МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет механіко-математичний

Кафедра математичної статистики та диференціальних рівнянь

**Затверджено**

на засіданні кафедри математичної статистики

та диференціальних рівнянь

факультету механіко-математичного

Львівського національного університету

Імені Івана Франка

(протокол № 1 від 4 вересня 2020 року)

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Бугрій О.М.

**Силабус з навчальної дисципліни**

**«Математична статистика»**

**що викладається в межах ОПП (ОПН)**

**«Прикладна та теоретична статистика»**

**першого (бакалавського) рівня вищої освіти для здобувачів з**

**спеціальності «Статистика»**

**Львів**

|  |  |
| --- | --- |
| **Назва дисципліни** | Математична статистика |
| **Адреса викладання дисципліни** | Львівський національний університет ім. Івана Франка |
| **Факультет та кафедра за якою закріплена дисципліна** | Механіко-математичний факультет, кафедра математичної статистики та диференціальних рівнянь |
| **Галузь знань, шифр та назва спеціальності** | «Математика та статистика» -11, «Статистика» -111 |
| **Викладачі дисципліни** | Базилевич Ірина Богданівна, канд. фіз. -мат. наук, доцент, доцент |
| **Контактна інформація викладачів** | iryna.bazylevych@lnu.edu.ua, сайт кафедри «Математична статистика та диференціальні рівняння» механіко-математичного факультету Львівського національного університету ім. Івана Франка |
| **Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються** | Вівторок, 16.30. (он-лайн на даний момент або 267 ауд., головний корпус Львівського національного університету ім. Івана Франка) Можливі консультації в інші дні при узгодженні викладача та студентів. |
| **Сторінка дисципліни** | Сайт кафедри математичної статистики та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Львівського національного університету ім. Івана Франка |
| **Інформація про дисципліну** | Дисципліна «Математична статистика» є нормативною дисципліною з спеціальності «Статистика» для освітньої програми «Статистика в ІТ», яка викладається в 7 і 8 семестрі в обсязі 4 і 3,5 кредитів (за Європейською Кредитно-Транссферною Системою ECTS) |
| **Коротка анотація дисципліни** | У математичній статистиці досліджуються результати експериментальних або спостережуваних даних ймовірнісно-математичними методами. На основі них отримують висновки про основні числові характеристики вибірок, невідомі параметри розподілів, вид розподілу, однорідність, випадковість, незалежність  |
| **Мета вивчення дисципліни** | У сучасному світі величезне значення має обробка великих масивів даних. Математична статистика ймовірнісно-математичними методами здійснює аналіз масивів даних. Студенти вивчають методи аналізу даних і здійснення висновків з результатів аналізу. |
| **Література для вивчення дисципліни** | 1. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. – М.: Высш. Шк.., 1984, - 248 с.
2. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков А.В. Сборник задач по математической статистике. - М.: Высш. Шк.., 1989, - 255 с.
3. В.М. Турчин Математична статистика в прикладах і задачах. – К.:НМК ВО, 1993 – 164 с.
4. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. – М.: Высш. Шк.., 2010, - 600 с.
5. Постовалов С.И., Чимитова Е.В., Карманов В.С. Математическая статистика. Новосибирск, 2012 – 159 с.
6. Збірник задач з теорії ймовірностей під ред. Скорохода А.В. – К.: Вища школа, 1976, 384 с.
7. Коршунов Д.А., Чернова Н.И. Сборник задач и упражнений по математической статистике. \_ Новосибирск, - узд. Ин-та математики, 2004. – 128 с.
 |
| **Обсяг курсу**  | 168 годин аудиторних. З них - 48(7 семестр )+28 (8 семестр) лекцій, 32 (7 семестр) + 28 (8 семестр) та 81 годин самостійної роботи. |
| **Очікувані результати** | Після завершення цього курсу студент повиненЗнати – основні статистичні методи дослідження даних, основні характеристики описової статистики, методи знаходження оцінок невідомих параметрів, методи побудови інтервалів надійності, критерії перевірки статистичних гіпотез.Уміти знаходити характеристики описової статистики, знаходити оцінки невідомих параметрів відомих розподілів, перевіряти їх властивості, знаходити інтервали надійності невідомих параметрів, перевіряти статистичні гіпотези |
| **Ключові слова** | Вибірка, реалізація вибірки, середнє, вибірка дисперсія, незміщена оцінка дисперсії, мода, медіана, статистика, незміщена оцінка, асимптотично незміщена оцінка, оптимальна оцінка, ефективна оцінка, експоненціальні моделі, регулярні моделі, функція правдоподібності, метод моментів, метод максимальної правдоподібності, статичні гіпотези, критерії для перевірки статистичних гіпотез |
| **Формат курсу** | ОчнийПроведення лекцій, практичних занять та консультацій для кращого розуміння тем |
| **Теми** |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тиж- день | Тема | Форма | Літера- тура | Завдання | Термін вико- нання |
|  | 1 семестр |  |  |  |  |
| 1,2 | Описова статистика | 2 лекції, 1прак- тика |  | На основі вибірок знайти параметри описової статистики | 1 тиж-день |
| 2 | Основні статистичні моделі. Моделювання вибірок | 1 лекція, 1 прак- тика | [1],[4], [5], [2] | Змоделювати вибірки з різних роз-поділів | 1 тиж- день |
| 3 | Порядкові статистики | 1 лек-ція, 1 практ. | [1], [2],[4], [7] | Знайти порядкові статистики | 1 тиж- день |
| 3,4 | Емпірична функ. розподілу, граничні теореми. Вибіркові характеристики | 2 лек-ції,1 прак-тика | [1], [2],[4] | Знайти розподіли вибіркових характер-ристик | 1 тиждень |
| 5 | Вибіркові квантилі та їх асимптотичність | 1 лек-ція, 1 прак-тика | [1], [2],[4] | Знаходження асимптоти-ності вибіркових квантилей | 1 тиж- день |
| 5,6 | Розподіли хі-квадрат, Стьюдента, Фішера. Лінійні та квадратичні форми від нормально розподілених вибірок | 2 лек-ції, 1 прак-тика | [1], [2],[4], [6] | Знаходження розподілів для лінійних та квад-ратичних форм для вибірок з нормального розподілу  | 1 тиж-день |
| 7,8 | Статистичні оцінки. Типи і їх властивості | 2лек-ції, 1 прак-тика | [1], [2],[4],[3] | Визначення типів оцінок | 1 тиж-день |
| 8 | Функція правдоподіб-ності та її властивості. Теорема Рао-Крамера | 1 лек-ція, 1 прак-тика | [1], [2], [3,],[4], [7] | Знаходження функції правдоподіб- ності, ін- формації за Фішером, перевірка та ефективність | 1 тиж- день |
| 9 | Достатні статистики і оптимальні оцінки | 1 лек-ція, 1 прак-тика | [1], [2], [4],[7] | Знаходження достатніх статистик | 1 тиж-день |
| 9, 10 | Метод моментів, метод максимальної правдоподіб-ності | 1 лек-ція, 1 прак-тика | [1], [2], [3,],[4]/ [7] | Визначення оцінок методом моментів і методом максимальної правдоподіб-ності | 1 тиж день |
| 10, 11 | Інтервали надійності | 2 лек-ції, 1 прак-тика | [1], [2], [4] | Знаходження інтервалів надійності | 1 тиж-день |
| 11, 12 | Поняття про статистичні гіпотези. Основні характеристики статистичних гіпотез | 2 лек-ції, 1 прак-тика | [1], [2], [3,],[4] | Визначення потужності гіпотези | 1 тиж-день |
| 13, 14 | Гіпотези про вид розподілу | 2 лекції,1прак-тика | [1], [2], [3,],[4] | Перевіряємо гіпотезу чи дана вибірка є з певного заданого розподілу | І тиждень |
| 14 | Гіпотези однорідності | 1 лек-ція, 1 прак-тика | [1], [2], [3,],[4] | Перевірка гіпотези про однорідність вибірок | 1 тиж-день |
| 15, 16 | Гіпотези незалежності | 2 лек-ції, 1 прак- ка | [1], [2], [3,],[4] | Перевірка гіпотези про незалежність | 1 тиж-день |
| 16 | Гіпотези випадковості | 1 лек-ція, 1 практ. | [1], [2], [3,],[4] | Перевірка гіпотези про випадковість | 1 тиж-день |

 |
| **Підсумковий контроль** | 1 семестр - практика, 2 семестр – іспит комбінований |
| **Пререквізити** | Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з теорії ймовірностей, математичного аналізу, алгебри, диференціальних рівнянь, теорії міри, функціонального аналізу, достатніх для сприйняття категоріального апарату математичної статистики. |
| **Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватись під час викладання курсу** | Читання лекцій з використання презентацій, застосування програмних методів для розв’язування задач, проектно-орієнтовне навчання. |
| **Необхідне обладнання** | Практичні заняття проводяться в комп’ютерних лабораторіях |
| **Критерії оцінювання** | Оцінювання проводиться за 100-бальною системою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням: 7 семестр* Практичні самостійні тощо – 50 % семестрової оцінки, максимальна кількість балів – 50
* Контрольні заміри – 50 % семестрової оцінки, максимальна кількість – 50

8 семестр* Практичні самостійні тощо – 5 % семестрової оцінки, максимальна кількість балів – 25
* Контрольні заміри – 25 % семестрової оцінки, максимальна кількість -25
* Іспит – 50 % семестрової оцінки. Максимальна кількість – 50 балів
 |
| **Питання до екзамену** | **1семестр.** Теорія.1 частина.ВСТУП1. Вибірка, реалізації вибірки, об’єм вибірки.
2. Основні задачі математичної статистики.

ОПИСОВА СТАТИСТИКА1. Варіанта, частота, відносна частота.
2. Статистичний ряд, варіаційний ряд, емпірична функція розподілу, полігон частот.
3. Згрупований статистичний ряд, гістограма.
4. Середнє значення, вибіркова дисперсія, середньоквадратичне відхилення, асиметрія, ексцес, мода, медіана, квантилі.

АНАЛІТИЧНА СТАТИСТИКА.1. Порядкові статистики. Означення.
2. Розподіл максимуму та мінімуму.
3. Варіаційний ряд вибірки.
4. Розподіл порядкових статистик.
5. Емпірична функція розподілу.
6. Теорема про збіжність емпіричної функції розподілу до теоретичної функції розподілу за ймовірністю.
7. Теорема Глівенка (без доведення).
8. Теорема Колмогорова (без доведення).
9. Теорема Смірнова (без доведення).
10. Означення початкового та центрального вибіркового моменту.
11. Означення середнього та вибіркової дисперсії, незміщеної оцінки дисперсії.
12. Математичне сподівання та дисперсія середнього.
13. Збіжність за ймовірністю вибіркових моментів та функцій від них.
14. Асимптотична нормальність вибіркових моментів.
15. Вибіркові квантилі та їх асимптотична нормальність.
16. Граничні розподіли крайніх членів варіаційного ряду.
17. Розподіл хі-квадрат
18. Розподіл Стьюдента
19. Розподіл Фішера.
20. Означення квадратичних та лінійних форм від нормальних випадкових величин.
21. Лема про незалежність квадратичних та лінійних форм якщо добуток відповідних матриць дорівнюють нулю.
22. Лема про незалежність квадратичних форм, якщо добуток відповідних матриць дорівнюють нулю.
23. Лема про розподіл квадратичної форми для ідемпотентної матриці.
24. Теорема про розподіл квадратичної форми для вибірки з нормального розподілу.
25. Теорема про незалежність середнього та вибіркової дисперсії і відповідні розподіли.
26. Теорема про розподіл частки центрованого середнього і середньо-квадратичного відхилення.
27. Теорема про розподіл частки різниці середніх і кореня суми вибіркових дисперсій.
28. Теорема про розподіл частки вибіркових дисперсій.
29. Означення незміщеної оцінки, узгодженої оцінки, оптимальної оцінки, асимптотично незміщеної оцінки.
30. Теорема про єдиність оптимальної оцінки.
31. Приклад параметричної функції для якої не існує незміщеної оцінки.

2 частина.1. Теорема про оптимальну оцінку лінійної комбінації статистик для оптимальних оцінок.
2. Означення функції правдоподібності та її властивості.
3. Нерівність Рао-Крамера.
4. Означення ефективної оцінки.
5. Експоненціальна модель.
6. Критерій Бхатачарія.
7. Критерій оптимальності для векторного параметра.
8. Означення достатньої статистики та критерій факторизації.
9. Теорема Рао-Блекуелла-Колмогорова.
10. Теорема про повну достатню статистику.
11. Навести приклад достатньої статистики, яка не є повною.
12. Означення та приклади методу максимальної правдоподібності.
13. Принцип інваріантності для оцінки, отриманої методом максимальної правдоподібності.
14. Метод накопичення для наближеного обчислення оцінки максимальної правдоподібності.
15. Асимптотичні властивості методу максимальної правдоподібності.
16. Приклад моделі для якої оцінка м.м.п. не є асимптотично нормальною.
17. Метод моментів і його обґрунтування.
18. Метод мінімуму хі-квадрат.
19. Мультиполіноміальні оцінки.
20. Інтервальне оцінювання . Постановка задачі.
21. Побудова інтервалу надійності за допомогою центральної статистики.
22. Побудова інтервалу надійності з використанням точкової оцінки параметра та асимптотичної нормальності.

Практика.1. Уміти знаходити усі характеристики для описової та аналітичної статистики (статистичний ряд, варіаційний ряд, ….)
2. Уміти знаходити порядкові статистики та їх розподіли.
3. Уміти знаходити квантилі.
4. Уміти знаходити щільності розподілу хі-квадрат, Стьюдента, Фішера.
5. Уміти знаходити оцінки методом моментів. Методом максимальної правдоподібності.
6. Уміти перевіряти оцінки на незміщеність, асимптотичну незміщеність, узгодженість, оптимальність, ефективність.
7. Уміти знаходити достатню статистику.
8. Уміти перевіряти розподіли на експоненціальність та знаходити звідти ефективні оцінки.
9. Уміти знаходити достатні статистики.
10. Уміти будувати інтервали надійності використовуючи центральну статистику та розподіл точкових оцінок.

II СЕМЕСТР**Теорія**1. Поняття про статистичні гіпотези.
2. Означення помилки першого роду.
3. Означення помилки другого роду.
4. Критерії згоди та їх основні характеристики.
5. Означення статистики критерію.
6. Означення критичної області.
7. Означення рівня значущості.
8. Означення функції потужності критерію.
9. Означення потужності критерію.
10. Умова незміщеності критерію.
11. Критерій згоди Колмогорова.
12. Критерій згоди хі-квадрат К. Пірсона. Постановка задачі. Статистика критерію для випадку, коли гіпотетичний розподіл заданий однозначно.
13. Гранична теорема для розподілу статистики критерію.
14. Теорема про узгодженість критерію хі-квадрат.
15. Критерій згоди хі-квадрат для випадку, коли гіпотетичний розподіл не задається однозначно.
16. Критерій згоди квантилів.
17. Критерій згоди хі-квадрат для неперервних розподілів. Питання його узгодженості.
18. Критерій згоди. Симетричні статистики в схемі групування.
19. Критерій згоди порожніх ящиків.
20. Асимптотична поведінка потужності критерію порожніх ящиків.
21. Критерій згоди. Загальні симетричні критерії.
22. Гіпотеза однорідності. Постановка задачі.
23. Гіпотеза однорідності. Критерій Смірнова.
24. Гіпотеза однорідності. Критерій хі-квадрат.
25. Гіпотеза однорідності. Критерій порожніх блоків.
26. Гіпотеза однорідності. Критерій серій.
27. Гіпотеза однорідності. Рангові критерії.
28. Гіпотеза незалежності. Постановка задачі.
29. Гіпотеза незалежності. Критерій хі-квадрат.
30. Гіпотеза незалежності. Критерій Спірмена.
31. Гіпотеза незалежності. Критерій Кендалла.
32. Гіпотеза випадковості.
33. Поняття параметричної гіпотези.
34. Критерії перевірки гіпотез.
35. Означення простої гіпотези.
36. Означення складної гіпотези.
37. Загальний принцип вибору критичної області.
38. Рівномірно найпотужніші критерії.
39. Вибір з двох простих гіпотез. Критерій Неймана-Пірсона.
40. Критерій Неймана-Пірсона для дискретних розподілів.
41. Складні гіпотези. Рівномірно найпотужніший критерій проти складних альтернатив.
42. Перевірка простої гіпотези проти двосторонньої альтернативи. Рівномірно найпотужніші незміщені критерії.
43. Локально найпотужніші критерії.
44. Перевірка гіпотез та інтервали надійності.
45. Критерій відношення правдоподібності.
46. Критерій відношення правдоподібності для великих вибірок.
47. Асимптотичні властивості критерію відношення правдоподібності.
48. Теорема про близькі альтернативи критерію відношення правдоподібності.
49. Поняття про послідовний аналіз.
50. Означення критерію Вальда.
51. Про кількість спостережень в критерії Вальда.
52. Про вибір границь в критерії Вальда.
53. Про середню кількість спостережень в критерії Вальда.

**ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА.**1. Для текстово поставлених задач сформулювати нульову та альтернативну гіпотезу. Уміти знаходити ймовірності помилки першого та другого роду.
2. Знати статистики для усіх критеріїв, які ми розглядали.
3. ОБОВ’ЯЗКОВО ЗНАТИ УСІ РОЗПОДІЛИ З ЇХ ЗАКОНАМИ РОЗПОДІЛУ АБО ЩІЛЬНОСТЯМИ, МАТЕМАТИЧЕНИМ СПОДІВАННЯМ ТА ДИСПЕРСІЄЮ!!!!!!
4. Уміти перевіряти статистичні гіпотези.
5. Знати різницю між квантилем розподілу та верхньою -межею.
6. Уміти знаходити емпіричну функцію розподілу.
7. Уміти будувати функцію відношення правдоподібності.
8. Уміти користуватись статистичними таблицями.

  |
| **Опитування** | Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано в кінці вивчення курсу. |