ξ — випадкова величина. Тоді $(\forall\alpha \in \mathbb{R})$: $M(\alpha\xi) = \alpha M\xi$.

4. (**монотонність**). Для будь-яких двох випадкових величин ξ, η з того, що $\xi \geq \eta$ (м.н.) (тобто, $\mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) \geq \eta(\omega)\} = 1$) випливає, що $M\xi \geq M\eta$.

Справді, оскільки $\xi - \eta \geq 0$ (м.н.), то залишається скористатись невід'ємністю інтеграла від невід'ємної випадкової величини і лінійністю.

5. Якщо випадкова величина ξ така, що $M\xi \neq \infty$, то $|M\xi| \leq M|\xi|$.

Справді, $-|\xi| \leq \xi \leq |\xi|$. тому за попередньою властивістю отримуємо потрібну нерівність.

6. Якщо $A \in \mathcal{A}$, то $M\chi_A = \mathbb{P}(A)$, де $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega \in A, \\ 0, & \text{якщо } \omega \notin A \end{cases}$ — характеристична функція події A.

7. (**Нерівність Маркова**). Нехай ξ — невід'ємна випадкова величина. Тоді

$$(\forall a > 0)\colon\ \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \geq a\} \leq \frac{M\xi}{a}$$

Доведення. Позначимо $A = \{\omega\colon \xi(\omega) \geq a\}$. Тоді,

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \mathbb{P}(d\omega) \leq \int_A \frac{\xi(\omega)}{a}\mathbb{P}(d\omega) \leq \frac{1}{a}\int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{a}M\xi.$$

□

2.14. Властивості дисперсії

1. Для кожної випадкової величини зі скінченним математичним сподіванням $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

Звідси, в часткових випадках дискретної і абсолютно неперервної випадкової величин отримуємо такі формули для обчислення їхньої дисперсії: ξ — дискретна випадкова величина, тоді

$$D\xi = \sum\nolimits_n x_n^2 p_n - \Big(\sum\nolimits_n x_n p_n\Big)^2, \quad p_n = \mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = x_n\}, \ \sum\nolimits_n p_n = 1,$$

ξ — абсолютно неперервна з щільністю розподілу f_ξ, тоді

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx - \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx\Big)^2.$$

2. Для довільної випадкової величини зі скінченною дисперсією

$$|M\xi| \le \sqrt{M\xi^2}.$$

3. Випадкова величина ξ є м.н. сталою (тобто, $\xi(\omega) = c$ м.н.) $\Longleftrightarrow$ $D\xi = 0$.

З означення дисперсії і властивості лінійності математичного сподівання замість лінійності, для дисперсії отримуємо властивість однорідності порядку 2.

4. $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\colon\ D(\alpha\xi) = \alpha^2 D\xi$.

На відміну від математичного сподівання, для того, щоб дисперсія стала адитивною, від випадкових величин потрібно вимагати деяких властивостей, які вони повинні задовольняти "колективно". Зокрема, виконується таке твердження.

5. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta \Longleftrightarrow M(\xi\eta) = M\xi M\eta$.

Звідси, зокрема, безпосередньо випливає таке твердження.

6. Якщо $\eta = c$ м.н., то $D(\xi + \eta) = D\xi$ для кожної випадкової величини ξ.

Означення (коваріації і некорельованих випадкових величин). *Коваріацією випадкових величин* ξ, η називають величину

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) \stackrel{def}{=} M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)).$$

Випадкові величини ξ, η називаються *некорельованими*, якщо

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0.$$

Якщо ж $\operatorname{cov}(\xi, \eta) \neq 0$, то випадкові величини ξ, η називаються *корельованими.*

Зауважимо, що поняття коваріації та корельованості (некорельованості) має зміст лише для випадкових величин ξ, η інтегровних з квадратом на Ω, тобто, лише у випадку, коли існують скінченні дисперсії $D\xi, D\eta$.

7. $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta \iff$ випадкові величини ξ, η некорельовані, тобто $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$.

8. Випадкові величини ξ, η некорельовані $\iff M(\xi\eta) = M\xi M\eta$.

9. Якщо (ξ_j) — послідовність попарно некорельованих випадкових величин, тобто, $\operatorname{cov}(\xi_j, \xi_k) = 0$ $(j \neq k)$, то $D\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$.

2.15. Приклади обчислення дисперсії деяких розподілів

1. **Схема Бернуллі: геометричний розподіл**. Нехай випадкова величина ξ має геометричний розподіл, тобто $p_n = \mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = n\} = pq^n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Тоді

$$M\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} np_n = \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n p = q \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} p =$$
$$= q\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\Big)' p = qp\big(\frac{1}{1-q}\big)' = \frac{qp}{(1-q)^2} = \frac{qp}{p^2} = \frac{q}{p}.$$

Подібно

$$M\xi^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n p = pq\Big(q\big(\frac{1}{1-q}\big)'\Big)' = \frac{(1-p)(2-p)}{p^2}.$$

Тому $D\xi = qp^{-2}$.

2. **Схема Бернуллі: біномний розподіл**. Оскільки випадкова величина m_n — кількість У в n незалежних випробуваннях записується у вигляді $m_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_{j,n}$, то зауважуючи, що $M\xi_{j,n} = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, отримаємо

$$Mm_n = \sum_{j=1}^{n} M\xi_{j,n} = np = a_n.$$

Якщо доведемо, що $(\xi_{j,n})_{j=1}^{n}$ — попарно некорельовані, то, обчислюючи дисперсію $D\eta_{j,n} = M\eta_{j,n}^2 - (M\eta_{j,n})^2 = 1\cdot\mathbb{P}\{\eta_{j,n}^2 = 1\} + 0\cdot\mathbb{P}\{\eta_{j,n}^2 = 0\} = 1\cdot p - p^2 = pq$, отримаємо

$$Dm_n = \sum\nolimits_{j=1}^{n} D\xi_{j,n} = npq = b_n.$$

Для, того, щоб встановити некорельованість $\xi_{k,n}, \xi_{j,n}$ $(k \neq j)$ досить перевірити, що $M\eta = M\xi_{k,n}M\xi_{j,n}$, де $\eta = \xi_{k,n}\xi_{j,n}$.

Зауважимо, що $\mathbb{P}\{\omega\colon \eta(\omega) = 1\} = \mathbb{P}(\text{У})\mathbb{P}(\text{У}) = p^2$ (тут ми скористались незалежністю випробовувань, оскільки з неї випливає незалежність відповідних випадкових величин $\xi_{k,n}, \xi_{j,n}$) та $\mathbb{P}\{\omega\colon \eta(\omega) = 0\} = 1 - p^2$. Тому, $M\eta = p^2$. Але, вище ми обчислили, що $M\xi_{k,n} = M\xi_{j,n} = p$.

Вправи. 1. Переконатись, що випадкові величини $\xi_{k,n}, \xi_{j,n}$ $(k \neq j)$ — незалежні. Вище було доведено, що звідси випливає некорельованість цих випадкових величин.
2. Переконатись, що правильною є загальніша імплікація: якщо дискретні випадкові величини ξ_1, ξ_2 — незалежні, то вони й некорельовані (насправді, те, що це твердження правильне в загальному — для довільної пари незалежних випадкових величин, ми доведемо нижче).

3. **Розподіл Пуассона.** Нехай $\xi \in \mathcal{P}oiss(\lambda)$, тобто, має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$: $\mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = n\} = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$M\xi = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \lambda\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty} n\frac{\lambda^{n-1}}{n!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda.$$

Обчислимо дисперсію $D\xi$ в розподілі Пуассона. Оскільки

$$M\xi^2 = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} n^2\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \lambda\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty} n^2\frac{\lambda^{n-1}}{n!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\Big(\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\Big)' =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\big(\lambda e^{\lambda}\big)' = \lambda(\lambda+1).$$

Тому $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$.

4. **Рівномірний розподіл**. Нехай випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на проміжку $[a, b]$. Тоді

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}.$$

А, оскільки,

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{a^2+b^2+ab}{3},$$

то $D\xi = M(\xi)^2 - (M\xi)^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

5. **Нормальний розподіл.** Обчислимо спочатку математичне сподівання і дисперсію для стандартного нормального розподілу $\mathcal{N}(0,1)$. Нехай $\xi \in \mathcal{N}(0,1)$. Тоді,

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,$$

позаяк підінтегральна функція непарна. Тому, для обчислення дисперсії маємо

$$D\xi = M(\xi)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

Для випадкової величини $\eta \in \mathcal{N}(a,\sigma^2)$, оскільки $\eta = a + \xi\sigma$, де $\xi \in \mathcal{N}(0,1)$, з властивостей математичного сподівання і дисперсії отримаємо

$$M\eta = a + \sigma M\xi = a, \quad D\eta = \sigma^2 D\xi = \sigma^2.$$

6. **Розподіл Коші.** Чи існує математичне сподівання $M\xi$ для випадкової величини $\xi \in \mathcal{K}(0,1)$, тобто, з розподілом Коші? (Переконайтесь, що у звичайному сенсі воно не існує. Чи можна $M\xi$ визначити в сенсі головного значення інтеграла?)

2.16. Нерівність Чебишова і Закон великих чисел (ЗВЧ)

Почнемо з наступного важливого доведеного П.Л. Чебишовим твердження, яке, як це часто у таких випадках буває, має нескладне доведення.

Твердження 1.8 (Нерівність Чебишова)**.** *Нехай ξ — випадкова величина, що має скінченне математичне сподівання $M\xi \neq \infty$. Тоді,*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon\ \mathbb{P}\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Твердження 1.9 (узагальнена нерівність Чебишова)**.** *Нехай $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — множина значень випадкової величини ξ, а функція $h\colon X \to \mathbb{R}_+$ монотонно неспадна. Тоді*

$$(\forall a \in X)\colon\ \mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) \geq a\} \leq \frac{Mh(\xi)}{h(a)}\ \text{— загальна нерівність Чебишова.}$$

Теорема 1.9 (Чебишова)**.** *Нехай (ξ_n) — послідовність попарно некорельованих випадкових величин таких, що*

$$(\exists C \in (0, +\infty))(\forall n \geq 1)\colon\ D\xi_n \leq C.$$

Тоді

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big\{\omega\colon \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k\Big| \geq \varepsilon\Big\} = 0.$$

Теорема 1.10. *Нехай (s_n) — довільна послідовність натуральних чисел така, що $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, а $(\xi_{j,n})_{j=1}^{s_n}$ — послідовність випадкових величин таких, що $\xi_{j,n}$ і $\xi_{k,n}$ некорельовані для кожних $j \neq k$ та будь-якого n. Якщо виконується умова*

$$(\exists C \in (0, +\infty))(\forall n \geq 1)(\forall j,\ 1 \leq j \leq s_n)\colon\ D\xi_{j,n} \leq C,$$

то

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big\{\omega\colon \Big|\frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{s_n}\xi_{k,n} - \frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{s_n} M\xi_{k,n}\Big| \geq \varepsilon\Big\} = 0.$$

Якщо у теоремі 1.10 перейти до протилежних подій, то отримаємо такий наслідок.

Наслідок 1.2. *Нехай $(\xi_{j,n})_{j=1}^{n}$ — послідовність випадкових величин таких, що $\xi_{j,n}$ і $\xi_{k,n}$ некорельовані для кожних $j \neq k$ та будь-якого n. Якщо виконується умова $(\exists C \in (0, +\infty))(\forall n \geq 1)(\forall j,\ 1 \leq j \leq n)\colon\ D\xi_{j,n} \leq C$, то*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big\{\omega\colon \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_{k,n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_{k,n}\Big| < \varepsilon\Big\} = 1.$$

Безпосередньо з наслідку 1.2 отримуємо таку теорему Бернуллі.

Наслідок 1.3 (теорема Бернуллі)**.** *В рамках схеми Бернуллі виконується*

$$(\forall\varepsilon > 0)\colon \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\{\omega\colon |\nu_n - p| < \varepsilon\} = 1,$$

де $\nu_n = \frac{m_n}{n}$ *— частота успіхів (частота появи події* A*) і* $p = \mathbb{P}(У)$ *в* n *послідовних незалежних випробуваннях.*

Нагадаємо тепер поняття збіжності послідовності випадкових величин за ймовірністю, як тотожне з поняттям збіжності за мірою $\mathbb{P}$.

Означення (збіжності за ймовірністю). Послідовність випадкових величин (η_n) називається *збіжною за ймовірністю* до випадкової величини η, $\eta_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \eta \quad (n\to+\infty)$, якщо

$$(\forall\varepsilon > 0)\colon \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\{\omega\colon |\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0$$

$\Big($ рівносильна умова: $(\forall\varepsilon > 0)\colon \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\{\omega\colon |\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| < \varepsilon\} = 1\Big)$.

Наслідок 1.4 (класична теорема Бернуллі)**.** *Якщо в рамках схеми Бернуллі ймовірність успіху* $p(n) \equiv p$ $(n \geq 0)$, *тобто — стала, то*

$$\nu_n \xrightarrow{P} p \quad (n\to+\infty).$$

Подібно можна переформулювати решту інших, наведених тут ЗВЧ. На цьому зупинятись не будемо, а сформулюємо ще одне твердження типу ЗВЧ.

Теорема 1.11. *Нехай* $(\xi_{j,n})_{j=1}^n$ *— послідовність випадкових величин таких, що* $\xi_{j,n}$ *і* $\xi_{k,n}$ *некорельовані для кожних* $j \neq k$ *та будь-якого* n. *Якщо виконується умова* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^n D\xi_{j,n} = 0$, *то*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_{k,n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n M\xi_{k,n} \xrightarrow{P} 0 \quad (n\to+\infty).$$

Вправа. Довести теорему 1.11.

Відзначимо, ще деякі цікаві і корисні факти, які безпосередньо випливають з нерівностей Чебишова і Маркова.

Вправи. 1. (*закон трьох сигм*). Нехай ξ — випадкова величина і $\sigma^2 = D\xi$. Тоді

$$\mathbb{P}\{\omega\colon |\xi - M\xi| \geq 3\sigma\} \leq \frac{1}{9} = 0,(1).$$

2. Нехай послідовність випадкових величин (ξ_n) *збіжна* до випадкової величини ξ *в середньому,* тобто, $M|\xi_n - \xi| \to 0$ $(n \to +\infty)$. Довести, що тоді:
a) $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$ $(n \to +\infty)$; b) якщо $M\xi_n \neq \infty, M\xi \neq \infty$, то $M\xi_n \to M\xi$ $(n \to +\infty)$. Вказівка. a) Застосувати нерівність Маркова до $|\xi_n - \xi|$.

3. Нехай послідовність випадкових величин (ξ_n) *збіжна* до випадкової величини ξ *в середньоквадратичному,* тобто, $M|\xi_n - \xi|^2 \to 0$ $(n \to +\infty)$. Довести, що тоді: a) послідовність (ξ_n) збіжна в середньому, а, отже, і $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$ $(n \to +\infty)$; b) якщо $M\xi_n^2 < +\infty, M\xi^2 < +\infty$, то $M\xi_n \to M\xi$, $M(\xi_n\xi) \to M(\xi)^2$, $M(\xi_n)^2 \to M(\xi)^2$, $D\xi_n \to D\xi$, $(n \to +\infty)$.
Вказівка. a) Застосувати нерівність $(M\eta)^2 \leq M(\eta)^2$ до $|\xi_n - \xi|$.
b) $|M(\xi_n\xi) - M(\xi)^2| \leq M|(\xi_n - \xi)\xi| \leq (M|(\xi_n - \xi)^2)^{1/2}(M(\xi)^2)^{1/2}$,
$|M(\xi_n)^2 - M(\xi)^2| = |M(\xi_n - \xi)(\xi_n + \xi)| \leq (M(\xi_n - \xi)^2)^{1/2}(M(\xi_n + \xi)^2)^{1/2}$,
$M(\xi_n + \xi)^2 = M((\xi_n - \xi) + \xi)^2 = M(\xi_n - \xi)^2 + 2M(\xi_n\xi) - M(\xi^2)$.

2.17. Незалежні випадкові величини

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — фіксований ймовірнісний простір.

Повернемось до незалежних випадкових величин. Нагадаємо, що послідовність *незалежних випадкових величин* це така послідовність, що відповідна послідовність σ-алгебр, породжених елементами послідовності випадкових величин, є послідовністю незалежних σ-алгебр.

Теорема 1.12 (критерій незалежності)**.** (ξ_n) — *послідовність незалежних випадкових величини* $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_j \in \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq n)$:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n}\{\omega : \xi_j(\omega) < x_j\}) = \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}(\{\omega : \xi_j(\omega) < x_j\}).$$

2.18. Випадкові вектори з незалежними компонентами

Розглянемо *випадковий вектор* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, тобто, вектор, компоненти якого ξ_j — випадкові величини.

Означення (функції спільного розподілу). *Функцією розподілу випадкового вектора* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ (*функцією спільного розподілу* випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$) називається функція $F_\xi \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, яка для кожного $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ визначається формулою

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\omega \colon \xi_1(\omega) < x_1, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\} = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \{\omega \colon \xi_j(\omega) < x_j\}\Big).$$

Вправа. Довести, що:
1. $F_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty) = 1.$
2. $F_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}(+\infty, x_2, \ldots, x_n) = F_{(\xi_2,\ldots,\xi_n)}(x_2, \ldots, x_n).$
3. $F_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}(-\infty, -\infty, \ldots, -\infty) = F_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}(-\infty, x_2, \ldots, x_n) = 0.$

Пригадаємо, що випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ є *вектором з незалежними компонентами,* якщо $(\xi_j)_{j=1}^n$ — послідовність незалежних випадкових величин. Тоді критерій незалежності випадкових величин можна переписати у такому вигляді: випадковий вектор є вектором з незалежними компонентами тоді і тільки тоді, коли його функція розподілу є добутком функцій розподілу його компонент. Власне, маємо таку теорему.

Теорема 1.13 (критерій незалежності випадкових величин)**.** *Послідовність випадкових величин* $(\xi_j)_{j=1}^n$ *є послідовністю незалежних випадкових величин тоді і тільки тоді, коли*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n)\colon\ F_\xi(x) = \prod_{j=1}^{n} F_{\xi_j}(x_j), \quad \text{де}\ \ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Теорема 1.14 (незалежність борелевих функцій від випадкових величин)**.** 1. *Нехай* $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *— борелеві функції. Якщо* $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m)$ *— вектор з незалежними компонентами, то випадкові величини* $\xi = g(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *і* $\eta = h(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ *— незалежні.*

2. *Якщо* $(\xi_n)_{n=1}^N$ *— послідовність незалежних випадкових величин, а* $(g_n)_{n=1}^N$ *— борелеві функції на* $\mathbb{R}$*. Тоді* $(\eta_n)_{n=1}^N$, $\eta_n = g_n(\xi_n)$, *— послідовність незалежних випадкових величин.*

Теорема 1.15. *Якщо* $(\xi_j)_{j=1}^k$ *— послідовність незалежних випадкових величин, то*

$$M\Big(\prod_{j=1}^k \xi_j\Big) = \prod_{j=1}^k M\xi_j,$$

зокрема, $(\xi_j)_{j=1}^k$ *— послідовність попарно некорельованих випадкових величин.*

Вправа. Нехай (ξ_j) — прості випадкові величини, а $X^{(j)} = \{x_k^{(j)}\}$ їхні множини значень, відповідно. (ξ_j) — послідовність незалежних випадкових величин тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall (k_j)) :\ \mathbb{P}\big(\bigcap_{j=1}^n \xi_j^{-1}(\{x_{k_j}^{(j)}\})\big) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(\xi_j^{-1}(\{x_{k_j}^{(j)}\}).$$

В бік необхідності це звичайна інтерпретація означення незалежності. В бік достатності, зауважимо, що для кожної борелевої множини B_j виконується $\xi_j^{-1}(B_j) = \bigcup_{k:\, x_k^{(j)} \in B_j} \xi_j^{-1}(\{x_k^{(j)}\})$ і, отже,

$$\bigcap_{j=1}^n \xi_j^{-1}(B_j\{x_{k_j}^{(j)}\}) = \bigcup_{k_j :\, x_{k_j}^{(j)} \in B_j} \bigcap_{j=1}^n \xi_j^{-1}(\{x_{k_j}^{(j)}\}).$$

Залишається послідовно скористатись адитивністю ймовірності й умовою.

2.19. Збіжність майже напевно і збіжність за ймовірністю

Означення (збіжності майже напевно м.н.). Послідовність випадкових величин (η_n) називається *збіжною майже напевно* (м.н) до випадкової величини η $\quad (\eta_n \to \eta$ м.н.), якщо

$$\mathbb{P}\{\omega : \lim_{n\to+\infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega)\} = 1.$$

З курсу "Теорії міри та інтегралу"добре відомо, що якщо послідовність вимірних функцій збіжна майже скрізь, то вона збіжна за мірою.

Твердження 1.10. *Якщо* $\eta_n \to \eta$ *(м.н.)* $\Rightarrow \eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta$.

Навпаки, взагалі кажучи, не правильно. Але правильне таке твердження.

Твердження 1.11. *Якщо* $\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta$, *то* $(\exists n_k \uparrow +\infty) : \eta_{n_k} \to \eta$ *(м.н.).*

Твердження 1.12. $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k) = 1 \;\Leftrightarrow\; (\forall k,\ 1 \le k \le n)\colon\ \mathbb{P}(A_k) = 1.$

Вправа. Довести твердження 1.12.

Твердження 1.13 (критерій збіжності майже напевно)**.** *Для послідовності випадкових величин* (η_n) *і випадкової величини* η

$$\eta_n \to \eta \ \ \text{м.н.} \iff (\forall k \ge 1)\colon \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{n=N}^{\infty} \{|\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| < \frac{1}{k}\}) = 1$$

або у рівносильному вигляді

$$\eta_n \to \eta \ \ \text{м.н.} \iff (\forall \varepsilon > 0)\colon \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{n=N}^{\infty} \{|\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| < \varepsilon\}) = 1.$$

З критерію збіжності м.н. отримуємо таку зручну у застосуваннях достатню умову збіжності м.н.

Твердження 1.14 (достатня умова збіжності майже напевно)**.** *Якщо для кожного* $\varepsilon > 0$ *збіжний ряд*

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\omega\colon |\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| \ge \varepsilon\} < +\infty$$

то $\eta_n \to \eta$ *м.н.*

2.20. Лема Бореля-Кантеллі

Теорема 1.16 (лема Бореля-Кантеллі)**.** *Нехай* (A_n) *— послідовність подій.*

1. *Якщо* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, *то серед подій* (A_n) *з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається скінченна кількість подій.*

2. *Якщо* (A_n) *— послідовність незалежних в сукупності подій таких, що з ймовірністю, яка дорівнює одиниці, серед* (A_n) *відбувається скінченна кількість подій, то* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$.

Через C позначимо подію "серед (A_n) відбувається нескінченна кількість подій". Зауважимо, що

$$C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{s=n}^{+\infty} A_s.$$

Зауваження. (P, Erdős, A. Renyi, 1959) Твердження другої частини леми Бореля-Кантелі залишається правильним за умови попарної незалежності подій (A_n).

2.21. Посилений закон великих чисел (ПЗВЧ)

Теорема 1.17 (Колмогорова)**.** *Нехай* (ξ_n) — *послідовність незалежних випадкових величин зі скінченними дисперсіями* $D\xi_n < \infty$ $(n \geq 1)$, *таких, що*

$$\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < +\infty.$$

Тоді

$$\frac{1}{n} \sum\nolimits_{k=1}^{n} (\xi_k - M\xi_k) \to 0 \quad \textit{м.н.}$$

Зауваження. У теоремі Чебишова ми припускали, що всі дисперсії обмежені в сукупності: $D\xi_n \leq c < +\infty$ $(n \geq 1)$. З цього, очевидно випливає, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < +\infty$.

У випадку, коли ξ_n — однаково розподілені випадкові величини, то у попередньому твердженні можна відмовитись навіть від умови існування дисперсій. Власне, це є змістом наступної теореми.

Теорема 1.18 (Колмогорова-Хінчіна)**.** *Якщо* (ξ_j) — *послідовність незалежних випадкових величин з однаковим розподілом* $(F_{\xi_j} = F$ $(j \geq 1))$ *і* $\exists M\xi_j = a \neq \infty$ $(j \geq 1)$, *то*

$$\frac{1}{n} \sum\nolimits_{j=1}^{n} \xi_j \to a \quad \textit{м.н.}\ .$$

Для доведення теореми Колмогорова ввикористовується така лема.

Лема 1.1 (нерівність Колмогорова)**.** *Нехай* (ξ_n) — *незалежні випадкові величини,* $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. *Якщо* $M\xi_n = 0$ $(n \geq 1)$ *і* $D\xi_n < +\infty (n \geq 1)$, *то*

$(\forall N \geq 1)$ $(\forall a > 0) : \mathbb{P}\{\omega : \sup_{1 \leq n \leq N} |\eta_n| \geq a\} \leq \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^{N} D\xi_k.$

2.22. Згортка розподілів випадкових величин

Згорткою розподілів F_1 і F_2 називається функція $F_1 * F_2 \colon \mathbb{R} \to [0,1]$, визначена для всіх $x \in \mathbb{R}$ за формулою

$$(F_1 * F_2)(x) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-y)dF_2(y).$$

Вправа. Переконайтесь, що $F_1 * F_2$ — функція розподілу.

Теорема 1.19 (теорема про згортку розподілів)**.** *Нехай ξ_1 і ξ_2 — незалежні випадкові величини. Тоді*

$$(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ F_{\xi_1+\xi_2}(x) = (F_1 * F_2)(x) = (F_2 * F_1)(x),$$

де $F_j = F_{\xi_j}$ $(j \in \{1,2\})$.

Якщо функція розподілу F_2 має щільність f_2, то з теореми про формулу згортки негайно отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1.5. *Нехай ξ_1 і ξ_2 — незалежні випадкові величини, а f_2 — щільність розподілу ξ_2. Тоді*

$$(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ F_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-y)f_2(y)dy.$$

Наслідок 1.6. *Нехай ξ_1 і ξ_2 — незалежні випадкові величини, а f_1 — щільність розподілу ξ_1. Тоді, сума випадкових величин $\xi_1+\xi_2$ має щільність $f_{\xi_1+\xi_2}$ і м.с. за мірою Лебега*

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)dF_2(y).$$

Наслідок 1.7 (згортка щільностей)**.** *Нехай f_1 і f_2 — щільності розподілів випадкових величин ξ_1 і ξ_2. Тоді для щільності розподілу суми $\xi_1+\xi_2$ м.с. за мірою Лебега виконується рівність*

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)f_2(y)dy.$$

Згорткою щільностей f_1 та f_2 називають

$$(f_1 * f_2)(x) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y) f_2(y) dy.$$

Приклад (Згортка рівномірних розподілів). Розглянемо незалежні випадкові величини ξ і η, що мають рівномірний розподіл на проміжку $[a,b]$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$ З незалежності ξ і η за наслідком 1.7 про згортку щільностей отримуємо

$$f_{\xi+\eta}(x) = (f * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) f(y) dy = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x-y) dy =$$

$$= \left[\begin{array}{c} x - y = t \\ dy = -dt \end{array} \right] = \frac{1}{b-a} \int_{x-b}^{x-a} f(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 2a, \\ \frac{x-2a}{(b-a)^2}, & 2a < x < a+b, \\ \frac{2b-x}{(b-a)^2}, & a+b < x < 2b, \\ 0, & x > 2b. \end{cases}$$

Подібно знаходимо згортку незалежних рівномірних розподілів на різних проміжках.

2.23. Гамма-розподіл

Гамма-розподіл $\Gamma(\alpha, \beta)$ з параметрами $\alpha > 0, \beta > 0$ — це розподіл випадкової величини з такою щільністю

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(\alpha)$ — Γ-функція Ойлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Вправа. Перевірити, що це справді щільність розподілу, тобто, що $f(x) \geq 0$ м.с. і $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Розподіл $\exp(\beta) \stackrel{def}{=} \Gamma(1, \beta)$ називається *показниковим (експоненційним) розподілом*, тобто, це розподіл зі щільністю

$$f(x) = \beta e^{-\beta x} \ (x > 0), \ f(x) = 0 \ (x < 0).$$

Твердження 1.15 (теорема додавання Γ-розподілів). *Нехай* ξ_1, ξ_2 *— незалежні випадкові величини,* $\xi_j \in \Gamma(\alpha_j, \beta)$. *Тоді* $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

Приклад (Розподіл Ерланга). *Розподіл Ерланга* — це розподіл випадкової величини

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

де (ξ_j) — незалежні випадкові величини, що мають один і той же *показниковий розподіл* $\xi_j \in \exp(\beta) \stackrel{def}{=} \Gamma(1, \beta)$, $\beta > 0$. Тоді за теоремою додавання *розподіл Ерланга*, це Γ-розподіл $\Gamma(n, \beta)$.

Вправа (згортка показникових розподілів). Нехай ξ_1, ξ_2– незалежні випадкові величини з показниковими розподілами $\xi_j \in \exp(\beta_j)$, $0 < \beta_1 < \beta_2$. Довести, що щільність розподілу суми $\xi_1 + \xi_2$ дорівнює

$$f(x) = \beta_1 \beta_2 \frac{e^{-\beta_1 x} - e^{-\beta_2 x}}{\beta_2 - \beta_1} \quad (x > 0), \quad f(x) = 0 \quad (x < 0).$$

2.24. Розподіл χ^2

Розподіл χ^2 *з n-ступенями свободи* — це розподіл такої випадкової величини

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2,$$

де (ξ_j) — незалежні випадкові величини, $\xi_j \in \mathcal{N}(0, 1)$ $(1 \leq j \leq n)$.

Твердження 1.16. *Розподіл* χ^2 *— це* Γ*-розподіл* $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

Розподіл $\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, де $\xi_j \in \mathcal{N}(0, 1)$ і незалежні, у фізиці називають *розподілом Максвела.* З щойно доведеного випливає, що розподіл Максвела це розподіл $\Gamma(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

2.25. Згортка дискретних розподілів

Нехай ξ_1, ξ_2 — незалежні дискретні цілочисельні випадкові величини з розподілами $p_j(n) = \mathbb{P}\{\omega \colon \xi_j(\omega) = n\}$ $(n \in \mathbb{Z})$, $j \in \{1, 2\}$.

Пригадаємо спочатку, що для довільної випадкової величини η

$$\mathbb{P}\{\omega\colon \eta(\omega)=a\}=F_\eta(a+0)-F_\eta(a),$$

а за теоремою про згортку

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x-y)dF_2(y)=$$

$$=\sum\nolimits_{m=-\infty}^{+\infty}F_1(x-m)(F_2(m+0)-F_2(m))=\sum\nolimits_{m=-\infty}^{+\infty}F_1(x-m)p_2(m).$$

Тому, для кожного $n\in\mathbb{Z}$

$$p(n)\overset{def}{=}\mathbb{P}\{\omega\colon \xi_1(\omega)+\xi_2(\omega)=n\}=F_{\xi_1+\xi_2}(n+0)-F_{\xi_1+\xi_2}(n)=$$

$$=\sum\nolimits_{m=-\infty}^{+\infty}(F_1(n-m+0)-F_1(n-m))p_2(m)=$$

$$=\sum\nolimits_{m=-\infty}^{+\infty}p_1(n-m)p_2(m)\overset{def}{=}(p_1*p_2)(n).$$

p_1*p_2 — *згортка дискретних розподілів.* Отже, довели таке твердження.

Твердження 1.17 (згортка цілочисельних розподілів)**.** *Нехай ξ_1,ξ_2 — незалежні цілочисельні випадкові величини з розподілами p_1,p_2, відповідно. Тоді розподіл суми $\xi_1+\xi_2$ є згорткою розподілів доданків*

$$(\forall n\in\mathbb{Z}\colon)\ \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_1(\omega)+\xi_2(\omega)=n\}=(p_1*p_2)(n).$$

Твердження 1.18 (теорема додавання розподілів Пуассона)**.** *Нехай ξ_1,ξ_2 — незалежні випадкові величини, $\xi_j\in\mathcal{P}oiss(\lambda_j)$. Тоді*

$$\xi=\xi_1+\xi_2\in\mathcal{P}oiss(\lambda_1+\lambda_2).$$

РОЗДІЛ 3. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ФУНКЦІЇ І ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

3.1. Означення характеристичної функції

Функцію $\xi(\omega):\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ будемо називати *комплексною (комплекснозначною) випадковою величиною,* якщо в зображенні $\xi=\eta_1+i\eta_2$, η_j — випадкові величини (дійсні). За означенням приймемо

$$\int_\Omega\xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega)\overset{def}{=}\int_\Omega \mathrm{Re}\ \xi\ \mathbb{P}(d\omega)+i\int_\Omega \mathrm{Im}\ \xi\ \mathbb{P}(d\omega).$$

Тоді

$$M\xi \stackrel{def}{=} M(\text{Re } \xi) + iM(\text{Im } \xi) - \textit{математичне сподівання,}$$

$D\xi \stackrel{def}{=} M|\xi - M\xi|^2$ — *дисперсія* комплекснозначної випадкової величини ξ.

Безпосередньо з означення випливає, що математичне сподівання
комплекснозначної випадкової величини є адитивним, комплексно лінійним (тобто, $(\forall \alpha \in \mathbb{C})$: $M(\alpha\xi) = \alpha M\xi$) функціоналом.

Означення(характеристичної функції випадкової величини). Нехай ξ — випадкова величина (дійсна). Для $t \in \mathbb{R}$ *характеристична функція* випадкової величини ξ визначається рівністю

$$\varphi_\xi(t) = M(e^{i\xi t}).$$

Твердження 1.19. *ξ_1 і ξ_2 — незалежні випадкові величини. Тоді $\eta_1 = e^{it\xi_1}$, $\eta_2 = e^{it\xi_2}$ — незалежні випадкові величини для кожного $t \in \mathbb{R}$ і $M(\eta_1\eta_2) = M\eta_1 M\eta_2$, тобто,*

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t).$$

3.2. Характеристичні властивості характеристичних функцій

Теорема 1.20 (про характеристичні властивості). *Нехай ξ — випадкова величина. Тоді:*
1. $\varphi_\xi(0) = 1$; 2. $\varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)}$ $(t \in \mathbb{R})$; 3. *(властивість додатної визначеності)*

$$(\forall t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R})\ (\forall c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}) : \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} c_k \bar{c}_s \varphi_\xi(t_k - t_s) \geq 0;$$

4. $\varphi(t)$ *— рівномірно неперервна на* $\mathbb{R}$.

Наступна теорема, власне, і вказує на те, що властивості 1 — 4 характеристичних функцій є їхніми *характеристичними* властивостями.

Теорема 1.21 (Бохнера). *Припустимо, що функція $\varphi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ має властивості 1—4 з попередньої теореми. Тоді існують такий ймовірнісний простір $(\Omega, A, \mathbb{P})$ і випадкова величина ξ, що $\varphi_\xi(t) \equiv \varphi(t)$.*

3.3. Властивості характеристичних функцій (продовження)

5. Для кожної випадкової величини ξ і $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ характеристична функція випадкової величини $\eta = a\xi + b$:

$$\varphi_\eta(t) = e^{ibt}\varphi_\xi(at).$$

6. (**характеристична функція нормального розподілу**).

$$\varphi_\eta(t) = e^{it}\varphi_\xi(\sigma t) = e^{it - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

— характеристична функція розподілу $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

7. (**характеристична функція дискретного розподілу**). Нехай ξ має дискретний розподіл $\mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = x_n\} = p_n$, $\sum_{n=0}^{N} p_n = 1$, $N \leq +\infty$. Тоді

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{N} e^{itx_n} p_n$$

— ряд Діріхле (при $N = +\infty$) і експоненційний поліном при $N < +\infty$.

8. (**однозначна визначеність функції розподілу за характеристичною функцією**).

Теорема 1.22 (єдиності функції розподілу)**.** *Характеристична функція однозначно визначає функцію розподілу. Тобто, якщо*

$$\varphi(t) = \int_\Omega e^{itx} dF_1(x) = \int_\Omega e^{itx} dF_2(x),$$

то $F_1(x) \equiv F_2(x)$.

Цю теорему отримуємо з теореми про обернене перетворення до перетворення Фур'є-Стілт'єса, яка дає зображення функції розподілу через характеристичну функцію. Спочатку зауважимо, що у випадку розподілів зі щільністю, характеристична функція яких абсолютно сумовна на всій дійсній прямій, тобто $\varphi_\xi \in L_1(-\infty, +\infty)$, оскільки характеристична функція у цьому випадку за означенням є перетворенням Фур'є щільності f_ξ, то за теоремою про обернене перетворення Фур'є, м.с. за мірою Лебега

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_\xi(t)dt.$$

9. (**теореми неперервності для характеристичних функцій**).

Нехай F_n $(n \in \mathbb{Z}_+)$ — функції розподілу а $\varphi_n(t)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ — їхні характеристичні функції, тобто $\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_n(x)$.

Теорема 1.23 (неперервності для характеристичних функцій). *Якщо функція розподілу $F_0(x)$ — неперервна, то з поточкової збіжності характеристичних функцій $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) \to \varphi_0(t)$ випливає рівномірна збіжність на всій числовій прямій функцій розподілу*

$$\sup\{|F_n(x) - F_0(x)| \colon x \in \mathbb{R}\} \to 0 \ (n \to +\infty),$$

тобто, $F_n(x) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} F_0(x)$ $((n \to +\infty))$.

За доведенням цієї теореми відсилаємо читача на с.170–172 підручника [1].

Варто відзначити, що у випадку, коли послідовність характеристичних функцій збіжна рівномірно, то нескладним наслідком звідси і з теореми про обернене перетворення Фур'є-Стілт'єса, стає висновок про збіжність послідовності відповідних функцій розподілу і у загальному випадку.

Вправа. 1. У випадку розподілів зі щільністю вивести теорему 1.22 (єдиності) з формули оберненого перетворення Фур'є.
2. У випадку розподілів зі щільністю і рівномірно збіжної на всій дійсній прямій послідовності характеристичних функцій $\varphi_n \in L_1(-\infty, +\infty)$ вивести теорему 1.23 (неперервності) з формули оберненого перетворення Фур'є.

10. (**обернене перетворення Фур'є-Стілт'єса**).

Теорема 1.24. *Якщо φ — характеристична функція, то існує єдина F — функція розподілу така, що $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$. При цьому для довільних точок неперервності F, $\alpha < \beta$,*

$$F(\beta) - F(\alpha) = \lim_{\sigma\to+0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \frac{e^{-i\beta t} - e^{-i\alpha t}}{-it} e^{-t^2 \frac{\sigma^2}{2}} dt. \qquad (*)$$

Звідси випливає, що функція розподілу за якою побудована φ однозначно задається цією формулою.

Варто зазначити, що, характеристична функція є перетворенням Фур'є-Стілт'єса міри $dF(x) = \nu_F(dx)$ — Лебега–Стілт'єса

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x).$$

Формула (*) — формула оберненого перетворення Фур'є-Стілт'єса. Попередня теорема вказує на те, що у випадку функції розподілу обернене перетворення завжди існує. Наступна теорема дає інший вигляд оберненого перетворення.

Теорема 1.25. *Якщо φ — характеристична функція, F — функція розподілу, то: а) для довільних $\alpha < \beta$ точок неперервності F*

$$F(\beta) - F(\alpha) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi(t) \frac{e^{-i\beta t} - e^{-i\alpha t}}{-it} dt;$$

б) Якщо $\varphi \in L_1$ (абсолютно інтегровна за Лебегом на всій прямій), то існує щільність $f(x)$ і м.с. за мірою Лебега виконується рівність

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt.$$

Для наших застосувань годяться обидві теореми про вигляд оберненого перетворення Фур'є-Стілт'єса, тому ми наведемо повне доведення лише другої з них. Доведення іншої можна знайти, наприклад, на с.78–80 книги Дж. Ламперті [2]. У доведенні, як однієї з цих теорем, так і іншої, по-різному використовується одна і та ж ідея, в основі якої лежить доведене вище твердження, що щільність розподілу згортки двох розподілів, один з яких має щільність, завжди існує.

Нехай F має щільність, тобто $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, тоді її характеристична функція $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx$ — звичайне перетворення Фур'є функції f на всій дійсній прямій.

11. (**формула Тейлора для характеристичних функцій**).

Теорема 1.26 (формула Тейлора з залишковим членом у формі Пеано для характеристичних функцій)**.** *Припустимо, що ξ — випадкова величина така, що $\exists n \in \mathbb{N}$, таке, що $\exists M\xi^n \neq \infty$ (існує скінченний момент n-го порядку). Тоді*

$$\varphi_\xi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(it)^k}{k!} M\xi^k + t^n \varepsilon_n(t),$$

при цьому $\varepsilon_n(t) \to 0 \quad (t \to 0)$.

Твердження 1.20. *Якщо $M\xi^2 \neq \infty$, то для всіх $t \in \mathbb{R}$ і кожного $T > 0$*

$$2|\varepsilon_2(t)| \leq 3 \int_{|x|>T} x^2 dF(x) + 3|t|TM|\xi|^2.$$

З формули Тейлора стандартно отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1.8. *Якщо $(\exists n \in \mathbb{N})\colon\ M\xi^n \neq \infty$, то $(\forall k,\ 1 \leq k \leq n)\colon$*

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k M\xi^k.$$

Зокрема, у випадку $n = 2$

$$\varphi_\xi'(0) = iM\xi,\ \varphi_\xi''(0) = -M\xi^2 \text{ і } D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = -\varphi_\xi''(0) + (\varphi_\xi'(0))^2.$$

Вправа. Довести наслідок.

3.4. Центральна гранична теорема

Теорема 1.27 (центральна гранична)**.** *Нехай для кожного $n \in \mathbb{N}$ $(\xi_{j,n})_{j=1}^n$ — послідовність однаково розподілених (тобто $F_{\xi_{j,n}} = F_n$) незалежних випадкових величин, в яких існують скінченні $M\xi_{j,n} = a(n)$, $D\xi_{j,n} = \sigma^2(n)$. Якщо існує послідовність $T_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ така, що*

$$\frac{T_n}{\sqrt{n}} \to 0 \quad і \quad \frac{1}{\sigma^2(n)} \int_{|x-a(n)|>\sigma(n)T_n} (x - a(n))^2 dF_n(x) \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

то

$$(\forall x \in \mathbb{R})\colon \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big\{\omega : \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} < x\Big\} = \Phi(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

де $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_{j,n}$.

Відзначимо деякі наслідки з ЦГТ (центральної граничної теореми).

Теорема 1.28 (класична ЦГТ)**.** *Нехай* $(\eta_j)_{j=1}^{+\infty}$ *— послідовність однаково розподілених (тобто* $F_{\eta_j} = F$ *) незалежних випадкових величин, у яких існують скінченні* $M\eta_j = a$, $D\eta_j = \sigma^2$. *Тоді*

$$(\forall x \in \mathbb{R}): \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left\{\omega : \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} < x\right\} = \Phi(x), \qquad \text{де} \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} \eta_j.$$

3.4. Центральна гранична теорема для схеми Бернуллі

Теорема 1.29 (інтегральна теорема Муавра-Лапласа)**.** *В рамках схеми Бернуллі, якщо* $b_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, *то*

$$(\forall x \in \mathbb{R}): \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left\{\omega : \frac{m_n - a_n}{\sqrt{b_n}} < x\right\} = \Phi(x).$$

Якщо у рамках схеми Бернуллі ймовірність $p(n) \equiv p \in (0, 1)$, тобто, стала, то умова $b_n \stackrel{def}{=} npq \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ виконується, і, отже, правильна така теорема.

Наслідок 1.9 (класична інтегральна теорема Муавра-Лапласа)**.** *В рамках схеми Бернуллі, якщо ймовірність* $p(n) \equiv p \in (0, 1)$ *— стала, то*

$$(\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b): \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left\{\omega : a \le \frac{m_n - a_n}{\sqrt{b_n}} < b\right\} = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Вправа. Довести цю теорему. (Вказівка. Переконатись, що, якщо вибрати, як і у попередньому доведенні $T_n = T = 1 + \max\{q, p\}/\sqrt{pq}$, то з того, що $p(n) \equiv p \in (0, 1)$ — стала, умови ЦГТ виконуватимуться.)

Наслідок 1.10 (інтегральна Муавра-Лапласа)**.** *Нехай у рамках схеми Бернуллі* m_n *— кількість успіхів в* n *незалежних випробуваннях і* $b_n = npq \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. *Тоді*

$$(\forall a < b): \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left\{\omega : a \le \frac{m_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Вправа. Довести цю теорему.(Вказівка. Двічі застосувати рівність з інтегральної теореми Муавра-Лапласа (теорема 1.29).)

У книзі [3] на с.350–353 знаходимо ще такий варіант ЦГТ.

Теорема 1.30 (центральна гранична з "умовою Ліндеберга")**.** *Нехай* (ξ_j) *— послідовність незалежних випадкових величин, в яких існують скінченні* $M\xi_j = a(j)$, $D\xi_j = \sigma^2(j) > 0$. *Якщо для кожного* $\varepsilon > 0$ *виконується умова Ліндеберга*

$$\frac{1}{DS_n}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\int_{|x-a(j)|\geq\varepsilon\sqrt{DS_n}}(x-a(j))^2 dF_j(x) \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

де S_n, F_j *— функція розподілу* ξ_j, *то*

$$(\forall x \in \mathbb{R}):\quad \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left\{\omega : \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} < x\right\} = \Phi(x).$$

3.5. Приклади застосування характеристичних функцій: теореми додавання розподілів

Теорема 1.31 (додавання нормальних розподілів)**.** *Нехай* ξ_1 *і* ξ_2 *— незалежні випадкові величини* $\xi_j \in \mathcal{N}(a_j, \sigma_j^2)$ $(j \in \{1,2\})$. *Тоді*

$$\xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Теорема 1.32 (додавання розподілів Коші)**.** *Нехай* ξ_1 *і* ξ_2 *— незалежні випадкові величини з розподілами* $\xi_j \in \mathcal{K}(a_j, b_j)$ $(j \in \{1,2\}$. *Тоді*

$$\xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{K}(a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Характеристична функція розподілу Коші $\xi \in \mathcal{K}(a,b)$

$$\varphi_\xi(t) = e^{iat - b|t|}.$$

3.6. Твірна функція

Твірною функцією послідовності $(p_n)_{n\geq 0}$ називаємо формальний степеневий ряд $\psi(z) \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$.

Приклади.
1. $p_n = n!$, $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$ — збіжний в точці $z = 0$, розбіжний при $z \neq 0$.
2. $p_n = \frac{1}{n!}$, $\psi(z) = e^z$.
3. $p_n = \frac{1}{2^{n+1}}$, $\psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2-z}$.

Означення (твірної функції цілочисельної випадкової величини). Нехай ξ — цілочисельна невід'ємна випадкова величина з розподілом $p_n = \mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = n\}$ для $n \geq 0$. *Твірною функцією* $\psi_\xi(z)$ випадкової величини ξ (розподілу) називається функція

$$\psi_\xi(z) = Mz^\xi = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$$

визначена для всіх комплексних z таких, що $|z| \leq 1$, тобто визначена на замкненому одиничному крузі з центром у початку координат. Останнє за ознакою порівняння випливає з того, що $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Твердження 1.21. *Нехай ξ — цілочисельна невід'ємна випадкова величина. Тоді твірна функція: 1. $\psi_\xi(z)$ — аналітична в крузі $\{z : |z| < 1\}$, 2. $\psi_\xi(z)$ — неперервна в точці $z = 1$ як функція на $(-1, 1]$, при цьому*

$$\lim_{z \to 1-0} \psi_\xi(z) = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$

Вправа. Чи правильне обернене твердження за додаткової умови, що $p_n \geq 0$? Тобто, чи з умов $\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = 1$ і $p_n \geq 0$ $(n \geq 0)$ випливає, що $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$? Якщо би це твердження було правильним, то звідси негайно випливало би таке твердження.

Твердження 1.22. *Нехай $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$, $p_n \geq 0$ $(n \geq 0)$. ψ — твірна функція цілочисельної випадкової величини тоді і тільки тоді, коли $\lim_{x\to 1-0} \psi(x) = 1$.*

Наступне твердження є очевидним наслідком аналітичності твірної функції в околі початку координат.

Твердження 1.23. *Нехай ξ — цілочисельна невід'ємна випадкова величина, $p_n = \mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = n\}$ $(n \geq 0)$, $\psi_\xi(z)$ — твірна функція. Тоді*

$$p_n = \frac{\psi_\xi^{(n)}(0)}{n!} \quad (n \geq 0).$$

Теорема 1.33. *Нехай ξ — цілочисельна невід'ємна випадкова величина, $p_n = \mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) = n\}$ $(n \geq 0)$. Тоді*
$$M\xi = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} np_n = \psi'_\xi(1-0).$$

Правильне наступне загальніше твердження

Твердження 1.24. *Для цілочисельної невід'ємної випадкової величини ξ позначимо $\xi^{(k)} \stackrel{def}{=} \xi(\xi-1)\dots(\xi-k+1)$ $(k \geq 2)$. Тоді*
$$M\xi^{(k)} = \psi^{(k)}(1-0).$$

Вправа. Довести останнє твердження.

Твердження 1.25. *Розподіл невід'ємної цілочисельної випадкової величини ξ однозначно визначається твірною функцією $\psi_\xi(z)$.*

Твердження 1.26. *Якщо ξ_1 і ξ_2 — цілочисельні незалежні випадкові величини, то для всіх z, $|z| \leq 1$, $\psi_{\xi_1+\xi_2}(z) = \psi_{\xi_1}(z)\psi_{\xi_2}(z)$.*

Вправа (сума розподілів Пуасона). Нехай ξ_1 і ξ_2 — незалежні випадкові величини, $\xi_j \in \mathcal{P}oiss(\lambda_j)$ $(j \in \{1,2\}$. Використовуючи властивості твірних функцій, довести, що $\xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{P}oiss(\lambda_1 + \lambda_2)$.

3.8. Сума випадкової кількості випадкових величин

Теорема 1.34. *Нехай (ξ_n) — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з твірною функцією $g\,(z)$, а ν — цілочисельна випадкова величина незалежна від заданої послідовності з твірною функцією $R\,(z)$. Тоді*
$$\psi_\eta\,(z) = R\,(g\,(z))$$
— твірна функція випадкової величини $\eta\,(\omega) = \sum\limits_{n=1}^{\nu(\omega)} \xi_n\,(\omega)$.

Доведення. За формулою повної ймовірності
$$\mathbb{P}\{\omega\colon \eta = N\} = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\omega\colon \nu = n\}\mathbb{P}(\{\omega\colon \xi_1 + ... + \xi_\nu = N\}\big|\{\omega\colon \nu = n\}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\omega : \nu = n\}\mathbb{P}\{\omega : \xi_1 + ... + \xi_n = N\}.$$

Отже,

$$\psi_\eta(z) = \sum_{N=0}^{+\infty} z^N \mathbb{P}\{\omega : \eta(\omega) = N\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{N=0}^{+\infty} z^N \mathbb{P}\{\omega : \xi_1 + ... + \xi_n = N\}\mathbb{P}\{\omega : \nu(\omega) = n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_{\xi_1 + ... + \xi_n}(z)\mathbb{P}\{\omega : \nu(\omega) = n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (g(z))^n \mathbb{P}\{\omega : \nu(\omega) = n\} = R(g(z)).$$

□

РОЗДІЛ 4. УМОВНІ РОЗПОДІЛИ

4.1. Означення умовного математичного сподівання

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір, $\mathcal{A}_0$ — σ-алгебра, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$.

Випадкову величину ξ називатимемо *вимірною відносно σ-алгебри* $\mathcal{A}_0$, якщо для σ-алгебри $\mathcal{A}_\xi$, породженої випадковою величиною, $\mathcal{A}_\xi \subset \mathcal{A}_0$,
і *вимірною відносно розбиття (повної групи подій)* $\mathcal{H} = (H_j)_{j=1}^{N}$, $N \leq +\infty$, простору, якщо вона вимірна відносно σ-алгебри, породженої даним розбиттям.

Означення (умовного математичного сподівання). *Умовним математичним сподіванням* випадкової величини ξ відносно σ-алгебри $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ називається така випадкова величина $M(\xi \big| \mathcal{A}_0) = M(\xi \big| \mathcal{A}_0)(\omega)$, що:

a) $M(\xi \big| \mathcal{A}_0)$ є $\mathcal{A}_0$-вимірною;

b) $(\forall A \in \mathcal{A}_0)\colon\ \int_A \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A M(\xi \big| \mathcal{A}_0)(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$.

Твердження 1.27. *Якщо ξ — невід'ємна випадкова величина, то умовне математичне сподівання $M(\xi \big| \mathcal{A}_0)$ існує, невід'ємне і з точністю до рівності м.н. — едине.*

Доведення. Для фіксованої випадкової величини ξ і $A \in \mathcal{A}_0$ розглянемо

$$Q(A) = Q_\xi(A) = \int_A \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

1. Перевіримо зліченну адитивність Q на $\mathcal{A}_0$. Виберемо довільну послідовність (A_j), $A_j \in \mathcal{A}_0$, $A_j \cap A_s = \varnothing (j \neq s)$. Тоді, позначаючи $A = \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} A_j$, отримаємо

$$Q\big(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\big) = \int_\Omega \xi \chi_A \mathbb{P}(d\omega) = M\big(\sum\nolimits_{j=1}^{+\infty} \xi \chi_{A_j}\big).$$

Оскільки для кожного фіксованого ω послідовність $S_N = \sum_{j=1}^{N} \xi\chi_{A_j}$ — неспадна за N і $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(\omega) = \begin{cases} \xi(\omega), & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases}$ то за теоремою про монотонну збіжність $\lim\limits_{N\to+\infty} MS_N = M(\lim\limits_{N\to+\infty} S_N)$. Звідси

$$Q(A) = M\big(\sum_{j=1}^{+\infty} \xi\chi_{A_j}\big) = \lim_{N\to+\infty} MS_N = \sum_{j=1}^{+\infty} M(\xi\chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^{+\infty} Q(A_j).$$

2. Перевіримо абсолютну неперервність Q відносно ймовірності $\mathbb{P}$. Для цього потрібно довести, що $(\forall A \in \mathcal{A}_0)\colon\ \mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow\ Q(A) = 0$.

Зробимо це спочатку, коли ξ — проста випадкова величина, тобто, має вигляд

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j\chi_{A_j}, \quad A_j = \{\omega\colon \xi(\omega) = x_j\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Справді, для довільної $A \in \mathcal{A}_0,\ \mathbb{P}(A) = 0$

$$Q(A) = M(\xi\chi_A) = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbb{P}(A \cap A_j) = 0.$$

Виберемо тепер послідовність невід'ємних простих функцій $\xi_m \nearrow \xi$ $(m \to +\infty)$. За теоремою про монотонну збіжність

$$Q(A) = M(\xi\chi_A) = M(\lim_{m\to+\infty} \xi_m\chi_A) = \lim_{m\to+\infty} M(\xi_m\chi_A) = \lim_{m\to+\infty} Q_{\xi_m}(A) = 0.$$

За теоремою Радона-Никодима, яку ми сформулюємо у потрібній нам формі, тепер негайно отримаємо потрібний висновок.

Теорема 1.35 (Радона-Никодима). *Нехай $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu)$ — вимірний простір з σ-скінченною мірою μ. Якщо Q — зліченно-адитивна абсолютно неперервна відносно μ міра, то існує $\mathcal{A}_0$-вимірна невід'ємна функція $g\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ така, що для кожної $A \in \mathcal{A}_0$*

$$Q(A) = \int_A g(\omega)\mu(d\omega).$$

З точністю до множини μ-міри нуль, g — єдина.

□

Зауваження. Якщо випадкова величина ξ — $\mathcal{A}_0$-вимірна, то, очевидно, що тоді можна вибрати $M(\xi\big|\mathcal{A}_0) = \xi$.

Твердження 1.28. *Якщо ξ — випадкова величина, для якої*
$$\inf\{M(\xi^+|\mathcal{A}_0),\ M(\xi^-|\mathcal{A}_0)\} < +\infty,\ \text{де } \xi^+ = \sup\{\xi, 0\},\ \xi^- = \sup\{-\xi, 0\},$$
і $\mathbb{P}(B) = 0$ для $B = \{\omega\colon M(\xi^+|\mathcal{A}_0)(\omega) = M(\xi^-|\mathcal{A}_0)(\omega) = +\infty\}$, то умовне математичне сподівання $M(\xi|\mathcal{A}_0)$ існує і м.н.
$$M(\xi|\mathcal{A}_0) = M(\xi^+|\mathcal{A}_0) - M(\xi^-|\mathcal{A}_0).$$

Вправа. Отримати дане твердження безпосередньо з твердження 1.27.

Надалі розглядатимемо умовні математичні сподівання тільки від випадкових величин, що задовольняють умови твердження 1.28.

4.2. Властивості умовних математичних сподівань

1. Якщо $\xi(\omega) = a$ м.н., то $M(\xi|\mathcal{A}_0) = a$ м.н. **Вправа.** Нехай ξ — випадкова величина така, що для $A = \{\omega\colon \xi(\omega) > 0\}$ виконується $\mathbb{P}(A) > 0$. Довести, що існує $q > 0$ таке, що $\mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) \geq q\} > 0$. *Вказівка.* Розглянути події $A_n = \{\omega\colon \frac{1}{n+1} \leq \xi(\omega) < \frac{1}{n}\}$.

2. Нехай $a, b \in \mathbb{R}$, а у випадкових величин ξ_1, ξ_2 існують умовні математичні сподівання відносно σ-алгебри $\mathcal{A}_0$. Тоді для випадкової величини $a\xi_1 + b\xi_2$ існує таке ж умовне математичне сподівання і м.н.
$$M(a\xi_1 + b\xi_2|\mathcal{A}_0) = aM(\xi_1|\mathcal{A}_0) + bM(\xi_2|\mathcal{A}_0).$$
3. Нехай $\mathcal{A}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$. Тоді $M(\xi|\mathcal{A}_0) = M\xi$ м.н. для кожної випадкової величини ξ.
4. $M(\xi|\mathcal{A}) = \xi$ для кожної випадкової величини ξ, позаяк ξ є $\mathcal{A}$-вимірна.

З означення $M(\xi|\mathcal{A}_0)$ негайно отримуємо такий наслідок.

5. (*Узагальнена формула повної ймовірності*). $M\big(M(\xi|\mathcal{A}_0)\big) = M\xi$ для кожної випадкової величини ξ.

6. Для будь-яких випадкових величин $\xi_1,\ \xi_2$:
$$\xi_1 \leq \xi_2 \text{ м.н.} \iff M(\xi_1|\mathcal{A}_0) \leq M(\xi_2|\mathcal{A}_0) \text{ м.н.}$$

7. Для кожної випадкової величини ξ: $|M(\xi|\mathcal{A}_0)| \leq M(|\xi||\mathcal{A}_0)$ м.н.

Твердження п.7 є елементарним наслідком з п.6.

8. Нехай σ-алгебри $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ такі, що $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$. Тоді для кожної випадкової величини ξ м.н.

$$M\big(M(\xi\big|\mathcal{A}_1)\big|\mathcal{A}_0\big) = M(\xi\big|\mathcal{A}_0).$$

9. Нехай випадкова величина η вимірна відносно $\mathcal{A}_0$. Тоді для кожної випадкової величини ξ такої, що $M|\xi| < +\infty,\ M|\xi\eta| < +\infty$, виконується

$$M(\xi\eta\big|\mathcal{A}_0) = \eta M(\xi\big|\mathcal{A}_0).$$

Зауважимо тепер, що у попередньому доведенні потрібний такий варіант теореми про монотонну збіжність.

10. (**Теорема про монотонну збіжність.**) Нехай ξ і (ξ_m) невід'ємні випадкові величини. Якщо $\xi_m \nearrow \xi$ $(m \to +\infty)$ м.н., то $M(\xi_m\big|\mathcal{A}_0) \nearrow M(\xi\big|\mathcal{A}_0)$ $(m \to +\infty)$ м.н.

Доведення (схему доведення) цієї теореми можна відшукати на с.104 книги [4].

Дамо тепер означення умовного математичного сподівання випадкової величини відносно іншої випадкової величини та відносно випадкового вектора.

Означення (умовного математичного сподівання випадкової величини відносно іншої випадкової величини). Нехай ξ, η — випадкові величини, а $\mathcal{A}_\eta$ — σ-алгебра, породжена випадковою величиною η. Тоді випадкова величина

$$M(\xi\big|\eta) \overset{def}{=} M(\xi\big|\mathcal{A}_\eta)$$

називається *умовним математичним сподіванням випадкової величини ξ відносно випадкової величини η*.

Означення (умовного математичного сподівання випадкової величини відносно випадкового вектора). Нехай ξ — випадкова величина, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$ —випадковий вектор, а $\mathcal{A}_\eta = \mathcal{A}_{\eta_1,\ldots,\eta_k} = \eta^{-1}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\big)$ — σ-алгебра, породжена випадковим вектором η. Тоді випадкова величина

$$M(\xi\big|\eta) \overset{def}{=} M(\xi\big|\mathcal{A}_\eta)$$

називається *умовним математичним сподіванням випадкової величини ξ відносно випадкового вектора η.*

4.3. Умовні розподіли: властивості

Означення (умовної ймовірності події відносно σ-алгебри). Нехай $A \in \mathcal{A}$. *Умовною ймовірністю події A відносно σ-алгебри $\mathcal{A}_0$*, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, називається випадкова величина

$$\mathbb{P}(A\big|\mathcal{A}_0) = \mathbb{P}(A\big|\mathcal{A}_0)(\omega) \stackrel{def}{=} M(\chi_A\big|\mathcal{A}_0)(\omega).$$

Означення (умовної ймовірності події відносно випадкової величини). *Умовною ймовірністю події A відносно випадкової величини η* називається випадкова величина

$$\mathbb{P}(A\big|\eta) \stackrel{def}{=} \mathbb{P}(A\big|\mathcal{A}_\eta)(\omega) = M(\chi_A\big|\mathcal{A}_\eta)(\omega).$$

Відзначимо деякі *властивості умовної ймовірності*:

1. $(\forall A \in \mathcal{A})$: $\mathbb{P}(A\big|\mathcal{A}_0)$ — $\mathcal{A}_0$-вимірна випадкова величина.

2. $(\forall A_1 \in \mathcal{A}_0)$ $(\forall A_2 \in \mathcal{A})$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \int_{A_1} \mathbb{P}(A_2\big|\mathcal{A}_0)(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

З властивості 5. умовних математичних сподівань (узагальнена формула повної ймовірності) негайно отримуємо таку властивість.

3. Для будь-якої $A \in \mathcal{A}_0$ виконується $M(\mathbb{P}(A\big|\mathcal{A}_0)) = M(M(\chi_A\big|\mathcal{A}_0)) = \mathbb{P}(A)$.

Означення (умовного математичного сподіванням випадкової величини відносно значення іншої випадкової величини). Нехай ξ, η — випадкові величини й існує $M\xi$. *Умовним математичним сподіванням випадкової величини ξ за умови, що $\eta = y \in \mathbb{R}$* називається така борелева функція $m(y)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для кожної борелевої множини $B \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$

$$\int_{\{\omega\colon \eta \in B\}} \xi \mathbb{P}(d\omega) = \int_B m(y) dF_\eta(y).$$

Вживаємо таке позначення

$$M(\xi\big|\eta = y) = m(y).$$

Вправа. Переконатись, що $M(\xi\big|\eta = y)$ існує для будь-яких пар випадкових величин ξ, η, $M\xi \neq \infty$, скориставшись тим, що для невід'ємної ξ функція борелевої множини $Q(B) = \int_{\{\omega\colon \eta \in B\}} \xi \mathbb{P}(d\omega)$ є зліченно-адитивною абсолютно неперервною мірою відносно міри dF_η (повторити схему доведення існування умовного математичного сподівання відносно σ-алгебри).

Твердження 1.29. *Для будь-яких пар випадкових величин* ξ, η, $M\xi \neq \infty$, *виконується* $m(\eta) = M(\xi\big|\eta)$.

Доведення. Скориставшись формулою заміни змінної інтегрування, для будь-якої $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ отримуємо

$$\int_{\{\omega\colon \eta \in B\}} \xi \mathbb{P}(d\omega) = \int_B m(y) dF_\eta(y) = \int_{\{\omega\colon \eta \in B\}} m(\eta) \mathbb{P}(d\omega).$$

Функція $m(\eta)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ є $\mathcal{A}_\eta$-вимірною і $\mathcal{A}_\eta = \eta^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{\omega\colon \eta(\omega) \in B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, тобто множинами вигляду $\{\omega\colon \eta \in B\}$ вичерпуються всі множини σ-алгебри $\mathcal{A}_\eta$. Звідси, за означенням $M(\xi\big|\eta) = M(\xi\big|\mathcal{A}_\eta)$ отримуємо, що $m(\eta) = M(\xi\big|\eta)$. □

Означення (умовної ймовірності події відносно значення випадкової величини). *Умовною ймовірністю події A відносно значення випадкової величини* $\eta = y \in \mathbb{R}$ називається величина

$$\mathbb{P}(A\big|\eta = y) \stackrel{def}{=} M(\xi_A\big|\eta = y).$$

Вправа. Переконатись, що рівність $\mathbb{P}(A\big|\eta = y) = b(y)$ виконується dF_η-м.н., де $b(y)$ — борелева функція така, що $(\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\mathbb{P}(A \cap \{\eta = y\}) = \int_B b(y) dF_\eta(y).$$

Твердження 1.30. *Нехай $f_{\xi,\eta}(x, y)$ — щільність спільного розподілу випадкових величин ξ, η, а f_ξ, f_η — щільності відповідних випадкових величин. Позначимо*

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}, & \textit{якщо } f_\eta(y) \neq 0, \\ 0, & \textit{якщо } f_\eta(y) = 0. \end{cases}$$

Тоді

$$(\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})):\ \mathbb{P}(\{\xi \in B\}\big|\{\eta = y\}) = \int_B f_{\xi|\eta}(x|y)dF_\eta(y).$$

Доведення цього твердження можна знайти на с.236-237 книги [3].

Вправи. Нехай η — дискретна випадкова величина з розподілом $p_k = \mathbb{P}\{\eta = y_k\} > 0$, а ξ — випадкова величина, $M\xi \neq \infty$. Довести, що:

1. $(\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})):\ \mathbb{P}(B\big|\eta = y_k) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap \{\eta = y_k\})}{\mathbb{P}\{\eta = y_k\}}$,

2. $M(\xi\big|\eta = y_k) = \dfrac{1}{\mathbb{P}\{\eta = y_k\}} \displaystyle\int_{\{\eta = y_k\}} \xi \mathbb{P}(d\omega)$.

3. (**нерівність Маркова**). Для кожної випадкової величини η і будь-якої додатної випадкової величини ξ

$$(\forall a > 0):\ \mathbb{P}(\xi \geq a\big|\eta = y) \leq \frac{1}{a} M(\xi\big|\eta = y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

РОЗДІЛ 5. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

5.1. Означення випадкового процесу

Нехай заданий ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ і деяка множина I на прямій, $I \subset \mathbb{R}$.

Розглянемо функцію $\xi_t(\omega) = \xi(t, \omega)\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}$. Якщо $\xi_t(\omega)$ для кожного фіксованого $t \in I$ — випадкова величина, то таку функцію (сім'ю випадкових величин $\{\xi_t(\omega) : t \in I\}$) називають *випадковим процесом,* визначеним на I.

При фіксованому $t = t_0$ випадкову величину $\xi_{t_0}(\omega)$ називають значенням випадкового процесу. При фіксованому $\omega = \omega_0$ дійсну функцію $\xi_t(\omega_0) = \xi(t, \omega_0)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ називають *траєкторією* або *реалізацією процесу.*

$X = \{\xi_t(\omega_0)\colon \omega_0 \in \Omega\}$ — *фазовий простір* — простір, до якого належать всі траєкторії процесу.

Змінну t традиційно називають *часом.* Якщо множина I є інтервалом, тобто, множиною вигляду $[a, b]$, $[a, b)$, $[t_0, \infty)$ і т.д., то ξ_t називається *процесом з неперервним часом.*

Якщо I — дискретна множина: $I = \{t_n : n \geq 1\}$, то $\{\xi_t : t \in I\} = \{\xi_{t_n} : n \geq 1\}$ — *процес з дискретним часом.* Надалі, не зменшуючи загальності, ми розглядатимемо процеси з дискретним часом $t_n \equiv n - 1$; значення $n = 0$ називають *початковим моментом часу.*

Якщо фазовий простір X не більш, ніж зліченний, то говорять про *дискретний процес зі скінченною або ж зліченною кількістю станів* у залежності від того скінченна чи зліченна кількість елементів у X.

Приклад. 1. Нехай $X = \{0, 1\}$, а $\xi_{j,n}$ — індикатор появи У в j-тому випробуванні у серії довжини n в рамках схеми Бернуллі. Тоді, $\{\xi_{j,n}\colon 1 \leq j \leq n\}$ — процес з дискретним (скінченним) часом і фазовим простором X.
2. Нехай $X = \mathbb{Z}_+$, а ξ_t при фіксованому $t \in [0, +\infty)$ такі випадкові величини, що $\xi_t \in \mathcal{P}oiss(t\lambda)$, $\lambda > 0$. Тоді, $\{\xi_t\colon t \in [0, +\infty)\}$ — *процес Пуассона.*

Випадковий процес $\{\xi_t\colon t \in I\}$ вважається заданим, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ для довільних наборів $(t_j)_{j=1}^n$, $t_j \in I$ $(1 \le j \le n)$, $t_j < t_{j+1}$ $(1 \le j \le n-1)$ вказано *скінченно-вимірні розподіли*

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) \overset{def}{=} \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t_1}(\omega) < x_1,\dots,\xi_{t_n}(\omega) < x_n\},$$

при цьому розподіли повинні бути *узгодженими* між собою, тобто

$$(\forall m < n)\colon\ F_{t_1,\dots,t_m}(x_1,\dots,x_m) = F_{t_1,\dots,t_m,t_{m+1},\dots,t_n}(x_1,\dots,x_m,+\infty,\dots,+\infty)$$

для довільних наборів $(t_j)_{j=1}^m$, $t_j \in I$ $(1 \le j \le m)$, $t_j < t_{j+1}$ $(1 \le j \le m-1)$ і (x_j), $x_j \in \mathbb{R}$ $(1 \le j \le m)$.

Теорема. (Про характеристичні властивості скінченновимірних розподілів). Нехай $\{\xi_t\colon t \in I\}$ – випадковий процес. Тоді для його скінченно-вимірних функцій розподілу виконуються такі властивості:

1) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall t \in I^n)\colon\ 0 \le F_{\xi_t}(x;t) \le 1$;

2) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k, 1 \le k \le n)(\forall x' = (x_1,\dots,x_{k-1},-\infty,x_{k+1},\dots,x_n))(\forall t \in I^n)\colon\ F_{\xi_t}(x';t) := \lim\limits_{x_k \to -\infty} F_{\xi_t}(x;t) = 0$;

3) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall t \in I^n)\colon\ F_{\xi_t}(x^*;t) := \lim\limits_{x \to x^*} F_{\xi_t}(x;t) = 1$, де $x^* = (+\infty,\dots,+\infty)$;

4) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k, 1 \le k \le n)(\forall x^0 = (x_1,\dots,x_{k-1},x_k^0,x_{k+1},\dots,x_n))(\forall t \in I^n)\colon$ функція $g(x_k) = F_{\xi_t}(x_1,\dots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\dots,x_n;t)$ неперервна зліва у точці x_k^0;

5) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall t \in I^n)(\forall h = (h_1,\dots,h_{k-1},h_k,h_{k+1},\dots,h_n) \in \mathbb{R}_+^n)\colon\ \Delta_1\Delta_2\dots\Delta_n F_{\xi_t}(x;t) \ge 0$, де $\Delta_k \alpha_k := \alpha(x_1,\dots,x_{k-1},x_k + h_k,x_{k+1},\dots,x_n) - \alpha(x_1,\dots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\dots,x_n)$;

6) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall t \in \mathbb{I}^n)\colon\ F_{\xi_t}(x;t) = F_{\xi_t}(x_{j_1},x_{j_2},\dots,x_{j_n};t_{j_1},t_{j_2},\dots,t_{j_n})$ для кожної перестановки $(j_1,j_2,\dots,j_n)$ індексів $(1,2,\dots,n)$;

7) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall t \in \mathbb{I}^n)\colon$

$$F_{\xi_t}(x_1,\dots,x_k;t_1,\dots,t_k) = F_{\xi_t}(x_1,\dots,x_k,+\infty,\dots,+\infty;t_1,\dots,t_n).$$

Вправа 8. Довести теорему.

Правильна також така обернена теорема Колмогорова.

Теорема. Нехай $\mathcal{F}\{F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)\colon n \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{R}, t_k \in I, 1 \le k \le n\}$ – сім'я скінченно-вимірних розподілів, яка задовольняє властивості 1)-7) з попередньої теореми. Тоді, існують ймовірнісний простір $(\Omega,\mathcal{A},P)$ і випадковий процес $\{\xi_t\colon t\in I\}$ на ньому такі, що $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall t \in \mathbb{I}^n)\colon\ F_{\xi_t}(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)$.

Випадковий процес $\{\xi_t\colon t\in I\}$ називається *процесом з незалежними значеннями,* якщо для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ для довільних наборів $(t_j)_{j=1}^n,\ t_j\in\ I\ (1\le j\le n),\ t_j<t_{j+1}\ (1\le j\le n-1)$, $(\xi_{t_j})_{j=1}^n$ — послідовність незалежних випадкових величин. У цьому випадку за критерієм незалежності випадкових величин

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F_{t_1}(x_1)F_{t_2}(x_2)\cdots F_{t_n}(x_n)$$

для довільних наборів $(t_j)_{j=1}^n,\ t_j\in I\ (1\le j\le n),\ t_j<t_{j+1}\ (1\le j\le n-1)$ і $(x_j),\ x_j\in\mathbb{R}\ (1\le j\le n)$.

Оскільки ξ_{t_0} —випадкова величина при кожному фіксованому $t_0\in I$, то можна ввести такі характеристики випадкового процесу ξ_t:

$a(t)=a_\xi(t)\overset{def}{=}M_\omega(\xi_t)\ (t\in I)$ — *математичне сподівання,*

$\sigma^2(t)=\sigma^2_\xi(t)\overset{def}{=}D_\omega(\xi_t)=M_\omega(\xi_t-a(t))^2\ (t\in I)$ — *дисперсія випадкового процесу,* де нижній індекс ω означає, за якою змінною шукається математичне сподівання (середнє значення).

Кореляційну (*автокореляційну*) *функцію* процесу ξ_t для всіх $t_1,t_2\in I$ означимо рівністю

$$R(t_1,t_2)=R_\xi(t_1,t_2)\overset{def}{=}\operatorname{cov}(\xi_{t_1},\xi_{t_2})=M\big((\xi_{t_1}-a(t_1))(\xi_{t_2}-a(t_2))\big),$$

$$\rho(t_1,t_2)=\rho_\xi(t_1,t_2)\overset{def}{=}\frac{R(t_1,t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}\ \text{— } \textit{нормована кореляційна функція.}$$

Нехай $(\xi_t)_{t\in I},\ (\zeta_t)_{t\in I}$ — випадкові процеси. *Взаємною кореляційною функцією* даних процесів називається функція $R_{\xi,\zeta}\colon I^2\to\mathbb{R}$, яка для всіх $(t_1,t_2)\in I^2$ визначається формулою

$$R(t_1,t_2)=R_{\xi,\zeta}(t_1,t_2)\overset{def}{=}\operatorname{cov}(\xi_{t_1},\zeta_{t_2})=M\big((\xi_{t_1}-a_\xi(t_1))(\zeta_{t_2}-a_\zeta(t_2))\big),$$

Випадкові процеси $(\xi_t)_{t\in I}$, $(\zeta_t)_{t\in I}$ називаються *некорельованими*, якщо $R_{\xi,\zeta} \equiv 0$, тобто, тотожньо дорівнює нулю, у протилежному випадку процеси називаються *корельованими*.

Деякі властивості введених числових характеристик випадкових процесів сформулюємо у вигляді наступних вправ. Доведення всіх тверджень нескладно отримуються за допомогою найпростіших властивостей математичного сподівання.

Вправи. 1. Нехай ξ_t — випадковий процес, $a(t) = a_{\xi_t}(t)$, $\sigma^2(t) = \sigma^2_{\xi_t}(t)$, а $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — деяка функція. Довести, що:
a) $(\forall t \in I)\colon M(h(t)\xi_t) = h(t)a(t)$, *b*) $(\forall t \in I)\colon M(\xi_t + h(t)) = a(t) + h(t)$,
c) $(\forall t \in I)\colon D(h(t)\xi_t) = h^2(t)\sigma^2(t)$, *d*) $(\forall t \in I)\colon D(\xi_t + h(t)) = \sigma^2(t)$,
e) $(\forall t \in I)\colon R(t,t) = \sigma^2(t)$, *f*) $(\forall t_1, t_2 \in I)\colon R(t_1,t_2) = R(t_2,t_1)$,
g) $\eta_t = \xi_t + h(t) \Rightarrow (\forall t_1, t_2 \in I)\colon R_\eta(t_1,t_2) = R_\xi(t_1,t_2)$,
h) $\eta_t = \xi_t \cdot h(t) \Longrightarrow (\forall t_1, t_2 \in I)\colon R_\eta(t_1,t_2) = R_\xi(t_1,t_2)h(t_1)h(t_2)$,
i) (нерівність Коші-Буняковського) $(\forall t_1, t_2 \in I)\colon |R_\xi(t_1,t_2)| \le \sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_1)$,
j) $(\forall t_1, t_2 \in I)\colon |\rho_\xi(t_1,t_2)| \le 1$.
2. Нехай $(\xi_t)_{t\in I}$, $(\zeta_t)_{t\in I}$ — випадкові процеси, а $h_1, h_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — деякі функції. Довести, що:
a) $(\forall t_1, t_2 \in I)\colon R_{\xi,\zeta}(t_1,t_2) = R_{\zeta,\xi}(t_2,t_1)$,
b) $(\forall t_1, t_2 \in I)\colon R_{\xi+h_1,\zeta+h_2}(t_1,t_2) = R_{\xi,\zeta}(t_1,t_2)$,
c) $(\forall t_1, t_2 \in I)\colon R_{h_1\xi,h_2\zeta}(t_1,t_2) = R_{\xi,\zeta}(t_1,t_2)h_1(t_1)h_2(t_2)$,
d) $(\forall t_1, t_2 \in I)\colon \left|R_{\xi,\zeta}(t_1,t_2)\right| \le \sigma_\xi(t_1)\sigma_\zeta(t_2)$,
e) $(\forall t_1, t_2 \in I)\colon R_{\xi+\zeta}(t_1,t_2) = R_\xi(t_1,t_2) + R_\zeta(t_1,t_2) + R_{\xi,\zeta}(t_1,t_2) + R_{\xi,\zeta}(t_2,t_1)$,
f) ξ_t, ζ_t— некорельовані $\Rightarrow (\forall t_1, t_2 \in I)\colon R_{\xi+\zeta}(t_1,t_2) = R_\xi(t_1,t_2) + R_\zeta(t_1,t_2)$.
3. (*додатна визначеність*). Нехай ξ_t — випадковий процес. Тоді, $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall (t_j)_{j=1}^n,\ t_j \in I\ (1 \le j \le n))\ (\forall (x_j)_{j=1}^n,\ x_j \in \mathbb{R}\ (1 \le j \le n))\colon$

$$\sum\nolimits_{j=1}^n \sum\nolimits_{k=1}^n x_j x_k R(t_j,t_k) \ge 0.$$

Несподівано є правильним і таке доволі сильне обернене твердження, яке вказує на те, що процесів із заданими $m_\xi(t)$, $R_\xi(t,\tau)$ "дуже багато".

Твердження. Нехай $m(t)\colon I \to \mathbb{R}$, $R(t,\tau)\colon I^2 \to \mathbb{R}$ –довільні фіксовані функції. При цьому для R виконується умова 3. додатної визначеності. Тоді, існує ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ і випадковий процес $(\xi_t)_{t\in I}$ такий, що $M(\xi_t) \equiv m(t)$, $R(t,\tau) \equiv R_\xi(t,\tau)$. Більше цього, існує гаусів процес $(\xi_t)_{t\in I}$ з тими ж властивостями. (Означення гаусових процесів див. далі.)

Випадковий процес $(\xi_t(\omega))_{t\in I}$, $\xi_t(\omega)\colon I\times\Omega \to G$ називається дійсним, якщо $G \subset \mathbb{R}$, у випадку $G \subset \mathbb{C}$ називають комплекснозначним (комплексним). У випадку $G \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ процес називають векторним.

Випадковий процес називатимемо *регулярним процесом*, якщо у кожній точці $t = t_0 \in I$ всі його траєкторії мають хіба що розриви першого роду (стрибки = існують скінченні односторонні границі) і є неперервними справа (зліва).

Вправа 1. Нехай $\xi_t = tU$, $t \in [0,1]$, $U \in \mathcal{R}[0,1]$ – рівномірно розподілена на проміжку $[0,1]$ випадкова величина. Описати множину траєкторій і перерізів випадкового процесу.

Вправа 2. Нехай $I = [0,+\infty)$, $\xi_t = U_n$ при $t \in [n, n+1)$, де $U_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ – випадкові величини. Довести, що процес $(\xi_t)_{t\in I}$ є регулярним.

Розв'язок. Очевидно, що для $t \in (n, n+1)$ траєкторії $h(t) = U_n$, тобто, не залежать від t (є випадковими сталими відносно часової змінної), а тому є неперервними в кожній точці $t_0 \in (n, n+1)$.
Нехай тепер $t_0 = n$. Тоді,
$\lim\limits_{t\to n-0} \xi_t = \lim\limits_{t\to n-0} U_{n-1} = U_{n-1}$, а $\lim\limits_{t\to n+0} \xi_t = \lim\limits_{t\to n+0} U_n = U_n = \xi_{t_0}$.

Отже, випадковий процес м.н. може мати лише розриви першого роду в точках $t_0 = n \in \mathbb{N}$.

Скінченно-вимірні щільності процесу.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{I}^n$. Вимірна за Лебегом невід'ємна фунція $f_\xi(x,t) = f_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ називається n-вимірною щільністю процесу $(\xi_t)_{t\in I}$, якщо для всіх

$(x,t) \in \mathbb{R}^n \times I^n$ виконується

$$F_\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_\xi(u_1,\ldots,u_n;t_1,\ldots,t_n) du_1 \cdots du_n$$

Вправа 3. Нехай $I = [0,1]$, а U –випадкова величина з функцією розподілу F, $\varphi(t) \colon I \to (0,+\infty)$. Знайти сім'ю скінченно-вимірних розподілів випадкового процесу $\xi_t = U\varphi(t)$. Знайти одновимірну щільність процесу. Переконатися, що при $n \geq 2$ процес не має n-вимірних щільностей розподілу.

Розв'язок. Нехай $t = (t_1,\ldots,t_k) \in \mathbb{N}^k, x = (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k$, тоді, $F_\xi(x;t) = \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t_1}(\omega) < x_1,\ldots,\xi_{t_k}(\omega) < x_k\} =$
$= \mathbb{P}\{\omega\colon U(\omega) < x_1/\varphi(t_1),\ldots,U(\omega) < x_k/\varphi(t_k)\} =$
$= \mathbb{P}\{\omega\colon U(\omega) < \min\{x_s/\varphi(t_s)\colon 1 \leq s \leq k\}\} =$
$= F\big(\min\{x_s/\varphi(t_s)\colon 1 \leq s \leq k\}\big)$.

Якщо $F = F_U$ має щільність $f = f_U$, то зрозуміло, що і процес має одновимірну щільність (при $k = 1$) $f_\xi(x;t) = F'_\xi(x;t) = \big(F(x/\varphi(t))\big)' = 1/\varphi(t) f\big(x/\varphi(t)\big),\ t \in [0,1], x \in \mathbb{R}$.

При $k \geq 2$ процес k-вимірної щільності не має. Справді, за означенням процесу $U = \xi_{t_1}/\varphi(t_1) = \ldots = \xi_{t_k}/\varphi(t_k)$ для довільних наборів $t = (t_1,\ldots,t_k) \in [0,1]^k$. Міркуючи від супротивного, припустимо тепер, що існує k-вимірна щільність $f_\xi(x;t)$. Позначимо $\ell = \{x = (x_1,\ldots,x_k)\colon x_1/\varphi(t_1) = \ldots = x_k/\varphi(t_k)\}$. Тоді, для $x \notin \ell$ маємо $f_\xi(x;t) = \frac{\partial^k F_\xi(x;t)}{\partial x_1 \cdots \partial x_k} = 0$. Але, міра Лебега множини ℓ в $\mathbb{R}^k$ дорівнює нулю. Тому для кожної множини $B \subset \mathbb{R}^k$ (наприклад, для паралелепіпеда)

$$\mathbb{P}\{\omega\colon (\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_k}) \in B\} = \int\limits_B f_\xi(x;t) dx_1 \cdots dx_k = 0.$$

Суперечність.

Вправа 4. Нехай $U,\ V$ –незалежні випадкові величини, $F_U,\ F_V$ – їхні функції розподілу. Знайти скінченно-вимірні функції розподілу процесу $\{\xi_t = Ut + V : t \in [0,+\infty)\}$.

Вправа 5. Нехай U, V –незалежні випадкові величини, що мають нормальний розподіл $\mathcal{N}(0, 1/2)$. Знайти одновимірний розподіл процесу $\{\xi_t = (U+V)/2 : t > 0\}$.

Вправа 6. (*Дискретний білий шум)* Нехай випадковий процес $\{\xi_t : t \in \mathbb{N}\}$ такий, що послідовність випадкових величин (ξ_n) є послідовністю незалежних (в сукупності) однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F_{\xi_n} \equiv F$. Знайти скінченно-вимірні розподіли цього процесу.

Розв'язок. Нехай $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{N}^k, x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, тоді, $F_\xi(x;t) = \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t_1}(\omega) < x_1, \ldots, \xi_{t_k}(\omega) < x_k\} = \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t_1}(\omega) < x_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t_k}(\omega) < x_k\} = F(x_1) \cdot \ldots \cdot F(x_k)$.

Вправа 7. (*Дискретний гаусів білий шум)* Нехай випадковий процес $\{\xi_t : t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ такий, що

$$\xi_n = \alpha\xi_{n-1} + \varepsilon_n, \ \xi_0 = 0,$$

а (ε_n) послідовність незалежних (в сукупності) нормально розподілених випадкових величин $\mathcal{N}(0, \sigma^2), \sigma^2 > 0$. Знайти одно-вимірний розподіл цього процесу.

Розв'язок. За означенням

$$\xi_n = \varepsilon_1\alpha^{n-1} + \ldots + \varepsilon_{n-1}\alpha + \varepsilon_n.$$

за теоремою додавання для нормальних розподілів $\xi_n \in \mathcal{N}(m_\xi(n), D_\xi(n))$, де $m_\xi(n) = M(\xi_n) = \sum_k M(\varepsilon_k\alpha^{n-k}) = \sum_k \alpha^{n-k}M(\varepsilon_k) = 0$,
$\sigma_\xi^2(n) = D(\xi_n) = \sum_k D(\varepsilon_k\alpha^{n-k}) = \sum_k \alpha^{2(n-k)}D(\varepsilon_k) = \begin{cases} n\sigma^2, \ \alpha^2 = 1, \\ \frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1} \cdot \sigma^2, \ \alpha^2 \neq 1. \end{cases}$

Означення стохастично еквівалентних процесів у широкому сенсі. Два випадкових процеси $\{\xi_t\colon t \in I\}$ і $\{\eta_t\colon t \in I\}$, визначених на одному і тому ж ймовірнісному просторі називаються *стохастично еквівалентними в широкому сенсі*, якщо вони мають одну і ту ж сім'ю скінченно-вимірних розподілів

Означення стохастично еквівалентних процесів. Два випадкових процеси $\{\xi_t\colon t \in I\}$ і $\{\eta_t\colon t \in I\}$, визначених на одному і тому ж ймовірнісному просторі називаються *стохастично еквівалентними*, якщо для кожного $t \in I$: $P\{\omega\colon \xi_t(\omega) = \eta_t(\omega)\} = 1$.

Твердження. Якщо два випадкових процеси $\{\xi_t\colon t \in I\}$ і $\{\eta_t\colon t \in I\}$ є стохастично еквівалентні, то вони є стохастично еквівалентні і у широкому сенсі.

Наступна вправа вказує, що стохастично еквівалентні процеси можуть мати м.н. різні траєкторії.

Вправа 9. Нехай $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}(\mathbb{R} \cap [0,1])$, $\mathbb{P}$ – міра Лебега, $I = [0,1]$. Розглянемо випадкові процеси $\xi_t = 0,\ t \in I$ та $\eta_t(\omega) = 0$ при $t \neq \omega$, $\eta_t(\omega) = 1$ при $t = \omega$. Переконатися в еквівалентності (стохастичній) процесів. Проте, очевидно, що м.н. їхні траєкторії є різні.

Найсильнішим типом стохастичної еквівалентності процесів є наступний.

Означення стохастичних процесів, які не можна розрізнити. Два випадкових процеси $\{\xi_t\colon t \in I\}$ і $\{\eta_t\colon t \in I\}$, визначених на одному і тому ж ймовірнісному просторі називаються *нерозрізнюваними процесами*, якщо $\mathbb{P}\{\omega\colon (\forall t \in I)[\xi_t(\omega) = \eta_t(\omega)]\} = 1$.

Твердження. Два випадкових процеси $\{\xi_t\colon t \in I\}$ і $\{\eta_t\colon t \in I\}$, визначених на одному і тому ж ймовірнісному просторі є нерозрізнюваними тоді і лише тоді, коли $\mathbb{P}\{\omega\colon \sup\limits_{t \in I} |\xi_t(\omega) - \eta_t(\omega)| > 0\} = 0$.

Твердження. Нехай $I = \mathbb{Z}$. Два випадкових процеси $\{\xi_t\colon t \in I\}$ і $\{\eta_t\colon t \in I\}$, визначених на одному і тому ж ймовірнісному просторі є нерозрізнюваними тоді і тільки тоді, коли вони є стохастично еквівалентними.

Подібне твердження є правильним у випадку стохастично еквівалентних регулярних процесів.

Твердження. Два регулярних стохастично еквівалентних випадкових процеси $\{\xi_t\colon t \in I\}$ і $\{\eta_t\colon t \in I\}$, визначених на одному і тому ж ймовірнісному просторі, є нерозрізнюваними.

Вправа 10. Довести три останніх сформульованих твердження.

Вправа 11. Нехай $U, V \in \mathcal{N}(0,1)$ і є незалежними випадковими величинами. Визначимо прооцес $\{\xi_t = U^2 + 2tV + t^2 \colon t \geq 0\}$. Обчислити ймовірності таких подій:
1) $A_1 = \{\omega\colon$ траєкторія $h(t) = \xi_t(\omega)$ - монотонно неспадна$\}$;
2) $A_2 = \{\omega\colon$ траєкторія $h(t) = \xi_t(\omega)$ - невід'ємна$\}$;
3) $A_3 = \{\omega\colon (\exists t \int D)[h(t) = \xi_t(\omega) = 0]\}$, де $D \subset [0, +\infty]$ – деяка скінченна або зліченна множина;
4) $A_4 = \{\omega\colon (\exists t \geq 0)[h(t) = \xi_t(\omega) = 0]\}$.

1) траєкторія $h(t) = \xi_t(\omega_0)$ - монотонно неспадна $\Longleftrightarrow (\forall t \geq 0)\colon h'(t) = 2V(\omega_0) + 2t \geq 0 \Longleftrightarrow V(\omega_0) \geq 0$. Тому,

$$P(A_1) = P(\{\omega\colon V(\omega) \geq 0\}) = F_V(+\infty) - F_V(0) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

2) $A_2 = \{\omega\colon V(\omega) > 0\} \cup \{\omega\colon V(\omega) \leq 0, V^2(\omega) \leq U^2(\omega)\}$.
Але $P(\{\omega\colon V(\omega) > 0\}) = F_V(+\infty) - F_V(0+0) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$,
а з неперервності нормального розподілу $P(\{\omega\colon V(\omega) = 0\}) = \Phi(+0) - \Phi(0) = 0$, а також з незалежності випадкових величин U, V та $U, -V$ $P(\{\omega\colon U(\omega) + V(\omega) = 0\}) = 0$ та $P(\{\omega\colon U(\omega) - V(\omega) = 0\}) = 0$.

Тому, симетричності і незалежності випадкових величин отримуємо, що

$$P(\{\omega\colon V(\omega) - U(\omega) < 0, V(\omega) < 0\}) = \frac{1}{8}, P(\{\omega\colon V(\omega) + U(\omega) < 0, V(\omega) < 0\}) = \frac{1}{8}.$$

Отже

$$P(\{\omega\colon V(\omega) \leq 0, |V(\omega)| \leq |U(\omega)|\}) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

Коваріаційна функція комплекснозначного процесу $\xi_t\colon I \times \Omega \to \mathbb{C}$,

$$R_\xi(t,\tau) := M((\xi_t - m_\xi(t))\overline{(\xi_\tau - m_\xi(\tau))}), \quad t, \tau \in I,$$

а дисперсія $D_\xi(t) := R_\xi(t,t)$.

Вправа 12. За допомогою нерівності Коші-Буняковського-Шварца переконатися в тому, що для існування $m_\xi(t), R_\xi(t,\tau), D_\xi(t)$ достатньо виконання умови

$$M(|\xi_t|^2) < +\infty.$$

Випадковий процес, який задовольняє останню умову називається процесом зі *скінченними моментами другого порядку* або ж *гільбертовим випадковим процесом*

Вправа 13. Нехай (h_k) – дійсні функції на I, (U_k) – дійсні некорельовані випадкові величини з математичними сподіваннями і дисперсіями m_{U_k}, D_{U_k}. Довести, що для випадкового процесу, визначеного за формулою $\xi_t = \sum_{k=0}^n U_k h_k(t)$, $t \geq 0$, виконується

$$m_\xi(t) = \sum_{k=0}^n m_{U_k} h_k(t),$$
$$R_\xi(t,\tau) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \operatorname{cov}(U_k, U_j) h_k(t) h_j(\tau).$$

Означення (характеристичних функцій процесу). Нехай $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n,\ t = (t_1, \ldots, t_n) \in I^n$. Функція

$$\varphi_\xi(z;t) = M(e^{i\sum_{k=1}^n z_k \xi_{t_k}}) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{i\sum_{k=1}^n z_k x_k} dF_\xi(x_1, \ldots, x_n; t)$$

називається скінченновимірною (n-вимірною) *характеристичною функцією* процесу $(\xi_t)_{t\in I}$.

Вправа 14. Нехай $h(t)$ – дійсна функція, $U \in \mathcal{N}(0,1)$, а $\xi_t = Uh(t)$, $t \geq 0$. Знайти характеристичні функції процесу. *Вказівка.* Переконатися, що $\eta = \sum_{k=1}^n z_k \xi_{t_k}$ – нормально розподілена випадкова величина, знайти її математичне сподівання і дисперсію і скористатися виглядом характеристної функції одновимірного нормального розподілу.

Справді,

$$\eta = U\sum_{k=1}^{n} z_k h(t_k) := UH(z;t) \in \mathcal{N}(a,\sigma^2),$$
$$a = M(UH(z;t)) = H(z;t)MU \;=\; 0,$$
$$D(UH(z;t)) = H^2(z;t)DU = H^2(z;t) \Longrightarrow$$
$$\varphi_\xi(z;t) = e^{-H^2(z;t)},$$

позаяк $\varphi_U(\tau) = e^{-\tau^2}$, а тоді

$$\varphi_\xi(z;t) = M(e^{i\sum_{k=1}^{n} z_k\xi_{t_k}}) =$$
$$= M(e^{iH(z;t)U}) = \varphi_U(H(z;t)) = e^{-H^2(z;t)}, \quad H(z;t) = \sum_{k=1}^{n} z_k h(t_k).$$

Контрольні вправи для самостійного розв'язування.

Вправа а1. Нехай U, V –незалежні випадкові величини, $F_U \in \mathcal{R}[-1,0], F_V \in \mathcal{R}[0,1]$, тобто, рівномірно розподілені на відповідних проміжках. Описати пучок траєкторій та знайти скінченно-вимірні функції розподілу процесу $\{\xi_t = Ut + V : t \in [0,+\infty)\}$.

Зауважимо, що $F_{tU} \in \mathcal{R}[-t,0]$, tU, V – незалежні. Тоді за формулою згортки

$$F_{tU+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{tU}(x-y)dF_V(y) = \int_0^1 F_{tU}(x-y)dy =$$
$$= \Big[x - y = z\Big] = \int_{x-1}^{x} F_{tU}(z)dz = \Big[F_{tU}(z) = \frac{1}{t},\ z \in (-t,0)\Big] =$$
$$= \big[t > 1 \Rightarrow \big] = \begin{cases} 0,\ x < -t, \\ 1,\ x > 1, \\ = \frac{1}{t}\int_{-t}^{x} dz = \big[x-1 < -t, -t < x < 0 \Leftrightarrow -t < x < 1-t\big] = \frac{x+t}{t}, \\ = \frac{1}{t}\int_{x-1}^{x} dz = \big[1-t < x < 0\big] = \frac{1}{t}, \\ = \frac{1}{t}\int_{x-1}^{0} dz = \big[x-1 < 0 < x \Leftrightarrow 0 < x < 1\big] = \frac{1-x}{t}. \end{cases}$$

Вправа а2. Нехай U, V – незалежні випадкові величини, зі щільностями f_U, f_V. Знайти одно- та двохвимірну щільність процесу $\{\xi_t = Ut + V : t \in [0, +\infty)\}$. Переконатися, що $k-$вимірні розподіли процесу не мають щільності, тобто, є сингулярними.

Вправа а3. Нехай (h_k) – дійсні функції на I, (U_k) – незалежні випадкові величини, $U_k \in \mathcal{N}(0,1)$. Для випадкового процесу, визначеного за формулою $\xi_t = \sum_{k=0}^{n} U_k h_k(t)$, $t \geq 0$, знайти $F_\xi(x,t)$.

Розв'язок. При фіксованому t, ξ_t – випадкова величина, яка є скінченною лінійною комбінацією незалежних випадкових величин. тому за теоремою додавання ξ_t є нормально розподіленою випадковою величиною. Очевидно, що $a_\xi(t) = M(\xi_t) = 0$, а $\sigma^2(t) = D\xi_t = \sum_{k=0}^{n} D(U_k h_k(t)) = \sum_{k=0}^{n} h_k^2(t) DU_k^2 = \sum_{k=0}^{n} h_k^2(t)$. Тому, $\xi_t \in \mathcal{N}(0, \sum_{k=0}^{n} h_k^2(t))$ для кожного фіксованого t.

Вправа а4. Знайти коваріаційну функцію процесу $\xi_t = U\cos(t+V)$, $t \geq 0$, де незалежні випадкові величини $U \in \mathcal{N}(0,1)$, $V \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$.

Розв'язок. За означенням

$$K_\xi(t,\tau) = \text{cov}\ (\xi_t, \xi_\tau) = M\big((\xi_t - a_\xi(t))(\xi_\tau - a_\xi(\tau))\big).$$

Але, U, V – незалежні випадкові величини, тому такими ж є $U, \cos(t+V)$ для кожного фіксованого t. Тому, $a_\xi(t) = M\big(U\cos(t+V)\big) = MU \cdot M\cos(t+V) = 0$, звідки (оскільки $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$)

$$\begin{aligned} K_\xi(t,\tau) = M\big(\xi_t \xi_\tau\big) = M\big(U^2 \cos(V+t)\cos(V+\tau)\big) = \\ = \frac{1}{2} M\big(U^2(\cos(2V+t+\tau) + \cos(t-\tau))\big) = \\ = \frac{1}{2} MU^2 \cdot M(\cos(2V+t+\tau) + \cos(t-\tau)). \end{aligned}$$

Далі,

$$MU^2 = DU = 1,\ M\cos(2V+t+\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x+t+\tau)dx = \\ = \frac{1}{4\pi}\sin(2x+t+\tau)\big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Звідки остаточно

$$K_\xi(t,\tau) = \frac{1}{2}\cos(t-\tau).$$

Вправа а5. Знайти математичне сподівання і коваріаційну функцію комплекснозначного процесу $\xi_t = Ue^{iVt}$, $t \geq 0$, де U, V – незалежні випадкові величини, $MU = 0$, $DU = D$, $V \in \mathcal{K}(0,\alpha)$, $\alpha > 0$, тобто, щільність $f_V(x) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2+\alpha^2}$.

Розв'язок. U, V – незалежні випадкові величини, тому такими ж є U, e^{iVt} для кожного фіксованого t. Звідки,

$$a_\xi(t) = M\big(Ue^{iVt}\big) = MU \cdot M\big(e^{iVt}\big) = 0.$$

Тоді,

$$K_\xi(t,\tau) = M\big(\xi_t\overline{\xi_\tau}\big) = M\big(U^2e^{iV(t-\tau)}\big) =$$
$$= M\big(U^2\big) \cdot M\big(e^{iV(t-\tau)}\big) = D \cdot \varphi_V(t-\tau) = De^{i\alpha(t-\tau)}.$$

5.2. Середньо-квадратична неперервність, диференційовність і інтегровність випадкових процесів.

5.2.1. Середньо-квадратична границя і неперервність.

Розглядаємо гільбертів випадковий процес з неперервним часом $(\xi_t)_{t\in I}$, тобто, такий, що $M|\xi_t|^2 < +\infty$.

Означення (середньо-квадратичної=с.к.-границі процесу). Випадкова величина η називається *с.к.-границею* випадкового процесу $(\xi_t)_{t\in I}$ в точці $t = t_0 \in I$, якщо

$$\lim_{t\to t_0} M|\xi_t - \eta|^2 = 0.$$

При цьому вживатимемо такі позначення

$$\eta(\omega) = \text{с.к.-}\lim_{t\to t_0} \xi_t(\omega) = \underset{t\to t_0}{l.i.m.}\, \xi_t(\omega).$$

Вправа. Переконатися, що с.к.-границя має всі стандартні "арифметичні" властивості границі.

Означення (середньо-квадратичної=с.к.-неперервності процесу). Випадковий процес $(\xi_t)_{t\in I}$ називається с.к.-неперервним у точці $t = t_0 \in I$, якщо

$$\text{с.к.-}\lim_{t\to t_0} \xi_t(\omega) = \underset{t\to t_0}{l.i.m.}\, \xi_t(\omega) = \xi_{t_0},$$

і с.к.-неперервним на множині I, якщо він с.к.-неперервний у кожній точці цієї множини.

Зауваження. Із с.к.-неперервності випадкового процесу в кожній точці множини I, взагалі кажучи, не випливає, що всі чи. можливо, майже всі функції $\xi(t,\omega)$ є неперервними.

Скажемо, що випадковий процес є м.н. (майже напевно) неперервним або просто неперервним на множині I, якщо

$$P\{\omega\colon \xi_t\text{- неперервна на } I \text{ функція}\} = 1,$$

тобто, для кожного $t_0 \in I$

$$P\{\omega\colon \xi_t \to \xi_{t_0}\ (t \to t_0)\} = 1.$$

Власне майже напевно (майже всі за ймовірністю), траєкторії такого процесу є неперервними.

Твердження. 1. Для того, щоб випадковий процес $(\xi_t)_{t\in I}$ був с.к.-неперервним в точці $t_0 \in I$ необхідно і досить, щоб функція $m_\xi(t)$ була неперервною в точці t_0, а $R_\xi(t,\tau)$ була неперервною в точці $(t_0, t_0) \in I^2$.
2. Якщо випадковий процес $(\xi_t)_{t\in I}$ с.к.-неперервний на I, то $R_\xi(t,\tau)$ неперервна на I^2.

Вправа. Довести дане твердження.
Вказівка. З с.к.-неперервності в точці $t_0 \in I$ випливає, що $M|\xi_t|^2$ є обмеженою величиною в деякому околі цієї точки, а за нерівністю Коші-Буняковського

$$|m_\xi(t) - m_\xi(t_0)| \le M|\xi_t - \xi_{t_0}| \le \sqrt{M|\xi_t - \xi_{t_0}|^2},$$

а також у випадку $m_\xi(t) \equiv 0$

$$|R_\xi(t,\tau) - R_\xi(t_0,t_0)| \le M|\xi\tau(\xi_t - \xi_{t_0})| + M|\xi_{t_0}(\xi_\tau - \xi_{t_0})| \le$$
$$\le \sqrt{M|\xi\tau|^2}\sqrt{M|\xi_t - \xi_{t_0}|^2} + \sqrt{M|\xi_{t_0}|^2}\sqrt{M|\xi_\tau - \xi_{t_0}|^2}.$$

До загального випадку перейдемо заміною $\widetilde{\xi_t} = \xi_t - m_\xi(t)$.

Навпаки, у випадку $m_\xi(t) \equiv 0$

$$M|\xi_t - \xi_{t_0}|^2 = R_\xi(t,t) + R_\xi(t_0,t_0) - 2R_\xi(t,t_0).$$

До загального випадку перейдемо заміною $\widetilde{\xi_t} = \xi_t - m_\xi(t)$. Тоді, $m_{\widetilde{\xi}}(t) \equiv 0$.

Вправа. Нехай (U_k) – попарно некорельовані випадкові величини з $m_k = MU_k$, $D_k = DU_k$, $(h_k(t))$ – неперервні детерміновані функції, а випадковий процес визначений рівністю $\xi_t = \sum_{k=1}^n h_k(t)U_k$. Переконатися у його неперервності (м.н.) і с.к.-неперервності.

Вправа. Нехай $I = [0,1]$, U_1, U_2 – незалежні одинаково розподілені випадкові величини, $MU_j = m,\ DU_j = D > 0$, а випадковий процес

$$\xi_t = \begin{cases} U_1, \text{при } t < 1/2, \\ U_2, \text{при } t \ge 1/2. \end{cases}$$

Переконатися, що процес $(\xi_t)_{t\in[0,1]}$ не є м.н неперервним в точці $t_0 = 1/2$, а також не є с.к.-неперервним у цій точці.

Наступна вправа ілюструє той факт, що навіть у випадку, коли майже всі траєкторії процесу є розривні, тим не менше випадковий процес може бути с.к.-нерервним.

Вправа. Нехай випадкові величини U_1, U_2, η – незалежні, $U_j \in \mathcal{N}(m,D), D > 0$, випадкова величина $\eta \in \mathcal{R}[0,1]$, тобто, є рівномірно розподілена на $[0,1]$, а – випадковий процес $(\xi_t)_{t\in[0,1]}$ визначається формулою

$$\xi_t = \begin{cases} U_1, \text{ якщо } t < \eta, \\ U_2, \text{ якщо } t \ge \eta \end{cases}$$

Переконатися, що процес $(\xi_t)_{t\in[0,1]}$ є с.к неперервним на I, але м.н. його траєкторії є розривні.

Вказівка. для фіксованого $t \in [0,1]$ позначимо $H_1 = \{\omega\colon t < \eta(\omega)\}, H_2 = \overline{H}_1 = \{\omega\colon t \geq \eta(\omega)\}$. Тоді, $P(H_2) = t, P(H_1) = 1-t$, умовні математичні сподівання $M(\xi_t|H_1) = MU_1 = m, M(\xi_t|H_2) = MU_2 = m$, а за формулою повного математичного сподівання

$$m_\xi(t) = M(\xi_t) = P(H_1)M(\xi_t|H_1)+P(H_2)M(\xi_t|H_2) = m(1-t)+mt \equiv m,$$

тобто, $m_\xi(t)$ – функція. Нехай тепер $0 \leq t \leq \tau \leq 1$, H_1, H_2 визначимо подібно, як і вище: $H_1 = \{\omega\colon \tau < \eta(\omega)\}$, $H_2 = \{\omega\colon t > \eta(\omega)\}$, а $H_3 = \{\omega\colon t \leq \eta(\omega) \leq \tau\}$. Тоді, знову

$$P(H_1) = 1-\tau, P(H_2) = t, P(H_3) = \tau - t.$$

Якщо припустити, що $m = 0$, то знову за формулою повного математичного сподівання

$$\begin{aligned} R_\xi(t,\tau) = P(H_1)M(\xi_t\xi_\tau|H_1) + P(H_2)M(\xi_t\xi_\tau|H_2) + P(H_2)M(\xi_t\xi_\tau|H_3) = \\ = P(H_1)M(U_1U_1) + P(H_2)M(U_2U_2) + P(H_3)M(U_1U_2) = \\ = (1-\tau)D + tD + (\tau - t)\cdot 0. \end{aligned}$$

Оскільки $R_\xi(t,t) = D$, то

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ \tau\to\tau_0}} R_\xi(t,\tau) = (1-\tau_0)D + tD + (\tau_0 - t_0) = R_\xi(t_0,\tau_0),$$

тобто, функція $R_\xi(t,\tau)$ є неперервною в кожній точці $(t_0,\tau_0) \in [0,1]^2$, а, зокрема і в кожній точці $(t_0,t_0) \in [0,1]^2$. Отже за критерієм с.к.-неперервності, наш випадковий процес є с.к.-неперервним скрізь на $[0,1]$.

Загальний випадок нескладно отримуємо заміною $\widetilde{\xi}_t = \xi_t - m_\xi(t)$.

Далі, якщо ω таке, що $0 < \eta(\omega) < 1$, то

$$\lim_{t\to\eta(\omega)-0} \xi_t(\omega) = U_1, \qquad \lim_{t\to\eta(\omega)+0} \xi_t(\omega) = U_2.$$

Оскільки, $\{\omega\colon U_1(\omega)\neq U_2(\omega)\}=\{\omega\colon U_1(\omega)-U_2(\omega)<0\}\cup\{\omega\colon U_1(\omega)-U_2(\omega)>0\}$, U_1,U_2 –незалежні випадкові величини і функція розподілу $F_{-U_2}(x)=P(\{\omega\colon -U_2(\omega)<x\})=1-P(\{\omega\colon U_2(\omega)>-x\})=1-F_{U_2}(-x+0)=1-\Phi(-x)$, а

$$P(\{\omega\colon U_1(\omega)\neq U_2(\omega)\})=1-P(\{\omega\colon U_1(\omega)=U_2(\omega)\}).$$

і за формулою згортки

$$P(\{\omega\colon U_1(\omega)=U_2(\omega)\})=P(\{\omega\colon U_1(\omega)-U_2(\omega)=0\})=$$
$$=F_{U_1-U_2}(+0)-F_{U_1-U_2}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\Phi(-y+0)_{\Phi}(-y))d(1-\Phi(-y))=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}0\cdot d(1-\Phi(-y))=0,$$

то $P(\{\omega\colon U_1(\omega)\neq U_2(\omega)\})=1$. Залишається пригадати, що за умовою $P(\{\omega\colon 0<\eta(\omega)1\})=1$. Тому, для всіх $\omega\in B:=\{\omega\colon U_1(\omega)\neq U_2(\omega)\}\cap\{\omega\colon 0<\eta(\omega)1\}$ траєкторія $\xi_t(\omega)$ має розрив першого роду в точці $t=\eta(\omega)$, але, $P(B)=1$.

Твердження. Нехай $(\xi_t)_{t\in I}$, $(\eta_t)_{t\in I}$ – с.к.-неперервні поцеси зі скінченними моментами другого порядку (гільбертові в.в.).
1. Переконатися, що процес $(\xi_t+\eta_t)_{t\in I}$ – с.к.-неперервний.
2. Що можна сказати про с.к.-неперервність процесу $(\xi_t\cdot\eta_t)_{t\in I}$?

5.2.2. Середньо-квадратична диференційовність.

Означення (середньо-квадратичної диференційовності випадкового процесу). Випадкова величина η називається *с.к.-похідною* випадкового процесу $(\xi_t)_{t\in I}$ в точці $t=t_0\in I$, якщо

$$\underset{t\to t_0}{l.i.m.}\frac{\xi_{t_0+h}-\xi_{t_0}}{h}=\eta.$$

При цьому вживатимемо позначення

$$\frac{d\xi_t}{dt}|_{t=t_0}=\dot{\xi}_{t_0}=\eta,$$

а випадковий процес називатимемо с.к.-диференційовним в точці $t = t_0$.

Вправа. Нехай

$$\eta(\omega) := \underset{t \to t_0}{l.i.m.} \frac{\xi_{t_0+h} - \xi_{t_0}}{h}.$$

Переконатися, що η – випадкова величина.

Твердження (критерій с.-к. диференційовності). Для того, щоб процес $(\xi_t)_{t \in I}$ був с.к.-диференційовним в точці $t = t_0 \in I$ необхідно і досить, щоб в цій точці існувала похідна $m'_\xi(t_0) = \frac{dm_\xi(t)}{dt}|_{t=t_0}$, і симетрична похідна другого порядку $\frac{\partial^2 R_\xi(t,\tau)}{\partial t \partial \tau}$ в точці (t_0, t_0). При цьому симетрична похідна другого порядку визначається рівністю

$$\frac{\partial^2 R_\xi(t_0, t_0)}{\partial t \partial \tau} :=$$

$$= \lim_{\substack{t \to t_0 \\ \tau \to t_0}} \frac{1}{(t - t_0)(\tau - t_0)} \Big(R_\xi(t, \tau) + R_\xi(t_0, t_0) - R_\xi(t, t_0) - R_\xi(t_0, \tau) \Big).$$

Доведення. ($\Longrightarrow$) Розглянемо спочатку

$$\delta_h := \frac{m_\xi(t+h) - m_\xi(t)}{h} - m_{\dot{\xi}(t)} = M\Big(\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \dot{\xi}_t \Big).$$

За нерівністю Коші-Буняковського-Шварца, з існування $\dot{\xi}_t$ маємо

$$|\delta_h|^2 = \Big| M\Big(\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \dot{\xi}_t \Big) \Big|^2 \leq$$

$$\leq \Big(M\Big| \frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \dot{\xi}_t \Big| \cdot 1 \Big)^2 \leq M\Big| \frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \dot{\xi}_t \Big|^2 \cdot M1^2 \to 0 \quad (h \to 0).$$

Тому, $\exists\ m'_\xi(t) = m_{\dot{\xi}}(t)$.

Припустимо, що $m_\xi(t) \equiv 0$. Розглянемо

$$\Delta_h := \frac{1}{h_1 h_2} \big(R_\xi(t+h_1, t+h_2) + R_\xi(t,t) - R_\xi(t+h_1, t) - R_\xi(t, t+h_2) \big) =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2} M\big(\xi_{t+h_1}\xi_{t+h_2} + \xi_t\xi_t - \xi_{t+h_1}\xi_t - \xi_t\xi_{t+h_2} \big).$$

Тоді,

$$\Delta_h = M\Big(\Big(\frac{\xi_{t+h_1}-\xi_t}{h_1} - \dot{\xi}_t\Big)\cdot\Big(\frac{\xi_{t+h_2}-\xi_t}{h_2} - \dot{\xi}_t\Big) +$$
$$+\xi_t\Big(\frac{\xi_{t+h_1}-\xi_t}{h_1} - \dot{\xi}_t + \frac{\xi_{t+h_2}-\xi_t}{h_2} - \dot{\xi}_t\Big) + \dot{\xi}_t^2\Big).$$

Далі, за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\Big|M\Big(\Big(\frac{\xi_{t+h_1}-\xi_t}{h_1} - \dot{\xi}_t\Big)\cdot\Big(\frac{\xi_{t+h_2}-\xi_t}{h_2} - \dot{\xi}_t\Big)\Big|^2 \le$$
$$\le M\Big|\frac{\xi_{t+h_1}-\xi_t}{h_1} - \dot{\xi}_t\Big|^2 \cdot M\Big|\frac{\xi_{t+h_2}-\xi_t}{h_2} - \dot{\xi}_t\Big|^2 \to 0 \quad (h_1 \to 0, h_2 \to 0);$$

$$\Big|M\Big(\xi_t\Big(\frac{\xi_{t+h_1}-\xi_t}{h_1} - \dot{\xi}_t + \frac{\xi_{t+h_2}-\xi_t}{h_2} - \dot{\xi}_t\Big)\Big)\Big| \le$$
$$\le M\Big(|\xi_t|\cdot\Big|\frac{\xi_{t+h_1}-\xi_t}{h_1} - \dot{\xi}_t\Big|\Big) + M\Big(|\xi_t|\cdot\Big|\frac{\xi_{t+h_2}-\xi_t}{h_2} - \dot{\xi}_t\Big|\Big) \to 0$$

при $(h_1 \to 0, h_2 \to 0)$, бо знову за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$M\Big(|\xi_t|\cdot\Big|\frac{\xi_{t+h}-\xi_t}{h} - \dot{\xi}_t\Big|\Big) \le \sqrt{M(|\xi_t|^2}\sqrt{M\Big|\frac{\xi_{t+h}-\xi_t}{h} - \dot{\xi}_t\Big|^2} \to 0 \quad (h \to 0).$$

Отже, $\Delta_h \to M\dot{\xi}_t^2 \quad (h_1 \to 0, h_2 \to 0)$, тобто, у випадку $m_\xi(t) \equiv 0$ симетрична похідна існує і дорівнює $M\dot{\xi}_t^2$.

У протилежному випадку замість ξ_t розглянемо $\eta_t = \xi_t - m_\xi(t)$. Зрозуміло, що з с.-к. диференційовності ξ_t випливає с.-к. диференційовність η_t і $\dot{\eta}_t = \dot{\xi}_t - m'_\xi(t)$. Крім цього, $m_\eta(t) \equiv 0$, а також

$$R_\xi(t,\tau) = M(\eta_t\eta_\tau) = R_\eta(t,\tau).$$

Звідси з вже доведеного випливає, що симетрична похідна від $R_\xi(t,\tau)$ існує і дорівнює симетричній похідній від $R_\eta(t,\tau)$ та дорівнює

$$\dot{\eta}_t^2 = (\dot{\xi}_t - m'_\xi(t))^2.$$

($\Longleftarrow$) Доведення не завершене!! Припустимо тепер, що $\exists\, m'_\xi(t)$ та симметрична похідна від $R_\xi(t,\tau)$. Як і вище вважаємо, що $m_\xi(t) \equiv$

0, бо у протилежному випадку розглянемо $\eta_t = \xi_t - m_\xi(t)$, для якого $m_\eta(t) \equiv 0,\ R_\eta(t,\tau) = R_\xi(t,\tau)$.

Отже доведемо, що с.-к. похідна $\dot{\xi}_t$ існує. З означення симетричної похідної, як і в першій частині доведення, але цього разу при $h_1 = h_2 = h \to 0$ маємо

$$M\left|\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h}\right|^2 = \frac{1}{h^2} M\big(\xi_{t+h}\xi_{t+h} + \xi_t\xi_t - \xi_{t+h}\xi_t - \xi_t\xi_{t+h}\big) =$$
$$= \frac{1}{h^2}\big(R_\xi(t+h,t+h) + R_\xi(t,t) - R_\xi(t+h,t) - R_\xi(t,t+h)\big) =$$
$$= \Delta_h \to \frac{\partial^2 R_\xi(t,t)}{\partial t \partial \tau} \quad (h \to 0).$$

Розглянемо

$$\frac{m_\xi(t+h) - m_\xi(t)}{h} - m'_\xi(t) =$$
$$\leq M\left|\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \dot{\xi}_t\right|^2 \to 0 \quad (h \to 0).???$$

Зауваження. Оскільки у випадку, коли друга змішана похідна $\dfrac{\partial^2}{\partial\tau\partial t} R_\xi(t,\tau)$ неперервна в точці (t_0,t_0), то застосовуючи двічі теорему Лагранжа про скінченні прирости, спочатку при фіксованих t, t_0 до функції $g_1(\tau) = R_\xi(t,\tau) - R_\xi(t_0,\tau)$ на проміжку $[t_0,\tau]$, а потім при фіксованих t_0, τ, θ_1 до функції $g_2(t) = \dfrac{\partial R_\xi(t, t_0 + \theta_1(\tau - t_0))}{\partial \tau}$ на проміжку $[t_0, t]$, послідовно отримаємо

$$R_\xi(t,\tau) - R_\xi(t,t_0) + R_\xi(t_0,t_0) - R_\xi(t_0,\tau) =$$
$$= (\tau - t_0)\frac{\partial R_\xi(t, t_0 + \theta_1(\tau - t_0))}{\partial \tau} - (\tau - t_0)\frac{\partial R_\xi(t_0, t_0 + \theta_1(\tau - t_0))}{\partial \tau} =$$
$$= (\tau - t_0)\Big(\frac{\partial R_\xi(t, t_0 + \theta_1(\tau - t_0))}{\partial \tau} - \frac{\partial R_\xi(t_0, t_0 + \theta_1(\tau - t_0))}{\partial \tau}\Big) =$$
$$= (\tau - t_0)(t - t_0)\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial}{\partial \tau} R_\xi\Big)\big(t_0 + \theta_2(t - t_0), t_0 + \theta_1(\tau - t_0)\big).$$

Звідси отримуємо, що друга симетрична похідна існує і дорівнює змішаній похідній. Тому, для с.-к. диференційовності процесу достатньо вимагати існування і неперервності в точці (t_0, t_0) другої змішаної похідної $\dfrac{\partial^2}{\partial\tau\partial t} R_\xi(t,\tau)$.

Твердження. Якщо випадковий процес $(\xi_t)_I$ – с.-к. диференційовний, то для його с.-к. похідної $\dot{\xi}_t$ виконуються рівності

$$m_{\dot{\xi}}(t) = \frac{d}{dt} m_\xi(t), \quad R_{\dot{\xi}}(t,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial\tau} R_\xi(t,\tau).$$

Зауважимо, що формально можна записати, що

$$m_{\dot{\xi}}(t) = \int_\Omega \dot{\xi}_t \mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega \underset{h\to 0}{l.i.m.} \frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h}\ \mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_\Omega \frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h}\ \mathbb{P}(d\omega) = \lim_{h\to 0} \frac{m_\xi(t+h) - m_\xi(t)}{h} = m'_\xi(t).$$

Залишається обгрунтувати можливість граничного переходу

$$M\eta := \int_\Omega \big(\underset{h\to 0}{l.i.m.}\, \eta_h\big)\mathbb{P}(d\omega) = \lim_{h\to 0} M(\eta_h),$$

де $\underset{h\to 0}{l.i.m.}\, \eta_h = \eta$. Зауважимо, що за означенням цієї с.-к. границі

$$M|\eta_h - \eta|^2 \to 0 \quad (h \to 0).$$

Тому, за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$|M\eta_h - M\eta| = |M(\eta_h - \eta)| \le M\big(|\eta_h - \eta| \cdot 1\big) \le \sqrt{M|\eta_h - \eta|^2} \cdot \sqrt{M(1^2)} \to 0,$$

звідки отримуємо, що $M\eta_h \to M\eta$ $(h \to 0)$. Цим все доведено.

Вправа. Довести другу формулу $R_{\dot{\xi}}(t,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau} R_\xi(t,\tau)$.

Вправа. Нехай випадковий процес $(\xi_t)_I$ такий, що

$$m_\xi(t) \equiv 0, \quad R_\xi(t,\tau) = 2e^{-\alpha(t-\tau)^2},\ \alpha > 0.$$

Обчислити дисперсію $D_{\dot{\xi}}(t)$ її с.к. похідної $\cdot\xi_t$.

Справді, $m_\xi(t)$, $R_\xi(t,\tau)$ – безмежно диференційовні функції, тому,

$$R_{\dot{\xi}}(t,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} R_\xi(t,\tau) = 4\alpha\big(1 - 2\alpha(t-\tau)^2\big)e^{-\alpha(t-\tau)^2}.$$

Звідси, $D_{\dot{\xi}}(t) = R_{\dot{\xi}}(t,t) = 4\alpha$.

Зауваження. На основі попереднього твердження нескладно перевіряти с.-к. диференційовність процесу, проте воно не вказує вигляду і способу обчислення с.-к. похідної.

Спробуємо з'ясувати як існування с.-к. похідної пов'язане з існуванням похідної у звичайному сенсі від траєкторій $\xi_t(\omega)$ (тобто, $\xi'_t(\omega)$ при фіксованих ω).

Означення (потраєкторної диференційовності процесу). Випадковий процес $(\xi_t)_I$ називатимемо *потраєкторно диференційовним* на I якщо

$$\mathbb{P}\big\{\omega\colon \text{ траєкторія } \xi_t(\omega) \text{ – диференційовна на } I\big\} = 1.$$

Твердження. Якщо існує $\dot{\xi}_t(\omega)$ – с.-к. похідна процесу ξ_t, то м.н. існує $\xi'(t,\omega)$ – потраєкторна похідна цього процесу і

$$\mathbb{P}\big\{\omega\colon \xi'(t,\omega) = \dot{\xi}_t(\omega)\big\} = 1,$$

тобто, $\xi'(t)$ та $\dot{\xi}_t$ – стохастично еквівалентні.

Доведення. *Справді*, за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца $((a,b)^2 \le (a,a)\cdot(b,b))$ знову отримуємо, що

$$\Big(\int\limits_\Omega \Big|\frac{\xi_{t+h}-\xi_t}{h} - \dot{\xi}_t\Big|\mathbb{P}(d\omega)\Big)^2 \le \int\limits_\Omega \Big|\frac{\xi_{t+h}-\xi_t}{h} - \dot{\xi}_t\Big|^2\mathbb{P}(d\omega) \to 0 \ (h \to 0).$$

Звідси,

$$M\Big|\frac{\xi_{t+h}-\xi_t}{h} - \dot{\xi}_t\Big| = \int\limits_\Omega \Big|\frac{\xi_{t+h}-\xi_t}{h} - \dot{\xi}_t\Big|\mathbb{P}(d\omega) \to 0 \quad (h \to 0).$$

Залишається переконатися, що з того, що $M|\eta_h| \to 0 \quad (h \to 0)$ випливає, що $\eta_h \to 0$ $(h \to 0)$ м.н. Це останнє означатиме, що м.н. $\xi'(t,\omega) = \dot{\xi}_t(\omega)$, тобто, що $\xi'(t)$ та $\dot{\xi}_t$ – стохастично еквівалентні.

Справді, міркуючи від супротивного, припустимо, що

$(\exists\ C > 0)(\exists\ h_j, h_j \to +0)\colon \mathbb{P}\{\omega\colon |\eta_h| > C\} \geq \alpha > 0,\ h = h_j, j \geq 1.$

Тоді, для $h = h_j, j \geq 1$

$$M|\eta_h| = \int\limits_{\Omega} |\eta_h| \mathbb{P}(d\omega) \geq \int\limits_{\{\omega\colon |\eta_h| > C\}} |\eta_h| \mathbb{P}(d\omega) \geq$$
$$\geq C\mathbb{P}\{\omega\colon |\eta_h| > C\} \geq \alpha C > 0,$$

що суперечить умові $M|\eta_h| \to 0 \quad (h \to 0)$.

Вправа. Чи правильне обернене твердження? Тобто, чи з того, що м.н.

$$\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \xi'(t) \to 0 \quad (h \to 0)$$

випливає, що існує $\dot{\xi}_t$ (тоді за попереднім твердженням ці обидві похідні виявляться стохастично еквівалентними) ?

Вправа. Нехай $h_k(t)\colon I \to \mathbb{R}$ – неперервно диференційовні дійсні функції, U_k – випадкові величини такі, що $m_k = MU_k$, $R_{k,j} = \operatorname{cov}(U_k, U_j)$. Довести, що с.-к. похідна випадкового процесу $\xi_t = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k h_k(t)$ має м.н. вигляд

$$\dot{\xi}_t = \sum_{k=1}^{n} U_k h_k'(t).$$

Зауважимо, що $\dot{h}_k(t) = h_k'(t)$. Потрібне твердження тоді отримуємо з адитивності і лінійності відносно випадкових величин с.-к. похідної.

Справді, потраєкторна похідна ξ_t', очевидно, існує і дорівнює

$$\xi_t' = \sum_{k=1}^{n} U_k h_k'(t).$$

залишається переконатися, що ξ_t – с.-к. диференційовна. Тоді, за твердженням $\dot{\xi}_t = \xi'_t$ м.н. і, отже, потрібну рівність буде встановлено.

Переконаємось, що ξ_t – с.-к. диференційовна. Справді, $m_\xi(t) = \sum_{k=1}^n h_k(t)m_k$ – диференційовна за умовою функція;
$R_\xi(t,\tau) = \sum\limits_{k=1}^n \sum\limits_{j=1}^n R_{k,j}h_k(t)h_j(\tau)$ – має неперервну змішану похідну другого порядку. Тому за твердженням, наведеним вище, м.н. існує $\dot{\xi}_t = \xi'_t$.

Зауваження. З останнього міркування випливає, що

$$m_{\dot{\xi}}(t) = \sum_{k=1}^n m_k h'_k(t),\ R_{\dot{\xi}}(t,\tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n R_{k,j}h'_k(t)h'_j(t).$$

Вправа. Нехай (α_k) – числова послідовність, $(\eta_{k,t})$ – послідовність с.-к. диференційовних процесів. Тоді, $\xi_t = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k \eta_{k,t}$ – с.-к. диференційовний процес, при цьому

$$\dot{\xi}_t = \sum_{k=1}^n \alpha_k \dot{\eta}_{k,t}.$$

Доведення. Справді, за нерівністю трикутника ($\sqrt{M|f+\ldots+g|^2} \le \sqrt{M|f|^2} + \ldots + \sqrt{M|g|^2}$)

$$\sqrt{M\Big|\frac{\xi_{t+h}-\xi_t}{h} - \sum_{k=1}^n \alpha_k\dot{\eta}_{k,t}\Big|^2} = \sqrt{M\Big|\sum_{k=1}^n \alpha_k\Big(\frac{\eta_k(t+h)-\eta_k(t)}{h} - \dot{\eta}_k(t)\Big)\Big|^2} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^n |\alpha_k|\sqrt{M\Big|\frac{\eta_k(t+h)-\eta_k(t)}{h} - \dot{\eta}_k(t)\Big|^2} \to 0 \quad (h\to 0).$$

Отже, м.н. $\dot{\xi}_t = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k\dot{\eta}_{k,t}$.

Власне, у щойно доведених вправах стверджується лінійність операції с.-к. диференціювання.

Вправа. Нехай $\alpha(t)$ – диференційовна функція, а ξ_t – с.-к. диференційовний випадковий процес. Тоді $\eta_t = \alpha\xi_t$ – с.-к. диференційовний процес, при цьому м.н.

$$\dot{\eta}_t = \alpha'(t)\xi_t + \alpha(t)\dot{\xi}_t$$

Доведення. Позначимо $\beta(t) = \alpha'(t)\xi_t + \alpha(t)\dot{\xi}_t$. Зауважимо, що

$$\frac{\eta_{t+h} - \eta_t}{h} = \frac{\xi_{t+h}\alpha(t+h) - \xi_t\alpha(t)}{h} =$$
$$= \xi_t \cdot \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} + \alpha(t+h) \cdot \frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h}.$$

Тоді, за нерівністю трикутника

$$\sqrt{M\left|\frac{\eta_{t+h} - \eta_t}{h} - \beta(t)\right|^2} =$$
$$= \sqrt{M\left|\xi_t\Big(\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} - \alpha'(t)\Big) + \alpha(t)\Big(\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \dot{\xi}_t\Big) + \big(\alpha(t+h) - \alpha(t)\big) \cdot \frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h}\right|^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{M\left|\xi_t\Big(\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} - \alpha'(t)\Big)\right|^2} + \sqrt{M\left|\alpha(t)\Big(\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \dot{\xi}_t\Big)\right|^2} +$$
$$+ \sqrt{M\left|\big(\alpha(t+h) - \alpha(t)\big) \cdot \frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h}\right|^2} =$$
$$= \sqrt{M\left|\xi_t\Big(\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} - \alpha'(t)\Big)\right|^2} + |\alpha(t)|\sqrt{M\left|\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \dot{\xi}_t\right|^2} +$$
$$+ |\alpha(t+h) - \alpha(t)|\sqrt{M\left|\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h}\right|^2}.$$

Зауважимо тепер, що з неперервності $\alpha(t)$, як диференційовної функції, $\alpha(t+h) - \alpha(t) \to 0$ $(h \to 0)$, з с.к. диференційовності $\dot{\xi}_t$, $M\left|\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \dot{\xi}_t\right|^2 \to 0$ $(h \to 0)$, а за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$M\left|\xi_t\Big(\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} - \alpha'(t)\Big)\right|^2 \leq M|\xi_t|^2 \cdot M\left|\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} - \alpha'(t)\right|^2 =$$
$$= \left|\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} - \alpha'(t)\right|^2 M|\xi_t|^2 \to 0 \ (h \to 0),$$

бо $M|\xi_t|^2 < +\infty$, $|\frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h} - \alpha'(t)\Big| \to 0 \ (h \to 0)$. Отже,

$$\sqrt{M\Big|\frac{\eta_{t+h}-\eta_t}{h} - \beta(t)\Big|^2} \to 0 \ (h \to 0),$$

тобто, те, що і потрібно було довести.

Вправа. Навести приклад випадкових процесів, що не диференційовні в с.-к. сенсі. a) Розглянути випадковий процес ξ_t з функцією математичного сподівання $m_\xi(t) = \begin{cases} 1, \ t \in \mathbb{Q}, \\ 0, \ t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
b) Розглянути випадковий процес ξ_t з функцією математичного сподівання $m_\xi(t) \equiv 0$ і коваріаційною функцією

$$R_\xi(t,\tau) = D \cdot \min\{t,\tau\}, \ D > 0.$$

Правильне таке твердження.

Твердження. Припустимо, що $(\xi_t)_I$ – с.-к. диференційовний гаусів процес. Тоді, $(\dot{\xi}_t)_I$ – с.-к. диференційовний гаусів процес з функцією математичного сподівання і коваріаційною функцією

$$m_{\dot{\xi}}(t) = \frac{d}{dt} m_\xi(t), \quad R_{\dot{\xi}}(t,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} R_\xi(t,\tau).$$

Твердження. Нехай $(\xi_t)_I$ деякий процес, $\eta := \underset{t\to t_0}{l.i.m.}\, \eta_t$. Тоді,

$$M\eta := \int_\Omega \big(\underset{t\to t_0}{l.i.m.}\, \eta_t\big)\mathbb{P}(d\omega) = \lim_{t\to t_0} M(\eta_t). \ \Big(M\big(\underset{t\to t_0}{l.i.m.}\, \eta_t\big) = \lim_{t\to t_0} M(\eta_t)\Big)$$

де $\underset{t\to t_0}{l.i.m.}\, \eta_t = \eta$.

Доведення. За означенням с.-к. границі

$$M|\eta_t - \eta|^2 \to 0 \quad (t \to t_0),$$

де η – випадкова величина. За нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$|M\eta_t - M\eta| = |M(\eta_t - \eta)| \le M\big(|\eta_t - \eta| \cdot 1\big) \le \sqrt{M|\eta_t - \eta|^2} \cdot \sqrt{M(1^2)} \to 0$$

при $t \to t_0$, звідки отримуємо, що $M\eta_t \to M\eta$ $(t \to t_0)$. Цим все доведено.

Вправа. Для гаусового процесу $(\xi_t)_I$ з $m_\xi(t) = t^2$ і коваріаційною функцією $R_\xi(t,\tau) = 4t\tau$ обчислити $\mathbb{P}\{\omega\colon \dot{\xi}_2(\omega) > 2\}$.

Розв'язок. За сформульованим твердженням $\dot{\xi}_t$ є гаусовим випадковим процесом таким, що

$$m_{\dot{\xi}}(t) = m'_\xi(t) = 2t, \quad R_{\dot{\xi}}(t,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} R_\xi(t,\tau) = 4.$$

Тому, $D_{\dot{\xi}}(t) = R_{\dot{\xi}}(t,t) = 4 \Longrightarrow \dot{\xi}_t \in \mathcal{N}(2t, 4)$ при фіксованому t. Отже, $\dot{\xi}(2) \in \mathcal{N}(4,4)$

$$\mathbb{P}\{\omega\colon \dot{\xi}_2(\omega) > 2\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\dot{\xi}}(2)}} \int\limits_{-\infty}^{2} \exp\Big\{-\frac{(x - m_{\dot{\xi}}(2))^2}{2D_{\dot{\xi}}(2)}\Big\} dx =$$

$$= \Big[x - m_{\dot{\xi}}(2) = u\sqrt{D_{\dot{\xi}}(2)}\Big] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1} \exp\big\{-\frac{u^2}{2}\big\} du =$$

$$= 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0,5 + \Phi_0(1) \approx 0,8413.$$

5.2.3. Середньо-квадратична інтегровність.

Нехай $\{\xi_t\colon t \in [a,b]\}$ випадковий процес. Означимо с.-к. інтеграл

$$\text{с.-к.} - \int\limits_a^b \xi_t dt.$$

Означення (середньо-квадратичного інтеграла в сенсі Рімана). Нехай $\tau = \{t_k\}$ – деяке розбиття відрізка $[a,b]$ таке, що $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$, а $c = \{c_k\}$ – довільний набір точок такий, що $c_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Побудуємо інтегральну суму

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(\xi, c) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_{c_k} \Delta t_k,$$

де $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. Позначимо $\lambda_\tau = \max\{\Delta t_k \colon 0 \le k \le n-1\}$ – діаметр розбиття. Якщо знайдеться така випадкова величина η, що

$$M\Big|\sigma_\tau - \eta\Big|^2 \to 0 \quad (\lambda_\tau \to 0),$$

то ξ_t називається с.-к. інтегровною на $[a,b]$, а

$$\eta := \text{с.-к.} - \int\limits_a^b \xi_t dt.$$

Твердження (критерій середньо-квадратичної інтегровності). Для того, щоб існував інтеграл с.-к.$-\int\limits_a^b \xi_t dt$ необхідно і досить, щоб існували Рiманові інтеграли

$$\int\limits_a^b m_\xi(t)dt, \quad \int_a^b\int_a^b R_\xi(t,\tau)dtd\tau.$$

Доведення. ($\Longrightarrow$) Нехай $\eta = \int_a^b \xi_t dt$. Розглянемо

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1} m_\xi(c_k)\Delta t_k - M\eta\Big| = \Big|M\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{c_k}\Delta t_k - \eta\Big)\Big| \le$$
$$\le M\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{c_k}\Delta t_k - \eta\Big| \le \sqrt{M\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{c_k}\Delta t_k - \eta\Big|^2} \to 0,\ \lambda_\tau \to 0.$$

Звідси,

$$\int\limits_a^b m_\xi(t)dt = M\eta = M\Big(\int\limits_a^b \xi_t dt\Big).$$

Припустимо спочатку, що $m_\xi(t) \equiv 0$. Розглянемо інтегральну суму для кратного інтеграла

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_k\sum_j R_\xi(c_k,d_j)\Delta t_k\Delta\tau_j - M\eta^2\Big| = \Big|M\Big(\sum_k\sum_j \xi_{c_k}\xi_{d_j}\Delta t_k\Delta\tau_j-\eta^2\Big)\Big| \le \\
&\le M\Big|\sum_k\sum_j \xi_{c_k}\xi_{d_j}\Delta t_k\Delta\tau_j-\eta^2\Big| \le M\Big|\Big(\sum_k \xi_{c_k}\Delta t_k-\eta\Big)\Big(\sum_j \xi_{d_j}\Delta\tau_j-\eta\Big)+ \\
&\qquad +\eta\Big(\sum_k \xi_{c_k}\Delta t_k-\eta\Big)+\eta\Big(\sum_j \xi_{d_j}\Delta\tau_j-\eta\Big)\Big| \le \\
&\qquad \le M\Big|\Big(\sum_k \xi_{c_k}\Delta t_k-\eta\Big)\Big(\sum_j \xi_{d_j}\Delta\tau_j-\eta\Big)\Big|+ \\
&\qquad +M\Big|\eta\Big(\sum_k \xi_{c_k}\Delta t_k-\eta\Big)\Big|+M\Big|\eta\Big(\sum_j \xi_{d_j}\Delta\tau_j-\eta\Big)\Big|.
\end{aligned}$$

Застосовуючи тричі нерівність Коші-Буняковського-Шварца, послідовно отримуємо

$$\begin{aligned}
&M\Big|\Big(\sum_k \xi_{c_k}\Delta t_k-\eta\Big)\Big(\sum_j \xi_{d_j}\Delta\tau_j-\eta\Big)\Big| \le \\
&\le \sqrt{M\Big|\sum_k \xi_{c_k}\Delta t_k-\eta\Big|^2}\,M\sqrt{\Big|\sum_j \xi_{d_j}\Delta\tau_j-\eta\Big|^2} \to 0 \ (\lambda_\tau \to 0); \\
&M\Big|\eta\Big(\sum_k \xi_{c_k}\Delta t_k-\eta\Big)\Big| \le \sqrt{M|\eta|^2}\sqrt{M\Big|\sum_k \xi_{c_k}\Delta t_k-\eta\Big|^2} \ (\lambda_\tau \to 0); \\
&M\Big|\eta\Big(\sum_j \xi_{d_j}\Delta\tau_j-\eta\Big)\Big| \le \sqrt{M|\eta|^2}\sqrt{M\Big|\sum_j \xi_{d_j}\Delta\tau_j-\eta\Big|^2} \ (\lambda_\tau \to 0).
\end{aligned}$$

Звідси маємо, що

$$\int_a^b\int_a^b R_\xi(t,\tau)\,dt\,d\tau = M\eta^2 = M\Big(\int_a^b \xi_t\,dt\Big)^2 = M\Big(\int_a^b\int_a^b \xi_t\xi_\tau\,dt\,d\tau\Big).$$

($\Longleftarrow$) Міркуємо формально

$$\int_a^b m_\xi(t)dt = \lim_{\lambda_\tau\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} m_\xi(c_k)\Delta t_k = \lim_{\lambda_\tau\to 0} M\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{c_k}\Delta t_k\Big) =$$
$$= M\Big(\underset{\lambda_\tau\to 0}{l.i.m.}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{c_k}\Delta t_k\Big) = M\Big(\int_a^b \xi_t dt.\Big)$$

Розглянемо тепер $I = \int\limits_a^b m_\xi(t)dt$ і

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{c_k}\Delta t_k - I\Big| := \delta_\lambda.$$

Вправи. 1. Нехай послідовність випадкових величин (ξ_n) збіжна до випадкової величини ξ в середньому, тобто, $M|\xi_n-\xi|\to 0$ $(n\to+\infty)$. Довести, що тоді:

a) $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$ $(n\to+\infty)$;

b) якщо $M\xi_n \neq \infty, M\xi\neq\infty$, то $M\xi_n\to M\xi$ $(n\to+\infty)$.

Вказівка. a) Застосувати нерівність Маркова до $|\xi_n-\xi|$.

Справді, для $a>0$

$$\mathbb{P}\{\omega\colon |\xi_n-\xi|>a\}\le M|\xi_n-\xi|/a\to 0\ (n\to+\infty),$$

а це і означає, що $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$ $(n\to+\infty)$.

b) Маємо $|M\xi_n - M\xi| = |M(\xi_n-\xi)|\le M|\xi_n-\xi|\to 0$ $(n\to+\infty)$, а це і означає, що $M\xi_n\to M\xi$ $(n\to+\infty)$.

2. Нехай послідовність випадкових величин (ξ_n) збіжна до випадкової величини ξ в середньоквадратичному, тобто, $M|\xi_n-\xi|^2\to 0$ $(n\to+\infty)$. Довести, що тоді:

a) послідовність (ξ_n) збіжна в середньому, а, отже, і $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$ $(n\to+\infty)$;

b) якщо $M\xi_n^2<+\infty, M\xi^2<+\infty$, то

$M\xi_n\to M\xi$, $M(\xi_n\xi)\to M(\xi)^2$, $M(\xi_n)^2\to M(\xi)^2$, $D\xi_n\to D\xi$,

$(n \to +\infty)$.

Вказівки. a) Застосувати нерівність

$$(M\eta)^2 \le M(\eta)^2 \text{ до } |\xi_n - \xi|.$$

b) $|M(\xi_n\xi) - M(\xi)^2| \le M|(\xi_n - \xi)\xi| \le (M|(\xi_n - \xi)^2)^{1/2}(M(\xi)^2)^{1/2}$,

$$|M(\xi_n)^2 - M(\xi)^2| = |M(\xi_n - \xi)(\xi_n + \xi)| \le$$
$$\le (M(\xi_n - \xi)^2)^{1/2}(M(\xi_n + \xi)^2)^{1/2},$$

$M(\xi_n + \xi)^2 = M((\xi_n - \xi) + \xi)^2 = M(\xi_n - \xi)^2 + 2M(\xi_n\xi) - M(\xi^2)$.

Відзначимо деякі властивості с.-к. інтеграла.

Твердження (властивості середньо-квадратичного інтеграла). Нехай $(\xi_t)_I$ с.-к. інтегровний процес. Тоді:

a) $M\Big(\int\limits_a^b \xi_t dt\Big) = \int\limits_a^b m_\xi(t)dt$; b) $D\Big(\int\limits_a^b \xi_t dt\Big) = \int\limits_a^b\int\limits_a^b R_\xi(t,\tau)dtd\tau$;

c) $\operatorname{cov}\Big(\int\limits_a^b \xi_t dt, \xi_\tau\Big) = \int\limits_a^b R_\xi(t,\tau)dt$;

d) $\operatorname{cov}\Big(\int\limits_a^b \xi_t dt, \int\limits_c^d \xi_\tau d\tau\Big) = \int\limits_a^b\int\limits_c^d R_\xi(t,\tau)dtd\tau$.

Твердження (лінійність середньо-квадратичного інтеграла). Нехай (a_k) – числова послідовність, а $(\xi_{k,t})$ – послідовність с.-к. інтегровних процесів, $\eta_t = \sum\limits_{k=1}^n a_k\xi_{k,t}$. Тоді,

$$\int\limits_a^b \Big(\sum_{k=1}^n a_k\xi_{k,t}\Big)dt = \sum_{k=1}^n a_k \int\limits_a^b \xi_{k,t}dt.$$

Твердження (формула інтегрування частинами середньо-квадратичного інтеграла). Нехай $(\xi_t)_I$ с.-к. диференційовний процес, який має с.-к. неперервну похідну $\dot{\xi}_t$, а $h(t)$ – неперервно диференційовна функція. Тоді,

$$\int\limits_{t_0}^t \xi_\tau h'(\tau)d\tau = \xi_\tau h(\tau)\Big|_{t_0}^t - \int\limits_{t_0}^t h(\tau)\dot{\xi}_\tau d\tau.$$

Доведення. Зауважимо, що м.н.

$$\frac{d}{d\tau}\Big(\xi_\tau h(\tau)\Big) = \xi_\tau h'(\tau) + h(\tau)\dot{\xi}_\tau,$$

звідки за лінійністю с.-к. інтеграла

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\Big(\xi_\tau h(\tau)\Big)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau h'(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} h(\tau)\dot{\xi}_\tau d\tau.$$

Залишається переконатися, що

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\Big(\xi_\tau h(\tau)\Big)d\tau = \xi_\tau h(\tau)\Big|_{t_0}^{t}.$$

Справді, $\xi_\tau h(\tau)$ – с.-к. неперервно диференційовний процес, тому, написана під знаком інтеграла с.-к. похідна м.н. дорівнює потраєкторній похідній, а для таких траєкторій (тобто, при фіксованому $\omega = \omega_0$) м.н.

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\Big(\xi_\tau h(\tau)\Big)d\tau = \xi_\tau h(\tau)\Big|_{t_0}^{t}.$$

Твердження доведено остаточно.

Вправа. За умов попереднього твердження переконатися, що $(\xi_\tau h(\tau))$ – с.-к. неперервно диференційовний процес.

Розглянемо кілька вправ.

Вправа. Нехай $(\xi_t)_I$ – с.-к. інтегровний гаусів процес. Тоді, $\eta := \int\limits_a^b \xi_t dt$ – гаусова випадкова величина, $\eta \in \mathcal{N}(m, D)$

$$m = \int\limits_a^b m_\xi(t)dt, \quad D = \int\limits_a^b\int\limits_a^b R_\xi(t,\tau)dtd\tau.$$

Вправа. Довести, що кожний с.-к. неперервний процес є с.-к. інтегровним.

Справді, якщо $(\xi_t)_I$ – с.-к. неперервний процес, то функція $m_\xi(t)$ неперервна, а отже, інтегровна, а функція $R_\xi(t,\tau)$ неперервна як функція від двох змінних, а тому, інтегровна на квадраті $[a,b]\times[a,b]$. Цього в сукупності достатньо для с.-к. інтегровності ξ_t на $[a,b]$.

Вправа. Нехай $(\xi_t)_I$ – випадковий процес з характеристиками $m_\xi(t) = mt,\ R\xi(t,\tau) = Dt\tau,\ D > 0$. Обчислити функції математичного сподівання і коваріаційну випадкового процесу $\eta_t := \int\limits_0^t \xi_\tau d\tau$.

Справді, $m_\xi(t) = mt,\ R_\xi(t,\tau) = Dt\tau$ – неперервні, тому, $(\xi_t)_I$ – с.-к. інтегровний процес. Тоді,

$$m_\eta(t) = M(\eta_t) = M\Big(\int\limits_0^t \xi_\tau d\tau\Big) = \int\limits_0^t M(\xi_\tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t m_\xi(\tau) d\tau = m\int\limits_0^t \tau d\tau = \frac{mt^2}{2};$$

$$R_\eta(t,\tau) = \mathrm{cov}\ \Big(\int\limits_0^t \xi_{\tau_1} d\tau_1, \int\limits_0^\tau \xi_{\tau_2} d\tau_2\Big) = \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \mathrm{cov}\ \big(\xi_{\tau_1}, \xi_{\tau_2}\big) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau R_\xi(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = D\int\limits_0^t \tau_1 d\tau_1 \int\limits_0^\tau \tau_2 d\tau_2 = \frac{D}{4}\cdot t^2\tau^2;$$

$$D_\eta(t) = R_\eta(t,t) = \frac{D}{4}\cdot t^4.$$

Твердження (формула диференціювання по верхній змінній межі середньо-квадратичного інтеграла). Нехай $(\xi_t)_I$ с.-к. неперервний процес, а $\eta_t := \int\limits_0^t \xi_\tau d\tau$. Тоді, м.н. існує с.-к. похідна і м.н. виконується рівність

$$\dot\eta_t := \frac{d}{dt}\int\limits_{t_0}^t \xi_\tau d\tau = \xi_t.$$

Доведення. Припустимо спочатку, що $m_\xi(t) \equiv 0$. Потрібно довести, що

$$\delta_h := M\left|\frac{\eta_{t+h} - \eta_h}{h} - \xi_t\right|^2 \to 0 \quad (h \to 0).$$

Зауважимо, що для $\Delta\eta := \eta_{t+h} - \eta_h = \int\limits_t^{t+h} \xi_\tau d\tau$ за інтегральними теоремами про середнє маємо

$$M\Big(\Delta\eta^2\Big) = \int\limits_t^{t+h}\int\limits_t^{t+h} R_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = R_\xi(\tau_1^*, \tau_2^*) h^2$$

$$M\Big(\Delta\eta\xi_t\Big) = \int\limits_t^{t+h} R_\xi(\tau, t) d\tau = R_\xi(\tau^*, t) h,$$

де $\tau_1^*, \tau_2^*, \tau^* \in [t, t+h]$ і, власне, $\tau_1^* \to t,\ \tau_2^* \to t,\ \tau^* \to t$ при $h \to +0$. Звідси, скориставшись неперервністю $R_\xi(t, \tau)$, отримаємо

$$\delta_h = \frac{1}{h^2} M\Big(\Delta\eta^2\Big) + M(\xi_t^2) - \frac{2}{h} M\Big(\Delta\eta\xi_t\Big) =$$
$$= R_\xi(\tau_1^*, \tau_2^*) + R_\xi(t, t) - 2R_\xi(\tau^*, t) \to 0 \ (h \to 0).$$

Цим у випадку $m_\xi(t) \equiv 0$ все доведено.

Вправа. Завершити доведення у загальному випадку, тобто, коли умова $m_\xi(t) \equiv 0$ відсутня.

Вправа. Припустимо, що випадковий проце $(\xi_t)_I$ такий, що м.н. всі його траєкторії м.н. інтегровні, тобто,

$$\mathbb{P}\Big\{\omega \colon \exists \eta^{\mathcal{R}}(\omega) := R\text{–}\int_a^b \xi_t(\omega) dt\Big\} = 1.$$

Тоді, $\eta^{\mathcal{R}}(\omega)$ – випадкова величина. Якщо додатково припустити, що існує с.-к. інтеграл $\eta := \int\limits_a^b \xi_t dt$, то

$$\mathbb{P}\Big\{\omega \colon \eta^{\mathcal{R}}(\omega) = \eta(\omega) dt\Big\} = 1.$$

Вправа. Нехай $U_1,\ U_2$ – незалежні гаусові випадкові величини, $U_j \in \mathcal{N}(0, D)$, а $\{\xi_t = U_1 \sin at + U_2 \cos at \colon t \geq 0\}$ – випадковий процес, $a > 0$. Обчислити с.-к. інтеграл $\eta_t := \int\limits_0^t \xi_\tau d\tau,\ t \geq 0$, а також $m_\eta(t),\ D_\eta(t)$.

Розв'язок. Потраєкторна інтегровність за Ріманом процесу є очевидною, бо кожна траєкторія є м.н. неперервною функцією від часу, тому,

$$\eta_t^{\mathcal{R}}(\omega) := R\text{–}\int_0^t \xi_\tau(\omega) d\tau = \frac{1}{a}(U_1(1 - \cos at) + U_2 \sin at).$$

Далі, ξ_t – с.-к. неперервний процес як лінійна комбінація функцій $\sin at,\ \cos at$ (детермінованих) з випадковими коефіцієнтами $U_1,\ U_2$, що мають скінченні моменти другого порядку. Тому, с.-к. інтеграл $\eta_t = \int_0^t \xi_\tau d\tau$ існує і м.н. дорівнює потраєкторному інтегралові $\eta_t^{\mathcal{R}}(\omega)$. Отже,

$$\eta_t = \int_0^t \xi_\tau(\omega) d\tau = \frac{1}{a}(U_1(1 - \cos at) + U_2 \sin at) \quad \text{м.н.}$$

Обчислимо тепер $m_\eta(t),\ D_\eta(t)$. Зазначимо, що η_t при кожному фіксованому $t > 0$ є гаусовою випадковою величиною (як лінійна комбінація незалежних гаусових випадкових величин. Очевидно, що $m_\eta(t) \equiv 0$, а

$$D\eta(t) = M(\eta_t)^2 = \frac{1}{a^2}\Big((1 - \cos at)^2 MU_1^2 + \sin^2 at MU_2^2 +$$
$$+ 2M(U_1 \cdot U_2)(1 - \cos at) \sin at\Big) = \frac{2D}{a^2} \cdot (1 - \cos at),$$

бо $M(U_1 U_2) = MU_1 \cdot MU_2 = 0$.

5.2.4. Диференційні рівняння з випадковою правою частиною.

Розглянемо тепер як введені вище поняття дозволяють підійти до описання лінійного диференційного рівняння з випадковими збуреннями у правій частині. Нехай $a(t)$, $b(t)$ $(t \geq 0)$ – неперервні функції, $(\xi_t)_{t\geq 0}$ – с.-к. неперервний випадковий процес, ν – деяка випадкова величина.

Розглянемо задачу відшукання с.-к. диференційовного випадкового процесу, що задовольняє м.н. наступних рівняння і початкову умову

$$\dot{\eta}_t = a(t)\eta_t + b(t)\xi_t, \tag{1.1}$$

$$\eta_0 = \nu. \tag{1.2}$$

Зрозуміло, що правильне таке твердження.

Твердження. Припустимо, що випадковий процес $(\eta_t)_{t\geq 0}$ задовольняє рівність

$$\eta_t = \nu + \int\limits_0^t a(\tau)\eta_\tau d\tau + \int\limits_0^\tau b(\tau)\xi_\tau d\tau. \tag{1.3}$$

Тоді, $(\eta_t)_{t\geq 0}$ м.н. задовольняє умови (1.1)–(1.2).Правильно і навпаки, якщо випадковий процес $(\eta_t)_{t\geq 0}$ задовольняє умови (1.1)–(1.2), то $(\eta_t)_{t\geq 0}$ м.н. задовольняє умову (1.3).

Доведення. ($\Longrightarrow$) Очевидно, що $\eta_0 = \nu$. Далі, с.-к. диференціюючи рівність (1.3), отримаємо, що м.н.

$$\dot{\eta}_t = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t a(\tau)\eta_\tau d\tau + \frac{d}{dt}\int\limits_0^\tau b(\tau)\xi_\tau d\tau = a(t)\eta_t + b(t)\xi_t.$$

($\Longleftarrow$) Проінтегруємо (с.-к.) рівність (1.1)

$$\eta_t - \eta_0 = \int\limits_0^t \dot{\eta}_\tau d\tau = \int\limits_0^t a(\tau)\eta_\tau d\tau + \int\limits_0^\tau b(\tau)\xi_\tau d\tau \quad \text{м.н.}$$

Залишається пригадати, що $\eta_0 = \nu$.

Вправа. Нехай $h(t)$ – розв'язок задачі

$$h'(t) = a(t)h(t),$$
$$h(0) = 1$$

$\Big($власне, $h(t) = \exp\big(\int_0^t a(\tau)d\tau\big)\Big)$. Довести, що для випадкового процесу

$$\eta_t = h(t)\nu + h(t)\int\limits_0^t \frac{b(\tau)\xi_\tau}{h(\tau)}d\tau$$

м.н. виконуються умови (1.1)–(1.2).

Доведення. Очевидно, що $\eta_0 = \nu$.

Далі, диференціюючи (с.-к.) рівність, що визначає випадковий процес, і враховуючи, що $h'(t) = a(t)h(t)$, отримуємо

$$\dot{\eta}_t = \frac{d}{dt}\Big(h(t)\nu + h(t)\int\limits_0^t \frac{b(\tau)\xi_\tau}{h(\tau)}d\tau\Big) = h'(t)\nu +$$
$$+h'(t)\int\limits_0^t \frac{b(\tau)\xi_\tau}{h(\tau)}d\tau + h(t)\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_0^t \frac{b(\tau)\xi_\tau}{h(\tau)}d\tau\Big) =$$
$$= a(t)\Big(h(t)\nu + h(t)\int\limits_0^t \frac{b(\tau)\xi_\tau}{h(\tau)}d\tau\Big) + h(t)\cdot\frac{b(t)\xi_t}{h(t)} =$$
$$= a(t)\eta_t + b(t)\xi_t \quad \text{м.н.}$$

Вправа. Випадковий процес $(\eta_t)_{t\geq 0}$ задовольняє умови

$$e\dot{t}a_t = \alpha\eta_t + \xi, \quad \eta_0 = \nu,$$

де (ξ, ν) – випадковий гаусів вектор; $m_\xi = M\xi,\ m_\nu = M\nu,\ D_\xi = D\xi,\ D_\nu = D\nu,\ \varrho = \mathrm{cov}\ (\xi, \nu)$. Знайти одновимірний закон розподілу випадкового процесу $(\eta_t)_{t\geq 0}$.

Розв'язок. Повторюючи схему з попередньої вправи для функції $h(t)$ маємо задачу

$$h'(t) = \alpha h(t), \quad h(0) = 1.$$

Звідки, $h(t) = \exp(\alpha t)$. Тоді, розв'язок, як і попередній вправі, записується у вигляді

$$\eta_t = e^{\alpha t}\nu + e^{\alpha t}\int\limits_0^t e^{-\alpha\tau}\xi d\tau = e^{\alpha t}\nu + \xi e^{\alpha t}\int\limits_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau =$$
$$= e^{\alpha t}\nu + \frac{\xi}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1).$$

5.2.5. Стохастичні інтеграли.

Надалі скрізь вважатимемо, що $I \subset \mathbb{R}$; $I = [0; +\infty), I = [0, T), \dots$.

Через $L_2(I)$ позначатимемо простір функцій $\alpha \colon I \to \mathbb{C}$ з інтегровним квадратом, тобто, $\int_I |\alpha(t)|^2 dt < +\infty$, тобто,

$$L_2(I) = \left\{ \alpha(t) \colon \int_I |\alpha(t)|^2 dt < +\infty \right\},$$

і скалярним добутком $\alpha, \beta \in L_2(\Omega) \colon (\alpha, \beta) := \int_I \alpha(t)\overline{\beta(t)}dt$.

Через $L_2(\Omega)$ позначатимемо простір випадкових величин $\xi \colon \Omega \to \mathbb{C}$, що визначається подібно

$$L_2(\Omega) = \left\{ \xi(\omega) \colon \int_I |\xi(\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega) < +\infty \right\},$$

зі скалярним добутком $\xi, \eta \in L_2(\Omega) \colon (\xi, \eta) := \int_I \xi(\omega)\overline{\eta(\omega)}\mathbb{P}(d\omega)$.

Нехай $\mathcal{A}_0 = ([a, b))$ — алгебра породжена скінченним об'єднаннями інтервалів. $\mathcal{A}_* = \sigma(\mathcal{A}_0)$ — мінімальна σ-алгебра. Розглядатимемо такі випадкові функції від множини Δ

$$\Delta = [a, b),\ \eta(\Delta) = \eta(\Delta, \omega) \in L_2(\Omega).$$

Ортогональна стохастична міра.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — ймовірнісний простір.

Означення (елементарної стохастичної міри). Відображення $Z_0(\Delta) = Z_0(\Delta, \omega) \colon \mathcal{A}_0 \times \Omega \to \mathbb{C}$. Z_0 називається елементарною стохастичною мірою на $\mathcal{A}_0$, якщо виконуються умови:

1) $(\forall \Delta \in \mathcal{A}_0) \colon M_\omega(Z_0(\Delta)) = 0,\ M_\omega(|Z_0(\Delta)|^2) < +\infty$, зокрема, $M_\omega(|Z_0(I)|^2) < +\infty$.

2) $(\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{A}_0),\ \Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing \Longrightarrow Z_0(\Delta_1 \cup \Delta_2) = Z_0(\Delta_1) + Z_0(\Delta_2)$ м.н.

3) $(\forall (\Delta_n) \colon \Delta_n \in \mathcal{A}_0,\ \Delta_n \supset \Delta_{n+1}\ (n \geq 1),\ \bigcap_{k=1}^\infty \Delta_k = \varnothing) \colon$
$$M_\omega |Z_0(\Delta_n)|^2 \to 0\ (n \to +\infty).$$

Переконаємося у зліченній адитивності елементарної стохастичної міри.

Вправа. Елементарна стохастична міра $Z_0(\Delta)$ є σ-адитивною в с.к. сенсі, тобто, $Z_0(\Delta) = \sum_{k=1}^{+\infty} Z_0(\Delta_k)$ с.к. Інакше кажучи

$$(\forall \Delta_n \in \sigma(\mathcal{A}_0), n \geq 1,\ \Delta_n \cap \Delta_k = \varnothing (n \neq k),\ \Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \in \sigma(\mathcal{A}_0))\colon$$

$$M\Big| Z_0(\Delta) - \sum_{k=1}^{n} Z_0(\Delta_k) \Big|^2 \to 0\ (n \to +\infty).$$

Доведення. Нехай $B_n = \Delta \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k$. Тоді, $B_n \subset B_{n+1}$ $(n \geq 1)$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k = \varnothing$ і, тому, за аксіомою 3) з означення елементарної стохастичної міри

$$M|Z_0(B_n)|^2 \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

Але, $\Delta = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k \bigcup B_n$, звідки за адитивністю (аксіома 2))

$Z_0(B_n) = Z_0(\Delta) - Z_0\big(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k\big) = Z_0(\Delta) - \sum\limits_{k=1}^{n} Z_0(\Delta_k)$. Звідси вже отримуємо бажане твердження, бо

$$M\Big| Z_0(\Delta) - \sum_{k=1}^{n} Z_0(\Delta_k) \Big|^2 = M|Z_0(B_n)|^2 \to 0\ (n \to +\infty).$$

Означення (елементарної ортогональної міри).
Відображення $Z_0(\Delta)\colon \mathcal{A}_0 \times \Omega \to \mathbb{C}$ називається елементарною ортогональною мірою, якщо:

1) $Z_0(\Delta)$ — елементарна стохастична міра на $\mathcal{A}_0$,

2) $(\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{A}_0),\ \Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing)\colon Z_0(\Delta_1) \perp Z_0(\Delta_2)$, тобто, $(Z_0(\Delta_1), Z_0(\Delta_2)) := M(Z_0(\Delta_1)\overline{Z_0(\Delta_2)}) = 0$.

Структурна функція елементарної стохастичної ортогональної міри.

Нехай $Z_0(\Delta)$ — ортогональна стохастична міра. Визначимо

$$m_0(\Delta) = M_\omega |Z_0(\Delta)|^2 \colon \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}_+ \ (\Delta \in \mathcal{A}_0).$$

Вправа. $m_0(\Delta)$ — локально скінченна, σ-адитивна міра на $\mathcal{A}_0$.

Доведення. Локальну скінченність маємо з аксіоми 1) з означення. Перевіримо тепер адитивність $m_0(\Delta)$. Нехай $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Тоді,

$$m_0(B_1 \cup B_2) = M\big|Z_0(B_1 \cup B_2)\big|^2 = M\big|Z_0(B_1) + Z_0(B_2)\big|^2 =$$
$$= M\Big((Z_0(B_1) + Z_0(B_2))(\overline{Z_0(B_1)} + \overline{Z_0(B_2)})\Big) =$$
$$= M|Z_0(B_1)|^2 + M|Z_0(B_2)|^2 + (Z_0(B_1), Z_0(B_2)) + \overline{(Z_0(B_1), Z_0(B_2))} =$$
$$= m_0(B_1) + m_0(B_2).$$

Розглянемо далі

$$\Delta_n \in \sigma(\mathcal{A}_0), n \geq 1,\ \Delta_n \cap \Delta_k = \varnothing (n \neq k),\ \Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \in \sigma(\mathcal{A}_0).$$

Тоді, оскільки, за аксіомою 3) з означення,

$$m_0(B_n) = M|Z_0(B_n)|^2 \to 0 \ (n \to +\infty)$$

у випадку, коли $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing,\ B_n \supset B_{n+1}\ (n \geq 1)$, то як і вище маємо, що для $B_n = \Delta \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k$, $B_n \subset B_{n+1}$ $(n \geq 1)$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k = \varnothing$.

Але, $\Delta = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k \bigcup B_n$, звідки за адитивністю

$m_0(B_n) = m_0(\Delta) - m_0\big(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k\big) = m_0(\Delta) - \sum\limits_{k=1}^{n} m_0(\Delta_k)$. Звідси вже отримуємо бажане твердження, бо

$$m_0(\Delta) - \sum_{k=1}^{n} m_0(\Delta_k) = m_0(B_n) \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

За теоремою Каратеодорі-Лебега $\exists!$ продовження $m(\Delta)$ скінченної σ-адитивної міри $m_0(\Delta)$ на мінімальну σ-алгебру (яке є зліченно-адитивною мірою) $\sigma(\mathcal{A}_0) := \mathcal{A}_*$ таке, що

$$(\forall \Delta \in \mathcal{A}_0)\colon \ m(\Delta) = m_0(\Delta).$$

Так визначена на $\sigma(\mathcal{A}_0)$ функція $m\colon \sigma(\mathcal{A}_0) \to \mathbb{R}_+$ називається структурною функцією елементарної ортогональної стохастичної міри $Z_0(\Delta)$.

Твердження. Міру $Z_0(\Delta)$ можна однозначно ($\mathbb{P}$-м.н.) продовжити до $Z(\Delta)$ — ортогональної стохастичної міри на $\mathcal{A}_* = \sigma(\mathcal{A}_0)$. Тобто, $\exists!$ ортогональна міра z на $\mathcal{A}_*$ така, що

$$(\forall \Delta \in \mathcal{A}_0)\colon Z(\Delta) = Z_0(\Delta) \ (P - \text{м.н.}),$$
$$M_\omega(|Z(\Delta)|^2) = m(\Delta), \ \Delta \in \mathcal{A}_*.$$

Вправа. Міра $Z_0(\Delta)$ є σ-адитивною в с.к. сенсі:

$$(\forall \Delta_n \in \sigma(\mathcal{A}_0))\colon m(\Delta) = M(|Z(\Delta)|^2)$$

m називається структурна функція ортогональної стохастичної міри на $\sigma(\mathcal{A}_0)$.

Стохастичний інтеграл за елементарною стохастичною ортогональною мірою.

Нехай Z — ортогональна стохастична міра на $\sigma(\mathcal{A}_0)$, m — її структурна функція. Розглянемо два гільбертових простори:

1) $L_2 := L_2(m, I)$ — простір функцій $f(t)\colon I \to \mathbb{C}$

$$\int_I |f(t)|^2 m(dt) < +\infty, \ \langle f, g\rangle = \int_I f(t)\overline{g(t)} m(dt)$$

— скалярний добуток.

2) $\mathcal{H}$ — простір комплексних випадкових величин зі скінченним моментом другого порядку. $\mathcal{H} = L_2(P, \Omega)$.

Твердження. Нехай $f \in L_2$. Тоді $\exists(f_n)$, послідовність простих функцій $f_n \colon I \to \mathbb{C}$ таких, що

$$\|f_n - f\|_{L_2}^2 = \int_I |f_n(t) - f(t)|^2 m(dt) \to 0,\ n \to +\infty.$$

Означення.(Стохастичного інтегралу.)

(A) Нехай $f \colon I \to \mathbb{C}$ — проста, тобто $\exists(\Delta_k)_{k=1}^n, \Delta_k \in \sigma(\mathcal{A}_0)$

$$\Delta_k \cap \Delta_s = \varnothing (k \neq s) \colon f_k = f(t),\ t \in \Delta_k,\ f(t) = \sum_{k=1}^n f_n \chi_{\Delta_k}(t).$$

Тоді випадкова величина $J(f) \in \mathcal{H}$

$$J(f) = \sum_{k=1}^n f_k Z(\Delta_k) = \int_I f(t) Z(dt)$$

називається стохастичним інтегралом від простої функції f.

Зауважимо, що

$$M|I(f)|^2 = \Big(\sum_{k=1}^n f_k Z(\Delta_k) \sum_{s=1}^n \overline{f_s Z}(\Delta_s)\Big) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n f_k \overline{f_s} M(Z(\Delta_k)\overline{Z}(\Delta_s)) =$$

$$= \sum_{k=1}^n |f_k|^2 m(\Delta_k) = \int_I |f(t)|^2 m(dt).$$

Твердження. $\|J(f)\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_{L_2}$ $\forall f$ — простої, $f \in L_2$.

(B) $f \in L_2$ — довільна функція. $\exists(f_n)$ — послідовність простих, $f_n \in L_2 \colon M|f_n - f|^2 = \|f_n - f\|^2 \to 0$, $n \to +\infty$. Тоді

$$\|J(f_n) - J(f_m)\|_{\mathcal{H}} = \|f_n - f_m\|_{L_2} \to 0\ (n, m \to +\infty),$$

бо (f_n) — фундаментальна $\Longrightarrow$ $(J(f_n))$ — фундаментальна в с.к. на $\mathcal{H}$.

$\mathcal{H}$ — повний $\Longrightarrow$ $\exists$ с.к.

$$\lim_{n \to +\infty} J(f_n) := J(f) = \int_I f(t) Z(dt)$$

і називається стохастичним інтегралом від f на I за ортогональною стохастичною мірою $Z(\Delta)$.

Властивості

Теорема. Нехай $f, g, f_n \in L_2$. Тоді

1) $M(J(f)) = 0$.
2) $(J(f), J(g))_{\mathcal{H}} = (f, g)_{L_2}$.
3) $(\forall a, b \in \mathbb{C})\colon J(af + bg) = aJ(f) + bJ(g), (P$ -м.н.)
4) $D(J(f)) = M|J(f)|^2 = \|J(f)\|^2_{L_2} = \int_I |f(t)|^2 m(dt)$.
5) $\operatorname{cov}(J(f), J(g)) = (f, g)_{L_2} = \int_E f(t)\overline{g(t)} m(dt)$.
6) $f_n \to f$ в $L_2 \Longrightarrow J(f_n) \to J(f)$ с.к.

Стохастичний інтеграл Іто.

Наступна наша мета дати означення стохастичного інтеграла

$$\int_a^b \xi_t dw_t = \int_a^b \xi(t) dw(t),$$

де $(\xi_t)_{t\in[a,b]}$ – випадковий процес, а (w_t) – процес Вінера. Оскільки з ймовірністю, яка дорівнює одиниці жодна з траєторій процесу Вінера є в жодній точці недиференційовною, то цей інтеграл визначити за схемою побудови інтеграла Лебега-Стілт'єса неможливо (бо траєкторії $w_t(\omega_0)$ при фіксованих ω_0 не може мати обмежену варіацію).

Виконаємо тепер спочатку деяку підготовчу роботу. Розглянемо поняття *мартингала*.

Мартингали

В загальному, *мартингалом* називають сім'ю випадкових величин (випадковий процес) $(\xi_t)_{t\in I}$, що має властивість певної "байдужості" до минулого. Ця "байдужість" полягатиме в тому, що умовні математичні сподівання приростів $\xi(t_2)-\xi(t_1)$ $(t_1 < t_2)$ при заданих значеннях $\xi(s)$, $(s \le t)$

$$M\big(\xi(t_2) - \xi(t_1)|\xi(s)\big) = 0.$$

Якщо ці умовні математичні сподівання $M\big(\xi(t_2) - \xi(t_1)|\xi(s)\big) \ge 0$, то $(\xi_t)_{t\in I}$ називають *субмартингалом*.

Дамо тепер строгі означення.

Нехай $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$ фіксований ймовірнісний простір, а $I \subset \mathbb{R}$.

Означення (потоку σ-алгебр і підпорядкованості процесу потокові). 1. Сім'я σ-алгебр $\big\{\mathcal{A}_t \colon t \in I\big\}$, $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}$ $(\forall t \in I)$, називається потоком σ-алгебр , якщо $(\forall t_1 < t_2)\colon \mathcal{A}_{t_1} \subset \mathcal{A}_{t_2}$.
2. Сім'ю випадкових величин $(\xi_t)_{t\in I}$ називають підпорядкованою потокові $\big\{\mathcal{A}_t \colon t \in I\big\}$, якщо випадкові величини ξ_t – вимірні відносно $\mathcal{A}_t$ для кожного $t \in I$.

Означення (мартингала і субмартингала).
Сім'я пар $\big\{(\xi_t, \mathcal{A}_t)\colon t \in I\big\}$ називається **мартингалом**, якщо:
1. Сім'я випадкових величин $(\xi_t)_{t\in I}$ є підпорядкованою потокові σ-алгебр $\big\{\mathcal{A}_t\colon t \in I\big\}$.
2. $(\forall t \in I)\colon\ M|\xi_t| < +\infty$.
3. $(\forall s, t \in I)\colon\ s < t \Longrightarrow M\big(\xi_t|\mathcal{A}_s\big) = \xi_s$.

Сім'я пар $\big\{(\xi_t, \mathcal{A}_t)\colon t \in I\big\}$ називається **субмартингалом**, якщо виконуються умови: **1.**, **2**, а також
3. $(\forall s, t \in I)\colon\ s < t \Longrightarrow M\big(\xi_t|\mathcal{A}_s\big) \geq \xi_s$.

Твердження. Для кожного $t \in I$ σ-алгебра

$$\sigma - \text{алгебра}\ \ \sigma\big\{\xi_s\colon s \in I,\ s \leq t\big\} \subset \mathcal{A}_t.$$

При побудові моделей часто можна вважати, що

$$\sigma\big\{\xi_s\colon s \in I,\ s \leq t\big\} = \mathcal{A}_t.$$

Твердження. I. Сім'я пар $\big\{(\xi_t, \mathcal{A}_t)\colon t \in I\big\}$ є мартингалом тоді і тільки тоді, коли виконуються умови **1.**, **2**, а також

$$(\forall s, t \in I, s < t)(\forall A \in \mathcal{A}_s)\colon\ \int\limits_A \xi_s \mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_A \xi_t \mathbb{P}(d\omega).$$

II. Сім'я пар $\big\{(\xi_t, \mathcal{A}_t)\colon t \in I\big\}$ є субмартингалом тоді і тільки тоді, коли виконуються умови **1.**, **2**, а також

$$(\forall s, t \in I, s < t)(\forall A \in \mathcal{A}_s)\colon\ \int\limits_A \xi_s \mathbb{P}(d\omega) \leq \int\limits_A \xi_t \mathbb{P}(d\omega).$$

Твердження є очевидним, якщо пригадати означення умовного математичного сподівання відносно σ-алгебри.

Твердження. Для мартингала виконується $M\xi_t = \text{const}$, а для субмартингала $M\xi_s \leq M\xi_t$ $(\forall s, t \in I, s < t)$.

Твердження. 1. Нехай $\{(\xi_t, \mathcal{A}_t) : t \in I\}$, $\{(\eta_t, \mathcal{A}_t) : t \in I\}$ – два субмартингала. Тоді, $(\forall a > 0, b > 0)$: $\{(a\xi_t + b\eta_t, \mathcal{A}_t) : t \in I\}$ є субмартингалом.
2. Нехай $\{(\xi_t, \mathcal{A}_t) : t \in I\}$, $\{(\eta_t, \mathcal{A}_t) : t \in I\}$ – два мартингала. Тоді, $(\forall a, b \in \mathbb{R})$: $\{(a\xi_t + b\eta_t, \mathcal{A}_t) : t \in I\}$ – мартингал.

Твердження. 1. Нехай $\{(\xi_t, \mathcal{A}_t) : t \in I\}$ є мартингалом, а f – неперервна опукла функція і $M|f(\xi_t)| < +\infty$. Тоді, $\{(f(\xi_t), \mathcal{A}_t) : t \in I\}$ є субмартингалом.
2. Нехай $\{(\xi_t, \mathcal{A}_t) : t \in I\}$ є субмартингалом, а f – монотонно неспадна опукла функція і $M|f(\xi_t)| < +\infty$. Тоді, $\{(f(\xi_t), \mathcal{A}_t) : t \in I\}$ є субмартингалом.
3. Нехай $\{(\xi_t, \mathcal{A}_t) : t \in I\}$, $\{(\eta_t, \mathcal{A}_t) : t \in I\}$ є субмартингалами. Тоді, $\{(\zeta_t, \mathcal{A}_t) : t \in I\}$, $\zeta_t := \sup\{\xi_t, \eta_t\}$ є субмартингалом.

Доведення. 1. За означенням мартингала і за нерівністю Єнсена при $s < t$ послідовно маємо

$$f(\xi_s) = f\big(M\big(\xi_t|\mathcal{A}_s\big)\big) \le M\big(f\big(\xi_t|\mathcal{A}_t\big)\big).$$

Це доводить перший пункт.
2. Тут міркуємо подібно, використовуючи означення субмартингала

$$f(\xi_s) = f\big(M\big(\xi_t|\mathcal{A}_s\big)\big) \le M\big(f\big(\xi_t|\mathcal{A}_t\big)\big).$$

3. Процес $\{(\zeta_t) : t \in I\}$, $\zeta_t := \sup\{\xi_t, \eta_t\}$ підпорядкований потокові σ-алгебр $\mathcal{A}_t$. Для кожного $A \in \mathcal{A}_s$, $s < t$, маємо, що події $A_1 = A \cap \{\xi_s < \eta_s\}$, $A_2 = A \cap \{\xi_s \ge \eta_s\}$ є $\mathcal{A}_s$ вимірними, тому,

$$\int\limits_A \zeta_s \mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{A_1} \eta_s \mathbb{P}(d\omega) + \int\limits_{A_2} \xi_s \mathbb{P}(d\omega) \le \int\limits_{A_1} \eta_t \mathbb{P}(d\omega) + \int\limits_{A_2} \xi_t \mathbb{P}(d\omega) \le \int\limits_A \zeta_t \mathbb{P}(d\omega),$$

тобто, те, що й потрібно довести.

Твердження (нерівність Колмогорова). Нехай $\{(\xi_n, \mathcal{A}_n) : 1 \le n \le N\}$ – субмартингал. Тоді,

$$(\forall C > 0) : \ \mathbb{P}\Big\{\sup\{\xi_n : 1 \le n \le N\} \ge C\Big\} \le \frac{M\xi_N^+}{C}.$$

Надалі, коли це не викликатиме непорозумінь, запис " мартингал ξ_t" означатиме $\big\{(\xi_t, \mathcal{A}_t)\colon t \in I\big\}$.

Вправа. Нехай $\xi_t,\ t \in I$ – мартингал.
1. $|\xi_t|,\ t \in I$ – субмартингал і $M|\xi_t|,\ t \in I$ – монотонно неспадна функція.
2. Якщо $p > 1$ і $M|\xi_t|^p < +\infty$, то $|\xi_t|^p,\ t \in I$ – субмартингал.

Вправа. Нехай $\xi_t,\ t \in I$ – субмартингал.
1. $(\forall a \in \mathbb{R})\colon\ \sup\{a, \xi_t\},\ t \in I$ – субмартингал.
2. $\xi_t^+,\ t \in I$ – субмартингал.
3. Якщо $p > 1$ і $M(\xi_t^+)^p < +\infty$, то $(\xi_t^+)^p,\ t \in I$ – субмартингал.

Вправа. Нехай (ζ_k) – послідовність незалежних випадкових величин таких, що $M\zeta_k \neq \infty$ $(\forall k)$, а $\mathcal{A}_n = \sigma(\zeta_1, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ – мінімальна σ-алгебра породжена випадковими величинами (випадковим вектором) $(\zeta_1, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$; $\xi_n := \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n$. Довести, що:
1. $M\zeta_k = 0$ $(\forall k) \Longrightarrow \{(\xi_n, \mathcal{A}_n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ – мартингал.
2. $M\zeta_k \geq 0$ $(\forall k) \Longrightarrow \{(\xi_n, \mathcal{A}_n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ – субмартингал.

Розв'язок. Для $m < n$ маємо

$$M\big(\xi_n|\mathcal{A}_m\big) = M\big(\xi_n - \xi_m|\mathcal{A}_m\big) + \xi_m =$$
$$= M\Big(\sum_{k=m+1}^{n} \xi_k|\mathcal{A}_m\Big) + \xi_m = \xi_m + \sum_{k=m+1}^{n} M\xi_k.$$

Далі зрозуміло.

Вправа. Нехай (ζ_k) – послідовність незалежних випадкових величин таких, що $M\zeta_k \neq \infty$ $(\forall k)$, а $\mathcal{A}_n = \sigma(\zeta_1, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ – мінімальна σ-алгебра породжена випадковими величинами (випадковим вектором) $(\zeta_1, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$; $\xi_n := \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \ldots \cdot \zeta_n$. Довести, що:
1. $M\zeta_k = 1$ $(\forall k) \Longrightarrow \{(\xi_n, \mathcal{A}_n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ – мартингал.
2. $\zeta_k \geq 0,\ M\zeta_k \geq 1$ $(\forall k) \Longrightarrow \{(\xi_n, \mathcal{A}_n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ – субмартингал.

Розв'язок. Для $m < n$ маємо

$$M\big(\xi_n|\mathcal{A}_m\big) = M\Big(\prod_{k=m+1}^{n} \xi_k|\mathcal{A}_m\Big) \cdot \xi_m = \xi_m \cdot M\Big(\prod_{k=m+1}^{n} \xi_k\Big) = \xi_m \cdot \prod_{k=m+1}^{n} M\xi_k.$$

Далі у випадку **1** зрозуміло, а у випадку **2**, оскільки

$$\xi_m = \zeta_1 + \ldots + \zeta_m \geq 0,$$

то і

$$M\big(\xi_n|\mathcal{A}_m\big) = \xi_m \cdot \prod_{k=m+1}^{n} M\xi_k \geq \xi_m.$$

Зауважимо, що у випадку $\zeta_k \leq 0,\ M\zeta_k \geq 1$ $(\forall k)$

$$M\big(\xi_n|\mathcal{A}_m\big) = \xi_m \cdot \prod_{k=m+1}^{n} M\xi_k \leq \xi_m,$$

тобто, $\{(\xi_n, \mathcal{A}_n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ так званий *супермартингал.*

Моменти часу Маркова.

Означення (момента часу Маркова). Нехай $\big\{\mathcal{A}_t \colon t \in I\big\}$ – потік σ-алгебра, а $\tau(\omega)\colon \Omega \to I \cup \{+\infty\}$ – випадкова величина. Якщо $(\forall t \in I)\colon \{\omega \colon \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}_t$, то τ називається *моментом часу Маркова.*

Означення (σ-алгебри, породженої моментом часу Маркова). σ-алгеброю $\mathcal{A}_\tau$, породженою моментом часу Маркова τ, називають σ-алгебру всіх множин $B \in \mathcal{A}$ таких, що $(\forall t \in I)$:

$$B \cap \{\omega \colon \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}_t.$$

Вправа. Майже напевно стала випадкова величина $\tau(\omega) = t_0 \in I$ є моментом часу Маркова. При цьому, σ-алгебра, породженою моментом часу Маркова τ, $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{A}_{t_0}$.

Розв'язок. Якщо $t < t_0$, то $\{\omega \colon \tau(\omega) \leq t\} = \varnothing \in \mathcal{A}_t$. Якщо ж $t \geq t_0$, то $\{\omega \colon \tau(\omega) \leq t\} = \Omega \in \mathcal{A}_t$. Тому, випадкова величина $\tau(\omega) = t_0 \in I$ є моментом часу Маркова.

Залишається зауважити, що

$$(\forall t \in I)\colon\ B \cap \{\omega \colon \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}_t \Longleftrightarrow B \in \mathcal{A}_{t_0}.$$

Сформулюємо кілька властивостей моментів часу Маркова.

Твердження. Нехай $\{\mathcal{A}_t \colon t \in I\}$ – потік σ-алгебр, а $\tau_1, \ \tau_2$ два моменти часу Маркова.
1. Якщо $\tau_1 < \tau_2$ м.н., то $\mathcal{A}_{\tau_1} \subset \mathcal{A}_{\tau_2}$.
2. $\tau^* = \sup\{\tau_1, \ \tau_2\}$ та $\tau_* = \inf\{\tau_1, \ \tau_2\}$ також моменти часу Маркова.
3. Нехай I – не більш, ніж зліченна множина, $\{\xi_t \colon t \in I\}$ випадковий процес підпорядкований потокові σ-алгебр $\{\mathcal{A}_t \colon t \in I\}$, а τ – момент часу Маркова. Тоді, випадкова величина $\eta = \xi_\tau$ є $\mathcal{A}_\tau$-вимірною.

Доведення. 1. Нехай $B \in \mathcal{A}_{\tau_1}$, звідки,

$$B \cap \{\omega \colon \tau_1(\omega) \le t\} \in \mathcal{A}_t.$$

Звідси

$$B \bigcap \Big(\bigcap_{t \in I} \{\omega \colon \tau_2(\omega) \le t\} \Big) = (B \bigcap \{\omega \colon \tau_1(\omega) \le t\}) \bigcap \{\omega \colon \tau_2(\omega) \le t\} \in \mathcal{A}_t.$$

Отже, $B \in \mathcal{A}_{\tau_2}$, звідки, вже отримуємо потрібне включення

$$\mathcal{A}_{\tau_1} \subset \mathcal{A}_{\tau_2}.$$

2. Маємо

$$\{\omega \colon \tau^*(\omega) \le t\} = \{\omega \colon \tau_1(\omega) \le t\} \bigcap \{\omega \colon \tau_2(\omega) \le t\} \in \mathcal{A}_t,$$

тобто, τ^* – момент часу Маркова.

Далі, подібно

$$\{\omega \colon \tau_*(\omega) \le t\} = \{\omega \colon \tau_1(\omega) \le t\} \bigcup \{\omega \colon \tau_2(\omega) \le t\} \in \mathcal{A}_t,$$

тобто, τ_* також момент часу Маркова.

3. Для кожного $a \in \mathbb{R}$

$$\{\omega \colon \eta(\omega) = \xi_\tau < a\} \cap \{\omega \colon \tau(\omega) \le t\} = \bigcup_{s \le t, s \in I} \{\xi_s < a\} \cap \{\tau = s\}.$$

Зауважимо, що при $s < t$

$$\{\omega \colon \xi_s < a\} \in \mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t, \ \{\omega \colon \tau = s\} \in \mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t,$$

тому,

$$\{\omega\colon \eta(\omega) < a\} \in \mathcal{A}_t,$$

позаяк зліченне об'єднання елементів σ-алгебри належить до неї.

Твердження. 1. Нехай $\big\{\big(\xi_t, \mathcal{A}_t\big)\colon t \in \{1, 2, \ldots, N\}\big\}$ – субмартингал, а τ_k, $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, скінченна послідовність моментів часу Маркова така, що $\tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_p$. Тоді, $\big\{\big(\eta_k, \mathcal{A}_k^*\big)\colon k \in \{1, 2, \ldots, p\}\big\}$ – субмартингал; тут $\eta_k := \xi_{\tau_k}$, $\mathcal{A}_k^* := \mathcal{A}_{\tau_k}$.
2. Нехай $\big\{\big(\xi_t, \mathcal{A}_t\big)\colon t \in \{1, 2, \ldots, N\}\big\}$ – мартингал, а τ_k, $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, скінченна послідовність моментів часу Маркова така, що $\tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_p$. Тоді, $\big\{\big(\xi_{\tau_k}, \mathcal{A}_{\tau_k}\big)\colon k \in \{1, 2, \ldots, p\}\big\}$ – мартингал.
3. (Нерівність Колмогорова для субмартингалів)
Нехай $\big\{\big(\xi_n, \mathcal{A}_n\big)\colon n \in \{1, 2, \ldots, N\}\big\}$ – субмартингал, то

$$\mathbb{P}\big\{\omega\colon \sup\{\xi_n(\omega)\colon 1 \le n \le N\} \ge C\big\} \le \frac{M\xi_N^+}{C}.$$

4.(Нерівність Колмогорова для супермартингалів)
Нехай $\big\{\big(\xi_n, \mathcal{A}_n\big)\colon n \in \{1, 2, \ldots, N\}\big\}$ – супермартингал, то

$$\mathbb{P}\big\{\omega\colon \sup\{\xi_n(\omega)\colon 1 \le n \le N\} \ge C\big\} \le \frac{2\sup\{M\xi_n\colon 1 \le n \le N\}}{C}.$$

5. Нехай $\big\{\big(\xi_n, \mathcal{A}_n\big)\colon n \in \{1, 2, \ldots, N\}\big\}$ – мартингал і $p \ge 1$, то

$$\mathbb{P}\big\{\omega\colon \sup\{\xi_n(\omega)\colon 1 \le n \le N\} \ge C\big\} \le \frac{M|\xi_N|^p}{C^p}.$$

Стохастичний інтеграл Іто.

Введемо поняття стохастичного інтеграла Іто (стохастичного інтеграла Лебега-Стілт'єса за мірою, породженою процесом Вінера w_t)

$$\int\limits_I f(t,\omega) dw_t.$$

Отже, нехай $I = [0, +\infty)$, а $(w_t)_{t \in I}$ – процес Вінера, визначений на (основному) ймовірнісному просторі $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$. Писатимемо також $w(t) := w_t$.

Розглянемо сім'ю $\big(\mathcal{A}_t\big)_{t \in I}$ σ-алгебр, пов'язану з процесом Вінера $(w_t)_{t \in I}$, для якої виконуються такі умови:
1. $t_1 < t_2 \Longrightarrow \mathcal{A}_{t_1} \subset \mathcal{A}_{t_2} \subset \mathcal{A}_t$;
2.$(\forall t \in I)$: випадкова величина w_t – вимірна відносно σ-алгебр $\big(\mathcal{A}_t, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$;
3. $(\forall h)$ процес $\eta_t = w(t+h) - w(t)$ є незалежним від кожної події з σ-алгебри $\mathcal{A}_h$.

Для $0 \le a < b$ через $\mathfrak{M}_2[a,b]$ позначимо множину функцій $f(t) = f(t,\omega)\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}$, що є вимірними відносно пари σ-алгебр $\Big(\mathcal{B}(I \cap \mathbb{R}) \times \mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\Big)$, тобто, вимірних, як функції відносно двох змінних, і таких, що задовольняють такі умови:
1. $(\forall t \in [a,b])$ функція $f(t)$ – вимірна відносно σ-алгебри $\mathcal{A}_t$;
2. $\int\limits_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty$ м.н.

Побудуємо тепер інтеграл $\int\limits_I f(t,\omega) dw_t = \int\limits_I f(t,\omega) dw(t)$ для кожної функції $f \in \mathfrak{M}_2[a,b]$.

Нехай $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{r-1} < t_r = b$, а f – проста функція така, що
$$f(t) = f(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}).$$
За означенням приймемо
$$\int\limits_I f(t,\omega) dw_t = \int\limits_I f(t,\omega) dw(t) = \sum_{k=0}^{r-1} f(t_k)\big(w(t_{k+1} - w(t_k))\big).$$

Властивості інтеграла.

1. $(\forall t \in [a,b])$; $M\big(|f(t)|\big|\mathcal{A}_a\big) < +\infty \implies$
$$M\Big(\int\limits_a^b f(t) dw_t \Big| \mathcal{A}_a\Big) = 0 \quad \text{м.н.}$$

Доведення.

2. $(\forall t \in [a,b])$; $M\big(|f(t)|^2\big|\mathcal{A}_a\big) < +\infty$ м.н. $\Longrightarrow$

$$M\Big(\Big(\int_a^b f(t)dw_t\Big)^2\Big|\mathcal{A}_a\Big) = \int_a^b M\Big(\big(f(t)\big)^2\big|\mathcal{A}_a\Big)dt \quad \mathbb{P}\text{-м.н.}$$

Доведення.

$$M\Big(\Big(\int_a^b f(t)dw_t\Big)^2\Big|\mathcal{A}_a\Big) = M\Big(\sum_{k=0}^{r-1} f(t_k)(w(t_{k+1}) - w(t_k))\Big|\mathcal{A}_a\Big)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} M\Big((f(t_k))^2(w(t_{k+1}) - w(t_k))^2\Big|\mathcal{A}_a\Big) +$$

$$+2\sum_{j<k} M\Big(f(t_j)f(t_k)\cdot(w(t_{j+1}) - w(t_j))\cdot(w(t_{k+1}) - w(t_k))\Big|\mathcal{A}_a\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} M\bigg((f(t_k))^2 \cdot M\Big((w(t_{k+1}) - w(t_k))^2\big|\mathcal{A}_{t_k}\Big)\Big|\mathcal{A}_a\bigg) +$$

$$+2\sum_{j<k} M\Big(f(t_j)f(t_k)\cdot(w(t_{j+1}) - w(t_j))\cdot M\big(w(t_{k+1}) - w(t_k)\big|\mathcal{A}_{t_k}\big)\Big|\mathcal{A}_a\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} M\Big(f^2(t_k)\big|\mathcal{A}_a\Big)(t_{k+1} - t_k) = \int\limits_a^b M\Big(f^2(t)\big|\mathcal{A}_a\Big)dt.$$

3. Якщо $g(t) = g(t,\omega)$ – спроста функція, вказаного вище вигляду, то для довільних $c > 0$, $N > 0$ виконується нерівність

$$\mathbb{P}\Big\{\omega\colon \Big|\int_a^b g(t)dw_t\Big| > c\Big\} \le \frac{N}{c^2} + \mathbb{P}\Big\{\omega\colon \int_a^b |g(t)|^2dt > N\Big\}$$

Припустимо тепер, що (f_n) – послідовність простих функцій, вказаного вище вигляду таких, що

$$\int\limits_a^b |f(t) - f_n(t)|^2dt \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad (n \to +\infty) \text{ м.н..}$$

Тоді,

$$\int\limits_a^b |f_m(t) - f_n(t)|^2 dt \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (m, n \to +\infty) \text{ м.н..}$$

Власне, останнє означає, що $(\forall \varepsilon > 0)$

$$\lim_{m,n\to+\infty} \mathbb{P}\Big\{\omega\colon \int\limits_a^b |f_m(t) - f_n(t)|^2 dt > \varepsilon\Big\} = 0.$$

За властивістю **3.**, $\forall \delta > 0,\ \varepsilon > 0$ тепер послідовно отримуємо

$$\overline{\lim_{m,n\to+\infty}} \mathbb{P}\Big\{\omega\colon \Big|\int_a^b f_n(t)dw_t - \int_a^b f_m(t)dw_t\Big| > \delta\Big\} \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{\delta^2} + \overline{\lim_{m,n\to+\infty}} \mathbb{P}\Big\{\omega\colon \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt > \varepsilon\Big\} = \frac{\varepsilon}{\delta^2}.$$

Звідси отримуємо, що

$$(\forall\delta)\colon \quad \lim_{m,n\to+\infty} \mathbb{P}\Big\{\omega\colon \Big|\int_a^b f_n(t)dw_t - \int_a^b f_m(t)dw_t\Big| > \delta\Big\} = 0,$$

тобто,

$$\mathbb{P}\Big\{\omega\colon \Big|\int_a^b f_n(t)dw_t - \int_a^b f_m(t)dw_t\Big| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ (m, n \to +\infty).$$

Останнє означає, що послідовність інтегралів

$$\Big(\int_a^b f_n(t)dw_t\Big)$$

є $\mathbb{P}$-фундаментальною. Отже існує випадкова величина $\mathcal{I}$ така, що

$$\int_a^b f_n(t)dw_t \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathcal{I} \quad (n \to +\infty).$$

Тоді, за означенням приймемо, що стохастичним інтегралом Іто від функції f називається дана випадкова величина, тобто,

$$\int_a^b f(t)dw_t := \mathcal{I}$$

Вправа. Переконатися, що $\int_a^b f(t)dw_t$ не залежить від вибору послідовності простих функцій (f_n).
Вказівка. Міркуючи від супртивного, розглянути дві послідовності простих функцій і утворити з неї одну послідовність – вона також виявиться збіжною до заданої функції. Далі, зрозуміло.

Означення інтегралу Іто – загальний випадок.

Нехай тепер $f \in \mathfrak{M}[a,b]$ – довільна функція. Нескладно тепер стандартно переконатися, що існує така послiовність простих функцій $f_n \in \mathfrak{M}[a,b]$, що

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0 \quad \text{м.н.}$$

Звідси отримаємо, що інтеграл Іто означений для кожної функції $f \in \mathfrak{M}[a,b]$.

3*. Якщо $g(t) \in \mathfrak{M}[a,b]$, то для довільних $c > 0,\ N > 0$ виконується нерівність

$$\mathbb{P}\Big\{\omega\colon \Big|\int_a^b g(t)dw_t\Big| > c\Big\} \le \frac{N}{c^2} + \mathbb{P}\Big\{\omega\colon \int_a^b |g(t)|^2 dt > N\Big\}$$

Доведення здійснюється граничним переходом в **3.**

Вправа. Якщо $f_n, f \in \mathfrak{M}[a,b]$ і

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (n \to +\infty),$$

то
$$\int_a^b f_n(t)dw_t \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_a^b f(t)dw_t.$$

$\mathbf{1}^* + \mathbf{2}^*$. Якщо $f \in \mathfrak{M}[a,b]$ і
$$\int_a^b M\Big(|f(t)|^2\big|\mathcal{A}_a\Big)dt < +\infty \quad \text{м.н.},$$
то
$$M\Big(\int_a^b f(t)dw_t\big|\mathcal{A}_a\Big) = 0 \quad \text{м.н.},$$
$$M\bigg(\Big(\int_a^b f(t)dw_t\Big)^2\big|\mathcal{A}_a\bigg) = \int_a^b M\big(|f(t)|^2\big|\mathcal{A}_a\big) \quad \text{м.н.}$$

Доведення здійснюється граничним переходом в **1., 2.**

Означення (стохастичного диференціала).
Якщо для стохастичного процесу $(\zeta_t)_{t\in I}$, вимірного відносно $(\mathcal{A}_t)_{t\in I}$ існують такі $b(t) \in \mathfrak{M}[a,b]$ і $a(t)$ – вимірна відносно A_t для кожного $t \in I$ така, що для неї м.н. існує і є скінченним інтеграл $|a(t)|dt$ такі, що
$$\zeta_{t_1} - \zeta_{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t)dw_t,$$
то кажуть, що ζ_t має стохастичний диференціал і записують
$$d\zeta_t = a(t)dt + b(t)dw_t.$$

Твердження (формула Іто).
Нехай випадковий процес $(\zeta_t)_{t\in I}$ має стохастичний диференціал $d\zeta_t = a(t)dt+b(t)dw_t$, а функція $u(t,x)\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$– неперервна і має неперервні часткові похідні $u'_t,\ u'_x, u''_{xx}$. Тоді, процес $(\eta_t)_{t\in I} = (u(t,\zeta_t))_{t\in I}$ також має стохастичний диференціал і виконується рівність (**формула Іто**)
$$d\eta_t = \Big(u'_t(t,\zeta_t) + u'_x(t,\zeta_t)a(t) + \frac{1}{2}u''_{xx}(t,\zeta_t)(b(t))^2\Big)dt + u'_x(t,\zeta_t)b(t)dw_t.$$

Зазначимо, що тепер можна вже розглядати стохастичні диференціальні рівняння

$$d\zeta_t = a_0(t, \zeta_t)dt + \sigma(t, \zeta_t)dw_t,$$

тобто, $a(t) = a_0(t, \zeta_t)$, $b(t) = \sigma(t, \zeta_t)$, при цьому природно вже припустити, що його розв'язки ζ_t є дифузійними процесами з коефіцієнтом дифузії $\sigma^2(t, x)$ та коефіцієнтом перенесення (зміщення) $a(t, x)$.

5.3. Основні класи випадкових процесів.

Означення (процесу з незалежними значеннями). Випадковий процес $(\xi_t)_{t\in I}$ називається *процесом з незалежними значеннями*, якщо $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall (t_1, \ldots, t_n) \in I^n)$ послідовність випадкових величин (ξ_{t_k}) є послідовністю незалежних в сукупності випадкових величин.

Означення (процесу з незалежними приростами). Випадковий процес $(\xi_t)_{t\geq 0}$ називається *процесом з незалежними приростами*, якщо $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall (t_1, \ldots, t_n) \in I^n, 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots t_n)$ послідовність випадкових величин $\xi_{t_1}, \xi_{t_2}-\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}-\xi_{t_{n-1}})$ є послідовністю незалежних в сукупності випадкових величин.

Означення (стаціонарного процесу у вузькому сенсі). Випадковий процес $(\xi_t)_{t\in I}$ називається *стаціонарним процесом у вузькому сенсі*, якщо
$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall (t_1, \ldots, t_n) \in I^n)(\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)(\forall s, x_j + s \in I\ (1 \leq j \leq n))$:

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1 + s, \ldots, t_n + s) = F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n).$$

Означення (стаціонарного процесу у широкому сенсі). Випадковий процес $(\xi_t)_{t\in I}$ з неперервним часом називається *стаціонарним процесом у широкому сенсі*, якщо $(\forall t_1, t_2 \in I)\colon R_\xi(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2)$, тобто, якщо *кореляційна функція процесу залежить лише від різниці аргументів.*

Зауважимо, що функція $R(u)$ — парна.

Твердження 1.31. *Якщо випадковий процес $(\xi_t)_{t\in I}$ з неперервним часом стаціонарний у вузькому сенсі, то він стаціонарний і у широкому сенсі.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що якщо $(\xi_t)_{t\in I}$ — стаціонарний процес у вузькому сенсі, то $a_\xi(t) \equiv a$. Справді, за означенням $(\forall s, t \geq 0)\colon F_\xi(x; t) \equiv F_\xi(x; t + s)$, тому

$$a(t) = M\xi_t = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x; t + s) = M\xi_{t+s} = a(t + s).$$

Далі, за означенням $F_\xi(x_1, x_2; t, s) \equiv F_\xi(x_1, x_2; t-s, 0)$ $(\forall s, t)$, тому

$$R_\xi(t,s) = M\big((\xi_t - a(t))(\xi_s - a(s))\big) = M\big(\xi_t \xi_s\big) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 dF_\xi(x_1, x_2; t, s) = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 dF_\xi(x_1, x_2; t-s, 0) \stackrel{def}{=} R(t-s).$$

□

5.2.1. Гаусові процеси.

Означення (гаусового випадкового процесу). Випадковий процес (дійсний) $(\xi_t)_{t\in I}$ називаєтьсято*гаусовим процесом*, якщо скінченновимірні характеристичні функції процесу для $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n,\ t = (t_1, \ldots, t_n) \in I^n$ мають вигляд

$$\varphi_\xi(z;t) = M(e^{i\sum_{k=1}^n z_k \xi_{t_k}}) =$$

$$= \exp\{i \sum_{k=1}^n z_k m_\xi(t_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n R_\xi(t_k, t_j) z_k z_j\},$$

$$\text{де } m_\xi(t) = M(\xi_t),\ R_\xi(t,\tau) = cov(\xi_t, \xi_\tau).$$

Вправа. Нехай $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $\mathbf{m}_\xi(t) = (m_\xi(t_1), \ldots, m_\xi(t_n))$, а $\mathbf{R}_\xi(t) = \big(R_\xi(t_k, t_j)\big)_{k,j=1}^n$ – квадратна коваріаційна матриця матриця. Довести, що

$$\varphi_\xi(z;t) = \exp\{i(z, m_\xi(t)) - \frac{1}{2} z \mathbf{R}_\xi(t) z^T\}.$$

Твердження. Гаусів випадковий вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ з математичним сподіванням $\mathbf{m}_\eta(t) = (m_\eta(t_1), \ldots, m_\eta(t_n))$ і коваріаційною матрицею $\mathbf{R}_\eta = \big(R_\eta(t_k, t_j)\big)$ має щільність розподілу $f_\eta(x_1, \ldots, x_n)$ тоді і тільки тоді, коли коваріаційна матриця невироджена, тобто $\det \mathbf{R}_\eta > 0$, при цьому

$$f_\eta((x_1, \ldots, x_n)) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} (\det \mathbf{R}_\eta)^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}(x - \mathbf{m}_\eta) \mathbf{R}_\eta^{-1} (x - \mathbf{m}_\eta)^T\}$$

Вправа 15. Нехай (h_k) – дійсні функції на I, (U_k) – дійсні випадкові величини, спільний розподіл яких є гаусовим. Довести, що випадковий процес, визначений за формулою $\xi_t = \sum_{k=0}^{n} U_k h_k(t)$, $t \geq 0$, є гаусовим і знайти математичне сподівання, коваріаційну функцію і характеристичну функцію цього процесу.

З означення гаусового процесу випливає, що сім'я його скінченно-вимірних розподілів повністю визначається його математичних сподіванням $m_\xi(t)$ і коваріаційною функцією $R_\xi(t,\tau)$.

Наведемо приклад гаусового процесу, який не має щільностей розподілу k-го порядку при $k \geq 2$.

Вправа 16. Знайти щільність одновимірного розподілу гаусового випадкового процесу $\{\xi_t = X + t \colon t \geq 0\}$. де $X \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$. Переконатися, що даний процес не має щільностей розподілу k-го порядку при $k \geq 2$.

Розв'язок. При фіксованому $t > 0$ випадкова величина $\xi_t \in \mathcal{N}(t, \sigma^2)$, бо $m_\xi(t) = MX + t = t$, $D\xi_t = DX = \sigma^2$. Тому, одновимірна функція розподілу має щільність

$$f_\xi(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}}.$$

Розглянемо коваріаційну матрицю при $k = 2$: $R_\xi = \big(\mathrm{cov}\ (\xi_{t_j}, \xi_{t_k})\big)$. Оскільки, $\mathrm{cov}\ (\xi_{t_j}, \xi_{t_k}) = M\big((X + t_j - t_j)(X + t_k - t_k)\big) = MX^2 = \sigma^2$, то

$$R_\xi = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \det R_\xi = 0,$$

тобто, матриця є виродженою, а, отже двохвимірної щільності у даного гаусового процесу нема. Звідки випливає, що щільностей більшої вимірності також нема.

Вправа 17. Переконатися, що існує гаусів випадковий процес $\{\xi_t \colon t \geq 0\}$ такий, що $m_\xi(t) \equiv 0$, $R_\xi(t,\tau) = \min\{t, \tau\}$. При цьому всі його скінченно-вимірні розподіли мають щільність.

Розв'язок. Потрібно перевірити для кожного $n \geq 2$ додатну визначеність коваріаційної матриці

$$R_\xi = \Big(\text{cov }(\xi_{t_j}, \xi_{t_k})\Big)_{j=1,k=1}^{n} = (R_\xi(t_j, t_k))_{j=1,k=1}^{n} = \big(\min\{t_j, t_k\}\big),$$

де $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Справді, нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тоді квадратична форма

$$xR_\xi x^T = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k \min\{t_j, t_k\}.$$

Розглянемо допоміжну функцію $f(u) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \chi_{[0,t_k]}(u) \not\equiv 0$, бо (t_k) – всі різні, а (x_k) – не всі одночасно дорівнюють нулю. Тому, $\int_0^t |f(u)|^2 du > 0$ при $t \geq t_n$. Далі,

$$\int_0^t |f(u)|^2 du = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k \int_0^t \chi_{[0,t_j]}(u)\chi_{[0,t_k]}(u) du =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k \min\{t_j, t_k\} = xR_\xi x^T.$$

Останнє і означає додатну визначеність коваріаційної матриці для кожного $n \geq 2$. Звідки маємо, що спільний розподіл перерізів $\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n}$ має щільність. Отже, n-вимірна щільність, $n \geq 2$, випадкового процесу має n-вимірну щільність.

Розглянутий приклад дозволяє сформулювати таке означення стандартного вінерового процесу (процесу броунівського руху).

Означення. Гаусів випадковий процес $\{\xi_t\colon t \geq 0\}$ (з неперервним часом) і моентними характеристиками $m_\xi(t) \equiv 0$, $R_\xi(t, \tau) = \text{cov }(t, \tau) = \min\{t, \tau\}$, $t \geq 0$, $\tau \geq 0$ і такий, що $\xi_0 = 0$ (м.н.), називається *стандартним процесом Вінера* (*процесом броунівського руху*).

Вправа 17. Переконатися, що прирости процесу броунівського руху на проміжках, які не перетинаються, є незалежними, а також, що $\xi_t - \xi_\tau \in \mathcal{N}(0, |t - \tau|)$.

Дамо тепер означення процесу Вінера дещо інакше.

5.3. Процес Вінера

Означимо тепер процес Вінера, як процесу з неперервними приростами. Нагадаємо означення процесу з незалежними приростами. Зазначимо, що означення процесу Пуассона також можна вводити, як процес з незалежними приростами. Для різноманітності ми далі при означенні процесу Пуассона поступимо дещо інакше.

Означення(процесу з незалежними приростами). Процес $(\xi_t)_{t\geq 0}$ називається *процесом з незалежними приростами,* якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і будь-яких $(t_j)_{j=1}^n$, $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, випадкові величини $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ утворюють послідовність незалежних випадкових величин.

Процесом Вінера називається процес $(\xi_t)_{t\geq 0}$ з незалежними приростами, для якого виконується:
1. $\xi_0(\omega) \equiv x_0$ м.н.;
2. $(\forall t_1, t_2, t_1 < t_2)(\forall s \geq 0)\colon$ $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$, $\xi_{t_2+s} - \xi_{t_1+s}$ — однаково розподілені випадкові величини;
3. $(\exists a \in \mathbb{R})(\exists b > 0)\colon$ $M\xi_h = ah + o(h)$, $M\xi_h^2 = bh + o(h)$ $M|\xi_h|^3 = o(h)$ $(h \to 0)$.

Твердження 1.32. *Якщо* $(\xi_t)_{t\geq 0}$ *процес Вінера, то*

$$(\forall t \geq 0)(\forall x \geq 0)\colon\ \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_t(\omega) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi bt}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-at)^2}{2bt}} du.$$

Доведення. Для фіксованого $t \geq 0$ розглянемо характеристичну функцію $\varphi_t(x) = Me^{ix\xi_t}$. Оскільки $\xi_{t+h} - \xi_t$ і ξ_t — незалежні для фіксованих t, h, то

$$\varphi_{t+h}(x) = Me^{ix(\xi_{t+h} - \xi_t + \xi_t)} = \varphi_t(x) Me^{ix(\xi_{t+h} - \xi_t)}$$

За умовою $\xi_{t+h} - \xi_t$ і ξ_h — однаково розподілені, тому

$$Me^{ix(\xi_{t+h} - \xi_t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} dF_{\xi_{t+h} - \xi_t}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} dF_{\xi_h}(u) = M(e^{ix\xi_h}) = \varphi_h(x).$$

Застосовуючи теорему 1.26 про формулу Тейлора до $\varphi_h(x)$, отримуємо

$$\varphi_{t+h}(x) - \varphi_t(x) = \varphi_t(x)(\varphi_h(x) - 1) =$$
$$= \varphi_t(x)(ixM\xi_h - \frac{x^2}{2}M\xi_h^2) + \frac{x^3}{3!}(-iM\xi_h^3 + \varepsilon_{\xi_h}(x)),$$

де $|\varepsilon_{\xi_h}(x)| = |\varepsilon_3(x)| \le 3M|\xi_h|^3$. Оскільки $|M\xi_h^3| \le M|\xi_h|^3$, то за умовою негайно отримуємо

$$\varphi_{t+h}(x) - \varphi_t(x) = \varphi_t(x)\big(ixh - \frac{x^2}{2}bh + o(h)\big),$$

$(h \to 0)$, звідки при фіксованому x для функції $g(t) = \varphi_t(x)$ маємо диференційне рівняння

$$g'(t) = g(t)(ix - \frac{bx^2}{2}).$$

Розв'язуючи дане рівняння і пригадуючи, що $\varphi_t(0) = 1$, остаточно виводимо, що $\varphi_t(x) = e^{iatx - \frac{btx^2}{2}}$ — характеристична функція нормального розподілу, тобто, $\xi_t \in \mathcal{N}(at, bt)$. $\square$

Інше означення процесу Вінера або ж *стандартного процесу броунівського руху* див. на с.122 у книзі [2].

Процеси з незалежними приростами

$(\xi_t)_{t\in I}, I = [a;b]$. (ξ_t) — процес з незалежними приростами $\wr \equiv \wr$ $\forall (t_j), a \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n \le b$ — випадкові величини $\xi(t_0), \xi(t_1) - \xi(t_0), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ — незалежні.

Процеси Вінера

(ξ_t) — процес Вінера $\wr \equiv \wr$

1) ξ_t — однорідний;

2) ξ_t — з незалежними приростами;

3) $\xi_t(1)$ — нормально розподілена випадкова величина, тобто

$$\varphi_t(\lambda) = M(e^{i\lambda\xi_t}) = e^{i\lambda t\alpha - \frac{\sigma^2\lambda^2 t}{2}},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \ge 0.$$

Останнє означає, що $\xi(t+u) - \xi(u) \in \mathcal{N}(\alpha t, \sigma^2 t)$.

α — коефіцієнт знесення, σ^2 — коефіцієнт дифузії.
$\xi_t^0 = \frac{\xi_t - \alpha t}{\sigma}$ — стандартний вінерів процес, $M\xi_t^0 = 0, D\xi_t^0 = t$.

$$\psi_t^0(\lambda) = M(e^{i\lambda\xi_t^0}) = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}.$$

Теорема. Існує неперервна модифікація процесу Вінера. (Процес Вінера-регулярний)

Доведення. Теорема Колмогорова. Нехай $(\xi_t)_{t\in[0,1]}$ — випадковий процес. $(\exists a > 0)$ $(\exists b > 0,\ c < +\infty)\forall t, t+h \in [0;1]\colon M|\xi_{t+h} - \xi_t|^a \le c|h|^{1+b} \Longrightarrow$ існує неперервна модифікація ξ_t, тобто

$$\xi_{t+h} - \xi_t \in \mathcal{N}(0,h) \Longrightarrow \frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{\sqrt{h}} \in \mathcal{N}(0,1) \Longrightarrow M(\xi_{t+h} - \xi_t)^4 = h^2 M\xi_1^4 = 3h^2,\ a = 4, b = 1.$$

Тобто можна вважати, що $\xi_t(\omega_0) \in \mathbf{C}[0;1]$. Нехай $w_t, t \in I$ — стандартний вінерів процес з неперервними траєкторіями.

Твердження. $(\forall t_0 \ge 0)\colon W_t$ не диференційовний в точці $t = t_0$ з ймовірністю рівною 1. Траєкторії процесу Вінера $W(t)$ з ймовірністю рівною 1 не диференційовні в жодній точці t.

Доведення. W_t — однорівний процес. Тому досить переконатися в його недиференційовності в точці $t = 0$. Припустимо, що $(\exists A \in \mathcal{A}, P(A) > 0)(\forall\omega \in A)$:

$$\exists W'(0,\omega) = \lim_{t\to+0} \frac{W(t,\omega)}{t} \Longrightarrow$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{W(2^{-k+1}) - W(2^{-k})}{2^{-k}} = 2\lim_{k\to+\infty} \frac{W(2^{-k+1})}{2^{-k+1}} - \lim_{k\to+\infty} \frac{W(2^{-k})}{2^{-k}} = 2W'(0) - W'(0) = W'(0).$$

Розподіли $\zeta = W(2^{-k+1}) - W(2^{-k})$ і $W(2^{-k})$ однакові. Справді, $W(t) \in \mathcal{N}(0,t) \Longrightarrow \zeta \in \mathcal{N}(0, 2^{-k+1} - 2^{-k}) = \mathcal{N}(0, 2^{-k})$.

Тому

$$P\{\omega\colon W(2^{-k+1}) - W(2^{-k}) > \sqrt{2^{-k}}\} = P\{\omega\colon W(2^{-k}) > \sqrt{2^{-k}}\} = 1 - \Phi_k(\sqrt{2^{-k}}) = 1 - \Phi(1) > 0.$$

$$\Phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2^{-k}}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \Big[x = u\sigma; dx = \sigma du\Big] = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi 2^{-k}}}\int_{-\infty}^{t/\sigma} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t/\sigma} e^{-u^2}du.$$

$A_k^{(1)} = \{\omega \colon W(2^{-k+1}) - W(2^{-k}) > \sqrt{2^{-k}}\}$ — незалежні і

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^{(1)}) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \Phi(1)) = +\infty.$$

Отже, за теоремою Бореля-Кантеллі серед подій A_k відбувається нескінченна кількість подій з ймовірністю рівною 1. Тобто

$$(\exists B, P(B) = 1)(\forall \omega \in B)(\exists n_j \uparrow +\infty)(\forall j \geq 1) \colon \omega \in B_{n_j}.$$

Звідси

$$\frac{W(2^{-k+1}) - W(2^{-k})}{2^{-k}} > \frac{\sqrt{2^{-k}}}{2^{-k}} = \sqrt{2^k},\ k = n_j.$$

Тобто,

$$B \subset B_1 := \left\{\omega \colon \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{W(2^{-k+1}) - W(2^{-k})}{2^{-k}} = +\infty\right\} \Longrightarrow P(B_1) = 1.$$

Подібно

$$P\{\omega \colon W(2^{-k+1}) - W(2^{-k}) < -\sqrt{2^{-k}}\} = P\{\omega \colon W(2^{-k}) < -\sqrt{2^{-k}}\} = \Phi_k(-\sqrt{2^{-k}}) = \Phi(-1) > 0.$$

$A_k^{(2)} = \{\omega \colon W(2^{-k+1}) - W(2^{-k}) < -\sqrt{2^{-k}}\}$ — незалежні і

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^{(2)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(-1) = +\infty.$$

Тоді за теоремою Бореля-Кантеллі

$$B \subset B_2 := \left\{\omega \colon \varliminf_{k \to +\infty} \frac{W(2^{-k+1}) - W(2^{-k})}{2^{-k}} = -\infty\right\} \Longrightarrow P(B_2) = 1 \Longrightarrow P(B_1 \cap B_2) = 1.$$

Отже, для кожного t з ймовірністю рівною 1 $W(t, \omega)$ — не диференційовний.

Насправді маємо сильніше твердження.

Твердження. З ймовірністю рівною 1 не існує точки $t = t_0$, в якій існує $W'(t_0)$. Тобто

$$(\exists B, P(B) = 1)(\forall \omega_0 \in B)(\forall t_0) \colon \ \nexists W'(t_0, \omega_0).$$

Твердження. Нехай $W(t), t \geq 0$ — стандартний вінерів процес. $(\forall c > 0) \colon W^{\star}(t) = \frac{1}{\sqrt{c}} W(ct)$ — стандартний вінерів.

5.2. Процес Пуассона

Нехай $T = \{\tau_k(\omega)\colon k \in \mathbb{N}\}$, а $\xi(B,\omega)$ — кількість точок з множини T, які належать до $B \subset \mathbb{R}$. Послідовність випадкових величин T називається *пуассоновим потоком точок на дійсній прямій* $\mathbb{R}$, якщо існує така вимірна невід'ємна функція $\lambda(t)\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$, що:
1. $\mathbb{P}\{\omega\colon \xi([t,t+h),\omega) = 1\} = \lambda(t)h + o(h) \quad (h \downarrow 0)$ рівномірно за t,
2. $\mathbb{P}\{\omega\colon \xi([t,t+h),\omega) = 0\} = 1 - \lambda(t)h + o(h) \quad (h \downarrow 0)$ рівномірно за t,
3. $[t,t+h_1) \cap [y,y+h_2) = \varnothing \Longrightarrow \xi([t,t+h_1),\omega), \xi([y,y+h_2),\omega)$ — незалежні випадкові величини.

Якщо $\lambda(t) \equiv \lambda > 0$, то пуассонів потік називається *однорідним.*

Процесом Пуассона з *інтенсивністю* λ називається випадковий процес
$$\xi_t(\omega) = \xi([0,t),\omega),$$
де $\xi(B,\omega)$ — однорідний пуассонів потік.

Зауважимо, що фазовий простір процесу Пуассона $X = \mathbb{Z}_+$.

Твердження 1.33. *Якщо $(\xi_t)_{t\geq 0}$ — процес Пуассона, то*
$$(\forall k \geq 0)\colon \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_t(\omega) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

Доведення. Для фіксованого $t \geq 0$ розглянемо твірну функцію $\psi_t(x) = Mx^{\xi_t}$. Оскільки $\xi_{t+h} - \xi_t$ і ξ_t — незалежні для фіксованих t, h, то
$$\psi_{t+h}(x) = Mx^{\xi_{t+h}-\xi_t+\xi_t} = \psi_t(x)Mx^{\xi_{t+h}-\xi_t}$$

За умовою
$$\mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t+h} - \xi_t \geq 2\} = 1 - \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t+h} - \xi_t = 0\} - \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t+h} - \xi_t = 1\} = o(h)$$
при $h \to +0$ рівномірно за t, тому для всіх $x \in [0,1]$
$$0 \leq Mx^{\xi_{t+h}-\xi_t} - \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t+h} - \xi_t = 0\} - x\mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t+h} - \xi_t = 1\} \stackrel{def}{=} \varepsilon(t,h,x) =$$
$$= \sum\nolimits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t+h} - \xi_t = 1\}x^k \leq \mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t+h} - \xi_t \geq 2\} = o(h)$$
при $h \to +0$ рівномірно за t, звідки, за умовою
$$\psi_{t+h}(x) - \psi_t(x) = \psi_t(x)\big(\mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t+h} - \xi_t = 0\} +$$
$$+ x\mathbb{P}\{\omega\colon \xi_{t+h} - \xi_t = 1\} + \varepsilon(t,h,x) - 1\big) =$$

$$= \psi_t(x)[-\lambda h + o(h) + x(\lambda h + o(h)) + o(h)]$$

при $h \to +0$ рівномірно за t, x. Звідси отримуємо, що

$$\lim_{h\to 0} \frac{\psi_{t+h}(x) - \psi_t(x)}{h} = \psi_t(x)(x-1)\lambda.$$

Власне, при фіксованому x для функції $g(t) = \psi_t(x)$ маємо диференційне рівняння

$$g'(t) = g(t)(x-1)\lambda,$$

інтегруючи яке, отримуємо, що $\psi_t(x) = Ce^{(x-1)t\lambda}$. Оскільки $\psi_t(1) = 1$, то $C = 1$, і, остаточно виводимо

$$\psi_t(x) = e^{(x-1)t\lambda} = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x^k e^{-\lambda t},$$

тобто,

$$\mathbb{P}\{\omega\colon \xi_t(\omega) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

□

5.4. Процеси Маркова з дискретним часом

Розглянемо процес з дискретним часом $(\xi_t)_{t\in I}$, $I = \mathbb{Z}_+$ і дискретною множиною станів $X_N = \{x_k\colon 1 \le k \le N\}$ $(N < +\infty)$, $X_{+\infty} = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Процес $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ називається *процесом Маркова* (з дискретним часом), якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і для довільних наборів $(i_0, i_1, \ldots, i_{n-2}, i, j) \in \{1, 2, \ldots, N\}^{n+1}$:

$$\mathbb{P}\{\xi_n = x_j | \xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_i\} =$$
$$= \mathbb{P}\{\xi_n = x_j | \xi_{n-1} = x_i\} \stackrel{def}{=} p_{i,j}^{(n)},$$

де у останній рівності під знаком умовної ймовірності для простоти запису через $\xi_s = x_k$ позначаємо подію $\{\omega\colon \xi_s(\omega) = x_k\}$, а "кома" означає добуток таких подій. Така властивість називається *властивістю Маркова* і її з якісної точки зору часто описують так, що стан у який перейде процес Маркова у майбутньому (завтра) не залежить від минулого (тобто, від того, у яких станах він перебував у минулому), а лише від того, у якому стані перебуває процес сьогодні.

Ймовірності $p_{i,j}^{(n)}$ — називаються *ймовірностями переходу* з i-того стану в j-тий на n-тому кроці, а матриця

$$P^{(n)} = \left(p_{i,j}^{(n)}\right),\ 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq N$$

називається *матрицею перехідних ймовірностей* на n-ому кроці. Зауважимо, що у випадку процесу з нескінченною множиною станів матриця $P^{(n)}$ необмежена вправо і донизу.

Через $p_j^{(n)} = \mathbb{P}\{\xi_n = x_j\}$ позначаємо *ймовірності розподілу станів* на n-тому кроці, а
$p^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots, p_N^{(n)})$ — вектор-рядок ймовірностей розподілу станів на n-тому кроці;
$p^{(0)} = (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_N^{(0)})$ — вектор *початкового розподілу станів.*

Вправи. 1. За формулою множення ймовірностей і за означенням процесу Маркова довести, що ймовірність того, що процес послідовно перебував у станах з номерами $i_0, i_1, \ldots, i_n$ дорівнює

$$\mathbb{P}\{\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_n = x_{i_n}\} = p_{i_0}^{(0)} \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1},i_k}^{(k)}.$$

2. За формулою повної ймовірності довести, що

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall i,\ 1 \leq i \leq N):\ \sum\nolimits_{j=1}^{N} p_{i,j}^{(n)} = 1 \quad \wedge \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+):\ \sum\nolimits_{j=1}^{N} p_j^{(n)} = 1,$$

тобто, матриця $P^{(n)}$ — *стохастична*, а $p^{(n)}$ — розподіл ймовірностей.

5.5. Однорідний процес (ланцюг) Маркова з дискретним часом

Надалі будемо розглядати лише однорідні процеси Маркова, тобто, ланцюги Маркова.

Означення (ланцюга Маркова). *Ланцюгом Маркова* називається такий процес Маркова, що

$$(\forall n \geq 1):\ P^{(n)} \equiv P = (p_{i,j}).$$

Твердження 1.34. *Нехай $p_{i,j}^{(n)}(m) \stackrel{def}{=} \mathbb{P}\{\xi_{n+m} = x_j | \xi_n = x_i\}$ ймовірність того, що процес змінить свій стан з x_i, в якому він перебував у момент часу $t = n$, на x_j за m кроків. Тоді для ланцюга Маркова:*

1. $(\forall n \geq 1)(\forall m \geq 1)\colon p_{i,j}^{(n)}(m) = p_{i,j}(m)$, *тобто, залежить лише від* m, *при цьому*

$$P(m) \stackrel{def}{=} (p_{i,j}(m)) = P^m;$$

2. *матриця ймовірностей зміни станів за* m *кроків* $\mathbb{P}(m)$ *не залежить від початкового розподілу.*

Доведення. За формулою повної ймовірності

$$p_{i,j}^{(n)}(m) = \sum_{s=1}^{N} p_{i,s}^{(n)}(1) p_{s,j}^{(n+1)}(m-1),$$

тобто, у матричному вигляді

$$P^{(n)}(m) = P^{(n)}(1) P^{(n+1)}(m-1).$$

Але, за означенням ланцюга Маркова $P^{(n)}(1) = P$. Тому

$$P^{(n)}(m) = P P^{(n+1)}(m-1) = P^2 P^{(n+2)}(m-2) = \cdots$$
$$\cdots = P^{m-1} P^{(n+m-1)}(1) = P^m.$$

Остання рівність, зокрема, означає, що матриця $P(m)$ не залежить від початкового розподілу. □

Безпосереднім наслідком з щойно доведеного твердження є таке твердження.

Твердження 1.35. *Для ланцюга Маркова виконується:*
1. $p^{(n+m)} = p^{(n)} P(m) = p^{(n)} P^m \ (n, m \geq 0)$;
2. $P(n+m) = P(n) P(m) \ (m, n \geq 1)$.

Доведення. 1. За формулою повної ймовірності маємо

$$p_j^{(n+m)} = \mathbb{P}\{\xi_{n+m} = x_j\} = \sum\nolimits_{s=1}^{N} \mathbb{P}\{\xi_n = x_s\} \mathbb{P}\{\xi_{n+m} = x_j | \xi_n = x_s\} =$$
$$= \sum\nolimits_{s=1}^{N} p_s^{(n)} p_{s,j}(m).$$

Або у матричній формі $p^{(n+m)} = p^{(n)} P(m)$, звідки за попереднім твердженням отримуємо, що $p^{(n+m)} = p^{(n)} P^m$.
2. За попереднім твердженням $P(n+m) = P^{n+m} = P^n P^m = P(n) P(m)$. □

Твердження 1.36. *Для ланцюга Маркова матриця ймовірностей переходу за n кроків $P(n) = (p_{ij}(n))$ є стохастичною, тобто* $(\forall i)$ $(\forall n)$: $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(n) = 1$.

Доведення. Маємо

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}\{\xi_n = x_j | \xi_0 = x_i\} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbb{P}\{\xi_n = x_j \wedge \xi_0 = x_i\}}{\mathbb{P}\{\xi_0 = x_i\}} =$$
$$= \frac{1}{\mathbb{P}\{\xi_0 = x_i\}} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(\{\xi_n = x_j\} \cap \{\xi_0 = x_i\}) = \frac{1}{\mathbb{P}\{\xi_0 = x_i\}} \mathbb{P}\{\xi_0 = x_i\} = 1,$$

бо $H_j = \{\xi_n = x_j\}$ утворюють повну групу подій, тобто $\cup_{j=1}^{N} H_j = \Omega$; $H_j \cap H_k = \varnothing$ $(j \neq k)$. □

Вправа. Довести, що матриця ймовірностей переходу за m кроків для процесу Маркова також — стохастична.

Приклади.

1. Нехай $A_n \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A_n) = p > 0$, $q = 1 - p$, $m_0 = 0$, $m_n = m_{n-1} + I_n$ $(n \geq 1)$, де $I_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_n, \\ 0, & \omega \notin A_n, \end{cases}$ — послідовність незалежних випадкових величин. Доведемо, що $(m_n)_{n \geq 0}$ — ланцюг Маркова. Справді,

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\{m_n = j | m_{n-1} = i\} = \begin{cases} 0, & j - i \geq 2 \\ p, & j - i = 1 \text{ (відбулась подія)} \\ q, & j = i \text{ (подія не відбулась)} \\ 0, & j - i \leq -1. \end{cases}$$

Отже, ймовірності зміни станів процесу на n-тому кроці від n не залежать. Тоді матриця перехідних ймовірностей від n не залежить і

$$(\forall n): \quad P^{(n)} = P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \ldots & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & q & p & \ldots & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & q & p \quad 0 \quad \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & q \quad p \quad 0 \quad \ldots \\ \ldots\ldots & & & & & \end{pmatrix},$$

$p^{(1)} = (q, p, 0, \ldots)$, $p^{(2)} = (q^2, 2pq, p^2, 0, \ldots)$, $p^{(3)} = (q^3, 3pq^2, 3p^2q, p^3, 0, \ldots)$.

2. Нехай $\xi_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ — послідовність незалежних випадкових величин, а функція f — борелева на $\mathbb{R}^2$. Приймемо $\xi_n \stackrel{def}{=} f(\xi_{n-1}, \eta_n)$ $(n \geq 1)$. Тоді $\{\xi_n : n \geq 0\}$ — процес Маркова. Справді,

$$\mathbb{P}\{\xi_n = x_j | \xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_i\} =$$
$$= \frac{\mathbb{P}\{\xi_n = x_j, \xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_i\}}{\mathbb{P}\{\xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_i\}} =$$
$$= \mathbb{P}\{f(x_i, \eta_n) = x_j, \xi_0 = x_{i_0}, f(x_{i_0}, \eta_1) = x_{i_1}, \ldots, f(x_{i_{n-2}}, \eta_{n-1}) = x_i\}/$$
$$/\mathbb{P}\{\xi_0 = x_{i_0}, f(x_{i_0}, \eta_1) = x_{i_1}, \ldots, f(x_{i_{n-2}}, \eta_{n-1}) = x_i\},$$

звідки, за незалежністю випадкових величин

$$f(x_i, \eta_n), \xi_0, f(x_{i_0}, \eta_1), \ldots, f(x_{i_{n-3}}, \eta_{n-2}), f(x_{i_{n-2}}, \eta_{n-1})$$

отримуємо, що

$$\mathbb{P}\{\xi_n = x_j | \xi_0 = x_{i_0}, \xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_i\} =$$
$$= \mathbb{P}\{f(x_i, \eta_n) = x_j\} = \mathbb{P}\{\xi_n = x_j | \xi_{n-1} = x_i\}.$$

Вправа. Якщо η_n — однаково розподілені, то $\{\xi_n : n \geq 1\}$ — ланцюг Маркова. Довести.

3. Нехай (ν_n) — послідовність незалежних випадкових величин таких, що $\mathbb{P}\{\nu_n = 1\} = \mathbb{P}\{\nu_n = 0\} = \frac{1}{2}$. Приймемо $\xi_n \stackrel{def}{=} \xi_{n-1} \oplus \nu_n (\mathrm{mod}\, 2)$, $\xi_0 \stackrel{def}{=} \nu_0$.
Переконаємося, що $(\nu_n)_{n \geq 0}$ — ланцюг Маркова. Для множини станів $X = \{0, 1\}$ введемо позначення $x_1 = 0, x_2 = 1$. Тоді, враховуючи незалежність ν_n і ξ_{n-1}, отримуємо

$$p_{1,1}^{(n)} = \mathbb{P}\{\xi_n = 0 | \xi_{n-1} = 0\} = \mathbb{P}\{\xi_{n-1} \oplus \nu_n = 0 | \xi_{n-1} = 0\} =$$
$$= \mathbb{P}\{\nu_n = 0 | \xi_{n-1} = 0\} = \mathbb{P}\{\nu_n = 0\} = \frac{1}{2};$$
$$p_{2,1}^{(n)} = \mathbb{P}\{\xi_n = 0 | \xi_{n-1} = 1\} = \mathbb{P}\{\xi_{n-1} \oplus \nu_n = 0 | \xi_{n-1} = 1\} =$$
$$= \mathbb{P}\{\nu_n = 1 | \xi_{n-1} = 1\} = \mathbb{P}\{\nu_n = 1\} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки, матриця $P^{(n)}$ — *стохастична,* то $p_{1,2}^{(n)} = 1 - p_{1,1}^{(n)} = \frac{1}{2}$, $p_{2,2}^{(n)} = 1 - p_{2,1}^{(n)} = \frac{1}{2}$. Отже, $P^{(n)} = P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $p^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$$p^{(n)} = p^{(0)}\mathbb{P}^n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = p^{(0)}, \text{ де } p_j^{(n)} = \mathbb{P}\{\xi_n = j\}.$$

Вправа. 1. (**випадкове блукання з поглинанням**). Нехай $m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$. Розглянемо випадкове блукання частинки по множині цілих точок між точками 0 та m на дійсній прямій. Якщо $0 < k < m$, то з точки k з ймовірностями, що дорівнюють $1/2$ частинка переходить у точку $k-1$ або у точку $k+1$, відповідно. Якщо ж $k = 0$ або $k = m$, то частинка залишається у точці k з ймовірностю, що дорівнює 1. Нехай ξ_n — координата частинки на n-тому кроці. Довести, що $(\xi_n)_{n\geq 0}$ — ланцюг Маркова.
2. (**випадкове блукання з відбиванням**). Якщо в рамках попереднього прикладу, частинка з точки $k = 0$ переходить у точку $k = 1$, а з точки $k = m$ у точку $k = m - 1$ — з ймовірностями, що дорівнюють одиниці, то $(\xi_n)_{n\geq 0}$ — ланцюг Маркова. Довести.

5.6. Ланцюги Маркова : фінальні ймовірності, ергодичність, стаціонарний розподіл

Означення 1 (фінального розподілу ймовірностей). Якщо $(\forall j,\ 1 \leq j \leq N)$ існує границя

$$\lim_{n\to+\infty} p_j^{(n)} = \pi_j^{(1)},$$

де $\sum_{j=1}^N \pi_j^{(1)} = 1$, то $\pi^{(1)} = (\pi_j^{(1)})$ називається *фінальним (граничним) розподілом* ймовірностей процесу Маркова.

Означення 2 (фінального розподілу ймовірностей). Якщо $(\forall i,\ 1 \leq i \leq N)\ (\forall j,\ 1 \leq j \leq N)$

$$\exists \lim_{n\to+\infty} p_{i,j}(n) \overset{def}{=} \pi_j^{(2)}$$

і $\sum_{j=1}^N \pi_j^{(2)} = 1$, то $\pi^{(2)} = (\pi_j^{(2)})$ називається *фінальним розподілом ймовірностей в сенсі другого означення.*

Означення (ергодичного ланцюга Маркова). Ланцюг Маркова називається *ергодичним,* якщо фінальні ймовірності не залежать від початкового розподілу $p^{(0)}$.

Зауваження. За п.2 твердження 1.34 (позаяк $P(n) = P^n$), якщо ланцюг Маркова має фінальні ймовірності у сенсі другого означення, то він — ергодичний в сенсі цього означення фінальних ймовірностей.

Приклади. 1. Нехай $(\xi_n)_{n\geq 0}$ — ланцюг Маркова з множиною станів $X = \{0, 1\}$ і матрицею перехідних ймовірностей $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тому

$$p^{(n)} = p^{(0)} P(n) = p^{(0)} P^n = p^{(0)},$$

звідки випливає, що фінальні ймовірності в сенсі першого означення існують. Але, даний ланцюг Маркова *не ергодичний,* позаяк фінальний розподіл збігається з початковим розподілом.

2. Нехай $(\xi_n)_{n\geq 0}$ — ланцюг Маркова з множиною станів $X = \{0, 1\}$ і матрицею перехідних ймовірностей $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді для початкового розподілу ймовірностей $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)})$ маємо

$$p^{(1)} = p^{(0)}\mathbb{P} = (p_2^{(0)}, p_1^{(0)}),\ p^{(2)} = p^{(1)}\mathbb{P} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}) = p^{(0)}.$$

В загальному $p^{(2n+1)} = (p_2^{(0)}, p_1^{(0)})$, $p^{(2n)} = p^{(0)}$. Звідси маємо, що фінальний розподіл існує лише у випадку $p^{(0)} = (1/2, 1/2)$.

Твердження 1.37. *Для ланцюга Маркова означення ергодичності з фінальними ймовірностями в сенсі кожного з двох означень є рівносильними, при цьому* $\pi^{(1)} = \pi^{(2)} \overset{def}{=} \pi$.

Доведення. Оскільки фінальний розподіл ймовірностей в сенсі другого означення (див. вище Зауваження), не залежить від початкового розподілу, то у випадку, коли існує фінальний розподіл $\pi^{(1)}$, тобто в сенсі першого означення, і ланцюг ергодичний в сенсі цього означення, то досить довести, що для деякого початкового розподілу ймовірностей $p^{(0)}$, існує $\pi^{(2)}$ і виконується рівність $\pi^{(2)} = \pi^{(1)}$. Для цього виберемо початковий розподіл з 1 на k-тому місці $p^{(0)} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0 \ldots)$. Тоді

$$p_j^{(n)} = \sum\nolimits_{i=1}^{N} p_i^{(0)} p_{i,j}(n) = p_{k,j}(n).$$

Звідси негайно отримуємо потрібне твердження.

Припустимо тепер, що існує фінальний розподіл ймовірностей $\pi^{(2)}$ в сенсі другого означення і, отже, за зауваженням, ланцюг — ергодичний в сенсі цього означення. Доведемо, що для довільного початкового розподілу ймовірностей існує фінальний розподіл ланцюга $\pi^{(1)}$ в сенсі першого означення і при цьому $\pi^{(1)} = \pi^{(2)}$. А це означатиме, що ланцюг Маркова ергодичний в сенсі першого означення. Нехай спочатку N — скінченне. Тоді переходячи до границі у рівності $p_j^{(n)} = \sum_{i=1}^N p_i^{(0)} p_{ij}(n)$, при фіксованому j отримаємо

$$\pi_j^{(1)} = \lim_{n\to+\infty} p_j^{(n)} = \sum\nolimits_{i=1}^N p_i^{(0)} \lim_{n\to+\infty} p_i(n) = \pi_j^{(2)} \sum\nolimits_{i=1}^N p_i^{(0)} = \pi_j^{(2)}.$$

Звідси, $\pi^{(1)} = \pi^{(2)}$, тобто, те, що й потрібно.

Нехай тепер $N = +\infty$. $p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i^{(0)} p_{ij}(n)$. Введемо функцію розподілу

$$F(x) = \sum_{x_i<x} p_i^{(0)}, \quad \mathbb{P}\{\xi_0 = x_i\} = p_i^{(0)}.$$

Припустимо для визначеності, що $x_i < x_{i+1}$ $(i \geq 1)$ і для кожного фіксованого $j \geq 1$ виберемо функцію $g_j(n,x) = p_{ij}(n)$, $x \in [x_i, x_{i+1})$ $(i \geq 1)$. Тоді

$$p_j^{(n)} = \sum\nolimits_{i=1}^{+\infty} p_i^{(0)} p_{ij}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_j(n,x) dF(x).$$

Зауважимо, що для кожного $j \geq 1$ і для всіх $x \in (x_{i-1}, x_i]$ $(i \geq 1)$

$$\lim_{n\to+\infty} g_j(n,x) = \lim_{n\to+\infty} p_{i,j}(n) = \pi_j,$$

позаяк $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{ij}(n)$ за умовою існує і від i не залежить. При цьому

$$\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \pi_j dF(x) = \pi_j \quad \text{і} \quad 0 \leq g_j(n,x) \leq 1.$$

Тому, використовуючи теорему про мажоровану збіжність, граничним переходом під знаком інтеграла отримуємо, що $\pi_j^{(1)} = \pi_j^{(2)}$ $(j \geq 1)$, тобто, $\pi^{(1)} = \pi^{(2)}$. □

Вправа. В доведенні останнього твердження позбутися обмеження $x_j < x_{j+1}$ $(j \geq 1)$.

Означення (стаціонарного розподілу ланцюга Маркова). Нехай задано ланцюг Маркова $(\xi_n)_{n\geq 0}$ з матрицею перехідних ймовірностей $\mathbb{P} = (p_{ij})$ і множиною станів $X = \{x_j\colon 1 \leq j \leq N\}$, $N \leq +\infty$. *Розподіл ймовірностей* p називають *стаціонарним,* якщо $p = p \cdot \mathbb{P}$.

Твердження 1.38. *Якщо* $(\exists n_0)$: $p^{(n_0)}$ *— стаціонарний, то він фінальний, тобто* $\pi = p^{(n_0)}$.

Доведення. За умовою $p^{(n_0+1)} = p^{(n_0)}$. Звідси, за індукцією встановлюється, що $(\forall m \geq n_0) : p^{(m)} = p^{(n_0)}$. Отже, $\exists \lim\limits_{m\to+\infty} p^{(m)} = p^{(n_0)} \overset{def}{=} \pi$. □

Твердження 1.39. *Якщо* π *— фінальний розподіл, то* π *— стаціонарний розподіл, тобто* $\pi = \pi P$.

Доведення. Оскільки $p_j^{(n+1)} = \sum\limits_{i=0}^{N} p_i^{(n)} p_{ij}$, то у випадку, коли $N < +\infty$, перейдемо до границі у лівій та правій частинах рівності й отримаємо

$$\pi_j = \lim_{m\to\infty} p_j^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{N} p_{ij} \lim_{n\to+\infty} p_i^{(n)} = \sum_{i=0}^{N} p_{ij}\pi_i.$$

□

Вправа. Довести самостійно останнє твердження у випадку $N = +\infty$.

Наслідок 1.11. *Якщо ланцюг Маркова ергодичний, то система*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1, \\ \pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij} \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $\pi = (\pi_j)$ *і цей розв'язок якраз і є фінальним розподілом ланцюга Маркова.*

Доведення. Припустимо, що система має два розв'язки π^* і π. Оскільки ланцюг — ергодичний, то фінальний розподіл не залежить від початкового розподілу, стаціонарний (тобто, є розв'язком вказаної системи рівнянь). Нехай π — фінальний розподіл. Інший розв'язок

π^* цієї системи є стаціонарним розподілом для даного ланцюга Маркова, а, отже, вибираючи початковий розподіл $p^{(0)} = \pi^*$, переконуємось, що розподіл π^* — фінальний. Але з ергодичності ланцюга випливає, що $\pi = \pi^*$. Суперечність. $\square$

Теорема 1.36 (достатні умови ергодичності). *Нехай $(\xi_n)_{n\geq 0}$ — ланцюг Маркова такий, що $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall i, j, \geq 1)\colon\ p_{ij}(n_0) > 0$, тобто, всі елементи матриці $P(n_0) = P^{n_0} = (p_{ij}(n_0))$ є додатними. Тоді $\exists \pi = (\pi_j)$ — стаціонарний розподіл такий, що $(\forall j)\colon\ \pi_j > 0$, при цьому для $c_{ij} = c_{ij}(n) \overset{def}{=} p_{i,j}(n) - \pi_j$ виконується*

$$(\exists c_j > 0)(\exists h \in (0,1))(\forall i, j \geq 1)\colon\ |c_{ij}| \leq c_j h^n,$$

звідки, зокрема випливає, що $(\forall i)\colon\ p_{i,j}(n) \to \pi_j\ (n \to +\infty)$.

Доведення. Проведемо доведення за припущення скінченності множини станів $N < +\infty$. Введемо позначення

$$V_j(n) = \sup\{p_{i,j}(n) : 1 \leq i \leq N\}, \quad v_j(n) = \inf\{p_{i,j}(n) : 1 \leq i \leq N\}.$$

1. Доведемо, що існують границі $\lim_{n\to\infty} V_j(n) = Q_j, \quad q_j = \lim_{n\to\infty} v_j(n)$ і $Q_j \leq q_j$. Перевіримо спочатку для фіксованого $j \geq 1$ монотонність послідовностей $(V_j(n)),\ (v_j(n))$. Маємо

$$V_j(n+1) = \sup_i p_{i,j}(n+1) = \sup_i \sum\nolimits_{k=1}^{N} p_{ik} p_{k,j}(n) \leq$$
$$\leq V_j(n) \sup_i \sum\nolimits_{k=1}^{N} p_{i,k} = V_j(n).$$

При цьому ми скористались тим, що $P(n+1) = P \cdot P(n)$ і $p_{k,j}(n) \leq V_j(n)\ (k, j, n \geq 1)$. Подібно, оскільки $p_{k,j}(n) \geq v_j(n)\ (k, j, n \geq 1)$, то

$$v_j(n+1) = \inf_i p_{i,j}(n+1) = \inf_i \sum\nolimits_{k=1}^{N} p_{i,k} p_{k,j}(n) \geq$$
$$\geq v_j(n) \inf_i \sum\nolimits_{k=1}^{n} p_{i,k} = v_j(n).$$

Отже, послідовність $(V_j(n))_n$ — незростаюча, а $(v_j(n))_n$ — неспадна послідовність, при цьому, очевидно, що $v_j(n) \leq V_j(n)\ (j, n \geq 1)$. Звідси випливає потрібне.

2. Доведемо, що насправді $Q_j = q_j \overset{def}{=} \pi_j$. Для цього досить довести, що $u_j(n) \overset{def}{=} V_j(nn_0) - v_j(nn_0) \to 0\ (n \to +\infty)$. Розглянемо

$$0 \le u_j(n+1) = \sup_i p_{i,j}((n+1)n_0) - \inf_s p_{s,j}((n+1)n_0) =$$
$$= \sup_i \sup_s (p_{i,j}((n+1)n_0) - p_{s,j}((n+1)n_0)).$$

Позначимо $\delta_k(i,s) = p_{i,k}(n_0) - p_{s,k}(n_0)$. Оскільки

$$p_{ij}((n+1)n_0) = \sum\nolimits_{k=1}^{N} p_{i,k}(n_0)p_{k,j}(nn_0),$$
$$p_{s,j}((n+1)n_0) = \sum\nolimits_{k=1}^{N} p_{s,k}(n_0)p_{k,j}(nn_0),$$

то

$$0 \le u_j(n+1) = \sup_i \sup_s \sum\nolimits_{k=1}^{N} p_{k,j}(nn_0)\delta_k(i,s).$$

Зауважимо, що

$$\sum\nolimits_{k=1}^{N} \delta_k(i,s) = \sum\nolimits_{k=1}^{N} p_{i,k}(n_0) - \sum\nolimits_{k=1}^{N} p_{s,k}(n_0) = 1 - 1 = 0.$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{N} \delta_k(i,s) = 0 \Longrightarrow \sum_{\delta_k(i,s)<0} \delta_k(i,s) = -\sum_{\delta_k(i,s)>0} \delta_k(i,s)$, то

$$u_j(n+1) = \sup_i \sup_s \Big(\sum_{\delta_k(i,s)>0} p_{k,j}(nn_0)\delta_k(i,s) + \sum_{\delta_k(i,s)<0} p_{k,j}(nn_0)\delta_k(i,s) \Big) \le$$
$$\le \sup_i \sup_s \Big(V_j(nn_0) \sum_{\delta_k(i,s)>0} \delta_k(i,s) + v_j(nn_0) \sum_{\delta_k(i,s)<0} \delta_k(i,s) \Big) =$$
$$= (V_j(nn_0) - v_j(nn_0)) \sup_i \sup_s \sum_{\delta_k(i,s)>0} \delta_k(i,s),$$

Звідси, ввівши позначення $q = \sup_{i,s} \sum_{\delta_k(i,s)>0} \delta_k(i,s)$, отримаємо $u_j(n+1) \le q u_j(n)$. З останньої нерівності за індукцією вже нескладно отримати, що

$$(\forall n \ge 1): \;\; u_j(n+1) \le q^n u_j(1)$$

Звідси, якщо $q < 1$, то $q^n \to 0$ $(n \to +\infty) \Rightarrow u_j(n) \to 0$ $(n \to +\infty)$ $\Rightarrow Q_j = q_j \stackrel{def}{=} \pi_j$.

3. Зауважимо, що за щойно доведеним з монотонності $v_j(n)$ та з того, що ланцюг Маркова має скінченну кількість станів випливає, що

$$(\forall j \geq 1)\colon\ \pi_j \geq v_j(n_0) \geq \inf\{p_{i,k}(n_0)\colon 1 \leq i,k \leq N\} > 0.$$

4. Доведемо тепер, що $0 < q < 1$. Оскільки кількість станів скінченна, то існують i_0, s_0 такі, що $q = \sum_{k\colon\, \delta_k(i_0,s_0)>0} \delta_k(i_0,s_0)$. Зауважимо, що за умовою $\delta_k(i,s) = p_{i,k}(n_0) - p_{s,k}(n_0) < p_{i,k}(n_0)$ і, тому

$$q < \sum\nolimits_{k\colon\, \delta_k(i_0,s_0)>0} p_{i,k}(n_0) \leq \sum\nolimits_{k=1}^{N} p_{i,k}(n_0) = 1,$$

звідки $q < 1$.

5. Оскільки $n = \frac{n}{n_0} n_0 \geq n_0\big[\frac{n}{n_0}\big]$, то з нерівностей $v_j(n) \leq \pi_j \leq V_j(n)$ і монотонності V_j, v_j спочатку отримуємо

$$c_{ij}(n) = p_{i,j}(n) - \pi_j \leq V_j(n) - v_j\big(n_0\big[\frac{n}{n_0}\big]\big) \leq$$

$$\leq V_j\big(n_0\big[\frac{n}{n_0}\big]\big) - v_j\big(n_0\big[\frac{n}{n_0}\big]\big) \leq u_j(1) q^{\left[\frac{n}{n_0}\right]-1},$$

а потім

$$c_{ij}(n) = p_{i,j}(n) - \pi_j \geq v_j(n) - V_j\big(n_0\big[\frac{n}{n_0}\big]\big) \geq$$

$$\geq v_j\big(n_0\big[\frac{n}{n_0}\big]\big) - V_j\big(n_0\big[\frac{n}{n_0}\big]\big) \geq -u_j(1) q^{\left[\frac{n}{n_0}\right]-1},$$

Отже,

$$(\forall i,j,n \geq 1)\colon\ |c_{ij}(n)| \leq q^{\left[\frac{n}{n_0}\right]-1} u_j(1) \leq q^{-2} u_j(1) \big(q^{1/n_0}\big)^n.$$

Залишається вибрати $c_j = q^{-2} u_j(1)$, $h = q^{1/n_0}$. □

Правильне таке обернене твердження.

Твердження 1.40. *Нехай для ланцюга Маркова зі скінченною множиною станів існує фінальний розподіл* $\pi = (\pi_j)$, $\pi_j > 0$ $(j \geq 1)$, *тобто,* $(\forall i \geq 1)\colon\ p_{i,j}(n) \to \pi_j$ $(n \to +\infty)$. *Тоді існує* $n_0 \in \mathbb{N}$ *таке, що всі елементи матриці* $P(n_0)$ *додатні, тобто,* $(\forall i,j \geq 1)\colon p_{i,j}(n_0) > 0$.

Доведення. З того, що $(\forall i \geq 1)\colon\ p_{i,j}(n) \to \pi_j$ $(n \to +\infty)$ випливає, що для будь-яких фіксованих i,j існує $n_1 = n_1(i,j)$ таке, що для всіх $n \geq n_1$ виконується $\pi_j - p_{i,j}(n) \leq |\pi_j - p_{i,j}(n)| < \varepsilon$, вибираючи $\varepsilon = \pi_j/2$ і $n_0 = \max\{n_1(i,j)\colon i,j \geq 1\}$, звідси, для $n = n_0$ остаточно отримуємо

$$p_{i,j}(n_0) > \pi_j - \varepsilon = \pi_j/2 > 0.$$

□

Наступна теорема характеризує ергодичний ланцюг Маркова.

Теорема 1.37 (елементарна ергодична)**.** *Нехай* $(\xi_n)_{n\geq 0}$ *— ергодичний ланцюг Маркова зі скінченною множиною станів, а* π *— його фінальний розподіл. Через* $k_j(n)$ *позначимо кількість тих* k, $1 \leq k \leq n$, *для яких* $\xi_k = x_j$, $k_j(n) = k_j(n,\omega)$. *Тоді*

$$(\forall j \geq 0)\colon\ \frac{k_j(n)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \pi_j \quad (n \to +\infty).$$

Отже, за цією теоремою за перших n кроків ергодичний ланцюг Маркова в середньому $[n\pi_j]$ разів перебуває в j-тому стані.

Доведення. Зауважимо спочатку, що за твердженням 1.40 $\pi_j > 0$ $(j \geq 1)$, а за теоремою 1.36

$$(\exists c_j > 0)(\exists h \in (0,1))(\forall i, j \geq 1)\colon\ |p_{i,j}(n) - \pi_j| \leq c_j h^n.$$

Для довільних i, j та $\varepsilon > 0$ розглянемо умовну ймовірність

$$\mathbb{P}^*_{i,j}(n) \stackrel{def}{=} \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{k_j(n)}{n} - \pi_j\Big| > \varepsilon \big| \xi_0 = i\Big).$$

За нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}^*_{i,j}(n) \leq \varepsilon^{-2} M\Big(\big(\frac{k_j(n)}{n} - \pi_j\big)^2 \big| \xi_0 = x_i\Big).$$

Позначимо $I_{k,j}(\omega) = \begin{cases} 1, & \xi_k(\omega) = x_j, \\ 0, & \xi_k(\omega) \neq x_j \end{cases}$. Тоді $k_j(n) = \sum_{s=0}^n I_{s,j}$ і, отже,

$$\big(\frac{k_j(n)}{n} - \pi_j\big)^2 = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{s=0}^n (I_{s,j} - \pi_j)\Big)^2.$$

Звідки

$$n^2 M\Big(\big(\frac{k_j(n)}{n} - \pi_j\big)^2 \big| \xi_0 = x_i\Big) = M\Big(\big(\sum_{s=0}^n (I_{s,j} - \pi_j)\big)^2 \big| \xi_0 = i\Big) =$$

$$= \sum_{s=0}^n M\Big((I_{s,j} - \pi_j)^2 \big| \xi_0 = x_i\Big) + 2 \sum_{0 \leq s < l \leq n} M\Big((I_{s,j} - \pi_j)(I_{l,j} - \pi_j) \big| \xi_0 = x_i\Big).$$

Але,

$$M(I_{s,j}I_{l,j}\big|\xi_0=x_i)=\mathbb{P}(\xi_l=x_j,\xi_s=x_j\big|\xi_0=x_i)=$$
$$=\mathbb{P}(\xi_l=x_j\big|\xi_s=x_j)\mathbb{P}(\xi_s=x_j\big|\xi_0=x_i)=p_{i,j}(s)p_{j,j}(l-s),$$

тому, розписуючи детально, отримуємо

$$n^2M\Big(\big(\frac{k_j(n)}{n}-\pi_j\big)^2\big|\xi_0=x_i\Big)=\sum_{s=0}^{n}\Big(\pi_j^2-2\pi_jp_{i,j}(s)+p_{i,j}(s)\Big)+$$
$$+2\sum_{0\le s<l\le n}\Big(\pi_j^2-\pi_j(p_{i,j}(l)+p_{i,j}(s))+p_{i,j}(s)p_{j,j}(l-s)\Big)\le$$
$$\le 2(n+1)+2\sum_{0\le s<l\le n}\Big(\pi_j(\pi_j-p_{i,j}(l))+p_{i,j}(s)(p_{j,j}(l-s)-\pi_j)\Big)\le$$
$$\le 2(n+1)+2c_j\sum_{0\le s<l\le n}(h^l+h^{l-s})\le 2(n+1)+2c_j\Big(\frac{h}{(1-h)^2}+\frac{h}{(1-h)}n\Big)$$

звідки, для кожного $\varepsilon>0$

$$\mathbb{P}^*_{i,j}(n)\le\varepsilon^{-2}\Big(\frac{2(n+1)}{n^2}+2\frac{c_j}{n^2}\Big(\frac{h}{(1-h)^2}+\frac{h}{(1-h)}n\Big)\Big)\to 0\ (n\to+\infty)$$

Залишилось зауважити, що звідси випливає

$$\mathbb{P}\Big(\big|\frac{k_j(n)}{n}-\pi_j\big|>\varepsilon\Big)=\sum_{i=0}^{N}\mathbb{P}^*_{i,j}(n)\to 0\ (n\to+\infty).$$

□

5.7. Ланцюги Маркова з неперервним часом

Розглянемо випадковий процес $\{\xi_t: t\ge 0\}$ з неперервним часом і скінченною або зліченною множиною станів $X=\{X_j: 0\le j\le N\}, N\le+\infty$.

Такий випадковий процес називають *процесом Маркова з неперервним часом,* якщо $(\forall(t_j),\ 0\le t_0<t_1<\ldots<t_n<\ldots)$ процес $\{\xi_{t_k}: k\ge 0\}$ є процесом Маркова з дискретним часом, тобто

$$\mathbb{P}\{\xi_{t_n}=x_j|\xi_{t_0}=x_{i_0},\xi_{t_1}=x_{i_1},\ldots,\xi_{t_{n-2}}=x_{i_{n-2}},\xi_{t_{n-1}}=x_i\}=$$
$$=\mathbb{P}\{\xi_{t_n}=x_j|\xi_{t_{n-1}}=x_i\}.$$

Процес Маркова з неперервним часом називають *ланцюгом Маркова з неперервним часом* (*однорідним процесом Маркова*), якщо остання ймовірність $\mathbb{P}\{\xi_{t_n}=x_j|\xi_{t_{n-1}}=x_i\}=p_{i,j}(t_n-t_{n-1})$, тобто,

$$(\forall t < T):\ \mathbb{P}\{\xi_T = x_j | \xi_t = x_i\} = p_{i,j}(T-t).$$

Відзначимо також, що $\mathbb{P}\{\xi_t = x_j | \xi_0 = x_i\} = p_{i,j}(t)$.

Введемо в розгляд матрицю

$$P(t) = (p_{i,j}(t)),\ p_{i,j}(t) = \mathbb{P}\{\xi_t = x_j | \xi_0 = x_i\}.$$

За формулою повною ймовірності маємо

$$p_{i,j}(t+T) = \sum_{k=1}^{N} p_{i,k}(t) p_{k,j}(T)$$

або в матричному вигляді

$$(\forall T, t \geq 0):\ P(t+T) = P(t)P(T).$$

Подібно для розподіл ймовірності в момент часу $t : p(t) = (p_j(t))$, $p_j(t) \stackrel{def}{=} \mathbb{P}\{\xi_t = x_j\}$, за формулою повної ймовірності знову маємо

$$p_j(t) = \sum\nolimits_{i=1}^{N} p_i(0) p_{i,j}(t), \quad p_i(t+T) = \sum\nolimits_{i=1}^{N} p_i(t) p_{i,j}(T)$$

Або в матричній формі

$$\begin{cases} p(t+T) = p(t)P(T) \quad (T, t \geq 0) \\ P(t+T) = P(t)P(T) \quad (T, t \geq 0) \end{cases}$$

— рівняння Колмогорова-Чепмена.

Нехай $P(0)$ — матриця ймовірностей зміни стану ланцюга за час $t = 0$. Якщо у момент часу $t = 0$ система свого стану не змінить, то матриця $P(0)$ повинна бути одиничною:

$$P(0) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots\dots & \\ 0 & 0 & 1 & \dots\dots & \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \end{pmatrix}.$$

Проведемо наступні формальні міркування.

1. Приймемо $T = h$ в рівності $P(t+T) = P(t)P(T)$, і скориставшись нею, отримаємо

$$\frac{1}{h}(P(t+h) - P(t)) = P(t)\frac{P(h) - I}{h},$$

де I — одинична матриця. Введемо позначення

$$P'(t) \stackrel{def}{=} (p'_{i,j}(t)) = P(t)A, \quad A = (a_{i,j}) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h}(P(h) - I),$$

Тоді, отримаємо *пряме диференційне рівняння Колмогорова-Чепмена*
$$P'(t) = P(t)A.$$
2. Якщо прийняти $t = h$, то з рівності
$$\frac{1}{h}(P(T+h) - P(T)) = \frac{(P(h) - I)}{h}P(T)$$
при $h \to +0$ отримуємо *зворотне диференційне рівняння Колмогорова-Чепмена*
$$P'(T) = AP(T).$$

Зауважимо, що диференційні рівняння Колмогорова-Чепмена ми отримали за таких припущень:
$p_{i,j}(t)$ — диференційовні функції від $t \geq 0$ у точці $t = 0$ справа
$$a_{i,j} = \lim_{h\to+0} \frac{p_{i,j}(h) - p_{i,j}(0)}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{p_{i,j}(h)}{h} = p'_{i,j}(0) \geq 0 \ (i \neq j).$$
Коефіцієнт $a_{i,j}, i \neq j$, називається *інтенсивність переходу* системи зі стану x_i в стан x_j.

Крім цього
$$p'_{i,i}(0) = a_{i,i} = \lim_{h\to 0} \frac{p_{i,i}(h) - p_{i,i}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{p_{i,i}(h) - 1}{h} \stackrel{def}{=} -a_i \leq 0.$$
a_i — *інтенсивність виходу* системи з i-того стану.

Твердження 1.41. *Якщо* $N < +\infty$, *то* $a_i = \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} a_{i,j}$.

Доведення. Матриця $P(h)$ — стохастична. Це означає, що $\sum_{j=1}^N p_{i,j}(h) = 1$. Звідси,
$$\frac{1 - p_{i,i}(h)}{h} = \sum\nolimits_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{p_{i,j}(h)}{h}.$$
Якщо взяти $\lim\limits_{h\to+0}$ від лівої і правої частин останньої рівності, то отримаємо потрібну рівність. □

У випадку коли $N = +\infty$ вважатимемо, що виконується умова $a_i = \sum_{j=1, j\neq i}^N a_{ij}$. При $N < +\infty$ — доведене щойно твердження показує, що це наслідок з властивості Маркова.

Твердження 1.42. *Якщо виконується умова* $a_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} a_{ij}$, *то* $P(t)$ *є розв'язком диференційного рівняння (зворотного) Колмогорова-Чепмена*

$P'(t) = AP(t)$, *де* $A = (a_{i,j})$ *— матриця інтенсивностей переходу.*

Доведення. У випадку, коли N — скінченне, твердження доведене вище. Припустимо тепер, що $N = +\infty$. В матричній рівності $P(t + T) = P(t)P(T)$ приймаючи $T = h$, отримаємо

$$B_{i,j}(h) \overset{def}{=} \frac{p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t)}{h} - \frac{p_{i,i}(h) - 1}{h} p_{i,j}(t) = \sum_{k=1, k\neq i}^{+\infty} \frac{p_{i,k}(h)}{h} p_{k,j}(t).$$

Оскільки за умовою $\lim\limits_{h\to+0} B_{i,j}(h) = p'_{i,j}(t) - a_{i,i}p_{i,j}(t) \overset{def}{=} b_{i,j}(t)$, то

$$\exists \lim_{h\to+0} \sum_{k=1, k\neq i}^{+\infty} \frac{p_{i,k}(h)}{h} p_{k,j}(t) = b_{i,j}(t).$$

З одного боку при фіксованих i, j, t для додатних h маємо

$$B(h) = \sum_{k=1, k\neq i}^{+\infty} \frac{p_{i,k}(h)}{h} p_{k,j}(t) \geq \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \frac{p_{i,k}(h)}{h} p_{k,j}(t), \quad (n > i).$$

З іншого боку

$$B(h) = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \frac{p_{i,k}(h)}{h} p_{k,j}(t) + B_n(h).$$

Використовуючи стохастичність матриці $P(h)$ маємо

$$B_n(h) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{p_{i,k}(h)}{h} p_{k,j}(t) \leq \frac{1}{h} \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_{i,k}(h) = \frac{1}{h}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}(h)\right) \leq$$

$$\leq \frac{1 - p_{i,i}(h)}{h} - \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \frac{p_{i,k}(h)}{h}.$$

Якщо тепер при фіксованому n перейти до границі при $h \to +0$, то отримаємо нерівності

$$\sum_{k=1, k\neq i}^{n} a_{i,k} p_{k,j}(t) \leq b_{i,j} \leq -a_{i,i} - \sum_{k=1, k\neq i}^{n} a_{k,i} + \sum_{k=1, k\neq i}^{n} a_{i,k} p_{k,j}(t).$$

Перехід в останніх нерівностях до границі при $n \to +\infty$, з огляду на умову $-a_{ii} - \sum_{k=1,k\neq i}^{+\infty} a_{ki} = 0$, дає

$$b_{i,j} = p'_{i,j}(t) - a_{i,i}p_{i,j}(t) = \sum_{k=1,k\neq i}^{+\infty} a_{i,k}p_{k,j}(t),$$

або у матричному вигляді $P'(t) = AP(t)$. $\square$

Твердження 1.43. *Якщо існують рівномірні за i границі* $\lim\limits_{h\to 0} \frac{p_{i,j}(h)}{h} = a_{i,j}$ $(i \neq j)$, *тобто*

$$\sup\left\{\left|\frac{p_{i,j}(h)}{h} - a_{i,j}\right| : 0 \le i \le N,\ i \neq j\right\} \to 0 \quad (h \to 0)$$

і $(\exists c_j < +\infty)(\forall i \neq j)$: $a_{i,j} \le c_j < +\infty$, *то* $P(t)$ *є розв'язком диференційного (прямого) рівняння Колмогорова-Чепмена* $P'(t) = P(t)A$.

Доведення. Початок міркувань подібний до початку доведення попередньої теореми

$$p_{i,j}(t+h) = \sum\nolimits_{k=1}^{N} p_{i,k}(t)p_{k,j}(h);$$

$$\frac{p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t)}{h} - p_{i,j}(t)\frac{p_{j,j}(h) - 1}{h} = \sum_{k=1,k\neq j}^{N} p_{i,k}(t)\frac{p_{k,j}(t)}{h}.$$

Границя від лівої сторони останньої рівності існує, тому, існує границя від правої. Отже, при $h \to +0$ отримуємо

$$C_{i,j} \overset{def}{=} p'_{i,j}(t) - p_{i,j}(t)a_{j,j} = \lim_{h\to+0} \sum_{k=1,k\neq j}^{N} p_{i,k}(t)\frac{p_{k,j}(h)}{h}.$$

Для $h > 0$ маємо

$$C_n(h) \overset{def}{=} \sum_{k=1,k\neq j}^{n} p_{i,k}(t)\frac{p_{k,j}(h)}{h} \le C(h) \overset{def}{=} C_n(h) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(h)}{h}.$$

Оскільки границя $\lim\limits_{h\to+0} \dfrac{p_{k,j}(h)}{h} = a_{k,j}$ рівномірна за k, то

$$(\forall k)(\forall \varepsilon > 0)(\exists h_0)(\forall h,\ 0 < h < h_0)\colon\ \frac{p_{k,j}(h)}{h} - a_{k,j} \le \sup_{k\neq j}\left|\frac{p_{k,j}(h)}{h} - a_{k,j}\right| < \varepsilon,$$

звідки $\frac{p_{k,j}(h)}{h} \leq a_{k,j} + \varepsilon \leq c_j + \varepsilon$. Тому,

$$\sum\nolimits_{k=n+1}^{+\infty} p_{ik}(t) \frac{p_{kj}(h)}{h} \leq (c_j + \varepsilon) \sum\nolimits_{k=n+1}^{+\infty} p_{i,k}(t).$$

Перехід до границі при $h \to +0$ тепер дає

$$\sum\nolimits_{k=1,k\neq j}^{n} p_{i,k}(t) a_{k,j} \leq \lim_{h\to+0} C(h) = C_{i,j} \leq$$

$$\leq \sum\nolimits_{k=1,k\neq j}^{n} p_{i,k}(t) a_{k,j} + (c_j + \varepsilon) \sum\nolimits_{k=n+1}^{+\infty} p_{i,k}(t).$$

Перехід в останніх нерівностях до границі при $n \to +\infty$ завершує доведення

$$C_{i,j} = p'_{i,j}(t) - p_{i,j}(t) a_{j,j} = \sum\nolimits_{k=1,k\neq j}^{+\infty} p_{i,k}(t) a_{k,j},$$

або в матричній формі $P'(t) = P(t)A$. □

Вправа. Самостійно отримати рівняння Колмогорова - Чепмена

$$p'(t) = p(t)A.$$

Зауваження. Відзначимо, що при знаходженні $P(t)$ за відомою матрицею інтенсивностей переходу A ми маємо справу з задачею Коші

$$\begin{cases} P'(t) = P(t)A, \\ P(0) = I \end{cases}$$

і те ж саме для знаходження $p(t)$

$$\begin{cases} p'(t) = p(t)A, \\ p(0) = p \text{ — початковий розподіл ймовірностей.} \end{cases}$$

Список літератури

1. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1988. – 439 с.
2. Ламперти Дж. Вероятность. – М.: Наука, 1973. – 184 с. — переклад з видання Lamperti J. Probability. A survey of the mathematical theory. – New York – Amsterdam: Darthmouth College, 1966.
3. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980. – 576 с.
4. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. – 432 с.
5. Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей. – К.: Вища школа, 1988. – 328 с.
6. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир, 1990. – 240 с. — переклад з видання Székely G.J. Paradoxes in probability theory and mathematical statistics. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1986.
7. Феллер Введение в теорию вероятностей и ее приложения. 2 т. М.: Мир, 1984. – 528 с.; 738 с. — переклад з видання Feller W. An introduction to probability theory and its applications. V.1. New York - Chichester - Brisbane - Toronto: John Wiley and Sons, 1970; V.2. New York - London - Sidney - Toronto: John Wiley and Sons, Inc., 1971.
8. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
9. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
10. Скасків О.Б., Чижиков І.Е. Практикум з теорії ймовірностей. Львів: Вид. центр ЛНУ імю І.Франка, 2004. – 115 с.