Нулі та ізольовані особливі точки.

Уважно читаємо розділ 6 (ст. 85 – 96). Детально розбираємо, запам'ятовуємо всі означення та теореми.

Нехай $f(z)$ – аналітична в околі точки $z_0 \neq \infty$. Точка z_0 називається нулем k-го порядку ф-ції $f(z)$ (надалі $z_0 - N_k$), якщо $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, а $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Пр1. $f(z) = (z-1)^3$ $\quad z_0 = 1 — N_3$, бо

$f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$, $f^{(3)}(1) = 3! \neq 0$

$\left(f'(z) = 3(z-1)^2,\ f''(z) = 6(z-1),\ f'''(z) = 6 \right)$.

Th (про канонічне зображення)

$z_0 - N_k\ f(z) \iff f(z) = (z-z_0)^k \cdot \varphi(z)$, де $\varphi(z_0) \neq 0$ і $\varphi(z)$ – аналітична в деякому околі z_0.

Пр2. $f(z) = (z-i)^{10} \cdot e^z \sin z$

Шукати похідні від $f(z)$ – не дуже зручно (все ж добуток), проте за Th(пк3) $z_0 = i — N_{10}$, бо $\varphi(z) = e^z \cdot \sin z$ – аналітична в $\mathbb{C}$, і $\varphi(i) = e^i \cdot \sin i \neq 0$.

Використовуючи Th (пк3) легко отримати таке твердження.

Тв! $z_0 - N_k\ f(z)$, $z_0 - N_p\ g(z)$ і $k > p$ $\Rightarrow$
1) $z_0 - N_{km}\ f^m(z)$
2) $z_0 - N_{k+p}\ f \cdot g$
3) $z_0 - N_{k-p}\ f/g$

Справді, скажімо, якщо $z_0 - N_k$ $f(z)$, то $f(z) = (z-z_0)^k \varphi(z)$,
тому $f^m(z) = (z-z_0)^{mk} \varphi^m(z) \Rightarrow z_0 - N_{mk}$ $f^m(z)$.

Пр3. З'ясувати порядок нуля в т. $z_0 = 0$ для

$$f(z) = z^{10} \cdot \sin^7 z \cdot (e^z - 1)^5.$$

◁ Шукати похідні – взагалі не хочеться. Але позначимо $f_1(z) = z$, $f_2(z) = \sin z$, $f_3(z) = e^z - 1$. Тоді

$$f(z) = f_1^{10}(z) \cdot f_2^7(z) \cdot f_3^5(z).$$

$f_1'(z) = 1 \neq 0 \qquad z_0 = 0 - N_1$ f_1

$f_2'(z) = \cos z \big|_{z=0} = 1 \neq 0 \qquad z_0 = 0 - N_1$ f_2

$f_3'(z) = e^z \big|_{z=0} = 1 \neq 0 \qquad z_0 = 0 - N_1$ f_3

Тому $f_1^{10}(z)$ в т. $z_0 = 0$ має N_{10}
$f_2^7(z)$ — // — N_7
$f_3^5(z)$ — // — N_5

А отже, $z_0 = 0 - N_{22}$ $f(z)$ $\qquad (10+7+5=22)$.

Якщо $z_0 = \infty$, то означенням з похідними користатись не можна!

$z_0 = \infty - N_k$ $f(z)$ $\mid \equiv \mid$ $z_1 = 0 - N_k$ $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Пр4. $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$

◁ $f(\infty) = 0$, тому $z_0 = \infty$ – нуль ф-ції $f(z)$.

$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{(1/z)^3} = z^3$ має в т. $z_1 = 0 - N_3$, тому

$z_0=\infty$ — N_3 $f(z)$.

Th (нк3, $z_0=\infty$)

$z_0=\infty$ — N_k $f(z)$ $\iff$ $f(z)=\frac{\varphi(z)}{z^k}$, де $\varphi(\infty)\neq 0$, $\varphi(z)$ — аналітична в околі т. z_0

Вправа Доведіть аналог Th1 для $z_0=\infty$.

6.1 а) $f(z)=\frac{\sin^3(z)}{z^2}$

◁ Дріб $=0 \iff$ чисельник $=0$

$\sin z=0 \iff z_k=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ — N_1 для $\sin z$

$z_k=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ — N_3 для $\sin^3 z$

Але при $k=0$: $z_0=0$ — N_2 для z^2, тому

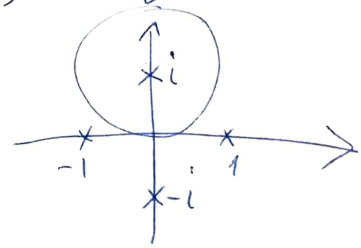
$z_0=0$ — $N_{3-2}=N_1$ для $f(z)$.

$\forall k\neq 0,\ k\in\mathbb{Z}$ $z_k=\pi k$ — N_3 $f(z)$. ▷

б) $f(z)=\frac{(1+z^2)^2}{1-z^2}=\frac{(z+i)^2(z-i)^2}{1-z^2}$

◁ $f(z)=0$ при $z_1=i$ та $z_2=-i$. Завжди не забувайте перевірити $z_0=\infty$. Але $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty\neq 0$. В т. $z_1=i$ $f(z)$ має N_2, бо за Th(нк3)

$f(z)=(z-i)^2\cdot\frac{(z+i)^2}{1-z^2}=(z-i)^2\varphi(z)$.



$\varphi(i)=\frac{(2i)^2}{2}\neq 0$ і $\varphi(z)$ аналітична в довільному околі т. $z_0=i$, що не містить точок 1 та -1.

Аналогічно, $z_2 = -i$ — N_2 $f(z)$. $\triangleright$

6.1. в) $f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \exp\{\frac{1}{z+1}\}$

$\triangleleft$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $f(z) \neq 0$. Залишилась $z_0 = \infty$

$\varphi(z) = \exp\{\frac{1}{z+1}\}\Big|_{z=\infty} = e^0 = 1$ і $\varphi(z)$ - аналітична

в довільному околі ~~точки~~ ∞, що не містить $z = -1$. За Th (n к з, $z_0 = \infty$) $z_0 = \infty$ — N_2 $f(z)$. $\triangleright$

6.1 д) $f(z) = \sin 3z - 3\sin z$

$\triangleleft$ Легко бачити, що в точках $z_k = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ $f(z_k) = 0$. Проте постає питання, чи є інші нулі $f(z)$? Відомо, що $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. Тому $f(z) = -4\sin^3 z$.

$\sin z$ має нулі тільки в $z_k = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ — N_1.

Тому $z_k = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ — N_3 для $f(z)$. $\triangleright$

Далі говоримо про ізольовані особливі точки (ІзОТ). Слово особливі вказує на те, що вони чимось відрізняються від інших (ф-ція в них не аналітична або не визначена). Термін ізольовані вказує на те, що вони відокремлені територіально від інших особливих (в деякому проколеному околі ІзОТ немає інших особливих точок).

Отож, z_0 – ІзОТ ф-ції $f(z)$, якщо
1) $f(z)$ – аналітична в деякому проколеному околі точки z_0 (круг без центру);
2) в т. z_0 $f(z)$ – не визначена чи не аналітична.

В залежності від значення $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ ІзОТ поділяються на

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \begin{cases} A \neq \infty, & \text{то } z_0 - \text{усувна особлива точка (УОТ)} \\ \infty, & \text{то } z_0 - \text{полюс} \\ \text{не } \exists, & \text{то } z_0 - \text{істотно особлива точка (ІсОТ)} \end{cases}$$

Про кожен з типів ІзОТ поговоримо окремо.

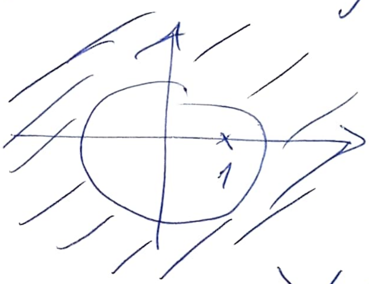
УОТ. За Th 6.4 УОТ можна візнати за:
1) означенням ($\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \neq \infty$);
2) $f(z)$ – обмежена в околі т. z_0;
3) в ГЧ ряду Лорана в околі т. z_0 немає жодного доданка.

На практиці найпростіше зазвичай використовувати 1), значно рідше 3). Обмеженість (2) на практиці легко перевірити вкрай рідко.
Отож, щоб довести що ІзОТ z_0 є УОТ зазвичай шукатимемо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Зауваження. Перш ніж з'ясовувати ТИП ІзОТ неодмінно слід переконатись, чи вона справді ізольована (тобто, чи $\exists$ проколений окіл т. z_0, в якому f - аналітична)!

6.5 д) $f(z) = \dfrac{z^3-1}{(z-1)^3}$, $z_0 = \infty$.

$\triangleleft$ Особливими точками $f(z)$ є тільки
$z_0 = \infty$ (завжди особлива точка) та
$z_1 = 1$ (знаменник $=0$), тобто $f(z)$ аналітична в довільному околі точки ∞ (~~круг~~ зовнішність круга, з центром в т. $z=0$), що не містить $z_1 = 1$.



Отже, $z_0 = \infty$ — ІзОТ.

$\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^3-1}{(z-1)^3} = 1 \neq \infty \Rightarrow z_0 = \infty$ — УОТ $\triangleright$.

6.5 г) $f(z) = \dfrac{1-\cos(z-1)}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$

$\triangleleft$ Особливі точки $f(z)$:
$z_0 = 1$ (знаменник $=0$) та
$z_1 = \infty$ (завжди). Інших немає, тому в довільному околі т. $z_0 = 1$ — $f(z)$ — не має інших особливих точок, крім $z_0 = 1$,

Отже, $z_0 = 1$ — I_3OT.

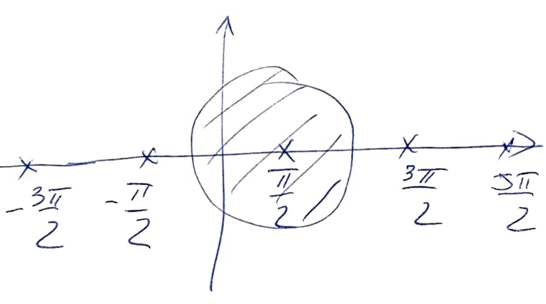
$$\lim_{z\to 1} \frac{1-\cos(z-1)}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 1} \frac{2\sin^2\frac{z-1}{2}}{\left(\frac{z-1}{2}\right)^2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \neq \infty.$$

Отже, $z_0 = 1$ — УОТ. ▽

Зауваження. Особливі точки (ОТ) — це точки де може порушуватись аналітичність ф-ції. Зазвичай це нулі знаменника. Іноді приховані, як у $f(z) = \operatorname{tg} z$ ($\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\cos z = 0$ в т. $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$).

Точка $z = \infty$ — завжди особлива!

6.5 б) $f(z) = \frac{1}{\cos^2 z} - \frac{1}{(z-\frac{\pi}{2})^2}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$.



ОТ для $f(z)$ це $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. В довільному проколеному околі т $z_0 = \frac{\pi}{2}$ радіуса меншого ніж π немає їх, отже, $f(z)$ — аналітична в цьому околі. Тобто $z_0 = \frac{\pi}{2}$ — I_3OT.

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2 z} - \frac{1}{(z-\frac{\pi}{2})^2}\right) = \left[w = z - \frac{\pi}{2} \right] =$$

{маємо $\infty - \infty$, а наявність тригонометрії натякає на Першу Важливу Границю, тому заміна}

$$= \lim_{w\to 0}\left(\frac{1}{\cos^2(w+\frac{\pi}{2})}-\frac{1}{w^2}\right)=\lim_{w\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 w}-\frac{1}{w^2}\right)=$$

$$=\lim_{w\to 0}\frac{w^2-\sin^2 w}{w^2\cdot\sin^2 w}=$$ [скористаємось розвиненням sin за ф-лою Маклорена] =

$$=\lim_{w\to 0}\frac{w^2-\left(w-\frac{w^3}{3!}+o(w^3)\right)^2}{w^2\cdot\left(w-\frac{w^3}{3!}+o(w^3)\right)^2}=$$

$$=\lim_{w\to 0}\frac{\frac{2w^4}{3!}+o(w^4)}{w^4+o(w^4)}=\frac{1}{3}\neq\infty.$$

$\triangleright$

Отже, $z_0=\frac{\pi}{2}$ — УОТ.

Полюс. ІзОТ z_0 наз полюсом ф-ції $f(z)$, якщо $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$. Але крім цього нам треба буде з'ясовувати порядок полюса.

z_0 — p_k $f(z)$ (полюс k-го порядку) $\Big| \equiv \Big|$ z_0 — N_k для $g(z)=\frac{1}{f(z)}$.

Th (про канонічне зображення)

$z_0\neq\infty$ — p_k $f(z)$ $\Big|\Leftrightarrow\Big|$ $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}$, де $\varphi(z)$ — аналіт і $\varphi(z_0)\neq 0$

Із теорем про канонічне зображення в околі нуля та полюса легко отримати таке твердження:

Тв (Р1)

$$\left.\begin{array}{l} z_0 - p_k \ f(z) \\ z_0 - p_n \ g(z) \\ \text{і } \ k > n \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 1)\ z_0 - p_{mk} \text{ для } f^m(z) \\ 2)\ z_0 - p_{n+k} \text{ для } f \cdot g \\ 3)\ z_0 - p_{k-n} \text{ для } f/g \end{array}\right.$$

Тв (Р2)

$$\left.\begin{array}{l} z_0 - p_k \ f(z) \\ z_0 - N_m \ g(z) \\ k > m \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 1)\ z_0 - p_{k-m} \text{ для } f \cdot g \\ 2)\ z_0 - p_{k+m} \text{ для } f/g \end{array}\right.$$

Тобто, p_k — це фактично N_{-k}.

Пр. З'ясувати порядок полюса в т. $z_0 = \frac{\pi}{2}$ для

$$f(z) = \frac{\cos^7 z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{10}}.$$

◁ $z_0 = \frac{\pi}{2}$ — N_1 для $\cos z$ (бо $(\cos z)' = \sin z\big|_{z=\frac{\pi}{2}} \neq 0$).

Тому $z_0 = \frac{\pi}{2}$ — N_7 для чисельника.

$z = \frac{\pi}{2}$ — N_{10} для знаменника.

Нулі 7го порядку скоротились, в знаменнику залишився нуль 3го порядку. Тому,

$z_0 = \frac{\pi}{2}$ — P_3 для $f(z)$ ▷

6.6 д) $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-1)^2}$, $z_0=1$

◁ ОТ для $f(z)$ це $z_0=1$ (знаменник $=0$) та $z_1=\infty$ (завжди). f – аналітична в довільному проколеному околі т. $z_0=1$ (вони не містять т. $z_1=\infty$), тому $z_0=1$ – ІзОТ.

$$f(z)=\frac{\sin z}{(z-1)^2}=\frac{\varphi(z)}{(z-1)^2}$$

Оскільки $\varphi(z)$ – аналітична в деякому околі т. $z_0=1$ (насправді скрізь!) і $\varphi(1)=\sin 1\neq 0$, то за Th (нк3) $z_0=1$ – P_2 для $f(z)$. ▷

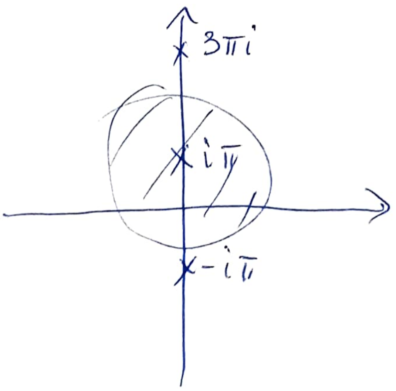
6.6 г) $f(z)=\dfrac{z}{e^z+1}$, $z_0=i\pi$.

◁ Особливі точки $f(z)$: $e^z+1=0$;

$e^z=-1$; $z=\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+i\,\mathrm{Arg}(-1)=$

$=\ln 1+i(\arg(-1)+2\pi k)=0+i(\pi+2\pi k)=i\pi(2k+1)$,

$k\in\mathbb{Z}$. + точка $z=\infty$.



В околі т. $z_0=i\pi$ радіуса $<2\pi$ немає інших ОТ, тому

$z_0=i\pi$ – ізОТ.

$f_1(z)=z$ – немає нуля в т. z_0

$f_2(z) = e^z + 1$ має в т. z_0 N_1 (бо $f_2'(z) = e^z \big|_{z=i\pi} \neq 0$

Тому, $z_0 = i\pi - P_1$ для $f(z)$

(нуль 1го порядку для знаменника, чисельник $\neq 0$)

6.6 в) $f(z) = \frac{z}{(e^z - 1)^2}$, $z_0 = 0$.

◁ ОТ для $f(z)$: $e^z - 1 = 0 \iff z_k = 2\pi k i;\ k \in \mathbb{Z}$

$+ z = \infty$.

В околі радіуса $< 2\pi$ немає інших ОТ, тому

$z_0 = 0 - I_з ОТ$.

$z_0 - N_1$ для чисельника $f_1(z) = z$

$z_0 - N_2$ для знаменника $f_2(z) = (e^z - 1)^2$

(бо N_1 для $(e^z - 1)$, бо $(e^z - 1)' = e^z \big|_{z=0} = 1 \neq 0$).

Тому, нуль 1го "скорочується" в чисельнику та знаменнику, залишається N_1 в знаменнику. Тобто

$z_0 = 0 - P_1$ для $f(z)$. ▷

6.6. е) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$, $z_0 = 0$

◁ ОТ: тільки $z_0 = 0$ та $z_1 = \infty$ – обидві ізольовані ОТ

$z_0 - N_1$ для чисельника; $z_0 - N_3$ для знаменника.

Тому $\left(\frac{N_1}{N_3} = \frac{1}{N_2}\right)$, $z_0 - P_2$ для $f(z)$ ▷

~~Д/З 6.1, 6.5, 6.6~~

Зауваження 1. Точка $z=\infty$, якщо є полюсом для $f(z)$, трохи "випадає" із загальної схеми, як і у випадку, коли вона є нулем ф-ції. Там своя Th (nk3), і, скажімо, для $f(z)=z^5$ точка $z=\infty$ є P_5.

Зауваження 2. Зверніть увагу на теорему про ГЧ ряду Лорана в околі полюса k-го порядку!

ІсОТ. ІзОТ z_0 називається ІсОТ, якщо не $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. За Th (Сохоцького–Казоратті) довільне $A\in\overline{\mathbb{C}}$ є частковою границею $f(z)$ при $z\to z_0$.

Тому,

$$\text{ІзОТ } z_0 - \underset{f(z)}{\text{ІсОТ}} \;\Big|\Leftrightarrow\Big|\; \begin{array}{l} \exists\, z_n' \to z_0,\ \exists\, z_n'' \to z_0 : \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n') \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n'') \end{array} \qquad (1)$$

(Якщо $\exists$ 2 різні границі, то границі не $\exists$)!

Інший спосіб довести що ІзОТ z_0 — ІсОТ, це показати, що в (ГЧ) ряду Лорана в околі т. z_0 є нескінченно багато членів $\qquad (2)$.

6.7. в) $f(z) = \sin(e^z)$, $z_0 = \infty$

◁ $f(z)$ – ціла (аналітична в $\mathbb{C}$), як композиція двох цілих функцій. Єдина особлива точка – $z_0=\infty$, тому вона ІзОТ.

Скористатись способом (2) – не вийде. Хоч e^z легко розвивається в ряд ($e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$), проте, як розвинути $\sin\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)$ – не зрозуміло...

Тому залучається спосіб (1).

При $z \to \infty$ e^z може прямувати і до ∞, а на ∞ sin (навіть при дійсних аргументах) не має границі, і може набувати значень як, скажімо, 0, так і, наприклад, 1.

Виберемо послідовності z_n' та z_n'' з цих міркувань:

$\sin e^z = 0$ $\qquad\qquad$ $\sin e^z = 1$

$e^z = \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ $\qquad\qquad$ $e^z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$z_k' = \ln \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ $\qquad\qquad$ $z_k'' = \ln\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$

Хоч $\lim\limits_{k\to\infty} z_k' = \infty = z_0$ і $\lim\limits_{k\to\infty} z_k'' = \infty = z_0$, але

$\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k') = 0$ а $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k'') = 1$.

Отже, не $\exists$ $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$. Тому $z_0=\infty$ – ІсОТ ▷

<u>6.7. д)</u> $f(z) = \exp\{tg\, z\} = e^{tg z}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$.

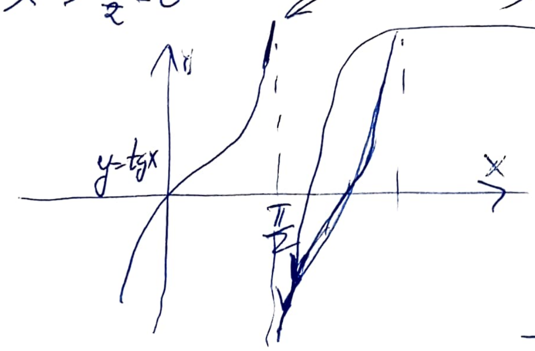
◁ ОТ для $f(z)$: $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ + $z = \infty$.

В проколеному околі т. $z_0 = \frac{\pi}{2}$ радіуса $< \pi$ $f(z)$ — аналітична, тому z_0 — ІзОТ.

<u>Зауваження</u> $z = \infty$ — не є ІзОТ, бо в довільному околі т. $z = \infty$ є інші особливі: z_k. Насправді $z = \infty$ — точка скупчення ОТ z_k.

Скористатись способом (2) знову не вийде. Розвинення для $tg\, z$ ми не знаємо, але навіть якщо $tg\, z = \sum a_n z_n$, то що робити з $e^{\sum a_n z_n}$ — не зрозуміло. Тому знову спосіб (1).

З мат. аналізу (насправді зі школи) знаємо, що $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} tg\, x = +\infty$, а $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} tg\, x = -\infty$. Цього



достатньо, аби вибрати 2 послідовності з різними границями ф-ції.

$z_n' = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \to \frac{\pi}{2}$, при $n \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n') = \lim\limits_{n\to\infty} e^{tg(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})} = e^{+\infty} = +\infty$.

$z_n'' = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \to \frac{\pi}{2}$, при $n \to \infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n'') = \lim\limits_{n\to\infty} e^{tg(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n})} =$

$= e^{-\infty} = 0$. Оскільки $0 \neq +\infty$, то $z_0 = \frac{\pi}{2}$ — ІсОТ ▷

6.7. е) $f(z)=\cos\left(\frac{z}{z+1}\right)$, $z_0=-1$

◁ ОТ у $f(z)$ є тільки дві (скінченна кількість) – $z_0=-1$ та $z_1=\infty$ – тому кожна з них I_3ОТ.

Спробуємо спосіб (1). Якщо $z\to -1$, то $\frac{z}{z+1}\to\infty$.
А на ∞ навіть дійсний cos не має границі (насправді набуває будь-яких значень з $[-1;1]$).
Тому нам вдасться вибрати ~~навіть~~ дві навіть дійсних послідовності, на яких cos набуває різних значень. Наприклад 0 та 1.

$$\cos\frac{z}{z+1}=0 \qquad\qquad \cos\frac{z}{z+1}=1$$

$$\frac{z}{z+1}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \qquad\qquad \frac{z}{z+1}=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$z_k'=\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k}-1}\to -1,\ k\to\infty \qquad\qquad z_k''=\frac{1}{\frac{1}{2\pi k}-1}\to -1,\ k\to\infty$$

$$f(z_k')=0 \qquad\qquad f(z_k'')=1$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k')=0$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k'')=1$ і $0\neq 1$, то

$z_0=-1$ – ІсОТ для $f(z)$.

Можна було скористатись і способом (2) (справа смаку), позаяк $f(z)$ не складно розвивається в ряд Лорана в околі т. $z_0 = -1$. (тобто за степенями $z-(-1) = z+1$)

$$\cos\frac{z}{z+1} = \cos\frac{z+1-1}{z+1} = \cos\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) =$$

$$= \cos 1 \cdot \cos\frac{1}{z+1} + \sin 1 \cdot \sin\frac{1}{z+1} =$$

$$\cancel{= \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} / z^{2n} - \sin 1 \sum_{n=}} =$$

$$= \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{(z+1)^{2n}} + \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{(z+1)^{2n+1}}.$$

Бачимо, що у розвиненні нескінченно багато від'ємних степенів $(z+1)$ (зверніть увагу, що жодний доданок з першої суми не взаємознищується із доданками з другої суми, бо у них різні степені $\frac{1}{z+1}$ — парні в першій, непарні в другій). Оскільки в ГЧ рЛ нескінченно багато доданків, то $z_0 = -1$ — ІсОТ ▷

6.7г) $f(z) = z^2 \cdot \cos\frac{\pi}{z}$, $z = 0$

◁ ОТ: $z_0 = 0$ та $z_1 = \infty$ — тому ізольовані.

Цей приклад теж зробимо двома способами. Раджу опанувати обидва, позаяк трапляються приклади, де один з них вкрай важко застосувати.

Якщо ж застосовані обидва – вибір за вами.

1) При $z \to 0$ маємо $\frac{\pi}{z} \to \infty$. Хоч $\cos$ і при дійсних аргументах ~~взагалі~~ не має границі на ∞, проте є обмеженим. Тобто, які би ми не вибрали 2 дійсні послідовності z_n^1 та z_n^4, за рахунок множника $z^2 \to 0$ (при $z \to 0$) $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n^1) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n^4) = 0$ (нескінченно мала помножена на обмежену). Тому, щоб отримати різні границі бодай одна із послідовностей має бути не дійсною.

Послідовність z_n^1 виберемо дійсною. Наприклад $z_n^1 = \frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$. Тоді, як зауважено вище $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n^1) = 0$.

Нехай $z_n^4 = \frac{i}{n} \to 0$. Тоді $f(z_n^4) = \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\frac{i}{n}}\right) =$

$\cancel{= -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^{i(\frac{\pi}{n})} + e^{-i(\frac{\pi}{n})}}{2} = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{\frac{\pi}{n}}}{2} = ch}$

$$= -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^{i \cdot \frac{\pi n}{i}} + e^{-i\frac{\pi n}{i}}}{2} = -\frac{1}{n^2} \frac{e^{\pi n} + e^{-\pi n}}{2} = -\frac{ch\, \pi n}{n^2}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{ch\, \pi n}{n^2} = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n^4) = \infty$.

Позаяк $0 \neq \infty$, то $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ – не існує, отже

$z_0 = 0$ – ІсОТ.

2) $$f(z) = z^2 \cdot \cos\frac{\pi}{z} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \left(\frac{\pi}{z}\right)^{2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!} \cdot z^{2-2n} = z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{z^4} + \ldots$$

Бачимо, що рЛ ф-ції $f(z)$ в околі т. $z_0 = 0$ містить нескінченно багато членів в ГЧ (всі, крім $z^2 - \frac{1}{2}$). Тому, $z_0 = 0$ – ІсОТ для $f(z)$ ▷.

Зауваження. Як випливає із останнього ~~параграфа~~ абзаца параграфа 6.5. в ∞ ф-ції e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ мають ІсОТ (якщо вона ІзОТ). Тому ІсОТ є, наприклад,

$z_0 = 1$ для $f(z) = e^{\frac{z^2}{z-1}}$

$z_0 = i$ для $f(z) = \sin\frac{1}{z-i}$

$z_0 = \infty$ для $f(z) = \cos z^2$, ...

Але це варто довести, використовуючи (1) та (2).

Основною практичною метою курсу комплексного аналізу є застосування теорії лишків. Аби застосовувати лишки, треба спершу навчитись їх обчислювати (див. наступне заняття). Аби їх обчислювати — треба вміти знаходити всі ІзОТ та з'ясовувати їх характер, ~~перші~~ ~~при~~ а також розвивати ф-цію у ряд Лорана (див. попереднє заняття). Отож, основними для нас в перспективі будуть завдання такі, як 6.8.

6.8 а) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$

◁ ОТ для $f(z)$:

знаменник $= 0 \iff z_k = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ $+ z = \infty$

Кожна із z_k є I_3OT (в околі радіуса $< \pi$ немає інших ОТ), а ~~z_k~~ $z = \infty$ — не є I_3OT (в довільному її околі є інші точки z_k) — тому її характер з'ясовувати не треба.

В точці $z_0 = 0$ $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = 1 \neq \infty$ — $z_0 = 0$ — УОТ

$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus 0$ $\lim\limits_{z \to \pi k} \frac{z}{\sin z} = \infty$ $\left(\frac{\pi k}{0}\right)$ — полюс.

Оскільки в z_k чисельник $\neq 0$, а знаменник має N_1 (бо $(\sin z)' = \cos z\big|_{z=z_k} = (-1)^k \neq 0$), то

$z_k = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ — P_1 ▷.

6.8 б) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}$

◁ ОТ: $z_k = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ (знам $=0$) $+\ z = \infty$

$z=\infty$ — не є ІзОТ, всі інші — ІзОТ.

Оскільки $\cos(z_k) = (-1)^k$, то розглянемо 2 випадки

1) $k = 2n+1,\ n \in \mathbb{Z}$. Тоді $\cos z_k = -1$; $1-\cos z_k = 2 \neq 0$

z_k — N_2 для знаменника, чисельник $\neq 0$ в z_k, тому

z_k — P_2 для $f(z)$.

2) $k = 2n,\ n \in \mathbb{Z}$. Тоді $\cos z_k = 1$, $1-\cos z_k = 0$.

З'ясуємо порядок нуля в чисельнику в т. z_{2n}.

$1-\cos z = 2\sin^2 \frac{z}{2}$ в т. $z_{2n} = 2\pi n$ має N_2,

і знаменник має N_2. Після скорочення ні чисельник

ні знаменник не ~~д~~орівнюють 0, тому z_{2n} — УОТ.

(Або так в точках $z_{2n} = 2\pi n$:

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{\sin^2 z} = \frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{4\sin^2\frac{z}{2}\cdot\cos^2\frac{z}{2}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}}$$

$$\lim_{z\to 2\pi n} f(z) = \frac{1}{2\cos^2\frac{2\pi n}{2}} = \frac{1}{2} \neq \infty.$$ — УОТ) ▷

<u>6.8 в)</u>. $f(z) = z^2 \cdot \sin\frac{z}{z+1}$

◁ ОТ: $z_1 = -1$ (знаменник$=0$) + $z_0 = \infty$ (завжди).
Оскільки їх 2, то обидві ізольовані.

<u>$z_0 = \infty$:</u> $\lim\limits_{z\to\infty} \sin\frac{z}{z+1} = \sin 1 \neq 0$,

$\sin\frac{z}{z+1}$ — аналітична в деякому околі т. ∞, тому
за Th($nk3$, $z_0=\infty$) $z_0 = \infty - P_2$.

<u>$z_0 = -1$:</u> Оскільки $\lim\limits_{z\to -1}\frac{z}{z+1} = \infty$, то маємо
$(-1)^2 \cdot \sin\infty$, отже $z = -1$ ІсОТ (але це треба акуратно довести).

$\sin\frac{z}{z+1} = 0$ $\qquad\qquad$ $\sin\frac{z}{z+1} = 1$

$\frac{z}{z+1} = \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ $\qquad\qquad$ $\frac{z}{z+1} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$z_k' = \dfrac{1}{\frac{1}{\pi k} - 1},\ k\in\mathbb{Z}$ $\qquad\qquad$ $z_k'' = \dfrac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k} - 1},\ k\in\mathbb{Z}$

$\lim\limits_{k\to\infty} z_k' = -1$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{k\to\infty} z_k'' = -1$

але

$\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k') = 0 \quad\neq\quad \lim\limits_{k\to\infty} f(z_k'') = 1$

Тому $z_0 = \infty$ — ІсОТ

▷

6.8 е). $f(z) = \dfrac{1-e^z}{1+e^z}$

◁ ОТ: $1+e^z=0$ + $z=\infty$

$z_k = \pi(2k+1)i, k\in\mathbb{Z}$ (див. 6.6 г)) + $z=\infty$

Точка $z=\infty$ – не є ІзОТ, бо в довільному околі т. $z=\infty$ є інші ОТ z_k. (бо $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \infty$).

Всі інші z_k – ІзОТ.

$1-e^z\Big|_{z=z_k} = 1-(-1) = 2 \neq 0$

z_k – N_1 для $(1+e^z)$, бо $(e^z+1)' = e^z\Big|_{z=z_k} = -1 \neq 0$

Тому $\forall k\in\mathbb{Z}$ $z_k = \pi(2k+1)i$ – P_1 ▷.

6.8 ж) $f(z) = \dfrac{z^3}{z^2-1}\cdot\cos\dfrac{1}{z}$

◁ ОТ: $z_{1,2} = \pm 1$ (знам. $=0$), $z_3=0$ (знам $=0$)

$z_4=\infty$ (завжди). Їх скінченна к-сть – тому всі ізольовані.

Оскільки $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^1}\cdot\dfrac{1}{(z+1)^1}\cdot z^3\cdot\cos\dfrac{1}{z}$, то

за Th (н к 3) $z_{1,2} = \pm 1$ – P_1.

Точка $z_4=\infty$ є полюсом 3го для z^3, і P_2 для (z^2-1).

Тому для дробу $\dfrac{z^3}{z^2-1}$ точка $z_4=\infty$ є полюсом $(3-2)$ порядку

Оскільки $\lim\limits_{z\to\infty} \cos\frac{1}{z} = \cos 0 = 1 \begin{matrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{matrix}$, тобто

для цього множника z_4 не є ні нулем ні полюсом, то він не впливає ні на що. Отже

$\underline{z_4 = \infty}$ — P_1 для $f(z)$.

$\underline{z_3 = 0}$. Оскільки $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty$, то маємо

$\cos(\infty)$. Множник $\frac{z^3}{z^2-1}$ хоч і прямує до 0, та

справи не псує насправді. Маємо великі підозри, що $z_3 = 0$ — ІсОТ. Покажемо це.

$z_n' = \frac{1}{n} \to 0,\ n\to\infty$ | $z_n'' = \frac{i}{n} \to 0,\ n\to\infty$

$f(z_n') = \dfrac{1/n^3}{\frac{1}{n^2}-1}\cdot\cos n \to 0,\ n\to\infty$ | $f(z_n'') = \dfrac{-i/n^3}{-\frac{1}{n^2}-1}\cdot \operatorname{ch} n \to \infty,\ n\to\infty$

$0 \neq \infty$, тому

$z_3 = 0$ — ІсОТ для $f(z)$ ▷

Д/З 6.1, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8.