Теорія лишків

Уважно читаємо §7.1–7.2 (ст. 99–102): "Означення та формули для обчислення лишків" та "Основна теорема про лишки". Перед цим обов'язково варто засвоїти теми "Ряди Лорана" та "I_3OT".

Нехай $f(z)$ – аналітична в проколеному околі т. $z_0 \in \mathbb{C}$ (тобто z_0 – I_3OT або f – аналітична в z_0).

Лишком ф-ції $f(z)$ в т. z_0 називається

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz, \quad \text{де } r \in (0,\delta).$$

Зауважимо, що лишок це число (не залежить від r).
В т. $z_0=\infty$ (якщо вона I_3OT для f) означення дещо інше:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z)\,dz \qquad \delta < r < +\infty.$$

Лишки мають широке застосування і наша мета наразі навчитись їх обчислювати (наступного разу будемо застосовувати).

Якщо $f(z)$ – аналітична в т. $z_0 \in \mathbb{C}$, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$.
Тому надалі шукатимемо лишки тільки в I_3OT.
Користатися означеннями не дуже зручно, а тому є набір правил, які дають змогу легко обчислювати лишки. Залежно від типу I_3OT (УОТ, полюс чи ІсОТ) застосовуємо різні правила.

Тому спершу треба неодмінно навчитись з'ясовувати тип ІзОТ (а також розвивати в ряд Лорана — після правила №1 буде зрозуміло чому).

Оскільки означення для $z_0 \in \mathbb{C}$ та для $z_0 = \infty$ відрізняються, то й правила для них різні. Для скінченних позначатимемо а), для $z_0 = \infty$ — б).

1а) z_0 – ІзОТ $f \Rightarrow \underset{z=z_0}{\operatorname{res}} f(z) = a_{-1}$ (коефіцієнт з індексом "-1" з розвинення в ряд Лорана в околі т. z_0)

1б) $z_0 = \infty$ – ІзОТ $f \Rightarrow \underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = -a_{-1}$

2а) $z_0 \in \mathbb{C}$ – ~~У~~ УОТ $f \Rightarrow \underset{z=z_0}{\operatorname{res}} f(z) = 0$

2б) $z_0 = \infty$ – УОТ $f \Rightarrow \underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} z\left(f(\infty) - f(z)\right)$

(де $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ – $\exists$ і $\neq \infty$, бо $z_0 = \infty$ – усувна ОТ)

3а) $z_0 \in \mathbb{C}$ – p_k $f(z) \Rightarrow \underset{z=z_0}{\operatorname{res}} f(z) = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z\to z_0} \left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}$

це похідна $(k-1)$-го порядку

3б) $z_0 = \infty$ – p_k $f(z) \Rightarrow \underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = -\dfrac{1}{(k+1)!} \lim\limits_{z\to 0} \left(z^k \cdot f\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{(k+1)}$

В застосуваннях найчастіше трапляються саме полюси, тому правила 3а) та 3б) — найчастіше використовуватимемо. А з полюсів найчастіше трапляються p_1. Тому окремо сформулюємо

3а)' $z_0 \in \mathbb{C} - p_1\ f(z) \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$

3а)'' Нехай $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $z_0 - p_1$ для $f(z)$ і $\varphi(z_0) \neq 0$ (тобто $z_0 - N_1$ для $\psi(z)$). Тоді $\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}$.

Зазвичай похідну знаменника рахувати простіше ніж шукати границю (3а)').

4. $z_0 = \infty$ – УОТ і $z_0 - N_k$ для $f(z)$, $k \geq 2$ $\Rightarrow$ $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

5. f – парна, $z_1 = 0$ та $z_2 = \infty$ – ІзОТ або точки аналітичності $\Rightarrow$ $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$

6. Наслідок з Основної теореми про лишки:

f – аналітична в $\mathbb{C}$ крім скінченної кількості ІзОТ $z_1, z_2, \dots, z_k$ $\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$

Тобто якщо ми знаємо лишки у всіх ІзОТ крім однієї, то використовуючи 6. знаємо у всіх

Ці шість правил варто запам'ятати. Далі поговоримо про особливості їх застосування.

На практиці раджу у випадку, якщо треба обчислити лишок у точці:

1) перебрати усі 6 правил та відкинути ті, які не можливо застосувати до прикладу;
2) з тих що залишились (зазвичай 2 – 3 штуки) обрати те, яке найлегше застосувати в цьому конкретному випадку.
3) скористатись ним.

Зауваження. Правило 1 – універсальне, і не залежить від типу ІОТ. Правило 6 – вимагає тільки, щоб особливих точок у функції була скінченна кількість, а це часто виконується.

В перших кількох прикладах буде детально вказано чому відкинута частина правил і яким чином обрали із тих, що залишились (зверніть на це особливу увагу!!!).

7.1а). $\operatorname{res}\limits_{z=0} \frac{\sin z}{z^2}$

◁ Спершу майже завжди раджу з'ясувати тип IзОТ.

$z=0$ — N_1 для $\sin z$, N_2 для z^2 $\Rightarrow$ $z_0=0$ — p_1 для $f(z)$.

Далі перебираємо правила. Всі, що б) — відразу ні, бо точка скінченна.

1а) — завжди актуальне, але буває, що в ряд Лорана розвинути ДУЖЕ складно;

2а) — ні, бо не УОТ, а p_1

3а) — так, бо полюс. Навіть 3а') - бо p_1.

3а)'' — ні!!! Хоч і $z=0$ — p_1, та $\varphi(z)=\sin z=0$ в $z=0$.

4. — ні, бо $z=0\neq\infty$

5 — ні, бо $f(z)$ — непарна

(Зауважимо, що скажімо для $g(z)=\frac{\sin z}{z^3}$ — парна — $\operatorname{res}\limits_{z=0} g(z)=0$ за 5.)

6. — так. Інші IзОТ для $f(z)$ — лише $z=\infty$.

Тому $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = -\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z)$. Але $z=\infty$ — IсОТ.

Для IсОТ не підійде тільки 1б), тобто розвивати в ряд. А цей спосіб (1а)) — у нас і так в переліку підходящих. Тому немає сенсу.

Насправді, правило 6. варто кликати, якщо більше нічо не підходить. Надалі згадуватимемо його, тільки якщо відкинемо усі інші.

Отож, залишились (1а) та (3а)'. Порівняємо їх ефективність.

3а)' $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \underline{\underline{1}}.$

1а) ~~res~~ Оскільки $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$, то

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(z - \frac{z^3}{3!} \pm \ldots\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \ldots .$$

a_{-1} (тобто коефіцієнт біля $z^{-1} = \frac{1}{z}$) $= 1$, отже

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2} = \underline{\underline{1}}.$$

Ніби не складно в обидвох випадках, тому справа смаку. Часто студенти "бояться" розвинень в ряд, але в деяких прикладах таки доведеться. Тому варто навчитись. ▷

$\underline{7.1\ б)}$ $\operatorname*{res}_{z=\infty} z^2 \cdot \sin\frac{1}{z}$

◁ Легко бачити, що $z=\infty$ — p_1 (Доведіть це!!!)

Цього разу відпали всі, що а), бо $z=\infty$.

(1б) — завжди,

2б — ні, бо $z=\infty - p_1$, а не УОТ.

3б) — так, бо Р1

4 — ні, бо не УОТ

5 — ні, бо не є парною.

Здається, що готовою ф-лою (3б) скористатись простіше, ніж розвинення в ряд ((1б)). Поглянемо:

3б): $\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} z^2 \cdot \sin\frac{\pi}{z} = -\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(z\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^2\cdot\sin\pi z\right)'' =$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin\pi z}{z}\right)'' = -\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z\cdot\pi\cos\pi z - \sin\pi z}{z^2}\right)' = \ldots$$

і тут я зупинюсь. Далі ще треба похідну від частки, а потім ще й границю шукати. Спробуйте (обов'язково!!!!), та виглядає, що на це треба хвилин 10... Але є запасний варіант — (1б). Оскільки $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$,

то $\sin\frac{\pi}{z} = \frac{\pi}{z} - \frac{(\pi/z)^3}{3!} + \frac{(\pi/z)^5}{5!} - \ldots$, а

$$f(z) = \pi z - \frac{\pi^3}{6}\cdot\frac{1}{z} + \frac{\pi^5}{120}\cdot\frac{1}{z^3} - \ldots$$

$$\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = -a_{-1} = \frac{\pi^3}{6}.$$

Тобто, тут (1б) значно ефективніше, ніж (3б) ▷

7.1 g) $\operatorname{res}\limits_{z=i} \frac{z^2}{z^4-1}$

$\triangleleft$ $z=i$ — p_1

1a) +, 2a) —, 3a) +, але краще 3a)', 3a)'' — теж +, бо $z^2|_{z=i} \neq 0$, 4 —, 5 — (хоч ф-ція і парна, але $z\neq 0$ та $z \neq \infty$, бо $z=i$).

Якщо в переліку + 3a)'' — радять з нього починати; в більшості випадків воно найпростіше:

3a'') $\operatorname{res}\limits_{z=i} \frac{z^2}{z^4-1} = \lim\limits_{z\to i} \frac{z^2}{4z^3} = \lim\limits_{z\to i} \frac{1}{4z} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$

для порівняння:

3a') $\operatorname{res}\limits_{z=i} \frac{z^2}{z^4-1} = \lim\limits_{z\to i} \frac{(z-i)z^2}{z^4-1} = \lim\limits_{z\to i} \frac{\cancel{(z-i)}z^2}{\cancel{(z-i)}(z+i)(z-1)(z+1)} =$

$= \frac{-1}{2i(i-1)(i+1)} = -\frac{i}{4}$ //.

щоб застосувати 1a) треба в ряд Лорана за степенями $(z-i)$. Спробуйте, хвилин 20 бавитись $\triangleright$.

7.1 e) $\operatorname{res}\limits_{z=1} z\cdot \exp\left\{\frac{1}{z-1}\right\}$

$\triangleleft$ $z=1$ — ІсОТ (доведіть це!)

1a) +, 2a —, 3a —, 4 —, 5 —.

Спробуємо 1a (воно наразі єдине). Якщо

не вдається розвинути — є запасний варіант: правило 6 (знайти лишок в т. $z=\infty$ — p_1, а там можна 35)), але 7.1 в) трохи відбиває охоту).

(1а). Оскільки $e^z = 1+z+\frac{z^2}{2}+\dots$, то

$$z\cdot e^{\frac{1}{z-1}} = z\cdot\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(z-1)^3}+\dots\right)=$$

$$=\left((z-1)+1\right)\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(z-1)^3}+\dots\right)=$$

$$=(z-1)+1+\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{z-1}+\dots$$

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = a_{-1} = \frac{3}{2}\ //.$$

▷

Надалі пропонується самостійно провести аналіз ~~на~~ вибору "найкращого" правила. Ми ж зупинятимемось лише на його застосуванні.

7.2 а) $f(z)=\dfrac{1}{z+z^3}=\dfrac{1}{z(1+z^2)}$

◁ ОТ: $z_1=0$ — p_1

$z_{2,3}=\pm i$ — p_1

$z_4=\infty$ — ~~p_3~~ — але нам треба лишки тільки в скінченних точках — така умова в № 7.2.

$z_1 = 0$ (3a'') $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{z+z^3} = \frac{1}{1+3z^2}\Big|_{z=0} = 1$

$z_{2,3} = \pm i$ (3a'') $\operatorname*{res}_{z=\pm i} \frac{1}{z+z^3} = \frac{1}{1+3z^2}\Big|_{z=\pm i} = -\frac{1}{2}$.

<u>Зауваження</u>. За правилом 6: $1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Тому $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$. Але це і так зрозуміло

за (4), бо $z = \infty - N_3$. ▷

<u>7.2 б)</u> $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$

◁ Знайдемо скінченні ОТ: $z^4 + 1 = 0 \iff z = \sqrt[4]{-1}$

За ф-лою Муавра $\left(\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right)\right.$,

$\left.k = 0, 1, \dots, n-1\right)$ маємо:

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_4 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ — всі p_1.

(3a''): $\operatorname*{res}_{z=z_j} f(z) = \frac{z^2}{4z^3}\Big|_{z=z_j} = \frac{1}{4z_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$. ▷

<u>7.2 в)</u> $f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^3}$

◁ ОТ: $z = -1 - p_3$

(3a): $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to-1}\left((z+1)^3 \cdot \frac{z^2}{(z+1)^3}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to-1} 2 = 1$

Заув. Не дуже складніше за (1а):

$$\frac{z^2}{(1+z)^3} = \frac{((z+1)-1)^2}{(1+z)^3} = \frac{(z+1)^2 - 2(z+1)+1}{(z+1)^3} = \frac{1}{z+1} - \frac{2}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^3}$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \underline{1}$$ ▷

7.2 е) $f(z) = \dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$

◁ ОТ: $z = 1 - p_n$

3а) $$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 1} \left((z-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(z-1)^n} \right)^{(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 1} \left(z^{2n} \right)^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot 2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+2) \cdot z^{n+1} \Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} \; //$$

Заув. Можна було 1а) і ф-ла бінома Ньютона до $((z-1)+1)^{2n}$. Вправа: зробіть це. ▷

7.2 є) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z - \frac{\pi}{4}}$,

◁ ОТ: $z = \frac{\pi}{4} - p_1$

3а)'' $$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) = \frac{\cos z}{1} \Big|_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Заув. Із правила (6) випливає, що лишок в ІсОТ $z=\infty$ дорівнює $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ▷

7.2 ж) $f(z)=\frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$

◁ ОТ: $z=0-P_{2n+1}$

Здавалось би, що (3а):

$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{(2n)!}\cdot\lim_{z\to 0}\left(e^{z^2}\right)^{(2n)}$, але знайти похідну $2n$-го порядку від такої складеної ф-ції — не так легко. Тому (1а):

$$\frac{1}{z^{2n+1}}\cdot e^{z^2}=\frac{1}{z^{2n+1}}\left(1+z^2+\frac{z^4}{2!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{n!}+\ldots\right)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z}$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{n!} \Leftarrow$$ ▷

7.2 п) $f(z)=\frac{1}{\sin \pi z}$

◁ ОТ: $z_k=k,\ k\in\mathbb{Z}-P_1$. Тому за (3а'')

$$\operatorname*{res}_{z=z_j=j} f(z)=\frac{1}{\pi\cdot\cos \pi z}\Big|_{z=z_j}=\frac{1}{\pi\cdot\cos \pi j}=\frac{(-1)^j}{\pi}$$

Вправа. Що можна сказати про лишок в точці $z=\infty$?

Відповідь до вправи: $z=\infty$ — не є ІзОТ (а точка скупчення полюсів), тому лишок в ній не визначений!

7.2 з). $f(z)=\dfrac{1}{e^z+1}$;

⊲ Знайдемо ОТ: $e^z+1=0 \Leftrightarrow e^z=-1 \Leftrightarrow$

~~...~~

$z_k=i\pi(2k+1),\ k\in\mathbb{Z}$ — P_1 (див 6.6.2))

3а''): $\underset{z=z_k}{\operatorname{res}} f(z)=\left.\dfrac{1}{(e^z+1)'}\right|_{z=z_k}=\dfrac{1}{e^{z_k}}=\dfrac{1}{-1}=-1$

Заув. $z=\infty$ — не є ІзОТ. ⊳

7.2 і) $f(z)=\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$

⊲ ОТ: $z_1=-1$ — P_1

$z_2=0$ — ІсОТ

$z_3=\infty$ — УОТ (N_1)

В точці $z_1=-1$ (3а''): $\underset{z=-1}{\operatorname{res}} f(z)=\left.\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{1}\right|_{z=-1}=1$.

В точці $z_2=0$ з правил 1–5 підходить тільки (1а). Але розвинути в ряд в околі точки $z=0$ — вкрай не просто. Хоч і

$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$, а $\cos^2 \frac{\pi}{z} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi}{z}\right)$ — розвивається, проте знайти добуток двох рядів — важко. Нам насправді треба тільки коефіцієнт біля $\left(\frac{1}{z}\right)$, але і це складно. При перемножуванні двох рядів отримаємо нескінченну кількість добутків, в яких степінь z дорівнює (-1). Але рятує (6). Знайдемо лишок в усіх інших точках крім $z=0$, тобто це в точці $z=\infty$ — УОТ.

За (2б): $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z\left(0 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}\right) =$

$= -\lim_{z\to\infty} \underbrace{\frac{z\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}}_{\to 1} = -1$. А оскільки $\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=-1} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$, то $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -1+1 = 0$

Д/З 7.1 – 7.2

Зауваження. Позначення N_k, P_k, ІзОТ, УОТ, ІсОТ та нумерація правил знаходження лишків не є стандартними, а вигадані мною. При спілкуванні з іншими людьми марно сподіватись, що вас зрозуміють без пояснень.