Застосування теорії лишків (2).

Цього разу нам потрібна теорія з §§ 7.5, 7.6, 7.7.
Отож, за певних умов (уважно читаємо їх в § 7.5) використовуючи лишки можна обчислювати інтеграли $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{iax}dx$ (такий часто треба рахувати в теорії ймовірностей при знаходженні характеристичних функцій), $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \cos ax\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \sin ax$,
$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx$.

Для розв'язування прикладів 7.6 нам потрібен Наслідок 1 із Теореми 7.4 та формули після нього.
Якщо $f(z)$ аналітична у замкненій верхній півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ за винятком скінченної кількості І.О.Т, що не лежать на дійсній осі, а $f(z)$ також задовольняє умови леми Жордана ($\alpha(R) = \max\{|f(z)| : z = R\cdot e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi\} \to 0$ при $R \to \infty$), то $\forall a > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)\cdot e^{iaz}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx = \operatorname{Re}\Big(2\pi i\cdot \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)\cdot e^{iaz}\Big)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \sin ax\,dx = \operatorname{Im}\Big(2\pi i\cdot \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{res} f(z)\cdot e^{iaz}\Big).$$

Зауваження. Умова на $\alpha(R)$ із леми Жордана виконується, якщо $|f(z)| = O\left(\frac{1}{|z|^{\delta}}\right)$, $z \to \infty$, де $\delta > 0$.

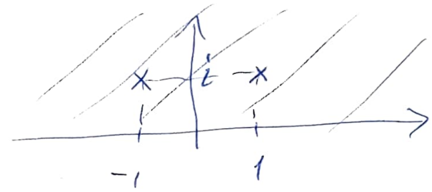
7.6. a) $J=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}\cdot dx}{x^2-2ix-2}$

◁ Знайдемо всі скінченні особлив. точки підінтегральної функції: $x^2-2ix-2=0$

$D=-4+8=4;\qquad x_{1,2}=\frac{2i\pm\sqrt{4}}{2}=\pm1+i.$

$f(z)=\frac{1}{z^2-2iz-2}$ — аналітична в $\{z: \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$ — крім

$z_{1,2}=\pm1+i\notin\mathbb{R}.$



$|f(z)|=O\left(\frac{1}{|z|^2}\right),\quad z\to\infty$

$a=1>0\ \left(e^{ix}=e^{i\cdot 1\cdot x}\right)$. Тому

$J=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-1+i}\frac{e^{iz}}{z^2-2iz-2}+\operatorname*{res}_{z=1+i}\frac{e^{iz}}{z^2-2iz-2}\right)$ "3a)"

$=2\pi i\left(\frac{e^{i\cancel{(-1+i)}}}{2z-2i}\Bigg|_{z=-1+i}+\frac{e^{iz}}{2z-2i}\Bigg|_{z=1+i}\right)=$

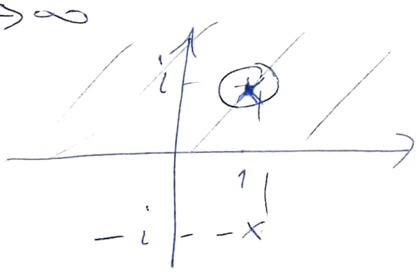
$=2\pi i\left(\frac{e^{-1-i}}{-2}+\frac{e^{-1+i}}{2}\right)=\pi i\left(e^{-1+i}-e^{-1-i}\right)=$

$=e^{-1}\pi i\left(\cos 1+i\sin 1-\cos 1+i\sin 1\right)=-\frac{2\pi\sin 1}{e}$ ▷

7.6 б) $J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}\,dx}{x^2-2x+2}$

△ ОТ: $z_{1,2} = 1 \pm i \notin \mathbb{R}$ (р1)

$|f(z)| = \left|\frac{z-1}{z^2-2z+2}\right| = O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad z\to\infty$



$a = \underline{1}>0$. Тому

$J = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=1+i} \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+2} =$

$\overset{3a'')}{=} 2\pi i \cdot \frac{(z-1)e^{iz}}{2z-2}\Big|_{z=1+i} = \pi i \cdot e^{iz}\Big|_{z=1+i} = \underline{\underline{\pi i\cdot e^{-1+i}}}$ ▷

<u>Зауваження 1</u>. Не забувайте, що сума лишків береться тільки по ОТ з <u>верхньої півплощини</u>.

<u>Зауваження 2</u>. Те, що відповідь не вийшла <u>дійсним</u> числом нас не повинно дивувати, позаяк підінтегральна ф-ція містила множник "e^{ix}".

<u>7.6 д)</u> $J = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2+4}$

△ В цих інтегралах <u>важливо</u> щоб проміжок інтегрування був $(-\infty;+\infty)$ (як і в № 7.5, чи як в № 7.4 має бути $(a;a+2\pi)$). Позаяк підінтегральна ф-ція парна, то проблема легко вирішується $J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^2+4}$.

ОТ: $z_{1,2} = \pm 2i \notin \mathbb{R}$ — P_1

$|f(z)| = \left|\frac{1}{z^2+4}\right| = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$, $z \to \infty$

$a = 1 > 0$ $(\cos x = \cos 1x)$. Тому

$J = \cancel{2\pi i}\ \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=2i}\frac{e^{iz}}{z^2+4}\right) =$

{зверніть увагу: тут вже не $\cos z$, а e^{iz}}

$\overset{3a''}{=} \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i \cdot \left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=2i}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\pi \cdot \frac{e^{-2}}{2}\right) =$

$= \frac{\pi}{4e^2}$. ▷

Заув 1. Тут вже відповідь точно мала бути дійсним числом, бо це інтеграл з мат. аналізу. Якщо не виходить дійсне — шукайте помилку!

Заув 2. В мат. аналізі цей інтеграл (інтеграл Лапласа) обчислювали шляхом введення параметра α в $\cos \alpha x$, диференціюванням за цим параметром невласного інтеграла (треба спершу довести рівномірну збіжність), розв'язуванням задачі Коші для отриманого диф. рівняння. ≈ 30 хв.

7.6 в) $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx$

$\triangleleft$ ОТ: $z_{1,2} = -1 \pm i \notin \mathbb{R}$ — p_1

$|f(z)| = \left|\frac{z+1}{z^2+2z+2}\right| = O\left(\frac{1}{|z|}\right), \; z\to\infty$

$a = 2 > 0$. Тому

$$J = \operatorname{Im}\left(2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=-1+i} \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2}\right) \overset{\text{за }^{\prime\prime})}{=}$$

$$= \operatorname{Im}\left(2\pi i \cdot \left.\frac{(z+1)e^{2iz}}{2(z+1)}\right|_{z=-1+i}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\pi i \cdot e^{2i(-1+i)}\right) = \operatorname{Im}\left(\pi i \cdot e^{-2-2i}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\pi i \cdot e^{-2} \cdot (\cos(-2) + i\sin(-2))\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(e^{-2}\cdot\pi\cdot(+\sin 2 + i\cos 2)\right) = \frac{\pi\cos 2}{e^2} \quad \triangleright$$

(Цей інтеграл теж, очевидно, мав вийти дійсним числом).

Вправа. Спробуйте обчислити цей інтеграл засобами мат. аналізу та відчуйте переваги застосування теорії лишків!

Для розв'язування прикладів із № 7.7 нам потрібна сама теорема 7.4 (лиш користуємося ф-лою (7.6)). Порівняно із попередніми прикладами допускається наявність скінченної кількості полюсів першого порядку на дійсній осі.

Але тому невласний інтеграл розбіжний, і розглядати його можна тільки ~~в сенсі~~ як головне значення в сенсі Коші (див. мат. аналіз).

7.7 а) $J = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cdot e^{2ix}}{(x^2+1)(x^2-9)} dx$

◁ ОТ: $z_{1,2} = \pm i \notin \mathbb{R}$ — P_1

$z_{3,4} = \pm 3 \in \mathbb{R}$ — P_1 — !!!

$|f(z)| = \left|\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2-9)}\right| = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \ z \to \infty$

$a = 2 > 0$. Тому

$J = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=i} \left(f(z) \cdot e^{2iz}\right) + \pi i \cdot \left(\operatorname{res}_{z=-3} \left(f(z) \cdot e^{2iz}\right) + \right.$

$\left. + \operatorname{res}_{z=3} \left(f(z) \cdot e^{2iz}\right)\right) \overset{3a'}{=} 2\pi i \cdot \left.\frac{z^2 \cdot e^{2iz}}{(z+i)(z^2-9)}\right|_{z=i} +$

$$+\pi i\left(\left.\frac{z^2\cdot e^{2iz}}{(z^2+1)(z+3)}\right|_{z=3}+\left.\frac{z^2\cdot e^{2iz}}{(z^2+1)(z-3)}\right|_{z=-3}\right)=$$

$$=2\pi i\cdot\frac{-1\cdot e^{-2}}{2i\cdot(-10)}+\pi i\left(\frac{9\cdot e^{6i}}{10\cdot 6}+\frac{9\cdot e^{-6i}}{10\cdot(-6)}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{10e^2}+\frac{3\pi i}{10}\cdot\frac{e^{6i}-e^{-6i}}{2}=\frac{\pi}{10e^2}-\frac{3\pi}{10}\cdot\frac{e^{6i}-e^{-6i}}{2i}=$$

$$=\frac{\pi}{10e^2}-\frac{3\pi}{10}\cdot\sin 6 \qquad \triangleright$$

Заув. Відповідь тут не обов'язково мала бути дійсна, але так трапилось.

Для прикладів № 7.8 потребуємо формулу із параграфа 7.6.

Нехай $f(z)$ аналітична в $\mathbb{C}$ за винятком скінченної кількості ОТ, що не лежать на додатній дійсній півосі, $f(\infty)=0$ і $0<\alpha<1$. Тоді

$$\boxed{\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}f(x)\,dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\cdot\sum_{k=1}^{q}\operatorname*{res}_{z=z_k}\left(z^{\alpha-1}\cdot f(z)\right)}$$

7.8 в) $J=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)\sqrt[4]{x}}=\int_0^{+\infty}x^{\frac{3}{4}-1}\cdot\frac{1}{x+2}\,dx$

$\triangleleft$ $\alpha=\frac{3}{4}\in(0;1)$, $f(x)=\frac{1}{x+2}$ $\Rightarrow f(\infty)=0$

ОТ: $z=-2 \notin [0;+\infty)$, тому

$$J = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\cdot\frac{3}{4}}}\cdot \operatorname*{res}_{z=-2} \frac{1}{(z+2)\sqrt[4]{z}} = \left[\begin{array}{l} z=-2 - p_1, \\ \text{тому за 1)} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{2\pi i}{1-e^{\frac{3\pi i}{2}}}\cdot \left.\frac{1}{\sqrt[4]{z}}\right|_{z=-2} = \frac{2\pi i}{1+i}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{-2}} =$$

{ Тут вкрай важливо вибрати $\arg_0$, а не, скажімо, $\arg$. Тобто нам потрібен ~~arg~~ $\varphi \in [0; 2\pi)$.
А також з чотирьох значень $\sqrt[4]{-2}$ треба вибрати нульову вітку, тобто в цих прикладах

$$\sqrt[4]{z_0} = \sqrt[4]{|z_0|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right), \quad \varphi\in[0;2\pi)$$

— так вже „заточена" ця формула!!! $\varphi = \arg_0 z_0$.

$$\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{|-2|}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Тому $$J = \frac{2\pi i}{1+i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}\,(1+i)} = \frac{2\pi i\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}\cdot 2i} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} = \pi\sqrt[4]{2}$$

(Тут відповідь, очевидно, теж мала бути дійсним числом).

Далі плануємо робити № 7.11. Для цього потребуємо § 7.7, а саме теорему Руше (уважно читаємо). Вона дає можливість знаходити кількість розв'язків рівняння (в певній області) не знаходячи їх самих.

Тh Руше

1) f, g — аналітичні в $\overline{G}$

2) G — обмежена скінч. к-стю ЗЖК

3) $\forall z \in \partial G \quad |f(z)| < |g(z)|$

$\Rightarrow$ к-сть розв'язків у обл. G р-ня $f(z)+g(z)=0$ (складного) дорівнює к-сті розв'язків у G р-ня $g(z)=0$ (простого).

При застосуванні Тh Руше дуже часто потрібні відомі нерівності

$$|a+b| \le |a|+|b| \qquad (1)$$

$$|a-b| \ge \big||a|-|b|\big| \qquad (2)$$

7.11. 2) $z^3 - 12z + 2 = 0$ в області $G = \{z : |z| < 2\}$

$\triangleleft$ Розв'язати таке рівняння ми не вміємо, та кількість його розв'язків у області G знайдемо (з основної теореми алгебри зрозуміло, що їх 0, 1, 2 або 3)

$z^3 - 12z + 2 = f(z) + g(z)$ — тобто 3 доданки слід розподілити на суму двох. При розподілі варто керуватись тим, щоб бути готовим розв'язувати рівняння $f(z)=0$ та $g(z)=0$.

Наприклад, рівняння $z^3-12z=0$ – менш зручне для розв'язування. ~~[illegible]~~

Спробуємо так:

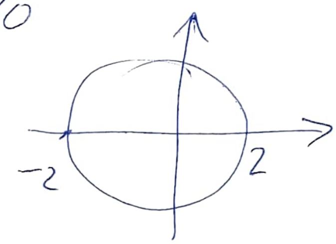
$f(z)=z^3$

$g(z)=-12z+2$

(Якщо не виконається умова 3) теореми – спробуємо перерозподілити інакше: (z^3+2) та $(-12z)$ наприкл.)

На ∂G, тобто при $|z|=2$ маємо

$|f(z)|=|z^3|=|z|^3=8$



$|g(z)|=|-12z+2|$ – сподіватись, що цей модуль сталий при $|z|=2$ (як модуль $f(z)$) – марно, бо $|g(2)|=22$ а, скажімо $|g(-2)|=26$.

Тому потрібна оцінка знизу або зверху для $|g(z)|$. Для цього знадобиться (1) або (2). Щоб знати з якого боку слід оцінювати, варто задуматись чи для всіх ~~значень~~ z з кола $|z|=2$ виконується $|g(z)|<|f(z)|$ чи $|g(z)|>|f(z)|$. Значення $|f(z)|$ – ми знаємо: $|f(z)|=8$ $\forall$ $z\in\{z:|z|=2\}$. Також знаємо значення $|g(2)|=22>8$ і $|g(-2)|=26>8$.

Тобто, якщо якась із двох нерівностей і виконується, то хіба $|g(z)|>|f(z)|$ (але це ще треба довести).

Тому потрібна нерівність (2):

$|g(z)| = |-12z+2| \geq \big||-12z| - |-2|\big| = \big|12|z| - 2\big| =$

$= 22 > 8 = |f(z)| \quad \forall z \in \{z : |z| = 2\}$.

{Зверніть увагу, що в умові 3) — строга нерівність — це важливо.

Стежте, аби в таких міркуваннях всі знаки нерівностей були в один бік (тобто уникайте $\geq \ldots \leq$ чи $\leq \ldots \geq$ — вони не несуть жодної інформації).}

Розв'яжемо р-ня $g(z) = 0$.

$-12z + 2 = 0$

$12z = 2$

$z = 1/6 \in G$!!!

Тому $g(z) = 0$ має 1 розв'язок в G, а отже $f(z) + g(z) = 0$ теж має 1 розв'язок в G ▷

7.11 g) $2z^4 - 5z + 2 = 0$, $\quad G = \{z : |z| < 1\}$

◁ Нехай $f(z) = 2z^4$, а $g(z) = -5z + 2$.

При $|z| = 1$:

$|f(z)| = |2z^4| = 2|z|^4 = 2$

$|g(z)| = |-5z+2| \geq \big||-5z| - |-2|\big| = \big|5|z| - 2\big| = 3 > 1 = |f(z)|$

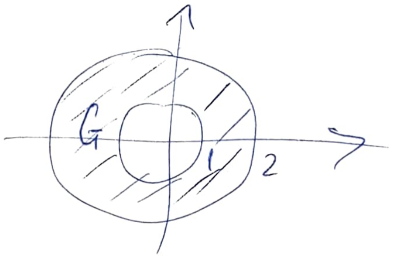
$-5z+2=0$

$z = \frac{2}{5} \in G$ — 1 розв'язок в G, отже

$2z^4-5z+2=0$ теж має 1 розв'язок в G ▷.

<u>Пр</u> (зі стелі). $z^4-2z+5=0$ в $G=\{z: 1<|z|<2\}$.

◁



Межа області G складається із двох кіл: $|z|=1$ та $|z|=2$. Сподіватись, що одна й та ж нерівність (умова з Th Руше) виконуватиметься на обидвох колах — марно. Але якщо ми знайдемо кількість розв'язків у крузі: $G_2=\{z: |z|<2\}$ та у крузі: $G_1=\{z: |z|<1\}$, то, віднявши кількості, отримаємо скільки розв'язків у кільці G. Тобто треба розв'язати 2 окремі задачі: для G_1 та G_2. При їх розв'язуванні навіть $f(z)$ та $g(z)$ можна вибирати по різному (а можна і однаково).

G_1: $f(z)=z^4$, $g(z)=-2z+5$

$\forall |z|=1$: $|f(z)|=|z|^4=1$

$|g(z)| = |-2z+5| \geq \big||5|-|2z|\big| = 3 > 1 = |f(z)|$

$-2z+5=0$

$z=2{,}5\notin G_1$ — 0 розвязків у G_1, тому

$z^4-2z+5=0$ має 0 розвязків у G_1.

G_2: $f(z)=z^4$, $g(z)=-2z+5$

При $|z|=2$ маємо $|f(z)|=|z^4|=|z|^4=16$

$|g(z)|=|-2z+5|\le|2z|+|5|=2|z|+5=9<16=|f(z)|$

Тобто більшою є $|f(z)|$, тому розвяжемо р-ня $f(z)=0$:

$z^4=0$

$z_{1,2,3,4}=0\in G_2$ — 4 розвязків у G_2, а отже

і $z^4-2z+5=0$ має 4 розвязки у G_2.

У області G р-ня має $4-0=4$ розвязки ▷

Зауваження Не забувайте враховувати кратність розвязків. В останньому з прикладів $z=0$ — був розвязком р-ня кратності 4.

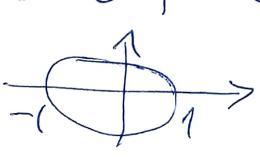
7.11 б) $z^2-\frac{1}{3}e^z=0$, $G=\{z: |z|<1\}$

◁ $f(z)=z^2$, $g(z)=-\frac{1}{3}e^z$,

При $|z|=1$: $|f(z)|=|z^2|=|z|^2=1^2=1$;

$|g(z)|=|-\frac{1}{3}e^z|=\frac{1}{3}|e^z|=\frac{1}{3}e^{\operatorname{Re} z}$

$(|e^z|=|e^{x+iy}|=|e^x\cdot e^{iy}|=e^x\cdot|e^{iy}|=e^x=e^{\operatorname{Re} z})$.

Якщо $|z|=1$ , то $-1\le\operatorname{Re} z\le 1$, а отже $e^{-1} \leq e^{\operatorname{Re} z} \leq e^{1} \approx 2{,}7$. Тому

$|g(z)| = \frac{1}{3} e^{\operatorname{Re} z} \leq \frac{e^1}{3} < 1 = |f(z)|$.

Розв'яжемо $f(z) = 0$, $z^2 = 0$

$z_{1,2} = 0 \in G$ — 2 розв'язки. Отже р-ня

$z^2 - \frac{1}{3} e^z = 0$ в обл. G теж має 2 розв'язки $\triangleright$.

Д/З 7.6, 7.7, 7.8, 7.11, 7.12

Все, кінець!!!