Узагальнені степеневі ряди. Ряди Лорана.

Ще раз перечитуємо розділ "Функціональні ряди" (розділ 5, ст. 73-84). Особливу увагу звертаємо на узагальнені степеневі ряди (УСР) та теорему Лорана. Не забуваємо все, що стосується степеневих рядів.

УСР називається

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n}_{\substack{\text{головна частина} \\ (\text{ГЧ})}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\substack{\text{правильна частина} \\ (\text{ПЧ})}} . \qquad (\text{УСР})$$

Позначимо

$$R_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|}, \quad R_2 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (\text{ФКА})$$

Якщо $R_1 > R_2$, то (УСР) ніде не збіжний.
Якщо $R_1 < R_2$, то (УСР) збіжний в кільці

$K(z_0, R_1, R_2) = \{z : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$ і розбіжний зовні його замикання $\overline{K(z_0, R_1, R_2)}$. На колах $\{z : |z-z_0| = R_1\}$ та $\{z : |z-z_0| = R_2\}$ можуть бути як точки збіжності, так і точки розбіжності.
Якщо ж $R_1 = R_2$, то (УСР) може мати (та може і не мати) точки збіжності тільки на колі $\{z : |z-z_0| = R_1 = R_2\}$.

<u>Зауваження 1</u>. Числа R_1 та R_2 можна знайти і за ф-лою типу д'Аламбера (виведіть ф-ли!).

Як і з (СР) на нас чекають 2 типи завдань:

1) знайти множину збіжності УСР

2) розвинути аналітичну в кільці ф-цію в ряд Лорана (УСР)

Щоб розв'язати завдання Iго типу треба:

а) знайти R_1 та R_2 (чи за (Ф К-А) чи за ф-лами типу д'Аламбера;

б) порівняти R_1 та R_2:

- якщо $R_1 > R_2$ — УСР ніде не збіжний
- якщо $R_2 > R_1$ — $K(z_0, R_1, R_2)$ — кільце збіжності, але ще треба дослідити збіжність на 2х колах;
- якщо $R_1 = R_2$, то дослідити збіжність на колі $\{z : |z - z_0| = R_1 = R_2\}$

<u>Зауваження 1</u>. Якщо R_1 чи R_2 дорівнює 0 або $+\infty$, то вважайте пощастило — на таких колах досліджувати не треба.

<u>Заув 2</u>. Дослідження на колах радять розпочати з НУЗР, далі на абсолютну збіжність, якщо не склалось — умовна збіжність (ознака Діріхле). (див. тему СР).

5.8. б) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|}(z+1)^n$;

$\triangleleft$ $z_0 = -1$; $a_n = 2^{-|n|}$, $a_{-n} = 2^{-|-n|} = 2^{-|n|}$

При $n > 0$: $a_n = 2^{-n}$, $a_{-n} = 2^{-n}$.

$R_1 = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^{-n}|} = \frac{1}{2}$; $R_2 = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^{-n}|}} = 2$. $R_2 > R_1$

Наш ряд точно збіжний в $\{z : \frac{1}{2} < |z+1| < 2\}$. Але точки збіжності можуть бути ще й на колах $\{z: |z+1| = 2\}$ та $\{z: |z+1| = \frac{1}{2}\}$. Дослідимо.

Нехай $|z+1| = 2$. Тоді

$$\left|2^{-|n|}(z+1)^n\right| = 2^{-|n|}\cdot 2^n = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{|n|}, & n < 0. \end{cases}$$

Тобто в ПЧ (при $n \geq 0$) не виконується НУЗР. Оскільки на цьому колі ПЧ розбіжна, то й УСР-розб.

<u>Зауваження.</u> УСР-збіжний $\Leftrightarrow$ ПЧ та ГЧ — збіжні.

Аналогічно, на колі $|z+1| = \frac{1}{2}$ маємо

$$\left|2^{-|n|}(z+1)^n\right| = 2^{-|n|}\cdot\frac{1}{2^n} = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^n, & n \geq 0; \\ 1, & n < 0. \end{cases}$$

Цього разу в ГЧ (при $n<0$) не виконується НУЗР. Отже, множина збіжності $\{z : \frac{1}{2} < |z+1| < 2\}$. $\triangleright$

<u>5.8.в)</u> $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{n^2+1}$;

$\triangleleft$ $z_0 = -1$; $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$; $a_{-n} = \dfrac{1}{(-n)^2+1} = \dfrac{1}{n^2+1}$

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+1}} = 1; \quad R_2 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2+1}}} = 1.$$

$R_1 = R_2 \Longrightarrow$ точки збіжності <u>можуть бути</u> тільки на колі $\{z : |z+1| = 1\}$.

Нехай $z \in \{z : |z+1| = 1\}$. Тоді загальний член нашого УСР

$$\left|\frac{(z+1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}.$$

Оскільки правильна частина

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$ – збіжна (бо $2>1$)

і головна частина

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(-k)^2+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$$ – збіжна (бо $2>1$),

то наш УСР абсолютно збіжний (а отже і збіжний) на колі $\{z : |z+1| = 1\}$ – множина збіжності. ▷

5.8.г) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 3^n \cdot z^n$

◁ $a_n = 3^n$; $a_{-n} = 3^{-n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; $z_0 = 0$.

$$R_1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{3}\right)^n\right|} = \frac{1}{3}; \quad R_2 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|3^n|}} = \frac{1}{3}.$$

$R_1 = R_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$ дослідимо на колі.

Нехай $z \in \{z : |z| = \frac{1}{3}\}$. Тоді

$|3^n \cdot z^n| = \left|3^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right| = 1$. Тобто НУЗР не виконується ні для ПЧ, ні для ГЧ, отже УСР ніде не збіжний, тобто множина збіжності $= \varnothing$ ▷

5.8. e) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^{4n}}{n^4+1}$;

$\triangle$ $z_0 = 0$.
Зверніть увагу, що a_n — це коефіцієнт біля $(z-z_0)^n$. Тому не правда, що тут ~~$a_n = \frac{1}{n^4+1}$~~ (поширена помилка). Насправді

$a_{4n} = \frac{1}{n^4+1}$. А для a_n отримуємо формулу:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k^4+1}, & n = 4k \\ 0, & n \neq 4k \end{cases}$$

(оскільки доданки із $z, z^2, z^3, z^5, z^6, \ldots$ — відсутні, то коефіцієнт біля них $= 0$).

$R_1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|} =$ [послідовність a_n складається із 2х підпослідовностей: 0 та $\frac{1}{k^4+1}$. Верхня границя — це найбільша часткова]

$= \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[4k]{\frac{1}{k^4+1}} = 1$.

$$R_2 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[4k]{\frac{1}{k^4+1}}} = 1.$$

$R_1 = R_2 = 1$. Але на колі $|z| = 1$ маємо

$\left|\frac{z^{4n}}{n^4+1}\right| = \frac{1}{n^4+1}$. Тому ГЧ та ПЧ — абсолютно збіжні (бо $4>1$). А отже, множина збіжності – $\{z: |z|=1\}$. ▷

Далі переходимо до 2го типу завдань. Теорема Лорана гарантує, що аналітична в кільці $K(z_0, R_1, R_2)$ ф-ція $f(z)$ розвивається у цьому кільці в (ЛСР) і навіть вказує ф-ли для знаходження a_n. Проте на практиці не зручно користатись цими ф-лами, а радять використовувати ті ж методи, що і для СР (користатись готовими розвиненнями для основних ф-цій). Нагадую, що нам відомі розвинення в СР для e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ та

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad |z|<1} \qquad (*)$$

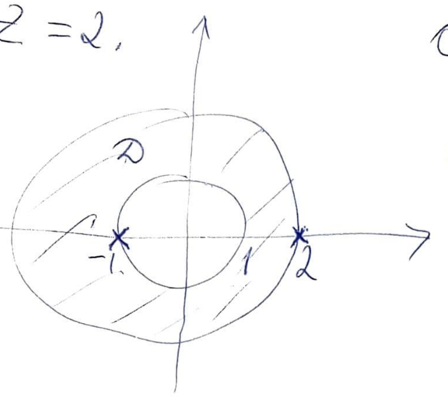
а також, як наслідок (див. вправу 5.6 а)

$$\boxed{\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n, \quad |z|<1}. \qquad (**)$$

Особливу увагу слід звернути на умову $|z|<1$ в останніх 2х рівностях, позаяк вона буде визначальною у багатьох прикладах.

5.9.а. Розвинути $f(z)=\dfrac{1}{(1+z)(z-2)}$ в РЛ за степенями z в кільці $D=\{z: 1<|z|<2\}$.

Δ Аналітичність $f(z)$ порушується у точках $z=-1$ та $z=2$.



Оскільки $-1\notin D$ та $2\notin D$ (на межі D — можуть бути), то $f(z)$ — аналітична в D. А отже за Тh Лорана $f(z)$ — розвивається в D в ЧСР (ряд Лорана).

(Якщо б котрась із особливих точок належала б D, то задача не мала б розв'язків).

Подамо $f(z)$ у вигляді суми простих дробів:

$$f(z)=\frac{A}{1+z}+\frac{B}{z-2} \qquad A=-\frac{1}{3}\ ;\ B=\frac{1}{3},$$

та розвинемо у ряд кожен із доданків окремо. В обидвох випадках можна скористатись (*). Звертаємо увагу, що в (*) в знаменнику один із доданків $=1$, а другий — за модулем <1. Тому, щоб розвинути $\dfrac{1}{z-2}$ треба спершу винести у знаменнику за дужки z або (-2). Що саме слід виносити (а правильний варіант — тільки один) — "підказує" вигляд області D.

Якщо винести z, то

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}}.$$

Але, оскільки $z \in D$, то $|z| < 2$, і, отже, $\left|\frac{2}{z}\right| > 1$. Недобре, бо в $(*)$ відмінний від 1 доданок за модулем < 1.

Отже виносимо (-2). Тоді

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}, \quad і \ \forall z \in D \ \left|\frac{z}{2}\right| < 1!$$

із $(*)$ маємо $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n =$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot z^n.$$

Аналогічно, до

$\frac{1}{1+z}$ – не можна відразу застосовувати $(*)$, бо $|z| > 1$ $\forall z \in D$. Тому винесемо z за дужки:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}, \quad \forall z \in D \ \left|-\frac{1}{z}\right| < 1$$

(бо $|z| > 1$ в D).

Отже, $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{z}\right)^n =$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot z^{-(n+1)} = \begin{bmatrix} -(n+1) = k \\ n+1 = -k \\ n = -k-1 \end{bmatrix} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^{k+1} z^k$$

$$f(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+z}=$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot z^n-\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}\cdot z^n=$$

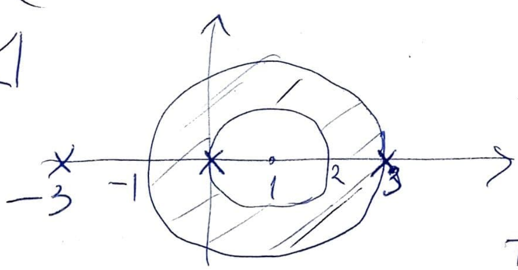
$$=\underbrace{\frac{1}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\cdot z^n}_{\text{головна частина}}-\underbrace{\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot z^n}_{\text{правильна частина}},\quad 1<|z|<2.$$

Тут $a_n=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$ для $n\geq 0$, а для $n<0$

$a_n=\frac{1}{3}\cdot(-1)^n$. ▷

5.9 г. Розвинути $f(z)=\frac{1}{z^2(z^2-9)}$ за степенями $(z-1)$ в $D=\{z;\ 1<|z-1|<2\}$.

◁



Жодна із особливих точок ($z_1=0$, $z_2=3$, $z_3=-3$) не належить D, тому задача має розв'язок.

Прості дроби:

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-3)(z+3)}=\frac{A}{z-3}+\frac{B}{z+3}+\frac{C}{z^2}+\frac{D}{z}$$

$A=\frac{1}{54}$; $B=-\frac{1}{54}$; $C=-\frac{1}{9}$; $D=0$.

Розвинемо кожен із трьох (як виявилось, бо $D=0$) доданків використовуючи (*) та враховуючи, що $z\in D$.

Оскільки нам потрібне розвинення за степенями $(z-1)$ а не z, то спершу виділемо вираз $(z-1)$ у кожному із доданків.

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-1)-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=$$

(Оскільки $z\in D$, то $|z-1|<2$, а отже, $\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$).

$$=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n.$$

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{(z-1)+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{4}\right)}=$$

$$\left(|z-1|<2 \Rightarrow \left|-\frac{z-1}{4}\right|<\frac{1}{2}<1\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{4^{n+1}}\cdot(z-1)^n.$$

$$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{((z-1)+1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\left(-\frac{1}{z-1}\right)\right)^2}=$$

(Оскільки $|z-1|>1$, то $\left|\frac{-1}{z-1}\right|<1$ — можна $(**)$).

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(-\frac{1}{z-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^{-(n+2)}=$$

$$= \left[\begin{array}{l} -(n+2)=k \\ n+2=-k \\ n=-k-2 \end{array} \right] = \sum_{k=-\infty}^{-2} (-1)^{-(k+2)} (-k-2+1)\cdot(z-1)^k =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-2} (-1)^k (-k-1)\cdot(z-1)^k = \sum_{k=-\infty}^{-2} (-1)^{k+1} (k+1)\cdot(z-1)^k.$$

Отже

$$f(z) = \frac{-1}{54}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n - \frac{1}{54}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{4^{n+1}}(z-1)^n +$$

$$+\left(-\frac{1}{9}\right)\cdot\sum_{k=-\infty}^{-2}(-1)^{k+1}(n+1)(z-1)^n =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{9}\sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^n(n+1)(z-1)^n}_{\text{ГЧ}} \underbrace{- \frac{1}{54}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right)\cdot(z-1)^n}_{\text{ПЧ}},$$

$1 < |z-1| < 2.$

<u>5.9 е)</u> Розвинути $f(z) = z\cdot\sin\frac{1}{1-z}$ в РЛ за степенями $(z-1)$ в $D = \{z;\ 0<|z-1|<+\infty\}$.

$\triangleleft$ Єдина особлива точка ф-ції — $z=1 \notin D$. Тому є розв'язок. Очевидно, цього разу нам потрібне не розвинення (*), а розвинення

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \quad z\in\mathbb{C}.$$

(S)

Оскільки sin — непарна ф-ція, то

$\sin\frac{1}{1-z} = -\sin\frac{1}{z-1}$. А отже

$$f(z) = ((z-1)+1)\cdot\left(-\sin\frac{1}{z-1}\right) = -(z-1)\cdot\sin\frac{1}{z-1} - \sin\frac{1}{z-1}.$$

Використовуючи (S), маємо

$$\sin\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}.$$ Тому

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}.$$

Вправа. навести "порядок", змінивши індекс сумування ($2k=-2n$ — в першій сумі, $2k+1=-(2n+1)$ — в другій). ▷

Д/З. 5.8, 5.9.

+ Читаємо і розбираємо теорію розділ 6 "Нулі та ізольовані особлив. точки" (ст. 85–93).