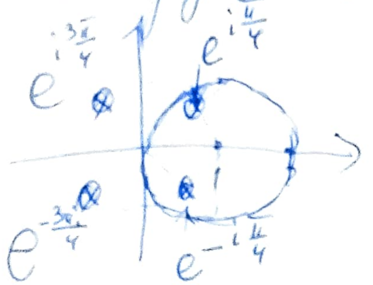
Застосування теорії лишків

Для роботи нам потрібна Основна теорема про лишки (ОТЛ — Th.7.1). Звертаємо увагу на важливість <u>всіх</u> умов теореми (1) аналітична в <u>замкненій</u> області G; 2) обл. G - обмежена <u>скінченною</u> к-стю ЗЖК; 3) за винятком <u>скінченної</u> к-сті ІзОТ). Тоді інтеграл по межі області (ми рахували такі, зокрема, в темі інтегральні ф-ли Коші) $= 2\pi i \times$ (сума лишків в усіх ІзОТ з обл. G). Ну і <u>не забуваємо правила обчислення лишків</u> — доведеться їх рахувати.

<u>7.3 а)</u> $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4}$, де $D = \{z : |z-1| < 1\}$

◁ Малюємо (не обов'язково — можна уявляти) контур інтегрування. Далі знаходимо всі ІзОТ підінтегральної ф-ції та позначаємо їх на малюнку: $z^4+1=0 \Leftrightarrow z_{1,2} = e^{\pm\frac{i\pi}{4}}, z_{3,4} = e^{\pm\frac{3\pi i}{4}}$ (див 7.2б)). Для нас важливо тільки скільки і які точки <u>потрапили в</u> середину контуру.



В нашому випадку потрапило 2 точки: $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ та $z = e^{-\frac{\pi i}{4}}$. Тому

$$\mathcal{J} = \int\limits_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4} + \operatorname*{res}_{z=e^{-\frac{\pi i}{4}}} \frac{1}{1+z^4} \right)$$

Оскільки обидві точки є полюсами першого порядку (p_1), то за правилом (3а"):

$$J = 2\pi i\left(\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\pi/4}} + \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{4} + \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{4}\right) = \pi i\cdot\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}} + e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{2} = \pi i\cdot\cos\frac{3\pi}{4} =$$

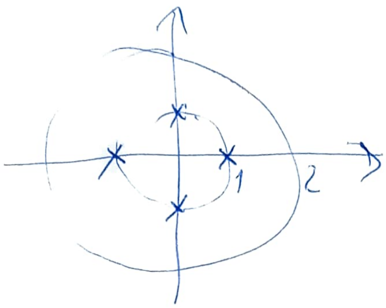
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\pi i.$$ ▷

Зауваження. В ОТЛ фігурує сума лишків в усіх ІзОТ з області, тобто кожен лишок знати не обов'язково. В поєднанні з правилом №6 це дозволяє істотно спростити обчислення в окремих випадках! Скажімо, якщо в середину контура потрапило 100500 ІзОТ, а поза контуром лишень точка $z_0 = \infty$ (завжди ОТ), то замість шукати 100500 лишків у точках із контура можна знайти $-\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$.

У прикладі 7.3а) користатись таким "фокусом" не дуже доречно, позаяк поза ~~конту~~ областю D знаходиться 3 точки ($e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{-\frac{3\pi i}{4}}, \infty$), а в області D — 2 точки ($e^{\pm\frac{\pi i}{4}}$).

7.3 г) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z^3\,dz}{z^4-1}$, $\quad D=\{z : |z|<2\}$.

◁



ОТ: $z_{1,2}=\pm 1$, $z_{3,4}=\pm i$ — р1 — всі $\in D$.

Не забуваймо перевірити, що виконуються **всі** умови ОТЛ:

1) $f(z)=\dfrac{z^3}{z^4-1}$ — аналітична в $\overline{D}$ крім точок z_1, z_2, z_3, z_4;

2) D обмежена однією ЗЖК — колом $|z|=2$;

3) Особливих точок скінченна кількість (4), і вони лежать в області D (а не на межі!!!).

Отже, $J=\displaystyle\int_{\partial D}\frac{z^3\,dz}{z^4-1} = 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{4} \operatorname*{res}_{z=z_j}\frac{z^3}{z^4-1}\right) =$

Кожна з 4-ох точок — р1, можна (3а")

$$= 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{4} \frac{z^3}{4z^3}\Big|_{z=z_j}\right) = \underline{2\pi i}.$$

Ніби й не складно, але все ж точок аж 4, а поза областю тільки $z=\infty$. Тому можна було за правилом (6):

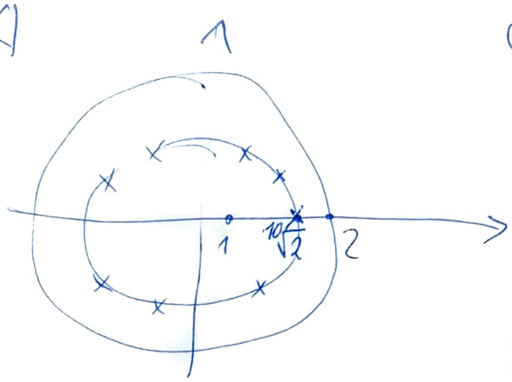
$$J = -2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{z^3}{z^4-1} = \left[\begin{matrix} z=\infty - \text{УОТ} \\ (2б) \end{matrix}\right] =$$

$$= -2\pi i \cdot \lim_{z\to\infty} z\left(-\frac{z^3}{z^4-1}\right) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to\infty}\frac{z^4}{z^4-1} = \underline{2\pi i}$$ ▷

Перевага "фокуса" не зовсім очевидна у цьому прикладі. Та звернімо увагу на наступний:

7.3 в) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z^{10}-2}$, $D = \{z : |z| < 2\}$.

◁



Ф-ція $f(z)=\frac{1}{z^{10}-2}$ має 11 ІзОТ: 10 коренів 10-го степеня із 2 (всі вони на колі $|z|=\sqrt[10]{2}$) та точку $z=\infty$.

Тільки на те, щоб знайти тих 10 коренів треба хвилин 40, а потім ще й у кожній точці лишок шукати. Але, використовуючи зауваження,

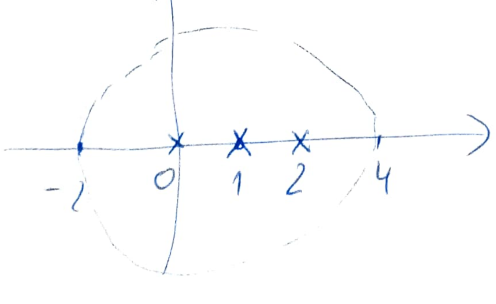
$$J = \int_{\partial D}\frac{dz}{z^{10}-2} = 2\pi i\sum_{j=1}^{10}\operatorname*{res}_{z=z_j}\frac{1}{z^{10}-2} = -2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{1}{z^{10}-2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} z=\infty - \text{УОТ}, \\ N10, \text{ тому } (4) \end{array}\right] = 0.$$

▷

7.3 ж) $\displaystyle J=\int_{\partial D}\frac{z^2\cdot\sin^2\frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}\,dz$ $D=\{z : |z-1|<3\}$

◁



ОТ: $\left.\begin{array}{l} z_1=0 \\ z_2=1 \\ z_3=2 \end{array}\right\} \in D$

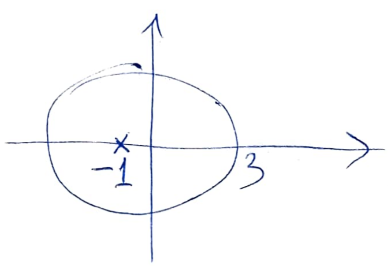
$z_4=\infty \notin D$

Ніж шукати суму лишків у трьох точках (до того ж одна з них $z=0$ – ІсОТ), видається простішим знайти лишок в одній точці $z=\infty$ – УОТ (№2). За правилом (4):

$$J = -2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

▷

<u>7. 3 з)</u> $\displaystyle\int_{\partial D} \sin\frac{z}{z+1}\, dz$, $\quad D=\{z : |z|<3\}$.

◁ 

ОТ: $z_1=-1$ – ІсОТ – $\in D$

$z_2=\infty$ – УОТ – $\notin D$

А далі справа смаку, чи шукати лишок в ІсОТ за 1а) – треба в ряд, чи в $z_2=\infty$ – УОТ за 2б). Розглянемо обидва способи:

$$J = \int_{\partial D} \sin\frac{z}{z+1}\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=-1} \sin\frac{z}{z+1} = -2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=\infty} \sin\frac{z}{z+1}$$

1a) $\sin\frac{z}{z+1} = \sin\frac{(z+1)-1}{z+1} = \sin\left(1-\frac{1}{z+1}\right) =$

$= \sin 1 \cdot \cos\frac{1}{z+1} - \cos 1 \cdot \sin\frac{1}{z+1} =$

$$= \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(z+1)^{2n}} - \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{(z+1)^{2n+1}}$$

Звідки $a_{-1} \xrightarrow{n=0} = -\cos 1$. Тому $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -\cos 1$, а $\mathcal{I} = -2\pi i \cdot \cos 1$.

(2б) $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z\left(f(\infty) - f(z)\right) = \lim_{z\to\infty} z\left(\sin 1 - \sin\frac{z}{z+1}\right) =$

$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} \sin\frac{z}{z+1} = \sin 1$

$= \lim_{z\to\infty} z \cdot 2\sin\frac{1-\frac{z}{z+1}}{2} \cdot \cos\frac{1+\frac{z}{z+1}}{2} =$

$= \lim_{z\to\infty} 2z \cdot \sin\frac{1}{2(z+1)} \cdot \cos\frac{2z+1}{2z+2} =$

$= \lim_{z\to\infty} \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{2(z+1)}}{\frac{1}{2(z+1)}}}_{\to 1} \underbrace{\frac{1}{2(z+1)} \cdot 2z}_{\to 1} \cdot \cos\underbrace{\frac{2z+1}{2z+2}}_{\to 1} = \cos 1$.

Тому $\mathcal{I} = -2\pi i \cdot \cos 1$ ▷.

Д/З 7.3.

Зауваження 1) В 7.3 е) — опечатка. Насправді $D = \{z : 2 < |z| < 4\}$.

2) В 7.3 є) — опечатка. Насправді $D = \{z : |z| < 2\}$

Далі нам потрібний §7.3 "Інтеграли від тригонометричних ф-цій". Запам'ятовуємо із нього, що заміна $z = e^{i\varphi}$ призводить до $dz = i\cdot e^{i\varphi}d\varphi$, $d\varphi = \frac{dz}{iz}$ і $\cos m\varphi = \frac{z^m + z^{-m}}{2}$, а $\sin n\varphi = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}$.

А проміжок інтегрування довжиною 2π (наприклад $[0, 2\pi]$ чи $[-\pi, \pi]$) переходить в коло $|z| = 1$.

7.4 б)
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{13 + 12\sin\varphi} = \left[\begin{array}{l} z = e^{i\varphi} \\ d\varphi = \frac{dz}{iz} \\ \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \end{array}\right] =$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{13 + 12\cdot\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{6z^2 + 13iz - 6} =$$

після такої заміни "складний" інтеграл з мат. аналізу звівся до "простого" інтеграла з комплексного аналізу, який можна знайти використовуючи лишки.

ОТ: $6z^2 + 13iz - 6 = 0$

$D = -169 + 144 = -25 = (\pm 5i)^2$

$z_1 = \frac{-13i - 5i}{12} = -\frac{3i}{2} \notin \mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$

$z_2 = \frac{-13i + 5i}{12} = \frac{-8i}{12} \in \mathbb{D}$ (p_1)

$$\overset{(=)}{=} 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=\frac{-8i}{12}} \frac{1}{6z^2+13iz-6} \overset{\text{3ag}''}{=} 2\pi i \cdot \left.\frac{1}{12z+13i}\right|_{z=\frac{-8i}{12}} =$$

$$= \frac{2\pi i}{-8i+13i} = \frac{2\pi}{5}. \qquad \triangleright$$

Заув. 1 Відповідь $\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ вийшла дійсним числом, чого і слід було очікувати від дійсного інтеграла з мат. аналізу. Якщо у Вас в такому дійсному інтегралі з усіма дійсними коефіцієнтами виходить комплексна відповідь – шукайте помилку!!!

Заув 2. Нагадую, що засобами мат. аналізу такий інтеграл хвилин 40 рахувати. Робимо універсальну тригонометричну заміну $tg\frac{\varphi}{2}=t$. Тоді $\sin\varphi=\frac{2t}{1+t^2}$, $d\varphi=\frac{2dt}{1+t^2}$. Але на проміжку $[0,2\pi]$ насправді таку заміну робити не можна, бо $tg\frac{\varphi}{2}$ має розрив II-го роду в т. $\varphi=\pi\in[0,2\pi]$. Проблема стандартно вирішується почерговими замінами $t=tg\frac{\varphi}{2}$ на $[0,\frac{\pi}{2}]$ та $[\frac{3\pi}{2};2\pi]$, і $t=ctg\frac{\varphi}{2}$ на $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$.

Пр2. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{2+\cos\varphi} = \left[\begin{array}{l}\text{оскільки} \\ \text{підінтегральна} \\ \text{ф-ція парна, то}\end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{2+\cos\varphi} =$

$$= \left[\begin{array}{l} z = e^{i\varphi} \\ d\varphi = \frac{dz}{iz} \\ \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\end{array}\right] = \frac{1}{2}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1} = \left[\begin{array}{l} z_1 = -2+\sqrt{3} \in \mathbb{D} \\ z_2 = -2-\sqrt{3} \notin \mathbb{D}\end{array}\right] = \frac{2\pi i}{i}\cdot \operatorname*{res}_{z=-2+\sqrt{3}} \frac{1}{z^2+4z+1} =$$

$$[3а''] = 2\pi\cdot \left.\frac{1}{2z+4}\right|_{z=-2+\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{-4+2\sqrt{3}+4} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

Далі потребуємо § 7.4, а саме Th 7.3.

Отож, якщо $f(z)$ – аналітична у <u>верхній півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, за винятком скінченної к-сті ІзОТ, що не лежать на дійсній осі</u> і $z=\infty$ – N_k для $f(z)$ $(k \geq 2)$ (це виконується, якщо $f(z) = O^*\left(\frac{1}{z^k}\right)$, $z\to\infty$),

то
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)$$

<u>Заув.</u> Не забувайте перевіряти виконання Th 7.3!!!

7.5. в) $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx$

◁ $x^4 + 10x^2 + 9 = (x^2+9)(x^2+1) = 1 \iff x = \pm i \vee x = \pm 3i$

$f(z) = \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9}$ аналітична в $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ за винятком точок $z_1 = i$ та $z_2 = 3i$ $(z_1 \notin \mathbb{R}, z_2 \notin \mathbb{R})$. $f(z) = O^*\left(\frac{1}{z^2}\right)$, $z \to \infty$, тому за Th 7.3

$$J = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=3i} f(z) \right) \ominus$$

$\left.\begin{array}{l} z_1 = i \\ z_2 = 3i \end{array}\right\}$ — p_1 — тому можна 3а)"

$$\ominus\, 2\pi i \left(\left.\frac{z^2 - z + 2}{4z^3 + 20z}\right|_{z=i} + \left.\frac{z^2 - z + 2}{4z^3 + 20z}\right|_{z=3i} \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-1 - i + 2}{-4i + 20i} + \frac{-9 - 3i + 2}{-108i + 60i} \right) = 2\pi i \left(\frac{1-i}{16i} + \frac{-7-3i}{-48i} \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{3 - 3i + 7 + 3i}{48i} \right) = \frac{2\pi i \cdot 10}{48i} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{12}}} \quad \triangleright$$

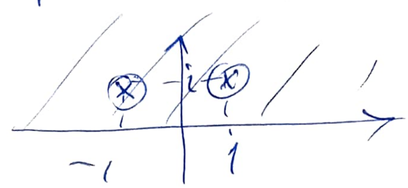
Заув 1. Відповідь $\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ — дійсне число, як і слід було очікувати від такого інтеграла.

Заув 2. Засобами мат. аналізу для обчислення такого невластивого інтеграла треба $f(x)$ на прості дроби $f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+9}$. Розв'язати систему з 4ох рівнянь з 4ма невідомими. А далі знайти первісну кожного з 4ьох доданків. (А потім ще й знайти 8 границь (кожну з 4ох на $+\infty$ та $-\infty$) — приблизно 30 хвилин.

Економія!!!

7.5. б) $J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$

$\lhd$ ОТ: $x^2-2ix-2=0 \iff x_{1,2} = \pm 1 + i$



f - аналітична в $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ крім $x_{1,2}$; $x_{1,2} \notin \mathbb{R}$. $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right), x \to \infty$ $(2 \geq 2)$.

Тому $J = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=-1+i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=1+i} f(z) \right) =$

$\overset{\text{За"}}{=} 2\pi i \left(\frac{1}{2z-2i}\Big|_{z=-1+i} + \frac{1}{2z-2i}\Big|_{z=1+i} \right) =$

$= 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{0}}$ $\rhd$

Заув 1. Значення цього інтеграла не обов'язково мало бути дійсне число, бо підінтегральна ф-ція містить число $(2i)$.

Заув 2. Із доведення Th 7.3 легко бачити, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j < 0} \operatorname{res}_{z=z_j} f(z).$$

Оскільки !!!

в 7.5 б) $f(z)$ - аналітична в нижній півплощині, то $J = 0$

Заув 3. Можна було скористатись правилом (6)

$$J = 2\pi i \cdot \left(\sum_{j=1}^{2} \operatorname{res}_{z=z_j} f(z)\right) = -2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0,$$

бо $z=\infty$ — N_2 (правило (4)).

7.5. g) $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \left[\begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3} \text{ — } \\ \text{— парна, тому} \end{array} \right] =$

$$= 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} \; (=)$$

$f(z)$ - аналітична в $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ крім $z = i - P_3$ $(z = i \notin \mathbb{R})$. $f(z) = O^*\left(\frac{1}{z^6}\right)$, $z \to \infty$ $(6 \geq 2)$.

Тому

$$\ominus \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=i}\frac{1}{(z^2+1)^3} \overset{3a}{=} \pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)'' =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\cdot\lim_{z\to i}\frac{6}{(z+i)^5} = \frac{\pi i}{2}\cdot\frac{6}{(2i)^5} = \frac{3\pi}{32} \qquad \triangleright$$

Заув. Засобами мат. аналізу шляхом інтегрування частинами виводилась рекурентна ф-ла, що дозволяла понизити степінь знаменника з 3го до 2го, а потім з 2го до 1го. То все приблизно 30хв.

Д/З 7.3, 7.4, 7.5