

Мішані задач для рівняння коливання струни з однорідними крайовими умовами. Метод рядів Фур'є

Завдання: Знайти *сильно узагальнений* розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q := (0, l) \times (0, T], \quad (1)$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0, T], \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

де

- $l > 0, T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,
- $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ – сталі такі, що $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0, |\alpha_1| + |\beta_1| > 0, \alpha_0 \beta_0 \leq 0, \alpha_1 \beta_1 \geq 0,$
- $\varphi, \psi \in L^2(0, l), f \in C([0, T]; L^2(0, l))$ – задані функції.

Розв'язування.

1-ий крок. Згідно з означенням сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливань є слабким розв'язком задачі Коші для відповідного диференціально-операторного рівняння. Запишемо ту задачу, слабкий розв'язок якої є сильно узагальненим розв'язком даної задачі. Для цього введемо оператор $A : D(A) \rightarrow L_2(0, l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \mid \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = 0, \alpha_1 v'(l) + \beta_1 v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \quad \forall v \in D(A), \quad (4)$$

а також позначення:

$$[0, T] \ni t \mapsto u(t) := u(x, t), \quad x \in [0, l]; \quad [0, T] \ni t \mapsto f(t) := f(x, t), \quad x \in [0, l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0, l].$$

Отже, задача (1) – (3) зводиться до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0, T], \quad (5)$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \quad (6)$$

Згідно з означенням сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) – це слабкий розв'язок задачі (5),(6). Тому будемо шукати сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3), використовуючи відомий процес знаходження слабого розв'язку задачі (5), (6).

2-ий крок. Оскільки оператор A задовольняє умову **(SNC)**, то існує ортонормована база $\{w_k\}$ в $H = L_2(0, l)$ і відповідна їй числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів і власних значень оператора A так, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \quad \text{причому } \lambda_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Всі власні значення є додатними, якщо або $\beta_0 \neq 0$, або $\beta_1 \neq 0$, і невід'ємними, зокрема, нуль є власним значенням, коли $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$.

Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2([0, l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$-w'' = \lambda w \Leftrightarrow w'' + \lambda w = 0, \quad x \in (0, l), \quad (7)$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 w'(0) + \beta_0 w(0) = 0, \quad \alpha_1 w'(l) + \beta_1 w(l) = 0. \quad (8)$$

Знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ так як це робилося на практичному занятті №7.

Принадно зауважимо, що задачу на знаходження власних значень і власних елементів оператора A , яка полягає у відшукуванні всеможливих значень параметра λ , при яких рівняння (7) має ненульові розв'язки, що задовольняють крайові умови (8), і знаходження цих розв'язків, називаємо *задачею Штурма-Ліувілля* і фактично розв'язуємо в просторі $C^2([0, l])$.

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\hat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x) dx, \quad \hat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x) dx, \quad \hat{f}_k(t) := \int_0^l f(x, t) w_k(x) dx, \quad t \in [0, T].$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x, t) \in [0, l] \times [0, T], \quad (10)$$

коефіцієнти $\{\hat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \hat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \hat{u}_k(t) = \hat{f}_k(t), & t \in (0, T], \\ \hat{u}_k(0) = \hat{\varphi}_k, \quad \hat{u}_k'(0) = \hat{\psi}_k, & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (11)$$

Ці рівності отримують так. Припустимо, що ряд (10) можна двічі почленно диференціювати, і підставимо цей ряд в рівняння (1) і початкові умови (3) замість u (крайові умови (2) для суми ряду виконуються за рахунок належності w_k до $D(A)$, $k \in \mathbb{N}$). Врахувавши розвинення φ, ψ і f в ряди Фур'є (див. (9)) і те, що

$$Aw_k = \lambda_k w_k \Rightarrow w_k''(x) = -\lambda_k w_k(x), \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N},$$

у результаті отримаємо рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\hat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \hat{u}_k(t)] w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k(t) w_k(x), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(0)w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}'_k(0)w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad x \in [0, l].$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність системи $\{w_k\}$, маємо рівності (11).

Дивлячись на рівності (11), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція \widehat{u}_k є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2 \lambda_k z = \widehat{f}_k(t), & t \in (0, T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \quad (12)$$

При наших умовах на φ, ψ і f ряд (10) збігається в просторі $C([0, T]; L^2(0, l))$, а значить, функція u належить цьому ж простору, тобто для функції u виконані всі умови означення сильно узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння коливань.

□

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q := (0, l) \times (0, T], \quad (13)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0, T], \quad (14)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (15)$$

де $l > 0, T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,

$$f(x, t) := x \sin t, \quad (x, t) \in Q, \quad \varphi(x) := x + 1, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0, l].$$

Розв'язування.

1-ий крок. Зведемо задачу (13) – (15) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор

$$A : D(A) \rightarrow L_2(0, l)$$

за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \mid v(0) = 0, v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \quad \forall v \in D(A), \quad (16)$$

а також позначення:

$$[0, T] \ni t \mapsto u(t) := u(x, t), \quad x \in [0, l]; \quad [0, T] \ni t \mapsto f(t) := f(x, t), \quad x \in [0, l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0, l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (13) – (15) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0, T], \quad (17)$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \quad (18)$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукування слабого розв'язку задачі (17), (18).

2-ий крок. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0, l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, & x \in (0, l), \\ w(0) = 0, & w'(l) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Далі знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (робиться це точно так, як в прикладі 7 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були використані при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (19) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (19), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \quad (20)$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i, \quad i - \text{уявна одиниця.}$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (20) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \quad (21)$$

де C_1, C_2 — відповідні сталі.

Знайдемо

$$w'(x) = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \quad (22)$$

і підставимо вирази (21) і (22) в крайові умови задачі (19):

$$\begin{cases} w(0) \equiv C_1 = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}l + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (23) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (23) маємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \cos \sqrt{\lambda}l = 0. \quad (24)$$

З рівняння $\cos \sqrt{\lambda}l = 0$, врахувавши те, що $\sqrt{\lambda}l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda}l = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Отож, ми знайшли власні значення оператора A .

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (21) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_2 \sin \sqrt{\lambda_k}x, \quad x \in [0, l], \quad (26)$$

де C_2 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\begin{aligned} \int_0^l |w_k|^2 dx = 1 &\Leftrightarrow C_2^2 \int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_k} x dx = 1 \Leftrightarrow C_2^2 \int_0^l \sin^2 \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x dx = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow C_2^2 \frac{l}{2} = 1 \Rightarrow C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}. \end{aligned}$$

Отож, ми встановили, що ортонормована база $\{w_k\}$ в $L^2(0, l)$ і числова послідовність $\{\lambda_k\}$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A , є такими:

$$\lambda_k = \left(\frac{-\pi + 2\pi k}{2l} \right)^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{-\pi + 2\pi k}{2l} x, \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

3-ій крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, T], \quad (28)$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_k &:= \int_0^l \varphi(x) w_k(x) dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{(-\pi + 2\pi k)} \left(1 + (-1)^{k+1} \frac{2l}{-\pi + 2\pi k} \right), \\ \widehat{\psi}_k &:= \int_0^l \psi(x) w_k(x) dx = 0, \\ \widehat{f}_k(t) &:= \int_0^l f(x, t) w_k(x) dx = (-1)^{k+1} \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\frac{2l}{-\pi + 2\pi k} \right)^2 \cdot \sin t = a_k \cdot \sin t, \quad t \in [0, T], \\ a_k &:= (-1)^{k+1} \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\frac{2l}{-\pi + 2\pi k} \right)^2. \end{aligned}$$

Тут ми використали результати розв'язування прикладу 7 практичного заняття №7.

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (13) – (15) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x, t) \in [0, l] \times [0, T], \quad (29)$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t \in (0, T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (30)$$

Знайдемо $\{\widehat{u}_k\}$. Дивлячись на рівності (30), бачимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція \widehat{u}_k (відповідний коефіцієнт ряду (29)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2 \lambda_k z = a_k \sin t, & t \in (0, T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \quad (31)$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2 \lambda_k z = 0. \quad (32)$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2 \lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a \sqrt{\lambda_k} i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin a \sqrt{\lambda_k} t, \quad t \in [0, T], \quad A_k, B_k \in \mathbb{R} - \text{довільні сталі,}$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (32).

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (31) шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k \sin t, \quad t \in [0, T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$z' = d_k \cos t, \quad z'' = -d_k \sin t \quad \Rightarrow \quad -d_k \sin t + a^2 \lambda_k d_k \sin t = a_k \sin t \Rightarrow (a^2 \lambda_k - 1) d_k = a_k \Rightarrow$$

$$d_k := \frac{a_k}{a^2 \lambda_k - 1} \quad (33)$$

(тут і далі припускаємо, що $a^2 \lambda_k - 1 \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$).

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin a \sqrt{\lambda_k} t + d_k \sin t, \quad t \in [0, T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (31). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих A_k, B_k . Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a \sqrt{\lambda_k} \sin a \sqrt{\lambda_k} t + a \sqrt{\lambda_k} B_k \cos a \sqrt{\lambda_k} t + d_k \cos t, \quad t \in [0, T].$$

Тоді

$$z(0) = A_k = \widehat{\varphi}_k,$$

$$z'(0) = a \sqrt{\lambda_k} B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a \sqrt{\lambda_k}},$$

а значить,

$$\widehat{u}_k(t) = \widehat{\varphi}_k \cos a \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a \sqrt{\lambda_k}} \sin a \sqrt{\lambda_k} t + d_k \sin t, \quad t \in [0, T].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі (13) – (15) є (див. (29)) сумою збіжного в просторі $C([0, T]; L^2(0, l))$ ряду

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\widehat{\varphi}_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin a\sqrt{\lambda_k}t + d_k \sin t \right) \sin \sqrt{\lambda_k}x, \quad t \in [0, T],$$

де $\lambda_k, \widehat{\varphi}_k, \widehat{\psi}_k, d_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ обчислюються за вище наведеними формулами. \square

Приклад 2. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q := (0, l) \times (0, T], \quad (34)$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0, T], \quad (35)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (36)$$

де $l > 0, T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,

$$f(x, t) := (x - 1)e^t, \quad (x, t) \in Q, \quad \varphi(x) := 0, \quad \psi(x) := 2x + 1, \quad x \in [0, l].$$

Розв'язування.

1-ий крок. Спочатку зведемо задачу (34) – (36) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \rightarrow L_2(0, l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \mid v'(0) = 0, v'(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \quad \forall v \in D(A) \quad (37)$$

і позначення:

$$[0, T] \ni t \mapsto u(t) := u(x, t), \quad x \in [0, l]; \quad [0, T] \ni t \mapsto f(t) := f(x, t), \quad x \in [0, l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0, l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (34) – (36) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0, T], \quad (38)$$

$$u'(0) = \varphi, \quad u'(l) = \psi. \quad (39)$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок даної задачі, використовуючи схему відшукування слабого розв'язку задачі (38), (39).

2-ий крок. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in C^2([0, l])$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, & x \in (0, l), \\ w'(0) = 0, & w'(l) = 0. \end{cases} \quad (40)$$

Шукаємо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (робимо точно так як в прикладі 8 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda \geq 0$ такі, що задача (40) має ненульові розв'язки. Розглянемо цю задачу у випадках: 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda > 0$.

1) Нехай $\lambda = 0$, тоді маємо рівняння

$$-w'' = 0.$$

Його повний загальний розв'язок має вигляд

$$w(x) = C_1x + C_2, \quad x \in [0, l], \quad C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Знайдемо ненульовий розв'язок задачі (40), підставивши цей вираз у крайові умови задачі (40). Отримаємо $C_1 = 0$, C_2 — ненульова стала, тобто

$$w_0(x) = C_2, \quad x \in [0, l],$$

де значення C_2 вибираємо за умови нормування

$$\int_0^l |w_0(x)|^2 dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 \int_0^l dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2^2 l = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{\frac{1}{l}}.$$

Отож, ми встановили, що власному значенню

$$\lambda_0 = 0 \tag{41}$$

відповідає власний елемент оператора A вигляду

$$w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad x \in [0, l]. \tag{42}$$

2) Тепер нехай $\lambda > 0$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (40), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \tag{43}$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i, \quad i - \text{уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (43) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{44}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$w'(x) = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \tag{45}$$

і підставимо вирази (44) і (45) в крайові умови задачі (40):

$$\begin{cases} w'(0) \equiv C_2 \sqrt{\lambda} = 0, \\ w'(l) \equiv -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}l + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \tag{46}$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (46) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки. Із системи (46) маємо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \neq 0, \quad \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \quad (47)$$

З рівняння $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$, врахувавши, що $\sqrt{\lambda} l > 0$, знаходимо

$$\sqrt{\lambda} l = \pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (48)$$

Отже, ми знайшли власні значення оператора A .

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (44) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$w_k(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad x \in [0, l], \quad (49)$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\begin{aligned} \int_0^l |w_k(x)|^2 dx = 1 &\Leftrightarrow C_1^2 \int_0^l \cos^2 \sqrt{\lambda_k} x dx = 1 \Leftrightarrow C_1^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi k}{l} x dx = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} C_1^2 \int_0^l \left(1 + \cos 2 \frac{\pi k}{l} x\right) dx = 1 \Leftrightarrow C_1^2 \frac{l}{2} = 1 \Rightarrow C_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}. \end{aligned}$$

Отже, ми знайшли ортонормовану базу $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ в $L_2(0, l)$ і відповідну їй числову послідовність $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$, складені, відповідно, з власних елементів та власних значень оператора A :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \\ w_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \sqrt{\lambda_k} x \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (50)$$

3-ий крок. Розвиваємо в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$ вхідні дані:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad t \in [0, T], \quad (51)$$

де

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_k &= \int_0^l \varphi(x) w_k(x) dx = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \widehat{\psi}_0 &:= \int_0^l \varphi(x) w_0(x) dx = \sqrt{\frac{1}{l}} \int_0^l (2x + 1) dx = \sqrt{\frac{1}{l}} (l^2 + l) = \sqrt{l} (l + 1), \\ \widehat{\psi}_k &= \int_0^l \psi(x) w_k(x) dx = 2 \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 ((-1)^k - 1), \quad k \in \mathbb{N} \\ \widehat{f}_0(t) &:= \int_0^l f(x, t) w_0(x) dx = a_0 e^t, \quad a_0 := \sqrt{l} \left(\frac{l}{2} - 1\right), \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

$$\widehat{f}_k(t) = \int_0^t f(x, t) w_k(x) dx = a_k \cdot e^t, \quad a_k := \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\frac{l}{\pi k} \right)^2 ((-1)^k - 1), \quad t \in [0, T], \quad k \in \mathbb{N}.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (34) – (36) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad t \in [0, T], \quad (52)$$

де функції $\{\widehat{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_0''(t) = \widehat{f}_0(t), & t \in (0, T], \\ \widehat{u}_0(0) = \widehat{\varphi}_0, \quad \widehat{u}_0'(0) = \widehat{\psi}_0, \end{cases} \quad (53)$$

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t \in (0, T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (54)$$

З (53) випливає, що функція \widehat{u}_0 (відповідний коефіцієнт ряду (52)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' = a_0 e^t, & t \in (0, T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_0, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_0, \end{cases} \quad (55)$$

а з (53) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція \widehat{u}_k (відповідний коефіцієнт ряду (52)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2 \lambda_k z = a_k e^t, & t \in (0, T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \quad (56)$$

Розв'яжемо спершу задачу (55). Для цього спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі, проінтегрувавши рівняння двічі:

$$z = a_0 e^t + A_0 t + B_0, \quad t \in [0, T],$$

де A_0, B_0 – довільні сталі.

Підставимо цей вираз повного загального розв'язку рівняння даної задачі в її початкові умови для знаходження значень сталих A_0, B_0 . Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = a_0 e^t + A_0, \quad t \in [0, T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv a_0 + B_0 = \widehat{\varphi}_0, \quad z'(0) \equiv a_0 + A_0 = \widehat{\psi}_0.$$

Звідси

$$A_0 = \widehat{\psi}_0 - a_0, \quad B_0 = \widehat{\varphi}_0 - a_0.$$

Отже,

$$\widehat{u}_0(t) = a_0 e^t + (\widehat{\psi}_0 - a_0)t + \widehat{\varphi}_0 - a_0, \quad t \in [0, T].$$

Тепер розв'яжемо задачу (56) для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2 \lambda_k z = 0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2 \lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a \sqrt{\lambda_k} i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin a \sqrt{\lambda_k} t, \quad t \in [0, T],$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок (неоднорідного) рівняння задачі (56) шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k e^t, \quad t \in [0, T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$\begin{aligned} z' = d_k e^t, \quad z'' = d_k e^t &\Rightarrow d_k e^t + a^2 \lambda_k d_k e^t = a_k e^t \Rightarrow (1 + a^2 \lambda_k) d_k = a_k \\ &\Rightarrow d_k := \frac{a_k}{1 + a^2 \lambda_k}. \end{aligned}$$

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin a \sqrt{\lambda_k} t + d_k e^t, \quad t \in [0, T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (56).

Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих A_k , B_k . Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a \sqrt{\lambda_k} \sin a \sqrt{\lambda_k} t + a \sqrt{\lambda_k} B_k \cos a \sqrt{\lambda_k} t + d_k e^t, \quad t \in [0, T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv A_k + d_k = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) \equiv a \sqrt{\lambda_k} B_k + d_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - d_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a \sqrt{\lambda_k}}.$$

Звідси маємо

$$\widehat{u}_k(t) = (\widehat{\varphi}_k - d_k) \cos a \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a \sqrt{\lambda_k}} \sin a \sqrt{\lambda_k} t + d_k e^t, \quad t \in [0, T].$$

Отож, сильно узагальнений розв'язок нашої задачі є (див. (52)) сумою збіжного в просторі $C([0, T]; L^2(0, l))$ ряду

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{1}{l}} [a_0 e^t + (\widehat{\psi}_0 - a_0) t + \widehat{\varphi}_0 - a_0] + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} [(\widehat{\varphi}_k - d_k) \cos a \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\widehat{\psi}_k - d_k}{a \sqrt{\lambda_k}} \sin a \sqrt{\lambda_k} t + d_k e^t] \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad (x, t) \in [0, l] \times [0, T]. \end{aligned}$$

□

Приклад 3. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q := (0, l) \times (0, T], \quad (57)$$

$$(u_x - h_1 u)|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0, T], \quad (58)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (59)$$

де $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані і фіксовані числа,

$$f(x, t) := 2x \cos t, \quad (x, t) \in Q, \quad \varphi(x) := \cos x, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0, l].$$

Розв'язування.

1-ий крок. Спочатку зведемо задачу (57) – (59) до задачі Коші для диференціально-операторного рівняння. Для цього введемо оператор $A : D(A) \rightarrow L_2(0, l)$ за правилом:

$$D(A) := \{v \in H^2(0, l) \mid v'(0) - h_1 v(0) = 0, v(l) = 0\}, \quad Av = -v'' \quad \forall v \in D(A), \quad (60)$$

і позначення

$$[0, T] \ni t \mapsto u(t) := u(x, t), \quad x \in [0, l]; \quad [0, T] \ni t \mapsto f(t) := f(x, t), \quad x \in [0, l];$$

$$\varphi := \varphi(x), \quad \psi := \psi(x), \quad x \in [0, l].$$

Отже, сильно узагальнений розв'язок задачі (57) – (59) є слабким розв'язком задачі

$$u'' + a^2 Au = f(t), \quad t \in (0, T], \quad (61)$$

$$u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi. \quad (62)$$

Знайдемо сильно узагальнений розв'язок вихідної задачі, використовуючи схему відшукування слабого розв'язку задачі (61), (62).

2-ий крок. Всі власні значення оператора є додатними, бо $\beta_0 \neq 0$. Для знаходження власних значень і відповідних їм власних елементів оператора A зауважимо, що на підставі означення цього оператора отримуємо, що операторне рівняння

$$Aw = \lambda w$$

еквівалентне задачі на знаходження розв'язку $w \in H^2(0, l)$ крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w, & x \in (0, l), \\ w'(0) - h_1 w(0) = 0, & w(l) = 0. \end{cases} \quad (63)$$

Далі знаходимо послідовності $\{w_k\}$ і $\{\lambda_k\}$ (це робиться точно так як в прикладі 9 на практичному занятті №7, але для повноти викладення повторимо частину тих міркувань, що були при розв'язуванні цього прикладу).

Отож, нам потрібно знайти числа $\lambda > 0$ такі, що задача (63) має ненульові розв'язки. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння задачі (63), яке можна записати у вигляді

$$w'' + \lambda w = 0. \quad (64)$$

Оскільки це є лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами, то для знаходження його повного загального розв'язку запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i, \quad i - \text{уявна одиниця.}$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (64) має вигляд

$$w(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \quad (65)$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо похідну

$$w'(x) = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, l], \quad (66)$$

і підставимо вирази (65) і (66) в крайові умови задачі (63):

$$\begin{cases} w'(0) - h_1 w(0) \equiv C_2 \sqrt{\lambda} - h_1 C_1 = 0, \\ w(l) \equiv C_1 \cos \sqrt{\lambda}l + C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases} \quad (67)$$

Наше завдання полягає у тому, щоби знайти значення $\lambda > 0$, при яких система рівнянь (67) стосовно C_1 і C_2 має ненульові розв'язки, а потім знайти ці ненульові розв'язки.

Система (67) є лінійною алгебраїчною системою стосовно C_1 і C_2 . Для існування в неї ненульових розв'язків необхідно і достатньо, щоби визначник основної матриці був рівний нулеві, а саме

$$\begin{vmatrix} -h_1 & \sqrt{\lambda} \\ \cos \sqrt{\lambda}l & \sin \sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$-h_1 \sin \sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0, \quad (68)$$

звідки

$$-h_1 \sin \sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h_1}. \quad (69)$$

Якщо ввести позначення $\mu := \sqrt{\lambda}l$, то отримане рівняння матиме вигляд

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{lh_1}. \quad (70)$$

Побудувавши графіки функцій, що стоять в лівій та правій частинах цього рівняння, бачимо, що це воно має зліченну кількість додатних коренів $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, причому їх точкою скупчення є $+\infty$. Тоді власними значеннями нашого оператора A будуть числа

$$\lambda_k := \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (71)$$

Для знаходження власних елементів оператора A підставляємо отримані власні значення в систему (67) і знаходимо відповідно значення C_1 і C_2 . З першого рівняння бачимо, що для заданого власного значення тільки (!) одна із довільних сталих C_1 і C_2 може приймати будь-які значення, а друга виражається через першу

$$C_2 = \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} C_1.$$

Для знаходження власних елементів оператора A , тобто власних функцій відповідної задачі Штурма-Ліувілля, підставляємо отримані значення λ, C_1, C_2 у вираз (65) і для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$w_k(x) = C_1 \left(\cos \sqrt{\lambda_k}x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k}x \right), \quad x \in [0, l], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (72)$$

де C_1 — ненульова стала, значення якої вибираємо за умови нормування

$$\int_0^l |w_k(x)|^2 dx = 1 \Leftrightarrow C_1^2 \int_0^l \left(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \right)^2 dx = 1 \Rightarrow$$

$$C_1 = M_k := \left(\int_0^l \left(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \right)^2 dx \right)^{-1}. \quad (73)$$

Отож, для кожного $k \in \mathbb{N}$ нормований власний елемент оператора A , що відповідає власному значенню λ_k має вигляд

$$w_k(x) = M_k \left(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \right), \quad x \in [0, l], \quad (74)$$

де M_k визначено в (73).

3-ій крок. Розвиваємо вхідні дані в ряди Фур'є за базою $\{w_k\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi}_k w_k(x), \quad f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k(t) w_k(x), \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, T], \quad (75)$$

$$\widehat{\varphi}_k := \int_0^l \varphi(x) w_k(x) dx = M_k \int_0^l \cos x \cdot \left(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \right) dx,$$

$$\widehat{\psi}_k := \int_0^l \psi(x) w_k(x) dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}_k(t) &:= \int_0^l f(x, t) w_k(x) dx = M_k \int_0^l (2x \cos t) \left(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \right) dx = \\ &= b_k \cos t, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

де

$$b_k := 2M_k \int_0^l \left(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \right) x dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4-ий крок. Шукаємо сильно узагальнений розв'язок задачі (57) – (59) у вигляді суми ряду Фур'є

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}_k(t) w_k(x), \quad (x, t) \in [0, l] \times [0, T], \quad (76)$$

коефіцієнти якого задовольняють рівності

$$\begin{cases} \widehat{u}_k''(t) + a^2 \lambda_k \widehat{u}_k(t) = \widehat{f}_k(t), & t \in [0, T], \\ \widehat{u}_k(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad \widehat{u}_k'(0) = \widehat{\psi}_k, & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (77)$$

З рівностей (77) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція \widehat{u}_k (відповідний коефіцієнт ряду (76)) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} z'' + a^2 \lambda_k z = b_k \cos t, & t \in (0, T], \\ z(0) = \widehat{\varphi}_k, \quad z'(0) = \widehat{\psi}_k. \end{cases} \quad (78)$$

Розв'яжемо цю задачу для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Спочатку знайдемо повний загальний розв'язок рівняння цієї задачі. Оскільки це є лінійне рівняння, то його повний загальний розв'язок є сумою повного загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння і часткового розв'язку даного (неоднорідного) рівняння. Отож, розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$z'' + a^2 \lambda_k z = 0.$$

Воно є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а тому запишемо і розв'яжемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + a^2 \lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm a \sqrt{\lambda_k} i.$$

Тоді

$$z = A_k \cos a \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin a \sqrt{\lambda_k} t, \quad t \in [0, T],$$

– повний загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Частковий розв'язок даного (неоднорідного) рівняння шукатимемо методом неозначених коефіцієнтів, тобто у вигляді

$$z = d_k \cos t, \quad t \in [0, T],$$

де d_k – стала, значення якої знаходимо за умови, що записана функція є розв'язком нашого рівняння:

$$\begin{aligned} z' = -d_k \sin t, \quad z'' = -d_k \cos t &\Rightarrow -d_k \cos t + a^2 \lambda_k d_k \cos t = a_k \cos t \Rightarrow (a^2 \lambda_k - 1) d_k = b_k \\ &\Rightarrow d_k := \frac{b_k}{a^2 \lambda_k - 1}. \end{aligned}$$

Отож, маємо

$$z = A_k \cos a \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin a \sqrt{\lambda_k} t + d_k \cos t, \quad t \in [0, T],$$

– повний загальний розв'язок рівняння задачі (78). Підставимо цей вираз в початкові умови даної задачі для знаходження значень сталих A_k , B_k . Для цього спочатку знайдемо похідну

$$z' = -A_k a \sqrt{\lambda_k} \sin a \sqrt{\lambda_k} t + a \sqrt{\lambda_k} B_k \cos a \sqrt{\lambda_k} t - d_k \sin t, \quad t \in [0, T].$$

Тоді

$$z(0) \equiv A_k + d_k = \widehat{\varphi}_k,$$

$$z'(0) \equiv a \sqrt{\lambda_k} B_k = \widehat{\psi}_k.$$

Звідси

$$A_k = \widehat{\varphi}_k - d_k, \quad B_k = \frac{\widehat{\psi}_k}{a \sqrt{\lambda_k}}.$$

Отож, маємо

$$\widehat{u}_k(t) := (\widehat{\varphi}_k - d_k) \cos a \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\widehat{\psi}_k}{a \sqrt{\lambda_k}} \sin a \sqrt{\lambda_k} t + d_k \cos t, \quad t \in [0, T],$$

і сильно узагальнений розв'язок нашої задачі є сумою збіжного в просторі $C([0, T]; L^2(0, l))$ ряду:

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k [& (\widehat{\varphi}_k - d_k) \cos a \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\widehat{\psi}_k}{a \sqrt{\lambda_k}} \sin a \sqrt{\lambda_k} t + \\ & + d_k \cos t] \left(\cos \sqrt{\lambda_k} x + \frac{h_1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} x \right), \quad (x, t) \in \overline{Q}. \end{aligned}$$

□

Завдання для самостійної роботи

4. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$\begin{aligned}u_{tt} - a^2 u_{xx} &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q := (0, l) \times (0, T], \\u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \\u|_{t=0} &= \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l],\end{aligned}$$

де $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані,

$$f(x, t) := (x + 2)t^3, \quad (x, t) \in Q, \quad \varphi(x) := \cos 2x, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0, l].$$

5. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$\begin{aligned}u_{tt} - a^2 u_{xx} &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q := (0, l) \times (0, T], \\u_x|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \\u_x|_{t=0} &= \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l],\end{aligned}$$

де $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані,

$$f(x, t) := x^2(t + 1), \quad (x, t) \in Q, \quad \varphi(x) := 0, \quad \psi(x) := 2x + 3, \quad x \in [0, l].$$

6. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$\begin{aligned}u_{tt} - a^2 u_{xx} &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q := (0, l) \times (0, T], \\(u_x - h_1 u)|_{x=0} &= 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \\u|_{t=0} &= \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l],\end{aligned}$$

де $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані,

$$f(x, t) := e^x t^3, \quad (x, t) \in Q, \quad \varphi(x) := 0, \quad \psi(x) := 3x + 2, \quad x \in [0, l].$$

7. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$\begin{aligned}u_{tt} - a^2 u_{xx} &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q := (0, l) \times (0, T], \\u|_{x=0} &= 0, \quad (u_x + h_2 u)|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \\u|_{t=0} &= \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l],\end{aligned}$$

де $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані,

$$f(x, t) := (x + 2)e^{2t}, \quad (x, t) \in Q, \quad \varphi(x) := \sin 3x, \quad \psi(x) := 0, \quad x \in [0, l].$$

8. Знайти сильно узагальнений розв'язок мішаної задачі для рівняння коливання струни

$$\begin{aligned}u_{tt} - a^2 u_{xx} &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q := (0, l) \times (0, T], \\(u_x - h_1 u)|_{x=0} &= 0, \quad (u_x + h_2 u)|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \\u|_{t=0} &= \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l],\end{aligned}$$

де $l > 0$, $T > 0$ – довільно задані,

$$f(x, t) := x(t + 3), \quad (x, t) \in Q, \quad \varphi(x) := 0, \quad \psi(x) := 2x - 1, \quad x \in [0, l].$$