Інтегрування.

Щоб виконувати завдання варто засвоїти матеріал з підручника ст. 58–62 (4.1 Визначений інтеграл — 4.4 Інтегральна формула Коші).

Якщо треба інтегрувати комплекснозначну ф-цію дійсної змінної (тобто $\varphi(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$) – все просто! Окремо інтегруємо дійсну, окремо уявну частини, тобто

$$\int_a^b (\alpha(t) + i\beta(t))dt = \int_a^b \alpha(t)dt + i\int_a^b \beta(t)dt$$

4.1 а) $\int_0^1 (1+it)^2 dt = \int_0^1 (1+2it-t^2)dt = \int_0^1 (1-t^2)dt + 2i\int_0^1 t\,dt = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 + it^2\Big|_0^1 = \frac{2}{3} + i.$

Постає запитання, чи можна скористатись відомою зі школи ф-лою $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, тобто чи $\int_0^1 (1+it)^2 dt = \frac{1}{i}\frac{(1+it)^3}{3}\Big|_0^1$. Так все ок, але не факт, що так простіше.

4.1 г) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\,dt + i\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\,dt = \frac{1}{n}\sin nt\Big|_{-\pi}^{\pi} - i\frac{1}{n}\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ (якщо $n \in \mathbb{Z}$).

(Можна було і так $= \frac{1}{in}e^{int}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$)

4.1 д) $\int_0^1 \frac{dt}{1+it} = \int_0^1 \frac{1-it}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - i\int_0^1 \frac{tdt}{1+t^2} =$

$= \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 - i\cdot\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\ln 2.$

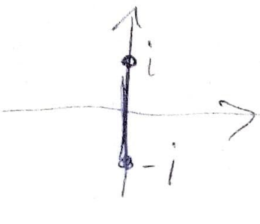
(А ось так не варто: $\int = \frac{1}{i}\ln|1+it|\Big|_0^1$, позаяк у формулі $\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ модуль виникав після розгляду випадків $x>0$ та $x<0$. В $\mathbb{C}$ випадків значно більше, та і логарифм ~~лог~~ в $\mathbb{C}$ потребує детальних з'ясувань).

Основним об'єктом досліджень у цій темі є інтеграли $\int_C f(z)dz$, де $f(z)$ – функція з $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, а $C = \{z = z(t) : t\in[a,b]\}$ – деяка гладка крива із параметричним зображенням $z = z(t)$.

Тоді $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)dt$, тобто ці інтеграли зводяться до попередніх з $\varphi(t) = f(z(t))\cdot z'(t)$.

4.5 а) 1) $C = [-i, i]$ $\quad \int_C |z|dz =$

Параметризуємо відрізок $[-i, i]$. Якщо $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t\in[a,b]$ – параметризація кривої в $\mathbb{R}^2$, то в $\mathbb{C}$ – $z = z(t) = x(t) + i\cdot y(t)$, $t\in[a,b]$



Оскільки на відрізку $x=0$, то маємо параметризацію $\begin{cases} y=t \\ x=0 \end{cases}$ ($t\in[-1,1]$), або * $\underline{z(t)=it,\ t\in[-1,1]}$

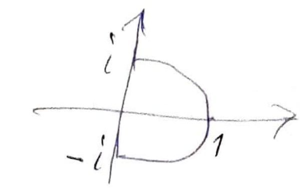
(Стежимо, аби параметр t був дійсним!!!)

Тоді $\int\limits_C |z|dz = \int\limits_{-1}^{1} |it|\cdot i\cdot dt = i\int\limits_{-1}^{1}|t|dt =$

$= i\left(\int\limits_{-1}^{0}(-t)dt + \int\limits_{0}^{1} t\,dt\right) = i.$

4.5 а) 2) $C=\{z: |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$

Маємо праве одиничне півколо



Пригадуємо, що $\underline{z = z_0 + R\cdot e^{it}}$ – параметричне задання кола з центром в z_0, радіуса R; а t – це кут, на який прокручуємось колом. Тому, у нашому випадку, $z(t)=e^{it}$, $t\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\int\limits_C |z|dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot(e^{it})'dt = e^{it}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} = i-(-i) = 2i$

Ще раз перечитуємо стор. 53–56, та виконуємо Д/З: 4.1, 4.5.

В деяких випадках інтеграли вигляду $\int\limits_C f(z)dz$ можна обчислювати ДУЖЕ швидко і легко. А саме, якщо $f(z)$ — аналітична в $\overline{G}$, де область G обмежена скінченною кількістю замкнених жорданових кривих, то

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \begin{cases} 2\pi i\cdot f(z_0), & \text{якщо } z_0 \in G \\ 0, & \text{якщо } z_0 \notin \overline{G} \end{cases} \qquad (1)$$

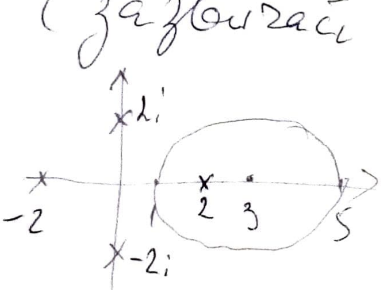
і

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \begin{cases} \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), & z_0 \in G \\ 0, & z_0 \notin \overline{G} \end{cases} \qquad (n)$$

Це одна із основних тем в курсі КА. Навчіться!!! це просто та важливо!!!

4.7. а) $\displaystyle\int_{|z-3|=2} \frac{z\,dz}{z^4-16} =$

1) малюємо криву вздовж якої інтегруємо та позначаємо точки, в яких порушується аналітичність підінтегральної функції (зазвичай це точки, де знаменник $= 0$)



$z^4-16 = (z^2-4)(z^2+4) = (z-2)(z+2)(z-2i)(z+2i) = 0$

$z_{1,2} = \pm 2$, $z_{3,4} = \pm 2i$

З чотирьох точок в середину контуру інтегрування потрапила одна точка — $z_0 = 2$ (що робити, якщо більше ніж одна — в наступних прикладах).

Перепишемо підінтегральну ф-цію, залишивши у знаменнику лиш множник $(z-z_0)$, де z_0 — точка із середини контура:

$$= \oint\limits_{|z-3|=2} \frac{\frac{z}{(z+2)(z^2+4)}}{z-2}\,dz.$$

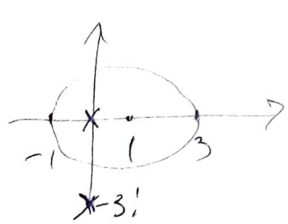
Оскільки $f(z)=\frac{z}{(z+2)(z^2+4)}$ — аналітична в крузі $\{z: |z-3|\le 2\}$, а межа круга — одна (отже скінченна кількість) ЗЖК (а саме коло $|z-3|=2$), то за ф-лою (1)

$$\oint\limits_{|z-3|=2}\frac{z\,dz}{z^4-16} = 2\pi i\cdot \frac{2}{(2+2)(4+4)} = \frac{\pi i}{8}$$

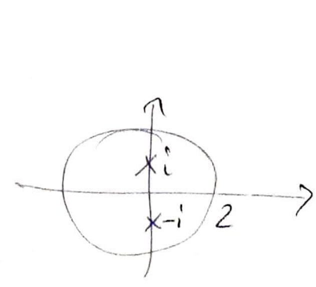
(тут $z_0=2$).

Приклад

$$\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{e^z\,dz}{z(z+3i)} = \oint\limits_{|z-1|=2}\frac{\frac{e^z}{z+3i}}{z-0}\,dz = 2\pi i\cdot\frac{e^z}{z+3i}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi}{3}.$$



4.7. б) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1} =$



Цього разу потрапило більше ніж одна точка. Тоді розкладаємо підінтегральну ф-цію на прості дроби (пригадайте

Інтегрування раціональних функцій у МА.

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i}$$

Як і в мат.аналізі знаходимо $A = -\frac{1}{2i}$, $B = \frac{1}{2i}$.

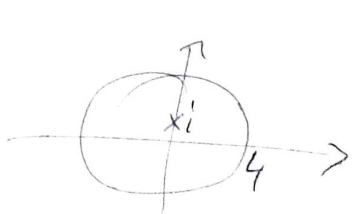
Тому

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z-i} - \int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z+i} \right) =$$

двічі застосовуємо (1) із $f(z)=1$ та $z_0=i$, $z_1=-i$

$$= \frac{1}{2i}\left(2\pi i \cdot 1\Big|_{z=i} - 2\pi i \cdot 1\Big|_{z=-i} \right) = 0$$

4.7 в)
$$\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz \;(=)$$



Потрапила одна точка, але степінь множника $(z-z_0)$ не 1, а 3. Тому слід застосувати формулу (n), а не (1). У нас $f(z)=\cos z$, $n+1=3 \Rightarrow n=2$. Тому

$$(=)\; \frac{2\pi i}{2!} \cos^{(2)} z\Big|_{z=i} = -\pi i \cdot \cos i = -\pi i \cdot \frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2} =$$

$$= -\pi i \cdot \frac{e^{-1}+e^{1}}{2} = -\pi i \cdot \operatorname{ch} 1.$$

Зауваження. Якщо в контур не потрапило жодної особливої точки, тобто ф-ція аналітична в середині контуру, то за ~~перш~~ другою інтегральною теоремою Коші інтеграл $= 0$.

Ще раз перечитуємо ст. 57-62 і виконуємо Д/з (4.7)

Далі читаємо ст. 70-72 (Гармонійні ф-ції). Знаючи дійсну (чи уявну) частину аналітичної в області функції можна відновити всю функцію (тобто знайти уявну чи дійсну частини, – відповідно). Ф-ція знаходиться з точністю до сталого доданка. Задача має розв'язок тільки якщо задана дійсна (чи уявна) частина – гармонійна.

Щось подібне мало би у Вас бути в диф. рівняннях при розв'язуванні рівнянь у повних диференціалах.

4.11 г) $u = \mathrm{Re}\, f = xy$.

Треба знайти аналітичну $f = u + iv$, тобто треба знайти не тільки уявну частину v.

Оскільки $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0+0=0$, то u — гармонічна скрізь. Отже задача **має** розв'язок. ~~[illegible]~~ Оскільки f — аналітична, то u та v — задовольняють умови Коші–Рімана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

З першої із них:

$\frac{\partial v}{\partial y}=y$, а тому $v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}\,dy=$

$=\int y\,dy=\frac{y^2}{2}+C(x)$.

Звертаємо увагу, що стала C є сталою лише стосовно y, і може залежати від x.

Залишилось знайти $C(x)$. Підставимо $v(x,y)$ у другу УК-Р: $\quad x=-(0+C'(x))$

тобто $\quad C'(x)=-x\;;\quad C(x)=-\frac{x^2}{2}+C$

$v(x,y)=\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+C$. Отже

$\boxed{\text{Д/З } 4.11 \text{ а)–г)}}$

~~$f(x,y)$~~ $f=xy+i\left(\frac{y^2-x^2}{2}+C\right)$, де $C\in\mathbb{R}$ — довільна стала.

Заув. Іноді задають початкову умову $f(z_0)=w_0$, з якої знаходиться стала C. Наприклад, з умови $f(0)=0$ випливало би, що $C=0$. (тут $0=0+i0$, тобто $x=0$, $y=0$)