Степеневі ряди

Уважно читаємо із підручника ст. 73–84.
Особливу увагу приділяємо формулі Коші–Адамара та теоремі Тейлора.

В рамках теми розглянемо 2 типи завдань:

1) для заданого степеневого ряду знайти множину збіжності (<u>всі</u> значення z, при яких ряд збіжний);
2) розвинути задану аналітичну в околі точки z_0 функцію у степеневий ряд.

Аналогічна тема з аналогічними завданнями, формулами та методами у Вас мала бути в мат. аналізі. Пригадайте!

~~Отже~~, степеневий ряд (СР) це

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ де } a_n \in \mathbb{C},\ z_0 \in \mathbb{C}.$$

Він точно

<u>збіжний в</u> $\{z : |z-z_0| < R\}$ (круг збіжності)
<u>розбіжний в</u> $\{z : |z-z_0| > R\}$

на колі $\{z : |z-z_0| = R\}$ можуть бути як точки збіжності, так і розбіжності. R можна знайти за ф-лою Коші–Адамара

$$\boxed{\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$. Якщо при дослідженні

користатись не ознакою Коші (як в підручнику), а ознакою д'Аламбера (зробіть це!), то можна отримати ще одну ф-лу для радіуса збіжності:

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

(за умови, що границя існує — скінченна чи нескінченна).

Ця формула зручна у випадках, коли $\sqrt[n]{|a_n|}$ не дуже добувається (найчастіше, якщо a_n містить $(n!)$).

Щоб знайти множину збіжності (СР) треба спершу знайти радіус збіжності (РЗ) за однією з двох формул. Якщо $R=0$, то радіємо, бо ряд збіжний <u>тільки</u> в т. z_0; якщо $R=+\infty$, то теж радіємо, (СР) збіжний скрізь — кінець прикладу; якщо ж $R\in(0;+\infty)$, то ряд збіжний в крузі збіжності, розбіжний в $\{z: |z-z_0|>R\}$, а на колі $\{z: |z-z_0|=R\}$ — треба досліджувати далі. А це "далі" зазвичай найнеприємніша частина.

Пр1. Знайти множину збіжності

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

В нашому випадку $z_0=0$, $a_n=\frac{1}{2^n}$.

За ФК-А $R=\dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|}}=2$.

Тому (СР) збіжний в крузі $\{z: |z|<2\}$.
Але це точки збіжності можуть бути на колі $|z|=2$. Нехай z – така точка. Тоді

$\left|\frac{z^n}{2^n}\right|=\frac{|z|^n}{2^n}=\frac{2^n}{2^n}=1 \not\to 0$, $n\to\infty$. Оскільки скрізь на колі $|z|=2$ не виконується НУЗР, то множина збіжності $\underline{\{z: |z|<2\}}$.

Пр2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n\cdot n^2}$

$a_n=\frac{1}{2^n\cdot n^2}$, $z_0=0$.

$$\frac{1}{R}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n\cdot n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow R=2.$$

Знову треба дослідити на колі $|z|=2$. Нехай z – довільна точка з цього кола. Оскільки

$\left|\frac{z^n}{2^n\cdot n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ – збіжний, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n \cdot n^2}$ – збіжний абсолютно (а отже і збіжний) $\forall z \in \{z : |z| = 2\}$. Тому множина збіжності $\{z : |z| \le 2\}$.

Пр 3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n \cdot n}$

$z_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n \cdot n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}; \quad R = 2.$$

Знову дослідимо на колі $|z| = 2$. Оскільки $\left|\frac{z^n}{2^n \cdot n}\right| = \frac{1}{n}$, то НУЗР виконується, але ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний. Тобто, якщо (СР) і збіжний на колі $|z| = 2$, то лишень умовно, а не абсолютно. Для умовної збіжності треба окремо мати дійсну та уявні частини. Тому запишемо $z \in \{z : |z| = 2\}$ у тригонометричній формі $z = 2(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$. Тоді

$$\frac{z^n}{2^n \cdot n} = \frac{2^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)}{2^n \cdot n} = \frac{\cos n\varphi}{n} + i\,\frac{\sin n\varphi}{\varphi}.$$

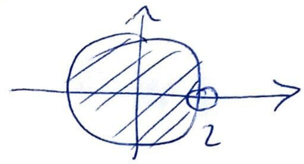
При $\varphi \ne 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ обидва ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}$ та

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}$ умовно збіжні за ознакою Діріхле.

При $\varphi = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, отримаємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний. Значенню $\varphi = 2\pi k$ відповідає $z = 2$.

Тому, множина збіжності (СР) –

$\{ z : |z| \leq 2 \} \setminus \{2\}$



Підсумуємо: 1) шукаємо радіус, маємо круг збіжності

2) якщо треба досліджувати на колі, то

а) перевіряємо НУЗР (якщо не виконується – кінець)

б) перевіряємо абсолютну збіжність (якщо абс. зб., то теж кінець)

в) якщо ні а) ні б), то → в тригонометричній і на умовну збіжність за Діріхле)

Пр4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^n}$

$z_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n^n}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow R = +\infty$$

Пощастило! Множина збіжності $\mathbb{C}$.

Пр 5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n!\cdot(\cancel{z} - 1+2i)^n$

$a_n = n!$; $z_0 = 1-2i$

Наявність $n!$ натякає на формулу типу д'Аламбера (альтернатива — ф-ла Стірлінга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$, $n\to\infty$ з ф-лою Коші - Адамара).

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0.$$

Отже ряд збіжний тільки в т. $z_0 = 1-2i$.

Д/З 5.4 ; $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$

Переходимо до другого типу завдань: розвинути ф-цію у (СР). Теорема Тейлора стверджує, що аналітична в крузі $\{z : |z-z_0| < R\}$ ф-ція $f(z)$ розвивається у цьому крузі в (СР) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, де

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Для функцій, похідну довільного порядку яких ми можемо легко знайти, користаємось останньою формулою.

Пр6. $f(z)=e^z$ розвинути в околі т. $z_0=0$.

◁ Оскільки e^z – аналітична в $\mathbb{C}$ (тобто ціла ф-ція), то за Th Тейлора отримане розвинення правильне для всіх $z\in\mathbb{C}$.

$$f^{(n)}(z)=e^z; \quad f^{(n)}(z_0)=e^z\Big|_{z=0}=e^0=1$$

Тому $$\boxed{e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}}.$$ ▷

Вправа. Отримайте аналогічні розвинення для ф-цій а) $\sin z$; б) $\cos z$;

" в) $\operatorname{sh} z$; г) $\operatorname{ch} z$;

д) $\dfrac{1}{1-z}$.

Особливу увагу – прикладу д)!

Якщо $*$ знаходження $f^{(n)}(z)$ видається складним, то використовуємо результати Пр6 + а) + б) + в) + г) + д).

Пр7. $f(z)=z\cdot e^{z^2}$ розвинути в околі $z_0=0$.

◁ Похідну довільного порядку від добутку не дуже кортить рахувати (хоч ф-лу Лейбніца ніхто не відміняв). Але можна скористатись результатом Пр 4. Тоді

$$z\cdot e^{z^2} = z\cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!} = \cancel{\left[\begin{matrix} n+1=k \\ n=k-1\end{matrix}\right]} \cancel{= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(k-1)!}}$$

для всіх $z\in\mathbb{C}$. ▷

Зауважимо, що для $|z|<1$

$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots =$ [сума нескінченної спадної геометричної прогресії: ми переконувались, що шкільна ф-ла спрацьовує] $=$

$= \dfrac{1}{1-z}$ (до речі, це відповідь на вправу д)).

На практиці дуже часто доводиться користуватися саме розвиненням

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad |z|<1.} \quad (*)$$

Пр 5.6а) Розвинути у (СР) в околі $z=0$ ф-цію $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$.

◁ На перший погляд все просто. Із ф-ли (*) маємо

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2, \quad |z|<1.$$

Проте на практиці множення рядів (і, зокрема, піднесення до квадрату) не так просто здійснити. Для цього слід кожен ~~д~~ доданок однієї суми помножити на кожен доданок іншої. Тобто отримаємо ряд, що складається з рядів. Чому дорівнюють коефіцієнти a_n в цьому ряді (переконайтесь, що це буде степеневий ряд) — не дуже зрозуміло. Тому, якщо можливо, раджу уникати множення рядів.

Зауважимо, що $\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2} = f(z)$, а в крузі збіжності (СР) можна почленно диференціювати (довільну кількість разів), причому круг збіжності — незмінний. Тому

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^n)' =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot z^{n-1} = \begin{bmatrix} n-1=k \\ n=k+1 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) z^k, \quad |z|<1.$$

Тут вже зрозуміло, що $a_n = n+1$. $\triangleright$

Пр 5.6 д) Розвинути ф-цію $f(z) = \frac{1}{z^2-b^2}$ ~~за~~ за степенями z при $|z|>|b|$.

$\triangle$ Насправді, як ми згодом переконаємось, у відповіді буде узагальнений степеневий ряд.

Хоч такі ряди будуть предметом розгляду наступного заняття, та ми знайомі з ними з теорії. Хочемо скористатись ф-лою (*), але там важливо, що один із доданків у знаменнику — одиниця, а у нас є z^2 та $(-b^2)$. Тому слід винести за дужки, а заразом і за дріб один з цих доданків. Якщо винесемо $(-b^2)$, то отримаємо

$$\frac{1}{z^2-b^2} = -\frac{1}{b^2}\,\frac{1}{1-\left(\frac{z}{b}\right)^2}$$, тобто в ролі z із (*)

виступає $\left(\frac{z}{b}\right)^2$. Але в умові $|z|>|b|$. Тому

$\left|\left(\frac{z}{b}\right)^2\right| = \left(\frac{|z|}{|b|}\right)^2 > 1$, а ф-ла (*) виконується при $|z|<1$. Тобто вибір невдалий.

Отже, спробуємо винести z^2. Тоді

$$\frac{1}{z^2-b^2} = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-\left(\frac{b}{z}\right)^2}.$$ З умови $|z|>|b|$ випливає, що $\left|\left(\frac{b}{z}\right)^2\right|<1$ (як нам і треба). Використовуючи (*), де в ролі z маємо $\left(\frac{b}{z}\right)^2$ отримуємо

$$\frac{1}{z^2-b^2} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{b}{z}\right)^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{b}{z}\right)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b^{2n} z^{-2n-2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} -2n-2=-2(n+1) - \text{парне число, а тому перепозначимо його} \\ -2(n+1)=2k \Rightarrow n=-k-1 \end{array}\right] =$$

$n=0 \Rightarrow k=-1$

$n=+\infty \Rightarrow k=-\infty$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} b^{-2(k+1)} z^{2k}$$

$\triangleright$

Пр 5.7 в) Розвинути в ряд Тейлора в околі $z=0$

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2-1)}$$

$\triangleleft$ В загальному випадку раціональну ф-цію $\frac{P(z)}{Q(z)}$, де P, Q - поліноми, радять розвивати так: знаменник на множники вигляду $(z-z_j)$, тоді $\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_j \frac{A_j}{z-z_j}$ - сума простих дробів (пригадайте алгебру чи мат. аналіз). Далі з кожним із доданків так:

$$\frac{A_j}{z-z_j} = -\frac{A_j}{z_j} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{z_j}} = -\frac{A_j}{z_j} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{z}{z_j}\right)^n \text{ (за ф-лою (*))}.$$

Проте, якщо простіше можна отримати в знаменнику вираз $1-\left(\frac{z}{z_j}\right)^k$, то отримуємо його простіше і застосовуємо (*). Тобто

$$f(z) = \frac{-z}{1-z^4} = -z\sum_{n=0}^{+\infty} (z^4)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n+1}, \quad |z|<1.$$

$\triangleright$

Пр 5.7 г) $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$

$\triangleleft$ За стандартною схемою $z^2+z+1 = (z-z_1)(z-z_2)$, де $z_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $z_2 = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$. Проте незовсім квадрат суми пам'ятаємо зі школи за ф-лою $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Домножимо чисельник та знаменник на $(1-z)$. Отримаємо

$$f(z)=\frac{1-z}{1-z^3}=(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty}(z^3)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{3n}-\sum_{n=0}^{+\infty}z^{3n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n\ ,\quad |z|<1\ ,\text{ де}$$

$$a_n=\begin{cases}1 & ,\ n=3k\\ -1 & ,\text{ при } n=3k+1\\ 0 & ,\text{ при } n=3k+2\end{cases}$$

$\triangleright$

<u>Пр 5.7д)</u> $f(z)=\cos^3 z$

$\triangleleft$ Із вправи в) знаємо розвинення для $\cos z$ (див. також 5.5в)). Проте пам'ятаємо, що просто піднести його до кубу — не варіант. З відомої ф-ли $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ маємо

$$f(z)=\cos^3 z=\frac{1}{4}(\cos 3z+3\cos z)=\frac{1}{4}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}}{(2n)!}z^{2n}+3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\Big)=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{3^{2n}+3}{(2n)!}\Big)\cdot z^{2n}\ ,\quad z\in\mathbb{C}.\ \triangleright$$

<u>Пр 5.7ж)</u> $f(z)=\cos z\cdot \operatorname{ch} z$

$\triangleleft$ Хоч розвинення для $\cos z$ та $\operatorname{ch} z$ — відомі, та перемножувати їх не дуже кортить (самі варто спробуйте). А тому пригадаємо, що

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}\ ,\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$ Отже

$$f(z)=\frac{1}{4}(e^{z}+e^{-z})(e^{iz}+e^{-iz})=\frac{1}{4}\left(e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z}+e^{(-1+i)z}+e^{(-1-i)z}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n+(1-i)^n+(-1+i)^n+(-1-i)^n}{n!}z^n\right)$$

Можна було б залишити і в такому вигляді, проте зрозуміло, що коефіцієнти розвинення a_n мають бути чисто дійсними (при $z=x\in\mathbb{R}$ — $\cos z$ та $\operatorname{ch} z$ — дійсні ф-ції). Тому обчислимо коефіцієнти a_n, записавши кожен з 4-ох доданків у тригонометричній формі:

$$(1+i)^n+(1-i)^n+(-1+i)^n+(-1-i)^n=\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n+\left(\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^n+$$

$$+\left(\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)^n+\left(\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{3\pi i}{4}}\right)^n=\sqrt{2^n}\left(e^{i\frac{\pi n}{4}}+e^{-\frac{i\pi n}{4}}+e^{i\frac{3\pi n}{4}}+e^{-i\frac{3\pi n}{4}}\right)=$$

$$=\sqrt{2^n}\left(2\cos\frac{\pi n}{4}+2\cos\frac{3\pi n}{4}\right)=\sqrt{2^n}\cdot 2\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi n}{2}\cdot\cos\frac{\pi n}{4}=$$

$$=\begin{cases}(-1)^k\cdot 4\sqrt{2^n}, & \text{при } n=4k\\ 0, & \text{при } n=4k+1\\ 0, & \text{при } n=4k+2\\ 0, & \text{при } n=4k+3\end{cases}=\begin{cases}(-1)^k\cdot 2^{2k}\cdot 4, & \text{при } n=4k;\\ 0, & \text{при } n\neq 4k.\end{cases}$$

Тому

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\cdot 2^{2k}\cdot z^{4k},\quad z\in\mathbb{C}.$$

▷

Зауваження 1. Результат прикладу 5.6а) теж варто запам'ятати та використовувати на практиці, як і розвинення із Вправи а), б), в), г), д).

Д/З 5.4, 5.5, 5.6, 5.7.